

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Planimetrija

- planimetrija = geometrija ravnine
(geom. likovi, aksiomi, logičko razmišljanje, bez koord. sustava)
- Euklid (325. pr. Kr. - 265. pr. Kr.)
 - *Elementi* = prva (velika) matematička knjiga
 - Definicije: *točka* je ono što nema dijelova, *crt*a je duljina bez širine

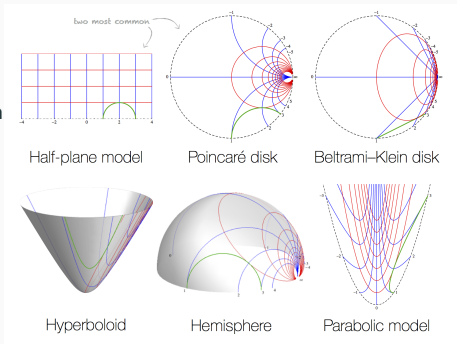


Euklidovi aksiomi (modernim jezikom)

1. Kroz svake 2 točke moguće je provući pravac.
2. Moguće je po volji daleko produljiti svaku dužinu.
3. Moguće je nacrtati kružnicu sa zadanim središtem i polumjerom.
4. Svaka 2 prava kuta međusobno su sukladna.
5. Za svaki pravac p i točku T izvan tog pravca, moguće je provući jedinstveni pravac kroz T koji ne siječe p .

Zahtjevi na skup aksioma teorije

- nezavisnost
 - peti aksiom?
 - Gauss, Lobačevski, Bolyai - hiperboličke (barem dva paralelna pravca kroz točku)
 - Riemann - eliptičke (nema paralelnog pravca kroz točku)
 - Beltrami dokazao nezavisnost (prvi model)
- neproturječivost
- potpunost



- David Hilbert 1899. (20 aksioma)
- definiramo modificirani aksiomatski sustav

Definicija 1

Euklidska ravnina je skup M čije elemente nazivamo *točkama*, a neke istaknute podskupove od M *pravcima*, tako da su zadovoljeni aksiomi $I_1 - I_3$, $U_1 - U_2$, $M_1 - M_4$, $S_1 - S_2$ i P .

- u nastavku navodimo aksiome

Aksiomi incidencije

- (I1) Za svake dvije točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac kojem one pripadaju, oznaka AB
- (I2) Na svakom pravcu leže barem 3 različite točke
- (I3) Točke koje leže na istom pravcu zovemo kolinearne. Postoje 3 nekolinearne točke (tj. one koje ne leže na istom pravcu).

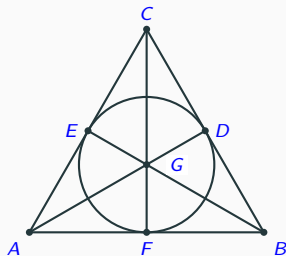
Jesu li $I_1 - I_3$ dovoljni da u potpunosti opišu točke i pravce?

Aksiomi incidencije

- (I_1) Za svake dvije točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac kojem one pripadaju, oznaka AB
- (I_2) Na svakom pravcu leže barem 3 različite točke
- (I_3) Točke koje leže na istom pravcu zovemo kolinearne. Postoje 3 nekolinearne točke (tj. one koje ne leže na istom pravcu).

Jesu li $I_1 - I_3$ dovoljni da u potpunosti opišu točke i pravce?

Ne. Npr. Fanova ravnina $\neq$ Euklidova ravnina, a zadovoljava $I_1 - I_3$. Primjer konačne (projektivne) geometrije (7 točaka, 7 pravaca).



Fanova ravnina

- (U_1) Na svakom pravcu postoje 2 suprotna totalna uređaja $\preceq$ i $\succeq$.

Definicija 2

Neka su A, B, T točke istog pravca p . Kažemo da je T između A i B ako je $A \preceq T \preceq B$ ili $A \succeq T \succeq B$. Skup svih točaka koje leže između A i B zovemo dužinom $\overline{AB}$.

Definicija 3

Polupravac kojemu je A vrh, a prolazi još jednom točkom $B \neq A$ je skup svih onih točaka T pravca AB za koje vrijedi $A \preceq T \preceq B$ ili $A \succeq B \succeq T$. Oznake: (Ax) , gdje je $x = AB$, ili (AB) .

