Poglavlje 4

Rješenja zadataka

4.1 Martingali

Zadatak 1.7: Uzmimo $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, te definiramo $\mathbb{P}((a, b]) := F(b) - F(a)$. Tada je $\mathbb{P}$ σ-aditivna funkcija na poluprstenu koja se na jedinstven način proširuje do mjere na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}$. Slučajnu varijablu X definiramo kao identitetu na $\mathbb{R}$: $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \mathbb{R}$. Tada je za $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \mathbb{R} : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \lim_{a \to -\infty} (F(x) - F(a)) = F(x)\,.$$

Zadatak 1.10: Ako je $X = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathcal{F}$, tada je

$$\mathbb{E}_A[\mathbf{1}_B] = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(A)}\,.$$

Sada se gornja relacija na standardan način proširi do nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli, zatim do nenegativnih, te konačno integrabilnih.
Zadatak 1.14: Za $i = 0$ vrijedi $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}X = np$. Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Za $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_i) \in \Omega_1^i$ (dakle, $\overline{\omega}$ je fiksni niz nula i jedinica duljine i) definiramo

$$A^{\overline{\omega}} := \{\omega \in \Omega :\, \omega_1 = \overline{\omega}_1, \omega_2 = \overline{\omega}_2, \ldots, \omega_i = \overline{\omega}_i\}\,.$$

Tada je $\mathcal{F}_i = \{A^{\overline{\omega}} : \overline{\omega} \in \Omega_1^i\}$. Izračunajmo $\mathbb{E}[X|A^{\overline{\omega}}]$. Ako se dogodio $A^{\overline{\omega}}$, broj uspjeha (jedinica) u prvih i pokusa jednak je $\sum_{j=1}^i \overline{\omega}_j$, a očekivani broj uspjeka u preostalih $n - i$ pokusa jedank je $(n - i)p$. Dakle,

$$\mathbb{E}[X|A^{\overline{\omega}}] = \sum_{j=1}^{i} \overline{\omega}_j + (n - i)p\,.$$

Odavde slijedi da je

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_i] = \sum_{j=1}^{i} X_j + (n - i)p\,.$$

Zadatak 1.15: Na intervalu $((i-1)/2^n, i/2^n]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] &= \frac{\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{(\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]}\big]}{\mathbb{P}\big((\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]\big)} \\
&= \frac{1}{2^{-n}}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \omega\, d\omega = 2^n\frac{\omega^2}{2}\Big|_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}} \\
&= 2^{n-1}\left[\left(\frac{i}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{2^n}\right)^2\right] \\
&= 2^{-n-1}(2i-1)\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.18: Budući da je svaki događaj iz $\sigma(Z)$ oblika $\{Z\in B\}$, $B\in\mathcal{B}$, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z\in B\}}h(X)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(Z)h(X)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(Z)g(Z)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Z\in B\}}g(Z)]\,.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(Z)h(X)] &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_B(z)h(x)f_{X,Z}(x,z)\,dz\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_B(z)h(x)f_{X|Z}(x|z)f_Z(z)\,dz\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_B(z)\left(\int_{\mathbb{R}}h(x)f_{X|Z}(x|z)\,dx\right)f_Z(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_B(z)g(z)f_Z(z)\,dz = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(Z)g(Z)]\,,
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili Fubinijev teorem.

Zadatak 1.21: Neka je $\mathbb{P}_{X,Y}$ distribucija slučajnog vektora (X,Y), $\mathbb{P}_X$ distribucija od X, te $\mathbb{P}_Y$ distribucija od Y. Zbog nezavisnosti vrijedi $\mathbb{P}_{X,Y}=\mathbb{P}_X\times\mathbb{P}_Y$ (produkt vjerojatnosnih mjera). Nadalje,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|XY| &= \int_{\mathbb{R}^2}|xy|\,d\mathbb{P}_{X,Y} = \int_{\mathbb{R}^2}|xy|\,d(\mathbb{P}_X\times\mathbb{P}_Y) = (\text{Fubini}) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}}|x|\,d\mathbb{P}_X\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|y|\,d\mathbb{P}_Y\right) = \mathbb{E}|X|\,\mathbb{E}|Y| < \infty\,.
\end{aligned}$$

Na isti način se pokaže da je i $\mathbb{E}(XY)=(\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.

Zadatak 1.23: Stavimo $\Omega=\{1,2,3\}$, $\mathbb{P}(\{\omega\})=1/3$, $\omega=1,2,3$, $X(\omega)=\omega$, te $\mathcal{G}=\{\emptyset,\{1,2\},\{3\},\Omega\}$ i $\mathcal{H}=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},\Omega\}$. Tada je

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)=\begin{cases}\frac{3}{2}, & \omega=1,2,\\ 3, & \omega=3,\end{cases}\qquad \mathbb{E}[X|\mathcal{H}](\omega)=\begin{cases}1, & \omega=1,\\ \frac{5}{2}, & \omega=2,3\,.\end{cases}$$

Slijedi

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\big](\omega) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & \omega = 1, \\ \\ \frac{9}{4}, & \omega = 2,3, \end{cases} \qquad \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}\big](\omega) = \begin{cases} \frac{7}{4}, & \omega = 1,2, \\ \\ \frac{5}{2}, & \omega = 3. \end{cases}$$

Zadatak 1.25: Budući da je za $p \geq 1$ funkcija $x \mapsto |x|^p$ konveksna, tvrdnja je direktna posljedica uvjetne Jensenove nejednakosti.
Zadatak 1.26: Prvo uočimo da je $H(y) = \mathbb{E}[h(X,y)] = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, d\mathbb{P}_X(x)$. Nadalje, za proizvoljnu nenegativnu $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Z, zbog nezavisnosti X od $\mathcal{G}$ vrijedi da je $\mathbb{P}_{X,Y,Z} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_{Y,Z}$. Slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Zh(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^3} zh(x,y)\, d\mathbb{P}_{X,Y,Z}(x,y,z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} zh(x,y)\, d\mathbb{P}_X(x)\, d\mathbb{P}_{Y,Z}(y,z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} z\left(\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, d\mathbb{P}_X(x)\right) d\mathbb{P}_{Y,Z}(y,z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} zH(y)\, d\mathbb{P}_{Y,Z}(y,z) = \mathbb{E}[ZH(Y)], \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili Fubinijev teorem. Specijalno, za $Z = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{G}$ čitamo da je $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A h(X,Y)]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A H(Y)]$, te budući da je $H(Y)$ $\mathcal{G}$-izmjeriva, slijedi $\mathbb{E}[h(X,Y)|\mathcal{G}] = H(Y)$ g.s.
Zadatak 1.29: Pretpostavimo da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ uvjetno nezavisne uz dano $\mathcal{K}$, te da je $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Pokazujemo da je za sve $G \in \mathcal{G}$, $\mathbb{P}(G|\mathcal{K}) = \mathbb{P}(G|\mathcal{H})$ g.s., odnosno $\mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{H}]$. Budući da je $\mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]$ $\mathcal{H}$-izmjeriva, dovoljno je pokazati da za svaki $H \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H \mathbf{1}_G\big].$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]\big] &= \mathbb{E}\Big[\big[\mathbf{1}_H \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]\big|\mathcal{K}\Big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]\mathbb{E}[\mathbf{1}_H|\mathcal{K}]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}|\mathcal{K}]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{G\cap H}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H \mathbf{1}_G\big], \end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku iskoristili činjenicu da je $\mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]$ izmjeriva s obzirom na $\mathcal{K}$, a u trećem uvjetnu nezavisnost of $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ uz dano $\mathcal{K}$.

