Traženje klike u ogromnom vrlo rijetkom grafu

Vinko Petričević
vinko.petricevic@ferit.hr
http://web.math.hr/~vpetrice/radovi/

Sveučilište Jospia Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek

18. travnja 2024.

Primjer

Definicija 0.1

Za skup kažemo da je Diofantov $D(n)$-skup ako je umnožak svaka dva njegova elementa uvećan za broj n kvadrat.

Primjer 0.2

Postoji beskonačno mnogo brojeva n i petorki brojeva koje su $D(0)$ i $D(n)$ petorke...

Više se može pronaći u članku:

A. Dujella, M. Kazalicki, V. Petričević, *D(n)-quintuples with square elements*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM **115** (2021), Article 172, (10pp)

ili na stranici: `http://web.math.hr/~vpetrice/radovi/`.

Da bismo našli D-skup s m elemenata, prirodno je prvo naći skupove s $m-1$ elemenata. Tako dođemo do toga da u stvari samo tražimo parove.
Zato razmislimo prvo što su D-parovi:

Mi zapravo trebamo naći (racionalni) $D(1)$ i $D(0)$ skup u kojem svi elementi imaju isti nazivnik, a svi brojnici su kvadrati ili $j \times \square$ (j je prirodan broj kvadratno slobodan).

Za neki $b \in \mathbb{N}$, da bi neki $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ bili par, mora vrijediti $\frac{j \cdot a_1^2}{b} \cdot \frac{j \cdot a_2^2}{b} + 1 = c^2$, za neki $c \in \mathbb{Q}$. Drugim riječima, treba vrijediti $(j \cdot a_1 \cdot a_2)^2 + b^2 = c^2$, za $c \in \mathbb{N}$.

Zato za fiksni b, izračunajmo sve Pitagorine trokute kojima je duljina jedne katete b. Tada je $j \cdot a_1 \cdot a_2$ duljina druge katete.
Imamo dobro poznate formule za Pitagorine trojke

$$b = 2dkl \text{ i } j \cdot a_1 \cdot a_2 = d(k+l)(k-l),$$

za neke $k, l, d \in \mathbb{N}$, i suprotno. (k, l su relativno prosti i suprotne parnosti.)

Znači, samo trebamo naći djelitelje druge katete.

Na primjer, od Pitagorinog trokuta $(3, 4, 5)$, dobijemo parove $(\frac{1^2}{4}, \frac{3^2}{4})$, $(\frac{1^2}{3}, \frac{4^2}{3})$, $(\frac{2 \cdot 1^2}{3}, \frac{2 \cdot 2^2}{3}) \ldots (3, \frac{4^2}{3 \cdot 3^2}) \ldots$.

Implemenirali smo (jednostavni) algoritam u `C++`u. Da bismo pamtili parove, konstruirali smo graf kojem je svaki par brid. Graf se može patmiti koristeći standardne kontejnere (npr. `map<long, set<long> > g`; pa kada su $a_1 < a_2$, a_1 i a_2 upareni, skup `g[`a_2`]` sadrži a_1). Doduše, zapravo smo koristili `unordered_map<long, vector<long> >`, koji je ponešto brži i troši manje memorije.
Za nekih 10-ak sekundi na 6-jezgrenom računalu, našla se prva petorka:

$$M = \left\{ \frac{225^2}{480480}, \frac{2548^2}{480480}, \frac{286^2}{480480}, \frac{\mathit{1408}^2}{480480}, \frac{819^2}{480480} \right\}$$

što rješavanjem nazivnika daje $D(480480^2)$-petorku s elementima koji su kvadrati.

Na primjer, ovdje imamo 10 povezanih Pitagorinih trokuta: jedan s katetama 480480 i $225 \cdot 2548$, pa s drugom katetom $225 \cdot 286$ itd.
Trokut s katetama $225 \cdot 286$ i 480480 je npr. dobiven za $(d, k, l) = (4290, 8, 7)$, dok je npr. 480480 i $819 \cdot 1408$ dobiven za $(d, k, l) = (96096, 3, 2)$.

