FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2019.

Zadatak 1. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, tri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i dvije financijske imovine. Kamatna stopa na nerizičnu imovinu jednaka je $r = 0.5$, dok se rizična imovina modelira na sljedeći način:

$$S_0^1 = 100,\ S_1^1(\omega_1) = 200,\ S_1^1(\omega_2) = 200,\ S_1^1(\omega_3) = 50.$$

(a) (4 boda) Dopušta li tržište arbitražu? Obrazložite.

(b) (3 boda) Odredite sve nearbitražne cijene slučajnog zahtjeva $C = (150 - S_1^1)_+$.

(c) (2 boda) Je li slučajni zahtjev C iz (b) dijela dostižan? Obrazložite.

(d) (3 boda) Dan je *forward* ugovor na rizičnu imovinu S^1 s cijenom izvršenja $K \neq 150$. Odredite očekivane vrijednosti povrata forward ugovora obzirom na sve ekvivalentne martingalne mjere na tržištu.

Rješenje.

(a) Tržište ne dopušta arbitražu akko je skup ekvivalentnih martingalnih mjera $\mathcal{P}$ neprazan. Za $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ označimo $p_i^* = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$. Kako je $\mathbb{E}^*[S_1^1] = S_0^1(1 + r)$, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} &200p_1^* + 200p_2^* + 50p_3^* = 100(1 + 0.5) \\ &p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(\lambda, \frac{2}{3} - \lambda, \frac{1}{3}\right)$. Da bi mjera $\mathbb{P}^*$ bila ekvivalentna martingalna mjera nužno je i dovoljno da dodatno vrijedi $0 < p_i^* < 1$ za $i = 1, 2, 3$. Prema tome, slijedi $\mathcal{P} = \left\{(\lambda, \frac{2}{3} - \lambda, \frac{1}{3}) : \lambda \in (0, \frac{2}{3})\right\}$ pa tržište ne dopušta arbitražu.

(b) Skup nearbitražnih cijena za slučajni zahtjev C jednak je $\{C_0^\lambda : \lambda \in (0, \frac{2}{3})\}$, gdje je

$$C_0^\lambda = \mathbb{E}^\lambda\left[\frac{(150 - S_1^1)_+}{1 + 0.5}\right] = \frac{100 \cdot \frac{1}{3}}{1.5} = 22.23.$$

(c) Kako je skup nearbitražnih cijena za slučajni zahtjev C jednočlan, slijedi da je C dostižan slučajni zahtjev. Alternativno, odredimo replicirajući portfelj, odnosno par $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ za koji vrijedi $V_1(\phi) = C$. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} 1.5\phi^0 + 200\phi^1 &= 0 \\ 1.5\phi^0 + 50\phi^1 &= 100 \end{aligned}$$

dobijemo $\phi = (\frac{800}{9}, -\frac{2}{3})$.

(d) Kako je nearbitražnih cijena forward ugovora $C^{\text{fw}} = S_1^1 - K$ obzirom na $\mathbb{P}^\lambda \in \mathcal{P}$ jednaka

$$\pi^\lambda = \mathbb{E}^\lambda\left[\frac{S_1^1 - K}{1 + 0.5}\right] = \frac{200\lambda + 200 \cdot (\frac{2}{3} - \lambda) + 50 \cdot \frac{1}{3} - K}{1.5} = 100 - \frac{K}{1.5},$$

odnosno ne ovisi o $\lambda \in (0, \frac{2}{3})$, slijedi da je forward ugovor dostižan slučajni zahtjev. Po rezultatu s predavanja slijedi da je $\mathbb{E}^\lambda[R(C^{\text{fw}})] = r = 0.5$.

Alternativno, očekivanje se može odrediti i direktno korištenjem formule

$$R(C^{\text{fw}})(\omega_i) = \frac{C^{\text{fw}}(\omega_i) - \pi^\lambda}{\pi^\lambda},\ i = 1, 2, 3.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2019.

Zadatak 2. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenutcima trgovanja $0, 1, 2, \dots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$). Pretpostavimo da je kamatna stopa na tržistu jednaka $r > 0$.

(a) (4 boda) Definirajte dopustivu strategiju trgovanja (dinamički portfelj), dostižan slučajni zahtjev i potpuni model tržišta.

(b) (5 boda) Dokažite: ako model tržišta bez arbitraže nije potpun, tada postoje bar dvije različite ekvivalentne martingalne mjere.

(c) (4 bodova) Neka je model financijskog tržišta potpun, $K > 0$ te $\widetilde{S}^1 = \{\widetilde{S}_i^1 : i = 0, 1, ..., T\}$ proces diskontiranih cijena prve rizične imovine. Odredite cijenu u trenutku t slučajnog zahtjeva

$$C = \frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^{T} \widetilde{S}_i^1 - K.$$

Obrazložite.

Rješenje.

(a) Vidi predavanja.

(b) Vidi predavanja.