Definicija 4

Skup $K \subseteq M$ je konveksan ako vrijedi $(\forall A, B \in K) \quad \overline{AB} \subseteq K$.

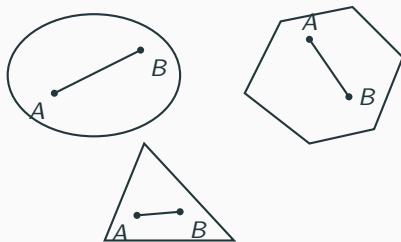
Definicija 5

Neka je $S \subseteq M$ proizvoljan podskup. *Konveksna ljuska* od S (oznaka $\text{conv } S$) je presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S .

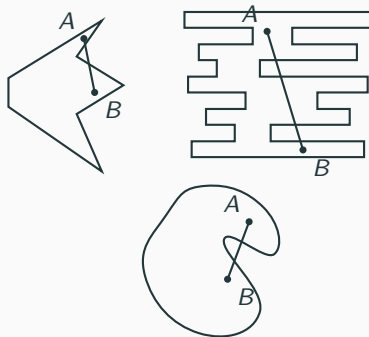
Definicija 6

Neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke. Skup $\text{conv}\{A, B, C\}$ zovemo *trokut*, oznaka $\triangle ABC$. *Stranice* trokuta su dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$. *Vrhovi* trokuta su točke A, B, C .

konveksni skupovi



nekonveksni skupovi



- (U_2) (**Paschov aksiom**) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi nijednim vrhom na toj stranici, onda siječe barem još jednu stranicu trokuta.

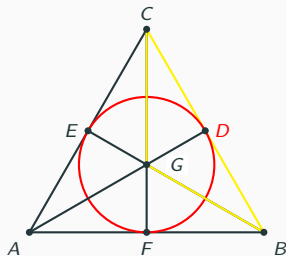
Aksiomi uređaja

- (U_2) (**Pachov aksiom**) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi nijednim vrhom na toj stranici, onda siječe barem još jednu stranicu trokuta.

Uočimo, Fanova ravnina ne zadovoljava Paschov aksiom.

Neka je uređaj kao u Euklid. geom. Tada pravac EDF siječe $\triangle BGC$ u točki D , koja je unutarnja točka stranice $\overline{BC}$. No, pravac EDF ne siječe nijednu drugu stranicu trokuta $\triangle BGC$.

(Siječe pravce CG i BG , ali ne unutar trokuta.)



Fanova ravnina

Definicija 7

Zadana je funkcija $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvima:

$$(M_1) \quad (\forall A, B \in M) \quad d(A, B) \geq 0 \quad \& \quad (d(A, B) = 0 \iff A = B).$$

$$(M_2) \quad (\forall A, B \in M) \quad d(A, B) = d(B, A)$$

$$(M_3) \quad (\forall A, B, C \in M) \quad d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \text{ a jednakost vrijedi}$$

akko $C \in \overline{AB}$. (*nejednakost trokuta*)

$$(M_4) \quad \text{Za svaki polupravac s vrhom u } V \text{ i svaki realan broj } x > 0 \text{ postoji}$$

jedinstvena točka T na tom polupravcu takva da je $d(V, T) = x$.

Par (M, d) koji zadovoljava svojstva $M_1 - M_3$ zovemo *metrički prostor*.

Broj $d(A, B)$ zovemo *duljina dužine* $\overline{AB}$, oznaka $|\overline{AB}| = d(A, B)$.

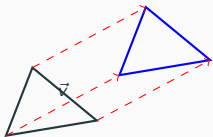
Uočimo: iz (M_3) slijedi da je zbroj duljina dviju stranica trokuta veći od duljine treće stranice trokuta.

Definicija 8

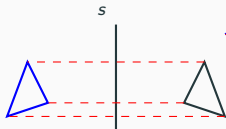
Preslikavanje $f : M \rightarrow M$ je **izometrija ravnine** ako čuva udaljenosti, tj.

$$(\forall A, B \in M) \quad d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

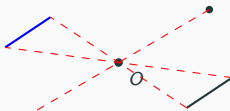
Translacija



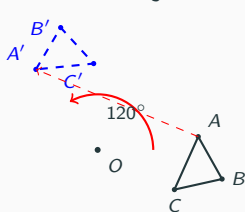
Oсна simetrija



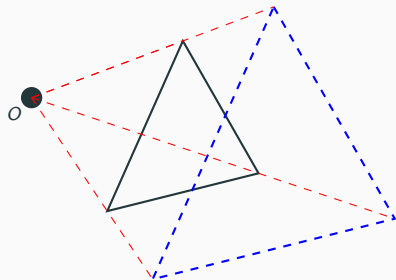
Centralna sim.