Familije sa beskonačno mnogo $D(0)$ petorki

Uočili smo da ova petorka ima specijalnu strukturu, pa smo na taj način konstruirali više beskonačnih familija takvih petorki (kojima su brojevi ogromni).

Koristeći grubu silu, našli smo još dvije koje bi se mogle svesti pod takve familije:

$$\left\{\frac{770^2}{16336320}, \frac{1287^2}{16336320}, \frac{1700^2}{16336320}, \frac{6188^2}{16336320}, \frac{\mathit{19712}^2}{16336320}\right\},$$

$$\left\{\frac{\mathit{7568}^2}{524263740}, \frac{9947^2}{524263740}, \frac{\mathit{13104}^2}{524263740}, \frac{38025^2}{524263740}, \frac{96019^2}{524263740}\right\}.$$

Sve one sadrže regularnu četvorku u sebi, tj. za neka 4 od tih 5 brojeva (nazovimo ih a, b, c i d) vrijedi

$$(a+b-c-d)^2 = 4(ab+1)(cd+1).$$

Otvoreno pitanje – postoje li regularne petorke?

Nakon oko tjedan dana računanja (na 24-jezgrenom serveru), našla se petorka koja nema regularnu četvorku u sebi:

$$\left\{ \frac{\mathit{12384}^2}{1337776440}, \frac{18130^2}{1337776440}, \frac{30745^2}{1337776440}, \frac{\mathit{110880}^2}{1337776440}, \frac{259259^2}{1337776440} \right\}.$$

Ali ona jest regularna petorka, tj. vrijedi:

$$(abcde + 2abc + a + b + c - d - e)^2 = 4(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)(de + 1).$$

Otvoreno pitanje – postoji li petorka kojoj su svi elementi kvadrati?

Nije jasno postoji li petorka kojoj su svi elementi kvadrati. Četvorki se zna da ima beskonačno, ali u svim primjerima koje smo dobivali, uvijek je umnožak brojeva bio 1 (što bi sugeriralo da takva petorka ne postoji).

Sve dok se nije pojavila četvorka:

$$\left\{\left(\frac{18}{77}\right)^2, \left(\frac{55}{96}\right)^2, \left(\frac{56}{15}\right)^2, \left(\frac{340}{77}\right)^2\right\}.$$

Teško je vjerovati da petorka postoji, ali mi smo u potrazi (do 2^{32}) uspjeli naći npr. trojku koja se na tri različita načina proširi do četvorke:

$$\left\{(325/1368)^2, (192/235)^2, (2107/1584)^2\right\}$$

$$(9006/4141)^2,$$

$$(969/91)^2,$$

$$(530442/136955)^2.$$

Na primjer, za vrijeme takvog računa do 2^{32}, našli smo 185.334.844.330 parova, 39.523.768 trojki, 2.602.822 četvorki i 0 petorki. To je trajalo 20ak sati na serveru s 24 jezgre i 64BG memorije, ili oko duplo manje na 256 jezgri i 1200GB memorije. A u sljedećoj tablici je prikazan i jedan korak više.

U sljedećoj tablici je prikazan broj D-skupova kojima su svi elementi kvadrati, ovisno o broju bitova:

bitova	parova	trojki	četvorki	$\prod \neq 1$
1	0	0	0	0
2	2	0	0	0
3	36	0	0	0
4	304	30	4	0
5	1.826	74	2	0
6	11.694	438	40	0
7	66.208	1.814	150	0
8	367.406	6.718	602	0
9	1.933.004	21.890	1.884	8
10	10.120.216	67.218	5.224	4
11	51.629.808	198.640	15.042	6
12	260.053.618	561.824	41.090	8
13	1.286.435.922	1.500.724	106.708	16
14	6.303.706.328	3.879.654	265.552	22
15	30.574.089.558	9.720.264	647.902	20
16	146.846.428.400	23.564.480	1.518.622	6
17	699.322.371.508	55.600.264	3.479.904	6

Hvala na pažnji!