FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 4. veljače 2019.

Zadatak 1. Promatramo model potpunog financijskog tržišta nez arbitraže s ekvivalentnom martingalnom mjerom $\mathbb{P}^*$ i $T \in \mathbb{N}$. Neka je $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ američki slučajni zahtjev.

(a) (2 boda) Definirajte proces $U = (U_t : 0 \leq t \leq T\}$ vrijednosti američkog slučajnog zahtjeva Z.

(b) (4 boda) Dokažite da je proces diskontiranih cijena $\widetilde{U} = (\widetilde{U}_t : 0 \leq t \leq T)$ najmanji $\mathbb{P}^*$-supermartingal koji dominira niz $\widetilde{Z}$.

(c) (2 boda) Navedite jedan primjer vremena zaustavljanja τ, $\mathbb{P}^*(\tau > 0) > 0$, za koje je proces $\widetilde{U}^\tau$ zaustavljen u vremenu τ $\mathbb{P}^*$-martingal.

(d) (4 boda) Dokažite da je τ iz (c) vrijeme zaustavljanja i da je proces $\widetilde{U}^\tau$ $\mathbb{P}^*$-martingal.

Rješenje.

(a) Neka je $S^0 = (S^0_t : 0 \leq t \leq T)$ cijena nerizične imovine. Tada je

$$\begin{aligned} &U_T = Z_T, \\ &U_t = \max\left\{Z_t, S^0_t \mathbb{E}^*\left[\frac{U_{t+1}}{S^0_{t+1}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\},\ t = 0, 1, ..., T. \end{aligned}$$

(b) Propozicija 2.31 u skripti Z. Vondraček *Financijsko modeliranje*

(c) Npr. $\tau_0 = \min\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$ ili

$$\tau_{max} = \begin{cases} T, & A_T = 0, \\ \min\{t \geq 0 : A_{t+1} = 0\}, & A_T \neq 0. \end{cases}$$

(d) Propozicija 3.4. ili prvi dio Propozicije 3.12 u skripti Z. Vondraček *Financijsko modeliranje.*

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 4. veljače 2019.

Zadatak 2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ filtrirani prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$.

(a) (2 boda) Neka je $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajni proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Definirajte optimalno vrijeme zaustavljanja za slučajni proces Z.

(b) (3 boda) Iskažite teorem o karakterizaciji optimalnih vremena zaustavljanja.

(c) (3 boda) Dokažite da za optimalno vrijeme τ za Z vrijedi $\mathbb{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_0] = U_0$.

(d) (5 bodova) U kutiji se nalazi 40 nagrada: 15 nagrada vrijednosti 10 kn, 20 nagrada vrijednosti 50 kn i 5 nagrada vrijednosti 100 kn. Igrač na slučajan način izvlači nagradu iz kutije. Ukoliko nije zadovoljan s dobivenom nagradom, može ju vratiti natrag u kutiju i pokušati ponovo, ukupno najviše 4 izvlačenja. Odredite optimalnu strategiju koja maksimizira očekivanu vrijednost izvučene nagrade u trenutku kad je igrač stao s izvlačenjem.

Rješenje. Rješenja se mogu naći u skripti Z. Vondraček *Financijsko modeliranje* i to:

(a) Definicija 3.7

(b) Teorem 3.8

(c) Budući da je U^τ martingal, vrijedi

$$U_0 = U_0^\tau = \mathbb{E}[U_T^\tau | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_\tau | \mathcal{F}_0].$$

(d) Označimo s $Z = (Z_t : 1 \leq t \leq 4)$ proces izvučenih nagrada. Slučajne varijable $Z_1, ..., Z_4$ su nezavisne i jednako distribuirane,

$$\mathbb{P}(Z_1 = 10) = \frac{3}{8},\ \mathbb{P}(Z_1 = 50) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Z_1 = 100) = \frac{1}{8}.$$

