Traženje klike u ogromnom rijetkom grafu

Vinko Petričević

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek

e-mail: `vinko.petricevic@ferit.hr`

Uvod

Klika je potpuno povezan podskup neusmjerenog grafa. Traženje najveće klike je NP-problem (potrebno je eksponencijalno vrijeme da se problem riješi).

Međutim, ako znamo da najveća klika nije prevelika, tada je to polinomijalan problem. Ako još i graf nije jako *gust*, tada to ne mora biti polinom velikog stupnja, i do nekih unaprijed zadanih granica može bit rješiv.

Pogledajmo jedan drevni problem: *Ako u skupu brojeva* $\{1, 3, 8\}$ *svaka njegova dva različita elementa pomnožimo i umnošku dodamo broj 1, rezultat će biti kvadrat nekog broja:*

$$1 \cdot 3 + 1 = 2^2, \qquad 1 \cdot 8 + 1 = 3^2, \qquad 3 \cdot 8 + 1 = 5^2.$$

Znatiželju matematičara tisućljećima su golicali slični skupovi, pa su rješavajući ovakve probleme, dolazeća stoljeća iznjedrila i mnoge nove matematičke discipline. Pojavom računala i superračunala, mnogi novi zanimljivi skupovi su se našli (a pronalaze se i dalje).

Diofantovi skupovi

Za cijeli broj n, skup od m brojeva takvih da je produkt bilo koja dva njegova različita elementa uvećan za n kvadrat, zovemo $D(n)$ skup, odnosno $D(n)$-m-torka. Za $n = 1$, $D(1)$ zovemo samo D-skup ili Diofantov skup.

Prvi primjer racionalne Diofantive četvorke je skup

$$\left\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\right\}$$

kojeg je pronašao Diofant (3. stoljeće). Fermat (17. stoljeće) je pronašao prvu cjelobrojnu Diofantovu četvorku $\{1, 3, 8, 120\}$. Euler (18. stoljeće) je, koristeći metode koje su se kasnije razvile u eliptičke krivulje, dokazao da postoji beskonačno mnogo Diofantovih petorki; specijalno, uspio je Fermatovu cjelobrojnu četvorku proširiti do (racionalne) petoke:

$$\left\{1, 3, 8, 120, \frac{777480}{8288641}\right\}.$$

Nedavno je Stoll dokazao da je to proširenje jedinstveno.

Baker i Davenport su 1969. godine koristeći linearne forme u logaritmima algebarskih brojeva dokazali da ako je d prirodan broj takav da skup $\{1, 3, 8, d\}$ čini Diofantovu četvorku, tada d mora biti 120. Nedavno su He, Togbé and Ziegler dokazali da ne postoji cjelobrojna Diofantova petorka.

S druge strane, nije poznato koliko racionalni Diofantov skup može biti velik. Gibbs je 1999. pronašao prvu Diofantovu šestorku:

$$\left\{\frac{11}{192}, \frac{35}{192}, \frac{155}{27}, \frac{512}{27}, \frac{1235}{48}, \frac{180873}{16}\right\}.$$

Dujella, Kazalicki, Mikić i Szikszai su 2017. godine dokazali da postoji beskonačno mnogo racionalnih Diofantovih šestorki.

Postoje i brojna druga poopćenja ovih problema, a više o tome moći će se naći u knjizi akademika Dujelle ([1]) koja uskoro treba izaći.

Pridruženi graf

Da bismo (do neke unaprijed zadane granice) našli D-skupove s m elemenata, prirodno je prvo naći skupove s $m - 1$ elemenata. Da ne bismo isti D-par pronalazili više puta, prirodno je parove zamišljati (i pamtiti) kao bridove u grafu.

U početnom primjeru, imamo graf sa bridovima $(1, 3)$, $(1, 8)$ i $(3, 8)$. Međutim, u takvom grafu bi bili i npr. bridovi $(2, 4)$, $(1, 15)$, $(3, 5)$ i mnogi drugi. U svakom slučaju, najveća klika nam odgovara najvećem Diofantovom skupu.

U nekim Diofantovim skupovima pripadne parove nije lako naći (ali tu nam često mogu pomoći GPU kartice), pa onda graf i ne bude prevelik, pa ni najveće klike nije teško naći ([10], [2]).

Ponekad ne bude preteško naći parove, ni najveće klike, ali trebamo generirati puno različitih grafova ([9], [7], [8], pa i [3]).

U nekim pak slučajevima pripadne parove nije teško naći, ali zato pripadni graf jako brzo postaje ogroman ([6], [4], [3], [5]).

U svim tim slučajevima, veliku pomoć imamo od superračunala, a za ogromne grafove takvi bi izračuni bili nemogući bez HPC-a.

