

Zadatak 6. Neka su $Z_t \sim U([0, 1])$, $t = 0, 1, 2, 3$ nezavisne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- (a) Odredite Snellov omotač $U = \{U_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ slučajnog procesa $Z = \{Z_t : t = 0, 1, 2, 3\}$.
- (b) Neka je $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : U_t = Z_t\}$. Izračunajte $\mathbb{E}[U_{\tau_0}]$.

Zadatak 7. Igrač može bacati simetričnu kocku najviše 5 puta i može u bilo kojem trenutku stati. Odredite optimalnu strategiju koja maksimizira očekivani broj koji se pojavio na kocki kada je igrač stao s igrom te odredite taj broj.

Zadatak 8. Neka je $X = (X_t : t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$ (vremenski homogen) Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i prijelaznom matricom $P = (p(x, y) : x, y \in S)$, gdje je

$$\begin{aligned} p(x, x+1) &= \frac{1}{2}, \quad x \in \{1, 2, 3\} \\ p(x, x-1) &= \frac{1}{2}, \quad x \in \{1, 2, 3\} \\ p(0, 1) &= 1, \quad p(4, 3) = 1. \end{aligned}$$

Dana je funkcija $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ s

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	2	0	3

i slučajni proces $Z = (Z_t : t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$, $Z_t = f(X_t)$. Maksimizirajte $\mathbb{E}_x[Z_\sigma]$ po svim vremenima zaustavljanja $\sigma \in \mathcal{T}_{0,5}$, za svaki $x \in S$. Odredite optimalno vrijeme zaustavljanja za trajektoriju $\omega = \{X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 3\}$.

6. a) $U_0 = \max\{Z_0, \frac{89}{128}\}$, $U_1 = \max\{Z_1, \frac{5}{8}\}$, $U_2 = \max\{Z_2, \frac{1}{2}\}$, $U_3 = Z_3$, (b) $\mathbb{E}[U_{\tau_0}] \approx 0.7413$.

7. Ako je U Snellov omotač, vrijedi rekurzija $\mathbb{E}[U_t] = \frac{7}{2} - \frac{(\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1)\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil}{12} + \mathbb{E}[U_{t+1}] \frac{\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1}{6}$ za $1 \leq t \leq T-1$ s početnim uvjetom $\mathbb{E}U_T = \frac{7}{2}$. Optimalna strategija je sljedeća: ako u prvom, drugom, ili trećem bacanju dobijemo barem 5 onda stanemo, inače nastavljamo. Ako u četvrtom bacanju dobijemo barem 4, onda stanemo, a inače bacamo još 5. put. Srednji optimalni broj na kocki je tada 5.13.

8. $\max_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,5}} \mathbb{E}_x[Z_\sigma] = 3$ za $x \in \{0, 1, 3, 4\}$, $\max_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,5}} \mathbb{E}_2[Z_\sigma] = \frac{47}{16}$, $\tau_0(\omega) = 4$.