FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 26. studenog 2018.

Zadatak 1. Promatramo model financijskog tržišta s jednim vremenskim periodom, tri elementarna događaja, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i tri financijske imovine. Rizične imovine modeliraju se na sljedeći način:

$$S_0^1 = 10,\ S_1^1(\omega_1) = 20,\ S_1^1(\omega_2) = 20,\ S_1^1(\omega_3) = 5,$$
$$S_0^2 = 10,\ S_1^2(\omega_1) = 5,\ S_1^2(\omega_2) = 20,\ S_1^2(\omega_3) = 20.$$

(a) (4 boda) Za koje sve vrijednosti kamatne stope r tržište ne dopušta arbitražu? Obrazložite.

(b) (3 boda) U slučaju kada je $r = 4$ odredite jedan portfelj koji je arbitraža (ako postoji).

(c) (2 boda) Je li model potpun za $r = \frac{2}{3}$? Obrazložite.

(d) (3 boda) Neka je $r = \frac{2}{3}$. Odredite nearbitražnu cijenu te povrat slučajnog zahtjeva

$$C = \left(\frac{1}{2}S_1^1 + \frac{1}{2}S_1^2 - 15\right)_+ .$$

Rješenje.

(a) Tržište ne dopušta arbitražu akko postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Označimo $p_i^* = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$. Za martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ vrijedi

$$\mathbb{E}^*[S_1^j] = S_0^j(1+r),\ j = 1, 2,$$

što daje sustav

$$\begin{aligned}
&20p_1^* + 20p_2^* + 5p_3^* = 10(1+r)\\
&5p_1^* + 20p_2^* + 20p_3^* = 10(1+r)\\
&p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1.
\end{aligned}$$

Rješenje sustava je $(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(\frac{2}{3}(1-r), \frac{1}{3}(4r-1), \frac{2}{3}(1-r)\right)$. Da bi mjera $\mathbb{P}^*$ bila ekvivalentna martingalna mjera nužno je i dovoljno da dodatno vrijedi $0 < p_i^* < 1$ za $i = 1, 2, 3$. Prema tome slijedi da tržište ne dopušta arbitražu ako i samo ako $r \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

(b) Iz (a) dijela slijedi da za $r = 4$ model tržišta dopušta arbitražu. Tražimo portfelj ϕ za koji vrijedi $V_0(\phi) = 0$, $V_1(\phi) \geq 0$ g.s. i $\mathbb{P}(V_1(\phi) > 0) > 0$. Dobivamo sustav jednadžbi i nejednadžbi:

$$\begin{aligned}
&\phi_0 + 10\phi_1 + 10\phi_2 = 0\\
&5\phi_0 + 20\phi_1 + 5\phi_2 \geq 0\\
&5\phi_0 + 20\phi_1 + 20\phi_2 \geq 0\\
&5\phi_0 + 5\phi_1 + 20\phi_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

gdje bar jedna nejednakost mora biti stroga. Iz prve jednakosti slijedi da je $\phi_0 = -10(\phi_1 + \phi_2)$ te

$$\begin{aligned}
&\phi_1 + \phi_2 \leq 0\\
&2\phi_1 + 3\phi_2 \leq 0\\
&3\phi_1 + 2\phi_2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Odaberemo li $\phi_1 = 1$ i $\phi_2 = \frac{-3}{2}$ vidimo da su sve tri nejednakosti zadovoljene (prve dvije strogo). Stoga je primjer jedne arbitraže $\phi = \left(5, 1, \frac{-3}{2}\right)$.

(c) Iz (a) dijela vidimo da model ne dopušta arbitražu za $r = \frac{2}{3}$, jer je $\mathcal{P} = \left\{p^* = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}\right)\right\} \neq \emptyset$. Kako je $\mathcal{P}$ jednočlan, po drugom fundamentalnom teoremu slijedi da je model potpun.