Obratno: pretpostavimo da za sve $G \in \mathcal{G}$ vrijedi $\mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{H}]$ g.s. Tada je za proizvoljne $G \in \mathcal{G}$ i $H \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{G\cap H}|\mathcal{K}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_G \mathbf{1}_H|\mathcal{K}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbf{1}_G \mathbf{1}_H|\mathcal{H}]\big|\mathcal{K}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{H}]\big|\mathcal{K}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H \mathbb{E}[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}]\big|\mathcal{K}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_G|\mathcal{K}\big]\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_H|\mathcal{K}\big]. \end{aligned}$$

Zadatak 1.30: Neka je $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Tada je $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{X+Y=0\}, \{X+Y \geq 1\}, \Omega\}$. Vrijedi

$$\mathbb{E}[X \big| \{X+Y=0\}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X+Y=0)}]}{\mathbb{P}(X+Y=0)} = 0\,.$$

Očito je $\mathbb{P}(X+Y \geq 1) = 1-(1-p)^2 = p(2-p)$. Nadalje, zbog nezavisnosti X i Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X+Y\geq 1)}] &= \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=1,Y=0)}] + \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=0,Y=1)}] + \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=1,Y=1)}] \\
&= \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=1)}]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(Y=0)}] + \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=0)}]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(Y=1)}] + \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X=1)}]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(Y=1)}] \\
&= p(1-p) + 0 + p^2 = p\,.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\mathbb{E}[X \big| \{X+Y \geq 1\}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{(X+Y\geq 1)}]}{\mathbb{P}(X+Y \geq 1)} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}\,.$$

Dakle,

$$\mathbb{E}[X|Z] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \frac{1}{2-p}\mathbf{1}_{\{X+Y\geq 1\}} = \frac{1}{2-p}(1-Z)\,.$$

Zbog simetrije, isto se dobije za $\mathbb{E}[Y|Z]$. Intuitivno, $\mathbb{E}[X|Z]$ i $\mathbb{E}[Y|Z]$ nisu nezavisne, jer su obje slučajne varijable iste funkcije od Z. Formalno,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Z]\mathbb{E}[Y|Z]\big] &= \left(\frac{1}{2-p}\right)^2 \mathbf{1}_{\{X+Y\geq 1\}} = \left(\frac{1}{2-p}\right)^2 \mathbb{P}(X+Y \geq 1) \\
&= \left(\frac{1}{2-p}\right)^2 p(2-p) = \frac{p}{2-p} \\
&\neq p^2 = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = (\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z]])(\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]])\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.31: Koristimo poznatu činjenicu da je $Y \sim \mathbb{P}(2\lambda)$, te za $0 \leq n \leq k$ računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = n|Y=k) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k-n)}{\mathbb{P}(Y=k)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = n)\mathbb{P}(X_2 = k-n)}{\mathbb{P}(Y=k)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\lambda}}{\frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda}} = \frac{1}{2^k}\binom{k}{n}\,.
\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\mathbb{P}(X_1 = n|Y) = \frac{1}{2^Y}\binom{Y}{n}\,,$$

odnosno, uvjetno na dano Y, X_1 ima binomnu $B \sim (Y, \frac{1}{2})$-distribuciju.

Zadatak 1.32: Zbog simetrije (za precizni dokaz vidi Zadatak 1.36) vrijedi $\mathbb{E}[X_1|Y] = \mathbb{E}[X_2|Y]$. Očigledno je $Y = \mathbb{E}[Y|Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2|Y] = \mathbb{E}[X_1|Y] + \mathbb{E}[X_2|Y]$. Slijedi da je $\mathbb{E}[X_1|Y] = Y/2$.

Alternativno, izračunajmo uvjetnu gustoću $f_{X_1|Y}(x_1|y) = \frac{f_{X_1,Y}(x_1,y)}{f_Y(y)}$. Vrijedi da je $(X_1, Y) = (X_1, X_1 + X_2) = g(X_1, X_2)$, gdje je $g(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2) = (y_1, y_2)$. Stavimo $T := g(\{x_1 >$

$0, x_2 > 0\}) = \{0 < y_1 < y_2\}$. Po Teoremu o zamjeni varijable (vidi N. Sarapa, str. 336, Teorem 11.9) vrijedi

$$f_{X_1,Y}(y) = f_{X_1,X_2}(g^{-1}(y))\det(Dg^{-1}(y))\mathbf{1}_T(y)\,, \quad y = (y_1, y_2)\,.$$

Funkcija g je dana matricom $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, te je stoga njenja inverzna funkcija g^{-1} dana inverznom matricom $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, pa je Jacobijan $\det(Dg^{-1}(y))$ jednak (u svakoj točki) determinanti inverzne matrice, dakle 1. Osim toga, $g^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - y_1)$. Budući da je zbog nezavisnosti $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = e^{-x_1-x_2}\mathbf{1}_{\{x_1>0,x_2>0\}}$, slijedi da je

$$f_{X_1,Y}(y_1, y_2) = e^{-y_1-(y_2-y_1)}\mathbf{1}_{\{0<y_1<y_2\}} = e^{-y_2}\mathbf{1}_{\{0<y_1<y_2\}}\,.$$