Odredimo Snellov omotač U za Z:

$$\begin{aligned}
&U_4 = Z_4 \\
&U_3 = \max\{Z_3, \mathbb{E}[U_4|\mathcal{F}_3]\} = \max\{Z_3, \mathbb{E}[Z_4]\} = \max\{Z_3, 41.25\} \\
&U_2 = \max\{Z_2, \mathbb{E}[U_3|\mathcal{F}_2]\} = \max\{Z_2, \mathbb{E}[\max\{Z_3, 41.25\}]\} = \max\{Z_2, 52.97\} \\
&U_1 = \max\{Z_1, \mathbb{E}[U_2|\mathcal{F}_1]\} = \max\{Z_1, \mathbb{E}[\max\{Z_2, 52.97\}]\} = \max\{Z_2, 58.85\}.
\end{aligned}$$

Optimalna strategija je sljedeća - ako u 1. ili 2. pokušaju izvučemo nagradu vrijednosti 100, stanemo. U suprotnom, izvlačimo dalje. Ako u 3. izvlačenju izvučemo nagradu 50 ili 100, stanemo, u suprotnom izvlačimo i 4. put. Očekivana vrijednost izvučene nagrade slijeđenjem ove strategije je

$$U_0 = \max\{Z_0, \mathbb{E}[U_1|\mathcal{F}_0]\} = \max\{0, \mathbb{E}[\max\{Z_1, 58.85\}]\} = 64.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 4. veljače 2019.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Neka je $X = (X_t : 0 \leq t \leq T)$ Markovljev lanac s vrijednostima u nekom skupu E i prijelaznom matricom P, neka je $\psi : \{0, 1, ..., T\} \times E \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je proces $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ definiran s $Z_t := \psi(t, X_t)$. Izračunajte Snellov omotač procesa Z.

(b) (3 boda) Nalazimo se u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu. Vrijednost P_t američke put opcije dana je formulom $P_t = p_{am}(t, S_t)$ za neku funkciju $p_{am} : \{0, 1, ..., T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Napišite formulu za funkciju p_{am}.

(c) (5 bodova) Koji je odnos između vrijednosti američke i europske call opcije? Svoju tvrdnju detaljno dokažite. Vrijedi li isti odnos za vrijednosti američke i europske put opcije? Obrazložite.

Rješenje.

(a) Propozicije 3.12 u skripti Z. Vondraček

(b) Propozicije 3.18 u skripti Z. Vondraček

(c) Vrijednost američke call opcije jednaka je vrijednosti europske call opcije. Unutarnja vrijednost američke call opcije je $Z_t = (S_t^1 - K)_+$, $t = 0, 1, ..., T$. Neka je C_t vrijednost u trenutku t europske call opcije $(S_T^1 - K)_+$, te neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_t &= (1 + r)^{-T} \mathbb{E}^*[(S_T^1 - K)_+ | \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}^*[(\widetilde{S}_T^1 - K(1 + r)^{-T})_+ | \mathcal{F}_t] \\
&\geq \mathbb{E}^*[\widetilde{S}_T^1 - K(1 + r)^{-T} | \mathcal{F}_t] \\
&= \widetilde{S}_t^1 - K(1 + r)^{-T}.
\end{aligned}$$

Množenjem obe strane s $(1 + r)^t$ dobijemo

$$C_t \geq S_t^1 1 - K(1 + r)^{-T+t} \geq S_t^1 - K,$$

uz strogu nejednakost za $t = 0, 1, ..., T - 1$. Zbog $C_t \geq 0$, dobivamo $C_t \geq (S_t^1 - K)_+ = Z_t$. Uočimo $\widetilde{C}$ je $\mathbb{P}^*$-martingal koji dominira niz $\widetilde{Z}$, pa je $\widetilde{C} \geq \widetilde{U}$, jer je $\widetilde{U}$ najmanji $\mathbb{P}^*$-supermartingal koji dominira $\widetilde{Z}$. S druge strane, kako je $\widetilde{U}$ $\mathbb{P}^*$-supermartingal, vrijedi

$$\widetilde{U}_t \geq \mathbb{E}^*[\widetilde{U}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\widetilde{Z}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\widetilde{C}_T | \mathcal{F}_t] = \widetilde{C}_t. \tag{1}$$

Stoga slijedi da je $C_t = U_t$ za sve $t = 0, 1, ..., T$.