(d) Obzirom da je model tržišta potpun, nearbitražna cijena slučajnog zahtjeva C jednaka je

$$C_0 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}}\mathbb{E}^*\left[\left(\frac{1}{2}S_1^1 + \frac{1}{2}S_1^2 - 15\right)_+\right] = \frac{3}{5}\cdot 5\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{3}.$$

Povrat $R = \frac{C - C_0}{C_0}$ na slučajni zahtjev C jednak je

$$R(\omega_1) = -1,\ R(\omega_2) = 2,\ R(\omega_3) = -1.$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 26. studenog 2018.

Zadatak 2. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenutcima trgovanja $0, 1, 2, \dots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$). Pretpostavimo da je kamatna stopa na tržistu jednaka $r > 0$.

(a) (2 boda) Definirajte strategiju trgovanja (dinamički portfelj) te samofinancirajuću strategiju trgovanja.

(b) (3 boda) Definirajte proces dobitka (gubitka) za dinamički portfelj, te iskažite i dokažite karakterizaciju samofinancirajućeg portfelja preko pripadnog procesa dobitka (gubitka).

(c) (4 boda) Definirajte dopustivu strategiju, arbitražu te ekvivalentnu martingalnu mjeru (mjeru neutralnu na rizik).

(d) (4 boda) Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$ i da je strategija ϕ samofinancirajuća. Dokažite da je proces diskontiranih vrijednosti strategije $\{\widetilde{V}_t(\phi) : 0 \leq t \leq T\}$ $\mathbb{P}^*$-martingal u odnosu na prirodnu filtraciju.

Rješenje. Rješenja se mogu naći u skripti Z. Vondraček *Financijsko modeliranje* i to:

(a) Definicija 2.4, Definicija 2.5

(b) Propozicija 2.7 (dovoljno je ili $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ili $(i) \Leftrightarrow (iii)$)

(c) Definicija 2.9, Definicija 2.10, Definicija 2.19

(d) Vidi početak dokaza Teorema 2.21.

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 26. studenog 2018.

Zadatak 3. Promatramo dinamički model financijskog tržišta s trenutcima trgovanja $0, 1, 2, \dots, T$, jednom nerizičnom i d rizičnih financijskih imovina ($d \geq 1$). Pretpostavimo da je kamatna stopa na tržistu jednaka $r > 0$.

(a) (2 boda) Definirajte dostižni slučajni zahtjev i potpuno tržište.

(b) (6 bodova) Pretpostavimo da je tržište bez arbitraže potpuno. Dokažite da tada postoji ekvivalentna martingalna mjera, te da je jedinstvena.

(c) Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model financijskog tržišta s vremenskim skupom $\{0, 1, \dots, T\}$, te parametrima $-1 < a < b$ (relativne promjene cijene dionice) i $r > -1$ (kamatna stopa na nerizičnu imovinu). Označimo s S_t, X_t cijenu dionice, odnosno povrat na dionicu u trenutku $t = 0, \dots T$. Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu.

(c1) (2 boda) Pomoću parametara a, b i r iskažite nužan i dovoljan uvjet da tržište ne dopušta arbitražu. Odredite razdiobu (obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru) povrata X_t u trenutku $t = 0, \dots T$.

(c2) (3 boda) Neka je C_t nearbitražna cijena u trenutku t slučajnog zahtjeva C, te neka je $c : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $C_t = c(t, S_t)$, $0 \leq t \leq T$. Dokažite da za $\omega \in \{S_t = x\}$ vrijedi

$$C_t(\omega) = (1+r)^{-1} \left(c(t+1, x(1+a)) \cdot \frac{b-r}{b-a} + c(t+1, x(1+b)) \cdot \frac{r-a}{b-a} \right).$$

Rješenje.

(a) Definicija 2.24, Definicija 2.26

(b) Vidi drugi dio dokaza Teorema 2.21 i prvi dio dokaza Teorema 2.27.