Nadalje, funkcija gustoće zbroja $X_1 + X_2$ jednaka je $f_Y(y) = ye^{-y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}$. Zato je

$$f_{X_1|Y}(x_1|y) = \frac{f_{X_1,Y}(x_1, y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}\mathbf{1}_{\{0<x_1<y\}}}{ye^{-y}}\,\mathbf{1}_{\{y>0\}} = \frac{1}{y}\,\mathbf{1}_{\{0<x_1<y\}}\,.$$

Po Zadatku 1.18, za svaku funkciju h, uz oznaku $g(y) := \int_{\mathbb{R}} h(x_1)f_{X_1|Y}(x_1|y)\,dx_1$, vrijedi $\mathbb{E}[h(X_1)|Y] = g(Y)$ g.s. Ako je $h(x_1) = x_1$, dobivamo $g(y) = \int_0^y x_1(1/y)\,dx_1 = y/2$, pa je $\mathbb{E}[X_1|Y] = Y/2$. Ako je $h(x_1) = \mathbf{1}_{\{0<x_1<3\}}$, dobivamo $g(y) = \int_0^y \mathbf{1}_{\{0<x_1<3\}}(1/y)\,dx_1 = (y \wedge 3)/y$, pa je

$$\mathbb{P}(X_1 < 3|Y) = \frac{Y \wedge 3}{Y}\,.$$

Zadatak 1.33: (a) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big] = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}X\big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]\big)^2\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}X\big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\Big|\mathcal{G}\Big]\Big] + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big) \\
&= \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})\big] + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)\,,
\end{aligned}$$

gdje mješoviti član u drugom retku iščezava po Propoziciji 1.27, jer je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}X$ $\mathcal{G}$-izmjeriva.
(b) Dokaz ide isto oduzimanjem i dodavanjem $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
Zadatak 1.34: Uočite da je $B \in \mathcal{G}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}]] = 0$$

gdje druga jednakost slijedi iz definicije uvjetnog očekivanja, a zadnja zbog $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}] = 0$ na B. Iz $\mathbb{P}(B \cap A) = 0$ slijedi $B \subset A^c$ g.s.
Zadatak 1.35: (a) Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X - Y)^2] &= \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2] = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 - 2\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]\big] \\
&= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 - 2\mathbb{E}\big[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 - 2\mathbb{E}\big[X^2\big] = 0\,.
\end{aligned}$$

(b) Stavimo $X := \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Tada su po pretpostavci X i Y jednako distribuirane, pa vrijedi $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2$. Sada tvrdnja slijedi iz (a).
(c) Prvo pokazujemo da ako je $\mathbb{E}|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}|X|$, tada je $\mathrm{sign}(X) = \mathrm{sign}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$ g.s. Računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big| &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]>0\}}\big] - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]<0\}}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]>0\}}\big] - \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]<0\}}\big]\,,\end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi iz definicije uvjetnog očekivanja i činjenice da su događaji $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}, \{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] < 0\} \in \mathcal{G}$. Budući da je $\mathbb{E}|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}|X| = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}] - \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X<0\}}]$, slijedi

$$\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]>0\}}\big] - \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]<0\}}\big] = \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}\big] - \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{X<0\}}\big]\,. \tag{4.1}$$

Na isti način iz $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}X$ slijedi

$$\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]>0\}}\big] + \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]<0\}}\big] = \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}\big] + \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{X<0\}}\big]\,. \tag{4.2}$$

Zbrajanjem, odnosno oduzimanjem, (4.1) i (4.2) slijedi

$$\mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}\big] = \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]>0\}}\big] \quad \text{i} \quad \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{X<0\}}\big] = \mathbb{E}\big[X\mathbf{1}_{\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]<0\}}\big]\,. \tag{4.3}$$

Neka je $A \in \mathcal{F}$. Tada

$$\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A\cap\{X>0\}}] + \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A\cap\{X<0\}}] \le \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A\cap\{X>0\}}] \le \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}]\,,$$

tako da ako je $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}]$ obje nejednakosti gore su u stvari jednakosti. Specijalno, $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A\cap\{X<0\}}] = 0$, što povlači $\mathbb{P}(A\cap\{X<0\}) = 0$, i $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A\cap\{X>0\}}] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}]$, što povlači $\mathbb{P}(A\cap\{X>0\}) = \mathbb{P}(X>0)$, t.j., $\mathbb{P}(A^c\cap\{X>0\}) = 0$. Slijedi $\mathbb{P}(A\triangle\{X>0\}) = 0$, odnosno $A = \{X > 0\}$ g.s. Primjenimo li to na prvu jednakost u (4.3) dobivamo $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\} = \{X > 0\}$ g.s. Na sličan način iz druge jednakosti slijedi $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] < 0\} = \{X < 0\}$ g.s. Zaključujemo da je $\mathrm{sign}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) = \mathrm{sign}(X)$ g.s.

Neka je sada $c \in \mathbb{R}$. Iz pretpostavke $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \overset{d}{=} Y$ slijedi $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] - c \overset{d}{=} Y - c$ ($F_{Y_c}(x) = F_Y(x+c)$). Apsolutne vrijednosti jednakodistribuiranih slučajnih varijabli imaju jednaka očekivanja, $\mathbb{E}\big|\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] - c\big| = \mathbb{E}\big|Y - c\big|$. Po gore dokazanom slijedi da je $\mathrm{sign}(\mathbb{E}[Y-c|\mathcal{G}]) = \mathrm{sign}(Y-c)$ g.s. To znači da je $\{\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] > c\} = \{Y > c\}$ g.s. Međutim, to vrijedi za sve $c \in \mathbb{Q}$, otkud dobivamo $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$ g.s.
Zadatak 1.36: (a) Za $B \in \mathcal{E}$ računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{Z\in B)}\,\mathbb{E}[f(X)|Z]\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{Z\in B)}\,f(X)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_B(Z)f(X)\big] \\ &= \int_{E\times E}\mathbf{1}_B(z)f(x)\,d\mathbb{P}_{X,Z}(x,z) \\ &= \int_{E\times E}\mathbf{1}_B(z)f(y)\,d\mathbb{P}_{Y,Z}(y,z) \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_B(Z)f(Y)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{Z\in B)}\,\mathbb{E}[f(Y)|Z]\big]\,,\end{aligned}$$