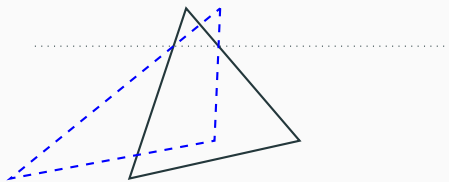
Rotacija



Dilatacija



Smicanje (shear)



U oba slučaja udaljenosti se mijenjaju, pa preslikavanja nisu izometrije.

(S₁) Za svaki pravac p postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \rightarrow M$ različita od identitete, za koju je

$$(\forall T \in p) \quad s_p(T) = T.$$

Zovemo je **osna simetrija** s obzirom na p , a p zovemo **os simetrije**.

(S₂) Neka su (Ax) i (Ay) proizvoljni polupravci kroz A .

Tada postoji barem jedan pravac p takav da je $s_p(x) = y$.

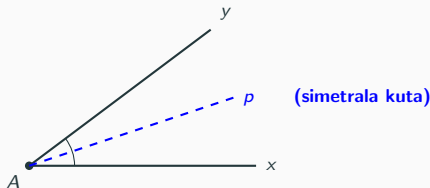
Aksiomi simetrije

(S₁) Za svaki pravac p postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \rightarrow M$ različita od identitete, za koju je

$$(\forall T \in p) \quad s_p(T) = T.$$

Zovemo je **osna simetrija** s obzirom na p , a p zovemo **os simetrije**.

(S₂) Neka su (Ax) i (Ay) proizvoljni polupravci kroz A .
Tada postoji barem jedan pravac p takav da je $s_p(x) = y$.



Definicija 9

Pravci p i q su **paralelni** ako se podudaraju ili se ne sijeku. Pišemo $p \parallel q$.

Aksiom o paralelama:

(P) Zadanom točkom T izvan pravca p prolazi najviše jedan pravac q paralelan s p .

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

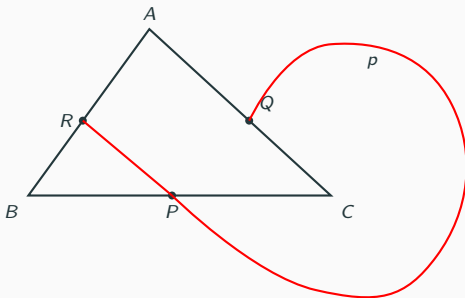
Propozicija 0

Dva različita pravca sijeku se najviše u jednoj točki.

Propozicija 1

Pravac koji ne prolazi niti jednim vrhom $\triangle ABC$ ne siječe sve tri stranice trokuta.

Dokaz.



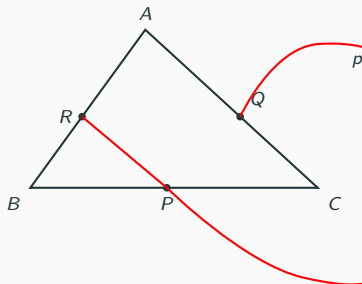
Neka je p pravac takav da ne prolazi kroz vrhove A, B, C . PPS, tj. p siječe sve tri stranice $\triangle ABC$.

- $P = p \cap \overline{BC}$, $Q = p \cap \overline{AC}$,
 $R = p \cap \overline{AB}$
- Po pretpostavci je
 $\{P, Q, R\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$

□

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Dokaz.



- Ako $P = Q$, tada $P \in \overline{BC} \cap \overline{AC}$, no zbog $AC \neq BC$ i prethodne propozicije, $P = C$. To je nemoguće po pretp., pa je $P \neq Q$.
- Analogno $P \neq R \neq Q$.
- BSOMP $R \preceq P \preceq Q$ na p .
- Paschov aks. za $\triangle AQR$ i pravac BC :
 BC siječe $\overline{RQ}$ u $P \neq R, Q$, pa mora sjeći još i $\overline{AQ}$ ili $\overline{AR}$.
- No, $BC \cap AQ = BC \cap AC = C$, a $A \preceq Q \preceq C$, pa $BC \cap \overline{AQ} = \emptyset$
- Analogno, $BC \cap \overline{AR} = \emptyset$.