(c) Nužan i dovoljan uvjet je $a < r < b$ i vrijedi

$$\mathbb{P}^*(X_t = b) = \frac{r-a}{b-a},\ \mathbb{P}^*(X_t = a) = \frac{b-r}{b-a}.$$

Obzirom da je $\{S_t = x\} \in \mathcal{F}_t$ i $\{C_t(1+r)^{-t}\}$ je $\mathbb{P}^*$-martingal obzirom na prirodnu filtraciju $\mathbb{F}$, slijedi

$$\begin{aligned}
C_t 1_{\{S_t = x\}} &= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^*[C_{t+1} | \mathcal{F}_t] 1_{\{S_t = x\}} \\
&= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^* \left[C_{t+1} 1_{\{S_t = x\}} | \mathcal{F}_t \right] \\
&= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^* \left[c(t+1, S_t(1 + X_{t+1})) 1_{\{S_t = x\}} | \mathcal{F}_t \right] \\
&= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^* \left[c(t+1, x(1 + X_{t+1})) 1_{\{S_t = x\}} | \mathcal{F}_t \right] \\
&= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^* \left[c(t+1, x(1 + X_{t+1})) | \mathcal{F}_t \right] 1_{\{S_t = x\}} \\
&= (X_{t+1} \text{ je nezavisan od } \mathcal{F}_t) \\
&= (1+r)^{-1} \mathbb{E}^* \left[c(t+1, x(1 + X_{t+1})) \right] 1_{\{S_t = x\}} \\
&= (1+r)^{-1} \left(c(t+1, x(1+a)) \cdot \frac{b-r}{b-a} + c(t+1, x(1+b)) \cdot \frac{r-a}{b-a} \right) 1_{\{S_t = x\}}
\end{aligned}$$

FINANCIJSKO MODELIRANJE 1

Prvi kolokvij – 26. studenog 2018.

Zadatak 4. Promatramo Cox-Ross-Rubinsteinov model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.15$ (relativne promjene cijena dionice), $r = 0.1$ (kamatna stopa za nerizičnu imovinu) i vremenskim horizontom $T = 3$. Početna cijena dionice je $S_0 = 120$ kn. Označimo s $A_T = \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} S_t$ prosječnu cijenu dionice do trenutka T. Promatramo Azijsku call opciju sa srednjom cijenom izvršenja A_T, $C = (S_T - A_T)_+$.

(a) (4 boda) Odredite razdiobu (obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru) opcije C na dan dospijeća $T = 3$.

(b) (3 boda) Izračunajte cijenu opcije C u trenutku $t = 0$.

(c) (3 boda) Izračunajte replicirajuću strategiju ako je $S_1 = 96$ i $S_2 = 110.4$.

(d) (2 boda) Pretpostavimo da je kamatna stopa na rizičnu imovinu $r = 0.2$. Nađite jednu samofinancirajuću strategiju koja je arbitraža.

Rješenje.

(a) Vrijedi $p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{6}{7}$. Nakon crtanja binarnog stabla dolazimo do $\mathbb{P}^*$-razdiobe za C

x	0	3.12	13.62	32.704
$\mathbb{P}^*(C = x)$	$\frac{55}{343}$	$\frac{36}{343}$	$\frac{36}{343}$	$\frac{216}{343}$

(b) $C_0 = \frac{1}{1.1^3}\mathbb{E}^*[C] = 16.7933$ (ili ekvivalentno račun po stablu).

(c) Tražena replicirajuća strategija je: $\phi_1 = (-17.207, 0.2833)$, $\phi_2 = (-20.046, 0.3158)$, $\phi_3 = (-23.391, 0.3525)$

(d) U trenutku $t = 0$ kreiramo portfelj $\phi = (120, -1)$ kojeg ne mijenjamo do $T = 3$. Uočimo $V_0(\phi) = 0$. U trenutku $T = 3$ vrijednost portfelja je $V_3(\phi) = 130 * 1.2^3 - S_3 = 224.64 - S_3 > 0$, dakle riječ je o arbitraži.