gdje smo koristili jednaku distribuiranost $\mathbb{P}_{X,Z} = \mathbb{P}_{Y,Z}$. Budući da je svaki događaj u $\sigma(Z)$ oblika $\{Z \in B\}$ za neki $B \in \mathcal{E}$, jednakost lijeve i desne strane gore pokazuje da vrijedi $\mathbb{E}[f(X)|Z] = \mathbb{E}[f(Y)|Z]$ g.s.
(b) Dokaz je sličan kao gore: za $B \in E$ imamo

$$\begin{aligned}
\int_E \mathbf{1}_B(x)h_1(x)\,d\mu(x) &= \int_E \mathbf{1}_B(x)h_1(x)\,d\mathbb{P}_X(x) = \int_\Omega \mathbf{1}_B(X)h_1(X)\,d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_B(X)h_1(X)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_B(X)\mathbb{E}[g(Z)|X]\big] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)g(Z)] \\
&= \int_{E\times E} \mathbf{1}_B(x)g(z)\,d\mathbb{P}_{X,Z}(x,z) = \int_{E\times E} \mathbf{1}_B(y)g(z)\,d\mathbb{P}_{Y,Z}(y,z) \\
&= \cdots = \int_E \mathbf{1}_B(x)h_2(x)\,d\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

Zbog $B \in E$ proizvoljan, to povlači da je $h_1 = h_2$ μ-g.s.
Zadatak 1.37: (a) Uređeni parovi $(X_1, S), (X_2, S), \ldots, (X_n, S)$ očito imaju jednaku distribuciju. Po Zadatku 1.36 (a) vrijedi $\mathbb{E}[X_1|S] = \mathbb{E}[X_2|S] = \cdots = \mathbb{E}[X_n|S]$ g.s. Zato je

$$S = \mathbb{E}[S|S] = \mathbb{E}[X_1+X_2+\cdots+X_n|S] = \mathbb{E}[X_1|S]+\mathbb{E}[X_2|S]+\cdots+\mathbb{E}[X_n|S] = n\mathbb{E}[X_1|S] \text{ g.s.},$$

otkud slijedi tvrdnja.
(b) Zbog X_1 izmjeriva s obzirom na $\sigma(X_1)$, a $X_2 + \cdots + X_n$ nezavisna s $\sigma(X_1)$ imamo

$$\mathbb{E}[S|X_1] = \mathbb{E}[X_1 + (X_2 + \cdots + X_n)|X_1] = X_1 + \mathbb{E}[X_2 + \cdots + X_n] = X_1 + (n-1)\mathbb{E}[X_1]\,.$$

Zadatak 1.38: (a) Stavimo $T := X_2 + \cdots + X_n$. Budući da je T zbroj od $n-1$ nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli, T ima $\Gamma(n-1, \lambda)$-distribuciju, t.j., funkcija gustoće od T je dana formulom

$$f_T(v) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, v^{n-2} e^{-\lambda v} \mathbf{1}_{\{v\geq 0\}}\,.$$

Nadalje, X_1 i T su nezavisne slučajne varijable, pa je gustoća slučajnog vektora (X_1, T) jednaka

$$f_{(X_1,T)}(u,v) = e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{\{u\geq 0\}}\ \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, v^{n-2}e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{\{v\geq 0\}} = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}\, v^{n-2}e^{-\lambda(v+u)}\mathbf{1}_{\{u\geq 0\}}\mathbf{1}_{\{v\geq 0\}}\,.$$

Budući da je $(X_1, S)^\tau = A(X_1, T)^\tau$, gdje τ označava transpoziciju, a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

po formuli o zamjeni varijable slijedi

$$f_{(X_1,S)}(x,y) = f_{(X_1,T)}\big(A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\big)|\det A|^{-1}\,.$$

Zbog $A^{-1}(x,y)^\tau = (x, y-x)^\tau$ slijedi

$$f_{(X_1,S)}(x,y) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}(y-x)^{n-2}e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{\{0\le x\le y\}}\,.$$

Iz Zadatka 1.18 slijedi da je uvjetna funkcija gustoće od X_1 uz dano $S=y$ jednaka

$$f_{X_1|S}(x|y) = \frac{f_{(X_1,S)}(x,y)}{f_S(y)} = \frac{\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}(y-x)^{n-2}e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{\{0\le x\le y\}}}{\frac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}} = \frac{n-1}{y^{n-1}}(y-x)^{n-2}\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\,.$$

Sada je

$$\mathbb{E}[X_1|S=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_1|S}(x|y)\,dx = \int_0^y x\frac{n-1}{y^{n-1}}(y-x)^{n-2}\,dx = \frac{n-1}{y^{n-1}}\,\frac{y^n}{n(n-1)} = \frac{y}{n}\,.$$

Slijedi da je $\mathbb{E}[X_1|S] = \frac{S}{n}$. Ovaj rezultat se jednostavnije može dobiti primjenom Zadatka 1.37.
(b) Po već izračunatom u dijelu (a),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^2|S=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_1|S}(x|y)\,dx = \int_0^y x^2\frac{n-1}{y^{n-1}}(y-x)^{n-2}\,dx\\ &= \frac{n-1}{y^{n-1}}\,\frac{2y^{n+1}}{(n+1)n(n-1)} = \frac{2y^2}{(n+1)n}\,,\end{aligned}$$

pa je $\mathbb{E}[X_1^2|S] = \frac{2S^2}{(n+1)n}$. Jedan način za izračunati $\mathbb{E}[X_1X_2|S]$ je prvo izračunati uvjetnu funkciju gustoće $f_{(X_1,X_2)|S}$ slučajnog vektora (X_1,X_2) uz dano S. Alternativni, i brži način, je iskoristiti simetriju: za sve $i\neq j$, $\mathbb{E}[X_iX_j|S] = \mathbb{E}[X_1X_2|S]$ i $\mathbb{E}[X_i^2|S] = \mathbb{E}[X_1^2|S]$. Vrijedi

$$S^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i\neq j} X_iX_j\,,$$

pa je

$$S^2 = \mathbb{E}[S^2|S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2|S] + \sum_{i\neq j}\mathbb{E}[X_iX_j|S] = n\frac{2S^2}{(n+1)n} + n(n-1)\mathbb{E}[X_1X_2|S]\,.$$

Rješavanjem po $\mathbb{E}[X_1X_2|S]$ dobivamo

$$\mathbb{E}[X_1X_2|S] = \frac{S^2}{(n+1)n}\,.$$

Zadatak 1.39: Uočimo da je $S_n = S_{n-1} + X_n$, te da je S_{n-1} $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva, dok je X_n nezavisna od $\mathcal{F}_{n-1}$. Definiramo $h:\mathbb{R}^d\times R^d\to\mathbb{R}$ sa $h(x,y) := f(x+y)$, te stavimo