(c) Neka je $\mathbb{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera na tržištu i $\mathbb{F}$ filtracija. Cijena slučajnog zahtjeva C u trenutku t jednaka je

$$C_t = \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{(1+r)^{T-t}} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left(\frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^{T} \mathbb{E}^* \left[\widetilde{S}_i^1 | \mathcal{F}_t \right] - K \right).$$

Kako su slučajne varijable $\widetilde{S}_i^1$ $\mathcal{F}_t$-izmjerive za $i = 0, ..., t$, a proces $\widetilde{S}^1$ $\mathbb{P}^*$-martingal obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, slijedi

$$\begin{aligned}
C_t &= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left(\frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^{t} \mathbb{E}^* \left[\widetilde{S}_i^1 | \mathcal{F}_t \right] + \frac{1}{T+1} \sum_{i=t+1}^{T} \mathbb{E}^* \left[\widetilde{S}_i^1 | \mathcal{F}_t \right] - K \right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left(\frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^{t} \widetilde{S}_i^1 + \frac{1}{T+1} \sum_{i=t+1}^{T} \widetilde{S}_t^1 - K \right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left(\frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^{t-1} \widetilde{S}_i^1 + \frac{T-t+1}{T+1} \widetilde{S}_t^1 - K \right).
\end{aligned}$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2019.

Zadatak 3. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenutcima trgovanja $0, 1, 2, \dots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$). Pretpostavimo da je kamatna stopa na tržistu jednaka $r > 0$.

(a) (3 boda) Neka je S_t^i cijena i-te financijske imovine u trenutku t te $R_t^i = \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}$ povrat na imovinu i u trenutku t. Dokažite: vjerojatnosna mjera $\widehat{\mathbb{P}}$ je martingalna mjera ako i samo ako je

$$\widehat{\mathbb{E}}[R_t^i | \mathcal{F}_{t-1}] = r, \ t = 0, 1, \dots, T, \ i = 1, \dots, d.$$

(b) Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model financijskog tržišta s vremenskim skupom $\{0, 1, \dots, T\}$, te parametrima $-1 < a < b$ (relativne promjene cijene dionice) i $r > -1$ (kamatna stopa na nerizičnu imovinu).

(b1) (5 bodova) Dokažite: tržište ne dopušta arbitražu ako i samo ako $a < r < b$.

(b2) (5 bodova) Neka je $a < r < b$ i C slučajni zahtjev. Neka je $c : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je nearbitražna cijena u trenutku t slučajnog zahtjeva C jednaka $C_t = c(t, S_t)$. Odredite replicirajuću strategija $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t = 1, \dots, T)$ za C.

Rješenje. Vidi predavanja.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 25. studenog 2019.

Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.25$, $b = 0.2$ (relativne promjene cijena dionice), $r = 0.1$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T = 3$. Neka je $m = \min\{S_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ najmanja razina cijene dionice do trenutka T i $S_0 = 100$ kn početna cijena dionice. Promatramo *down-and-out call* opciju $C = 1_{\{m>B\}}(S_T - K)_+$ s cijenom izvršenja $K = 100$ i barijerom $B = 80$.

(a) (4 boda) Neka je $\tau = \inf\{t \in \{0, 1, 2, 3\} : S_t < 80\}$ prvo vrijeme kada vrijednost dionice padne ispod nivoa B (uz dogovor $\inf \emptyset = 4$). Odredite razdiobu (obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru) slučajnog vektora (τ, S_3).

(b) (3 boda) Izračunajte cijenu opcije C u trenutku $t = 0$.

(c) (3 boda) Izračunajte replicirajuću strategiju ako je $S_1 = 120$ i $S_2 = 90$.

(d) (2 boda) Odredite cijenu u trenutku $t = 0$ binarne opcije $C^{\text{bin}} = 150 \cdot 1_{\{m<B\}}$.

Rješenje.

(a) Vrijedi $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{7}{9}$. Nakon crtanja binarnog stabla dolazimo do $\mathbb{P}^*$-razdiobe za (τ, S_3):

$\tau \backslash S_3$	42.1875	67.5	108	172.8
1	$\frac{8}{729}$	$\frac{56}{729}$	$\frac{98}{729}$	0
3	0	$\frac{28}{729}$	0	0
4	0	0	$\frac{196}{729}$	$\frac{343}{729}$

(b) $C_0 = \frac{1}{1.1^3}\mathbb{E}^*[(S_3 - 100)_+ 1_{\{\tau=4\}}] = 27.3507$ (ili ekvivalentno račun po stablu).

(c) Tražena replicirajuća strategija je: $\phi_1 = (-58.6087, 0.8595)$, $\phi_2 = (-60.6617, 0.8784)$, $\phi_3 = (-10.0175, 0.1975)$

(d) Korištenjem razdiobe iz (a) dijela slijedi

$$C_0^{\text{bin}} = \frac{1}{1.1^3}\mathbb{E}^*[150 \cdot 1_{\{\tau<4\}}] = 112.697\mathbb{P}^*(\tau < 4) = 29.372.$$

Alternativno, cijena se može odrediti