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

- Neka je dan pravac p te neka je $\sim$ relacija na skupu $M \setminus p$ dana s

$$A \sim B \iff \overline{AB} \cap p = \emptyset$$

Propozicija 2

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije s točno dvije klase.

Dokaz.

Za domaću zadaću. Uputa: Paschov aksiom. □

Definicija 10

Poluravnina je skup svih točaka ravnine koje pripadaju istoj klasi.

Propozicija 3

Za sve točke $A, B \in M$, $A \neq B$ postoji jedinstvena točka $C \in \overline{AB}$ t.d.

*$d(A, C) = d(B, C)$. Ta točka leži između A i B i zove se **polovište** dužine $\overline{AB}$.*

Dokaz.

Za domaću zadaću. Uputa: aksiomi metrike. □

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Teorem 1

Neka je $f : M \rightarrow M$ izometrija.

- (a) $f(AB) = f(A)f(B)$, tj. slika pravca određenog točkama A i B je ponovno pravac i to onaj određen točkama $f(A)$ i $f(B)$.
- (b) $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$.
- (c) Slika polupravca (AB) je polupravac $(f(A)f(B)) = (Af(B))$.

Propozicija 4

Svaka izometrija je injekcija.

Dokaz teorema.

- (a) Dokazujemo $f(AB) \subseteq f(A)f(B)$ te $f(A)f(B) \subseteq f(AB)$.

$\subseteq$ Neka je $C \in AB$. BSOMP $A \preceq C \preceq B$.

Tvrdimo da je $f(C) \in f(A)f(B)$.

Budući da je f izometrija,

$$d(f(A), f(C)) = d(A, C), \quad d(f(C), f(B)) = d(C, B).$$

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

$$d(f(A), f(C)) + d(f(C), f(B)) = d(A, C) + d(C, B) \stackrel{(M_3)}{=} d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

Sada po (M_3) slijedi da je $f(C) \in \overline{f(A)f(B)} \subseteq f(A)f(B)$.

$\boxed{\supseteq}$ Obratno, neka je $D \in f(A)f(B)$.

Razlikujemo slučajeve $f(A) \preceq D \preceq f(B)$, $f(A) \preceq f(B) \preceq D$ i $D \preceq f(A) \preceq f(B)$.

1. slučaj: $f(A) \preceq D \preceq f(B)$. Po (M_3) slijedi da je

$$d(f(A), D) + d(D, f(B)) = d(f(A), f(B)) \stackrel{\text{izometrija}}{=} d(A, B).$$

Dakle, $d_0 := d(f(A), D) < d(A, B)$. Sada po (M_4) na polupravcu s vrhom u A kroz B postoji C t.d. $d(A, C) = d_0$. Po (M_3) slijedi da je $A \preceq C \preceq B$.

Tada je, po gore dokazanom, $f(C) \in f(A)f(B)$, no opet iz (M_3) vidimo da je $f(C) \in \overline{f(A)f(B)}$. Po jedinstvenosti iz (M_4) , $D = f(C)$.

2. slučaj: $f(A) \preceq f(B) \preceq D$. Po (M_3) slijedi da je

$$d(f(A), f(B)) + d(f(B), D) = d(f(A), D),$$

tj. $d_0 = d(f(A), D) > d(A, B)$ (izometrija).

Po (M_4) postoji jedinstven C na polupravcu s vrhom A kroz B takav da je $d(A, C) = d_0 > d(A, B)$, pa je $A \preceq B \preceq C$.

Analogno kao u prvom slučaju, $C \in f(A)f(B)$ i $f(C) = D$.

3. slučaj: Analogno kao 2. slučaj.

- (b) Analogno kao (a), samo smo u slučaju $A \preceq C \preceq B$ i $f(A) \preceq D \preceq f(B)$.
- (c) Za polupravce se dokazuje slično kao za pravce. □

Definicija 11

Neka je $f : M \rightarrow M$ preslikavanje ravnine. Kažemo da je točka T **fiksna točka** za f ako je $f(T) = T$.

Propozicija 5

Neka je $f : M \rightarrow M$ izometrija.

- (a) Ako su A i B fiksne točke od f , onda je i svaka točka pravca AB fiksna za f .
- (b) Ako su točke A, B, C nekolinearne i fiksne za f , onda je f identiteta.
- (c) Neka su p i q pravci. Tada

$$s_p = s_q \implies p = q.$$

Dokaz.