$H(y) := \mathbb{E}[h(X_n, y)] = \mathbb{E}[f(X_n + y)] = \int h(x+y)\, d\mathbb{P}_{X_n}$. Iz (formalne generalizacije) Zadatka 1.26 dobivamo

$$\mathbb{E}[f(S_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[f(S_{n-1} + X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[h(X_n, S_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = H(S_{n-1}) \text{ g.s.}$$

Na potpuno isti način izračunamo $\mathbb{E}[f(S_n)|S_n] = H(S_{n-1})$ g.s. Alternativno

$$\mathbb{E}[f(S_n)|\sigma(S_n)] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f(S_n)|\mathcal{F}_{n-1}]\big|\sigma(S_n)\big] = \mathbb{E}[H(S_{n-1})|\sigma(S_n)] = H(S_{n-1}) \text{ g.s.}$$

Dakle,

$$\mathbb{E}[f(S_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[f(S_n)|\sigma(S_n)] = H(S_{n-1}) = \int h(x + S_{n-1})\, d\mathbb{P}_{X_n}(x)\,.$$

Zadatak 1.45: Vrijedi $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$. Budući da je X adaptiran na $\mathbb{F}$, slijedi da je $\mathcal{F}_n^0 \subset \mathcal{F}_n$ (prirodna filtracija je najmanja filtracija na koju je X adaptiran). Računamo

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^0] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\big|\mathcal{F}_n^0\big] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n^0] = X_n \text{ g.s.}$$

Zadatak 1.46: Trivijalan primjer takvog procesa je niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X = (X_n : n \geq 0)$ za koje postoji očekivanje. Označimo $\mu = \mathbb{E}X_n$, te neka je $\mathcal{F}_n^0 = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Tada je X_{n+1} nezavisna od $\mathcal{F}_n$, pa vrijedi $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}X_{n+1} = \mu \neq X_n$. Dakle, takav proces ima konstantno očekivanje, ali nije martingal.

Zadatak 1.47: Budući da je X supermartingal, za svaki $n \geq 0$ imamo $X_n - \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq 0$ g.s. Po pretpostavci, $\mathbb{E}\big[X_n - \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\big] = 0$. Gotovo sigurno nenegativna slučajna varijabla koja ima očekivanje jednako nula, mora biti gotovo sigurno jednako nuli. Dakle, $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ g.s. što znači da je X martingal.

Zadatak 1.55: Pretpostavimo da dekompozicija nije jedinstvena, t.j. da postoje martingali M i $\widetilde{M}$, te predvidivi neopadajući procesi A i $\widetilde{A}$, $A_0 = \widetilde{A}_0 = 0$ takvi da vrijedi $X = M + A = \widetilde{M} + \widetilde{A}$. Indukcijom dokazujemo da je tada $A_n = \widetilde{A}_n$ za sve $n \geq 0$. Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi po pretpostavci. Neka vrijedi za n. Uočite da je $M - \widetilde{M} = \widetilde{A} - A$. Zato i zbog predvidivosti procesa A i $\widetilde{A}$ imamo

$$\widetilde{A}_{n+1} - A_{n+1} = \mathbb{E}[\widetilde{A}_{n+1} - A_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} - \widetilde{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n - \widetilde{M}_n = \widetilde{A}_n - A_n = 0\,.$$

Dakle, $A = \widetilde{A}$ otkud odmah slijedi da je $M = \widetilde{M}$.

Zadatak 1.58:

(a) Budući da su slučajne varijable X_m i Y_n kvadratno integrabilne, po Hölderovoj nejednakosti zaključujemo da je $X_m Y_n$ integrabilna, te je dobro definirano njeno uvjetno očekivanje. Nadalje, na isti način kao u Propoziciji 1.22 (f) zaključujemo da za $m \leq n$ vrijedi $\mathbb{E}[X_m Y_n|\mathcal{F}_m] = X_m \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_m] = X_m Y_m$ g.s.

(b) Računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})\big] \\
&\quad= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_k Y_k - X_{k-1}Y_k - X_k Y_{k-1} + X_{k-1}Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\
&\quad= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_k Y_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}Y_{k-1} - X_{k-1}Y_{k-1} + X_{k-1}Y_{k-1}\big] \\
&\quad= \mathbb{E}\big[X_k Y_k - X_{k-1}Y_{k-1}\big]\,.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})\big] = \sum_{k=1}^n \Big(\mathbb{E}\big[X_k Y_k - X_{k-1}Y_{k-1}\big]\Big) = \mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0]\,.$$

(c) Prvo uočimo da zbog $\mathbb{E}X_k = \mathbb{E}X_{k-1}$ vrijedi $\mathrm{Var}(X_k - X_{k-1}) = \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$. Nadalje, zbog $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ i dijela (b) imamo

$$\mathrm{Var}(X_n) - \mathrm{Var}(X_0) = \mathbb{E}X_n^2 - \mathbb{E}X_0^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k - X_{k-1})\,.$$

(d) Za $1 \le j < k$ računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1})\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1})|\mathcal{F}_j]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[(X_j - X_{j-1})\mathbb{E}[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_j]\big] = 0\,,\end{aligned}$$

budući da je $\mathbb{E}[X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_j] = X_j - X_j = 0$ g.s.

Zadatak 1.59: Jasno je da je Z_n^λ izmjeriva s obzirom na $\mathcal{F}_n$. Nadalje, $Z_0^\lambda = 1$, a za $n \ge 1$,

$$Z_n^\lambda = e^{\lambda X_n - n\phi(\lambda)} = e^{\sum_{i=1}^n Y_i - n\phi(\lambda)} = e^{\sum_{i=1}^n (Y_i - \phi(\lambda))} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda Y_i - \phi(\lambda)}\,.$$

Vrijedi $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y_i - \phi(\lambda)}\right] = e^{-\phi(\lambda)}\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y_i}\right] = 1$. Budući da su slučajne varijable $e^{\lambda Y_i - \phi(\lambda)}$, $i = 1, 2, \dots$ nezavisne, integrabilnost i martingalnost slijede iz Primjera 1.48.

Zadatak 1.60: Tvrdnja (a) je posljedica Zadatka 1.58 (c).