Primjer nekog izračuna

Ako bismo tražili cjelobrojne $D(n)$ skupove, tj. tražili parove $k, l \in \mathbb{N}$ takve da je $k \cdot l + n = x^2$, prošli bismo kroz određeni interval brojeva x, te u grafu povezivali sve djelitelje od $x^2 - n$ i nakon toga tražili najveće klike.

Kada gledamo racionalne skupove, x ide po svim racionalnim brojevima (do unaprijed zadane veličine brojnika i nazivnika), trebamo naći sve djelitelje i brojnika i nazivnika od $x^2 - n$. Ali sada za svaki $\frac{k_p}{k_q} \cdot \frac{l_p}{l_q} = x^2 - n$, nisu upareni samo $\frac{k_p}{k_q}$ i $\frac{l_p}{l_q}$, nego i svi brojevi koji se dobiju tako da brojnik prvog razlomka i nazivnik drugog množimo s nekim brojem i, te nazivnik prvog i brojnik drugog razlomka s drugim brojem j (specijalno, oni trebaju biti relativno prosti). U svakom slučaju par $k, l \in \mathbb{Q}$ generirat će beskonačno mnogo parova, pa i ovdje računamo do neke unaprijed zadane granice.

Na primjer, računamo li do 2^{17} (tj. gledamo li i negativne brojeve, i odbacimo razlomke koji će se skratiti, vrhova će biti $\approx 2\frac{3}{\pi^2}(2^{17})^2 \approx 10.5$ milijardi), za različite n-ove, graf će imati od par desetaka miliona, do skoro milijardu bridova. Ako svaki brid zapišemo sa 4 `longa`, sam graf nam zauzima npr. 30TB podataka na disku. Nakon toga te podatke treba sortirati i pametnije posložiti, tada zauzima npr. oko 20TB. Budući da nemamo računalo s 20TB memorije (a i ponešto više), te podatke još treba razdijeliti na blokove od npr. 1.5TB (ako podatke želimo obrađivati na računalu sa 4TB radne memorije), te svaki blok sa svakim obraditi. Sreća je da su na takvim HPC-sustavima diskovi izuzetno brzi, pa je ovo skoro kao da koristimo memoriju. U svakom slučaju npr. na Buri ili Supeku, najveći takav račun traje oko deset dana.

Ako povećamo potenciju za 1 (u ovom slučaju do 2^{18}), zavisi od problema kojeg promatramo, za računanje će nam trebati oko pet puta više diska i oko šest puta više vremena.

Za razliku od navedenog postupka, u radu [3] smo parove dobili tako što smo za $b \in \mathbb{N}$ našli sve Pitagorine trokute kojima je duljina jedne katete b, a onda povezali djelitelje preostale katete. Nakon što nađemo sve klike, idemo na sljedeći b. A tek u izračunu na kraju članka smo sve te grafove spojili u jedan veliki graf, te najveću kliku tražili jednakim postupkom.

Budući radovi

Osim navedenih rezultata, našli smo i velik broj racionalnih $D(1)$ skoro-sedmorki (nedostaje samo jedan brid da bude klika), ali niti jednu sedmorku. Izračunali smo i velik broj racinalnih $D(n)$-petorki, puno skoro-šestorki, ali ni jednu šestorku. Našli smo i još mnoge druge zanimljive primjere koje tek treba proučiti, a infrastruktura nam omogućuje da računamo i do poprilično većih brojeva, te ne sumnjamo da će biti još puno dobrih rezultata.

Literatura

[1] A. Dujella, Diophantine m-tuples and Elliptic Curves, Springer, Cham, 2024.

[2] A. Dujella, I. Gusić, V. Petričević and P. Tadić, *Strong Eulerian triples*, Glas. Mat. Ser. III **53** (2018), 33–42.

[3] A. Dujella, M. Kazalicki, V. Petričević, *D(n)-quintuples with square elements*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM **115** (2021), Article 172, (10pp)

[4] A. Dujella, M. Kazalicki and V. Petričević, *Rational Diophantine sextuples containing two regular quadruples and one regular quintuple*, Acta Mathematica Spalatensia, **1** (2021), 19–27.

[5] A. Dujella, M. Kazalicki and V. Petričević, *Rational Diophantine sextuples with strong pair*, preprint. (9pp)

[6] A. Dujella, M. Kazalicki and V. Petričević, *There are infinitely many rational Diophantine sextuples with square denominators*, J. Number Theory **205** (2019), 340–346.

[7] A. Dujella and V. Petričević, *Diophantine quadruples with the properties $D(n_1)$ and $D(n_2)$*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM **114** (2020), Article 21.

[8] A. Dujella and V. Petričević, *Doubly regular Diophantine quadruples*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM **114** (2020), Article 189.

[9] A. Dujella and V. Petričević, *On the largest element in D(n)-quadruples*, Indag. Math. (N.S.) **30** (2019) 1079–1086.

[10] A. Dujella and V. Petričević, *Strong Diophantine triples*, Experimental Mathematics **17** (2008), 83–89.