- (a) Neka je $T \in AB$ proizvoljna točka. Pretpostavimo da je $T \preceq A \preceq B$ (ostali slučajevi analogno).

Neka je $x = d(B, T)$.

Po aksiomu (M_4), T je jedinstvena točka na polupravcu (BA) takva da je $d(B, T) = x$.

Po prethodnom teoremu, polupravac (BA) se preslika u polupravac $f(B)f(A)$, tj. u polupravac (BA) , jer je $f(A) = A$, $f(B) = B$.

Budući da je $T \in (BA)$, slijedi $f(T) \in (f(B)f(A) = (BA))$.

Sada je

$$d(B, f(T)) = d(f(B), f(T)) = d(B, T) = x.$$

Dakle, $f(T) \in (BA)$, $d(B, f(T)) = x$, pa zbog jedinstvenosti u (M_4) slijedi $f(T) = T$.

(b) Iz (a) dijela slijedi da su sve točke na pravcima AB, BC, CA fiksne za f .

Neka je $T \in M$ proizvoljna točka koja ne leži na pravcima AB, BC, CA .

Neka je P polovište od AB .

Pravac PT siječe stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ u točki P koja nije vrh.

Po Paschovom aksiomu, PT siječe još jednu stranicu trokuta.

BSOMP, $PT \cap \overline{BT} = Q$.

Sada je $P \in AB, Q \in BC$, pa su to fiksne točke za f .

No, tada je (po (a)) i svaka točka pravca PT fiksna za f , pa je posebno $f(T) = T$.

- (c) Pretpostavimo suprotno, tj. $s_p = s_q$ i $p \neq q$. Vrijedi da je $s_p(T) = T$, za svaku $T \in p$ te $s_q(T) = T$, za svaku $T \in q$. Dakle, $s_p(T) = T$, za svaku točku $T \in p \cup q$.
Budući da $p \neq q$, postoji točka $Q \in q$ takva da je $Q \notin p$.
Uzmimo još točke $A, B \in p$ (postoje po (I_2)).
Sada je s_p izometrija koja fiksira tri nekolinearne točke, pa je identiteta.
No, to je kontradikcija s definicijom od s_p .
Slijedi da je $p = q$.



Propozicija

Neka je p proizvoljan pravac u M . Tada je $s_p \circ s_p = id$.

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Propozicija 6

Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Postoji jedinstven pravac p takav da je $s_p(A) = B$.

Taj pravac zovemo *simetrala dužine $\overline{AB}$* .

Dokaz.

Dokazat ćemo samo egzistenciju takvog pravca.

Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Po aksiomu (S_2) postoji barem jedan pravac p takav da je $s_p((PA)) = (PB)$.

Po prethodnom teoremu znamo da je $s_p(P) = P$ te vrijedi

$$d(s_p(A), P) = d(s_p(A), s_p(P)) = d(A, P).$$

Dakle, $s_p(A)$ je točka na polupravcu PB takva da je $d(s_p(A), P) = d(A, P) = d(B, P)$.

Po jedinstvenosti iz (M_4) slijedi da je $B = s_p(A)$.

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Propozicija

Neka je p pravac i s_p osna simetrija s obzirom na p . Tada vrijedi

$$T \in p \iff s_p(T) = T.$$

Propozicija 7

Svaka točka na simetrali $\overline{AB}$ jednako je udaljena od A i od B .

Obratno, svaka točka ravnine koja je jednako udaljena od A i od B leži na simetrali $\overline{AB}$.

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je p simetrala od $\overline{AB}$ te neka je $T \in p$.

$$d(A, T) = d(s_p(A), s_p(T)) = d(B, T).$$

$\Leftarrow$ Neka je $T \in M$ točka takva da je $d(A, T) = d(B, T)$.

Po aksiomu (S_2) postoji pravac q takav da je $s_q((TA)) = (TB)$.

Dakle, $s_q(T) = T$, $s_q(A) \in (TB)$.

Po jedinstvenosti iz (M_4) slijedi $s_q(A) = B$.

No, sada je $s_p(A) = B = s_q(A)$, pa po jedinstvenosti iz *Prop.6* slijedi da je $p = q$.

Dakle, zbog $T \in q$, slijedi $T \in p$.