(b) Kvadratna varijacija $\langle X\rangle$ martingala X je po definiciji neopadajući predvidiv proces A iz Doobove dekompozicije submartingala X^2. Iz dokaza Doobove dekompozicije čitamo da za svaki $n \ge 1$ vrijedi $A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}^2$. Zbog nezavisnosti $X_n - X_{n-1}$ i $\mathcal{F}_{n-1}$ i Propozicije 1.22 (i) imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X_n - X_{n-1})^2\big] &= \mathbb{E}\big[(X_n - X_{n-1})^2\big|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}\big[X_n^2 - 2X_nX_{n-1} + X_{n-1}^2|\mathcal{F}_{n-1}\big] \\ &= \mathbb{E}[X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] - 2X_{n-1}^2 + X_{n-1}^2 = \mathbb{E}[X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}^2\,.\end{aligned}$$

Zato je $A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}\big[(X_n - X_{n-1})^2\big] = A_{n-1} + \mathrm{Var}(X_n - X_{n-1}) = A_{n-1} + \sigma_n^2$. Zbog $A_0 = 0$ slijedi

$$\langle X\rangle_n = A_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\,.$$

Zadatak 1.65: Pretpostavimo da je T vrijeme zaustavljanja. Tada vrijedi

$$\{T = n\} = \{T \le n\} \setminus \{T \le n-1\} \in \mathcal{F}_n\,.$$

Obratno, neka je $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ za sve $n \ge 0$. Tada je

$$\{T \le n\} = \cup_{k=0}^n \{T = k\} \in \mathcal{F}_n\,.$$

Zadatak 1.66:

(a) $\{T = n\} = \Omega \in \mathcal{F}_n$ za $n = m$, i $\emptyset \in \mathcal{F}_n$ za $n \ne m$,

(b) Za $n \ge 0$ vrijedi $\{T > n\} = \{T \le n\}^c \in \mathcal{F}_n$, i slično $\{S > n\} \in \mathcal{F}_n$. Zato je $\{T \wedge S > n\} = \{T > n\} \cap \{S > n\} \in \mathcal{F}_n$, pa je i $\{T \wedge S \le n\} \in \mathcal{F}_n$.

(c) Za $n \ge 0$ vrijedi

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B, X_1 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n\,.$$

Zadatak 1.72: Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju primjenjenom na $T \wedge n$ slijedi da je $\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0$. Po Fatouvoj lemi ($X$ je nenegativan!) imamo $\mathbb{E}X_T \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0$.
Zadatak 1.75: Za $i, j \in S$ računamo

$$\begin{aligned}
f(i,j) &= \mathbb{P}_i(T_y < \infty) = \sum_{k\neq j} \mathbb{P}_i(X_1 = k, T_j < \infty) + \mathbb{P}_i(X_1 = k, T_j < \infty) \\
&= \sum_{k\neq j} p(i,k)\mathbb{P}_i(T_j < \infty | X_1 = k) + p(i,j) \\
&= \sum_{k\neq j} p(i,k)\mathbb{P}_k(T_j < \infty) + p(i,j) \\
&= \sum_{k\neq j} p(i,k) f(k,j) + p(i,j) \\
&\geq \sum_{k\in S} p(i,k) f(k,j)\,,
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog jakog Markovljevog svojstva, a nejednakost u posljednjem retku zbog $f(j,j) \leq 1$. Dakle, $i \mapsto f(i,j)$ je superharmonijska, pa je po pretpostavci konstanta (po i, ali može ovisiti o j). Označimo $c(j) = f(i,j)$, $i \in S$. Zamijennimo $f(i,j)$ u gornjem računu sa $c(j)$. Dobivamo,

$$c(j) = \sum_{k\neq j} p(i,k)c(j) + p(i,j) = (1 - p(i,j))c(j) + p(i,j)\,.$$

otkud slijedi da je

$$p(i,j)(1 - c(j)) = 0\,, \qquad \text{za sve } i \in S\,.$$

Zaključujemo da je ili (i) $c(j) = 1$, ili (ii) $p(i,j) = 0$ za sve $i \in S$. Pokažimo da je drugi slučaj nemoguć. Zaista, pretpostavimo $p(i,j) = 0$ za sve $i \in S$, te definirajmo funkciju $h : S \to \mathbb{R}$ sa $h(j) = 1$, te $h(i) = 0$ za sve $i \neq j$. Tada je za $i \in S$,

$$Ph(i) = \sum_{k\in S} p(i,k)h(k) = \sum_{k\neq j} p(i,k)h(k) + p(i,j)h(j) = 0$$

(zbog $h(k) = 0$, $k \neq j$, te $p(i,j) = 0$). Slijedi $Ph \leq h$, pa je h superharmonijska funkcija koja nije konstanta. Budući da je to suprotno pretpostavci, slučaj (ii) je nemoguć. Dakle, preostaje $1 = c(j) = f(i,j) = \mathbb{P}_i(T_j < \infty)$ za sve $i \in S$. To znači da je stanje j dostižno iz svakog stanja i, te da je povratno ($\mathbb{P}_j(T_j < \infty) = 1$). Zbog $j \in S$ proizvoljan, lanac je ireducibilan i povratan.
Zadatak 1.76: Treba pokazati da za svaki $n \geq 0$ vrijedi $X_n = \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, odnosno da za svaki $A \in \mathcal{F}_n$ vrijedi $\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_A]$. Definirajmo dva vremena zaustavljanja:

$$T := n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c} \qquad \text{i} \qquad S := n+1\,.$$

Budući da je

$$\{T \le k\} = \begin{cases} \emptyset\,, & k \le n-1\,, \\ A\,, & k = n\,, \\ \Omega\,, & k > n\,, \end{cases}$$

vrijedi $\{T \le k\} \in \mathcal{F}_k$ za sve $k \ge 0$, odnosno T je zaista vrijeme zaustavljanja. Po pretpostavci je $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_S$. Budući da je $X_T = X_n\mathbf{1}_A + X_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}$ i $X_S = X_{n+1}\mathbf{1}_A + X_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}$, slijedi

$$\mathbb{E}\left[X_n\mathbf{1}_A + X_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1}\mathbf{1}_A + X_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}\right]\,,$$

odnosno nakon skraćivanja, $\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{n+1}\mathbf{1}_A]$.