Američka put opcija $Z_t = (K - S_t^1)_+$ općenito ima veću vrijednost U od europske put opcije P, što se vidi iz (1) gdje na mjestu C_t imamo P_t. Isti račun kao gore za put opciju daje

$$P_t \geq K(1 + r)^{-T+t} - S_t^1$$

i ne možemo zaključiti $P_t \geq K - S_t^1$.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Drugi kolokvij – 4. veljače 2019.

Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.15$, $b = 0.1$ (relativne promjene cijena dionice), te $r = 0.05$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu). Početna cijena dionice je $S_0 = 250$ kn. Promatramo američku put opciju $Z_t = (K - S_t)_+$ s danom dospijeća $T = 3$ i cijenom izvršenja $K = 225$ kn.

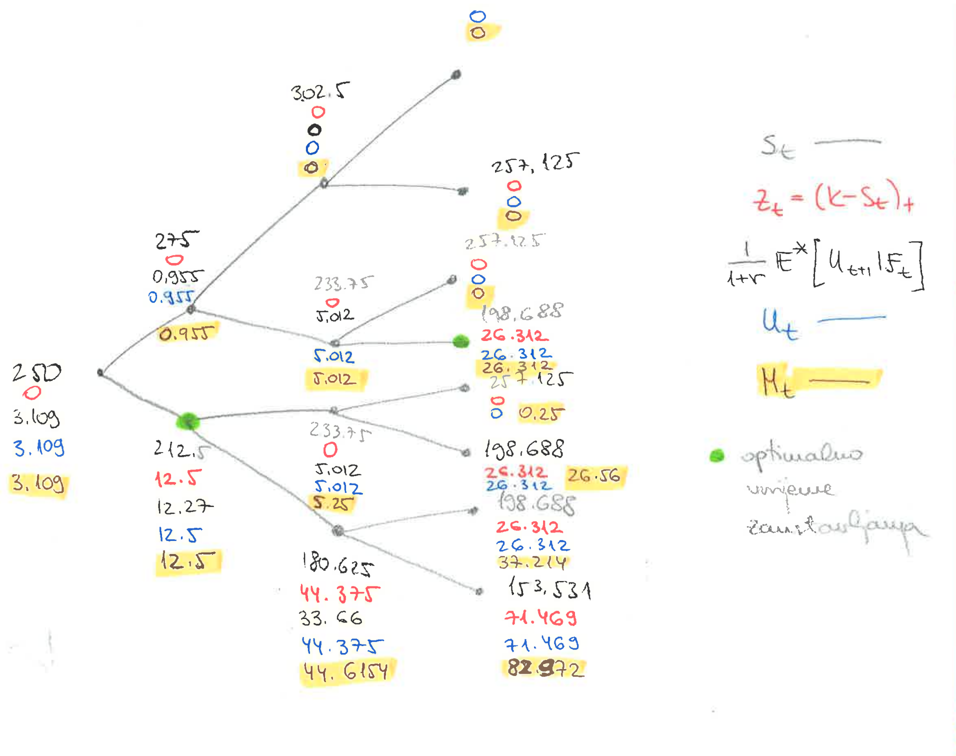
(a) (2 boda) U svakom čvoru binarnog stabla odredite unutarnju vrijednost Z te američke put opcije.

(b) (6 bodova) U svakom čvoru binarnog stabla odredite vrijednost američke put opcije.

(c) (3 boda) Nadite trenutak u kojem je optimalno iskoristiti danu američku put opciju. Objasnite!

(d) (3 boda) Cijena dionice pada tri puta za redom. Kupac opcije odlučio je opciju iskoristiti u trenutku $T = 3$. Izračunajte profit pisca opcije ako slijedi hedging portfelj.

Rješenje. Vrijedi $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{4}{5}$.



(a) i (b) Vidi binarno stablo.

(c) Opciju ima smisla iskoristiti samo ako je pozitivna. Optimalno vrijeme je prvo vrijeme t za koje je $Z_t = U_t$. To je vrijeme $t = 1$ u kojem je $S_1 = 212.5$ i vrijeme $t = 3$ u kojem je $S_3 = 198.688$.

(d) Nalazimo se u najnižem čvoru. Vrijednost opcije jednaka je 71.469, a hedging portfelja 85.372. Profit je $82.972 - 71.469 = 11.503$.