Definicija 12

Kažemo da je pravac q *okomit* na pravac p ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$.

Tada pišemo $q \perp p$

Propozicija 8

- (a) $q \perp p \implies p \perp q$.
- (b) *Okomiti pravci se sijeku.*
- (c) *Kroz svaku točku $A \in M$ prolazi točno jedan pravac okomit na zadani pravac p .*
- (d) *Neka je A točka t.d. $A \notin p$ te N nožište okomice iz A na p .
(**Nožište** je presjek pravca iz (c) i pravca p .) Tada za svaku točku $T \in p$ vrijedi $d(A, T) \geq d(A, N)$.*

Definicija 13

Rotacija s centrom O je izometrija ravnine koja je ili identiteta ili ima točno jednu fiksnu točku O .

Centralna simetrija s centrom O je preslikavanje f takvo da za sve točke $T \in M$ vrijedi da je O polovište dužine $\overline{Tf(T)}$.

Uočimo da se u definiciji rotacije ne spominje "kut". Štoviše, još nismo ni uveli taj pojam.

Također, iz definicije centralne simetrije nije odmah jasno da je to izometrija.

Teorem 2 (O izometrijama ravnine)

- (a) *Svaka izometrija ravnine je bijekcija.*
- (b) $s_p \circ s_p = id$, $s_p^{-1} = s_p$.
- (c) *Izometrija koja ima barem dvije fiksne točke $A \neq B$ je ili identiteta ili s_{AB} .*
- (d) *Kompozicija rotacija s centrom u istoj točki O je ponovno rotacija. Inverz rotacije je rotacija.*
- (e) *Centralna simetrija s centrom O je rotacija s centrom u O .*
- (f) *Svaka izometrija ravnine je kompozicija najviše 3 osne simetrije.*

Dokaz.

- (a) Slijedi iz (b), (f).
- (b) Već imamo rezultat $s_p \circ s_p = id$. Sada iz bijektivnosti slijedi $s_p^{-1} = s_p$.
- (c) Lako slijedi iz definicije osne simetrije (S_1) i Prop.5(a).

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

(d) Očito iz definicije.

(e) Lako se pokaže (DZ).

(f) Neka je f proizvoljna izometrija.

Ako je $f = id$, neka je p proizvoljan pravac. Tada je $s_p \circ s_p = id = f$.

Ako je $f \neq id$, onda postoji $A \in M$ takva da je $\tilde{A} := f(A) \neq A$.

Neka je a simetrala dužine $\overline{\tilde{A}A}$ i definirajmo $g = s_a \circ f$.

Tada je $g(A) = s_a(f(A)) = s_a(\tilde{A}) = A$.

Ako je $g = id$, onda je $s_a \circ f = id$, pa je $f = s_a^{-1} = s_a$.

Ako je $g \neq id$, onda postoji $B \in M$ takva da je $\tilde{B} := g(B) \neq B$.

Uočimo, $B \neq A$ jer je $g(A) = A$.

Neka je b simetrala dužine $\overline{\tilde{B}B}$.

Vrijedi:

$$d(A, \tilde{B}) = d(g(A), g(B)) = d(A, B),$$

pa je $A \in b$ (po Prop.7).

Osnovne posljedice aksioma planimetrije

Definirajmo $h = s_b \circ g$.

Sada je $h(A) = s_b(g(A)) = s_b(A) = A$, $h(B) = s_b(g(B)) = s_b(\tilde{B}) = B$.

Ako je $h = id$, onda $h = s_b \circ g = s_b \circ s_a \circ f = id$, pa je

$$f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} = s_a \circ s_b.$$

Ako je $h \neq id$, onda postoji $C \in M$ takva da je $\tilde{C} := h(C) \neq C$.

Uočimo, $C \notin AB$ jer su sve točke pravca AB fiksne za h po *Prop.5.(a)*, a točka C nije fiksna.

Definirajmo $i := s_c \circ h$. Kao i prije slijedi $i(A) = A$, $i(B) = B$, $i(C) = C$.

Dakle, i ima tri nekolinearna fiksne točke.

Po *Prop.5.(b)* je $i = id$, pa je $s_c \circ s_b \circ s_a \circ f = id$, tj.

$$f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} \circ s_c^{-1} = s_a \circ s_b \circ s_c.$$



Propozicija

Slika poluravnine po izometriji je opet poluravnina.