Zadatak 1.77: Treba pokazati da za svaki $n \ge 0$ vrijedi $X_{n-1} = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, odnosno da za svaki $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ vrijedi $\mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{n-1}\mathbf{1}_A]$. Definirajmo slučajni proces $H = (H_j : j \ge 0)$ na sljedeći način:

$$H_j := \begin{cases} \mathbf{1}_A\,, & j = n\,, \\ 0\,, & j \ne n\,. \end{cases}$$

Tada je H nenegativan, predvidiv proces ($H_n = \mathbf{1}_A$ je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva). Po pretpostvci je $\mathbb{E}\big[(H\cdot X)_n\big] = 0$. Međutim,

$$(H\cdot X)_n = H_0X_0 + \sum_{j=1}^n H_j(X_j - X_{j-1}) = \mathbf{1}_A(X_n - X_{n-1})\,.$$

Slijedi $0 = \mathbb{E}\big[(H\cdot X)_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(X_n - X_{n-1})\big]$.

Zadatak 1.78: Uočimo prvo da je $\{n > T\} = \{T \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, pa je i $\{n \le T\} = \{n > T\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$. Zato je (u slučaju supermartingala):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_{(n<T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{(n\ge T)}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_{(n<T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_T\mathbf{1}_{(n=T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{(n>T)}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&\le \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_{(n<T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[Y_T\mathbf{1}_{(n=T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{(n>T)}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_{(n\le T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{(n>T)}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbb{E}[Y_n\mathbf{1}_{(n\le T)}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n\mathbf{1}_{(n>T)}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \mathbf{1}_{(n\le T)}\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbf{1}_{(n>T)}\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&\le \mathbf{1}_{(n-1<T)}Y_{n-1} + \mathbf{1}_{(n-1\ge T)}X_{n-1} = Z_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.92: Za $K \in \mathbb{N}$ definiramo vrijeme zaustavljanja $T_K := \min\{n \ge 0 : X_n \le -K\}$. Zaustavljen proces $(X_{n\wedge T_K} : n \ge 0)$ je martingal i vrijedi $X_{n\wedge T_K} \ge -K - M$ (u trenutku T_K martingal može napraviti skok u negativnom smjeru veličine najviše $-M$). Slučajni proces $X_{n\wedge T_K} + K + M$ je tada nenegativan martingal. Po Korolaru 1.82 postoji $\lim_{n\to\infty}(X_{n\wedge T_K} + K + M)$ g.s. Specijalno, na događaju $\{T_K = +\infty\}$ je $X_{n\wedge T_K} = X_n$, pa na tom događaju postoji $\lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. Uočimo da je

$$\{\liminf_{n\to\infty} X_n > -\infty\} = \cup_{K=1}^{\infty}\{T_K = \infty\}\,.$$

Zaključujemo da $\lim_{n\to\infty} X_n$ postoji g.s. na događaju $\{\liminf_{n\to\infty} X_n > -\infty\}$. Zbog simetrije (ili primjenom gornjeg argumenta na martingal $-X$) dobivamo da $\lim_{n\to\infty} X_n$ postoji g.s. na događaju $\{\limsup_{n\to\infty} X_n < +\infty\}$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} X_n$ postoji g.s. na događaju $B^c = \{\liminf_{n\to\infty} X_n > -\infty\} \cup \{\limsup_{n\to\infty} X_n < +\infty\}$.

Zadatak 1.93: (a) Definiramo $X_0 = 0$, te za $n \ge 1$, $X_n = \sum_{k=1}^n (\mathbf{1}_{A_k} - \mathbb{P}(A_k|\mathcal{F}_{k-1}))$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{A_k} - \mathbb{P}(A_k|\mathcal{F}_{k-1})\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \big(\mathbf{1}_{A_k} - \mathbb{P}(A_k|\mathcal{F}_{k-1})\big) + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}\,.\end{aligned}$$

Dakle, X je martingal, te vrijedi $|X_n - X_{n-1}| = |\mathbf{1}_{A_n} - \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1})| \le 1$. Neka je $A = \{\lim_{n\to\infty} X_n$ postoji i konačan je$\}$ i $B = \{\liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty, \limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty\}$. Po Zadatku 1.92 je $\mathbb{P}(A\cup B) = 1$. Na događaju A, postoji konačan $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (\mathbf{1}_{A_k} - \mathbb{P}(A_k|\mathcal{F}_{k-1}))$. To znači da $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ ako i samo ako je $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty$. S druge strane, na B vrijedi $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} = \infty$ i $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty$. (Zaista, pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} < \infty$. Tada je $\limsup_{n\to\infty} X_n = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} - \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) < +\infty$. To znači da na B mora vrijediti$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} = \infty$. Slično se vidi da na B vrijedi i $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty$.) Budući da je $\{A_n \text{ b.m.p}\} = \{\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} = \infty\}$, slijedi $\{A_n \text{ b.m.p. }\} = \{\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\}$ g.s.

(b) Iz nezavisnosti familije $(A_n : n \ge 1)$ slijedi da je A_n nezavisan sa $\mathcal{F}_{n-1}$, pa je $\mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n)$. Pretpostavili smo da je $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Po dijelu (a) je $\{A_n \text{ b.m.p. }\} = \{\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}\} = \{\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty\} = \Omega$ g.s. Dakle, $\mathbb{P}(\{A_n \text{ b.m.p. }\}) = 1$.

Zadatak 1.94: Za $A \in \mathcal{F}^\infty$ definiramo $X_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n]$. Tada je $X = (X_n : n \ge 0)$ nenegativan martingal, pa po Korolaru 1.90 vrijedi $\lim_{n\to\infty} X_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\infty] = \mathbf{1}_A$ g.s. zbog $\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{F}_\infty$. S druge strane, iz $A \in \mathcal{F}^\infty$ slijedi $A \in \mathcal{F}^{n+1}$ za sve $n \ge 1$. Budući da su σ-algebre $\mathcal{F}_n$ i $\mathcal{F}^{n+1}$ nezavisne, slijedi da je A nezavisan od $\mathcal{F}_n$, te je $X_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n] = \mathbb{P}(A)$ za sve $n \ge 1$. Zaključujemo da je $\mathbf{1}_A = \mathbb{P}(A)$ g.s., odnosno $\mathbb{P}(A) = 0$ ili $\mathbb{P}(A) = 1$.

Zadatak 1.95: (a) Uočite da vrijedi

$$Z_n^\lambda = \prod_{i=1}^n e^{\lambda Y_i - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}\,,$$

te da je $\mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_i}\big] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$ (izračunajte). Zato je Z_n^λ produkt od n nezavisnih, nenegativnih slučajnih varijabli, svaka s očekivanjem 1. Sada tvrdnja slijedi iz Primjera 1.48.

(b) Budući da je $(Z_n^\lambda :, n \ge 0)$ nenegativan martingal, to po Korolaru 1.82 postoji $Z_\infty^\lambda = \lim_{n\to\infty} Z_n^\lambda \ge 0$ g.s. Uočimo da je $\log Z_n^\lambda = \lambda \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{2} n\lambda^2\sigma^2$, pa je

$$\frac{1}{n}\log Z_n^\lambda = \lambda \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\,.$$

Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi $(1/n)\sum_{i=1}^n Y_i = \mathbb{E}Y_i = 0$ g.s, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n^\lambda = -\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2 < 0 \qquad \text{g.s.}$$

Slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \log Z_n^\lambda = -\infty$, otkud $Z_\infty^\lambda = 0$ g.s.

Zadatak 1.96: (a) Da bismo pokazali da je $X_{n+1}-X_n$ nezavisna od $\mathcal{F}_n$ dovoljno je pokazati da je $X_{n+1}-X_n$ nezavisna od $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Budući da je $(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ Gaussov slučajni vektor, slijedi da je i njegova linearna transformacija $(X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1} - X_n)$ također Gaussov slučajni vektor. Pokažimo da je $\mathrm{Cov}(X_i, X_{n+1} - X_n) = 0$ za sve $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Budući da je X martingal, to je $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n] = 0$. Zato je

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{n+1} - X_n) = \mathbb{E}[X_i(X_{n+1} - X_n)] = \mathbb{E}\big[X_i\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n]\big] = 0\,.$$

Za normalan slučajan vektor, nekoreliranost komponenti ekvivalentna je nezavisnosti. Slijedi da su je $X_{n+1} - X_n$ nezavisan s $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Stavimo $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n - X_{n-1})$, $n \geq 1$. Po Zadatku 1.60 vrijedi $\langle X\rangle_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, pa je $\langle X\rangle_n - \langle X\rangle_{n-1} = \sigma_n^2$. Računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[e^{\lambda X_n - \frac{1}{2}\lambda^2\langle X\rangle_n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big] &= e^{\lambda X_{n-1} - \frac{1}{2}\lambda^2\langle X\rangle_n}\mathbb{E}\Big[e^{\lambda(X_n - X_{n-1})}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big] \\ &= e^{\lambda X_{n-1} - \frac{1}{2}\lambda^2\langle X\rangle_n}\mathbb{E}\Big[e^{\lambda(X_n - X_{n-1})}\Big]\,.\end{aligned}$$

Budući da je $X_n - X_{n-1} \sim N(0, \sigma_n^2)$, to je

$$\mathbb{E}\Big[e^{\lambda(X_n - X_{n-1})}\Big] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_n^2} = e^{\frac{1}{2}\lambda^2(\langle X\rangle_n - \langle X\rangle_{n-1})}\,.$$

Slijedi

$$\mathbb{E}\Big[e^{\lambda X_n - \frac{1}{2}\lambda^2\langle X\rangle_n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big] = e^{\lambda X_{n-1} - \frac{1}{2}\lambda^2\langle X\rangle_n}e^{\frac{1}{2}\lambda^2(\langle X\rangle_n - \langle X\rangle_{n-1})} = e^{\lambda X_{n-1} - \frac{1}{2}\lambda^2\langle X\rangle_{n-1}}\,,$$

t.j., Z^λ je martingal. Konvergencija gotovo sigurno slijedi iz Korolara 1.82.

Zadatak 1.97: (a) $\mathbb{E}[S_n - n\mu|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[S_{n-1} - (n-1)\mu + Y_n - \mu|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1} - (n-1)\mu + \mathbb{E}[Y_n - \mu] = S_{n-1} - (n-1)\mu$, $n \geq 1$.

(b) Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju primjenjenom na ograničeno vrijeme zaustavljanja $n \wedge T$, slijedi da je $\mathbb{E}[S_{n\wedge T} - (n\wedge T)\mu] = \mathbb{E}[S_{0\wedge T} - (0\wedge T)\mu] = \mathbb{E}[S_0] = 0$, otkud tvrdnja.

(c) Pretpostavimo $Y_1 \geq 0$, što povlači $S_n \geq 0$ za sve $n \geq 0$. Štoviše, $(S_{n\wedge T} : n \geq 0)$ je neopadajući niz slučajnih varijabli. Po (b) vrijedi $\mu\mathbb{E}[n\wedge T] = \mathbb{E}[S_{n\wedge T}]$, $n \geq 0$. Pustimo $n \to \infty$. Tada je $S_T = \lim_{n\to\infty} S_{n\wedge T}$ i $T = \lim_{n\to\infty} n\wedge T$. Po teoremu o monotonoj konvergenciji dobivamo $\mathbb{E}[S_T] = \mu\mathbb{E}[T] < \infty$. U općem slučaju, rastavimo $Y_1 = Y_1^+ - Y_1^-$, pa je $S_T = S_T^+ - S_T^-$. Po prvom dijelu dokaza, $\mathbb{E}[S_T^+] < \infty$, $\mathbb{E}[S_T^-] < \infty$, pa je S_T integrabilna i vrijedi $\mathbb{E}[S_T] = \mu\mathbb{E}[T]$.

(d) Kada bi vrijedilo $\mathbb{E}[T_a] < \infty$, iz Waldove jednakosti bismo dobili $\mathbb{E}[S_{T_a}] = \mu\mathbb{E}[T_a]$. Međutim, zbog $S_{T_a} = a$ i $\mu = 0$, to povlači $a = 0$. Kontradikcija!
(e) Računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[S_n^2 - n\sigma^2|\mathcal{F}_{n-1}\big] &= S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 + 2\mathbb{E}\big[S_{n-1}Y_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] + \mathbb{E}\big[Y_n^2 - \sigma^2|\mathcal{F}_{n-1}\big] \\ &= S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 + 2S_{n-1}\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[Y_n^2 - \sigma^2] \\ &= S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2\,,\end{aligned}$$

budući da je $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_n] = 0$, a $\mathbb{E}[Y_n^2] = \sigma^2$.
(f) Budući da je T vrijeme zaustavljanja, vrijedi $\{j \leq T\} = \{T \leq j-1\}^c \in \mathcal{F}_j$, te $\{k \leq T\} \in \mathcal{F}_{k-1}$. Zato je

$$\mathbb{E}[Y_j\mathbf{1}_{(j\leq T)}Y_k\mathbf{1}_{(k\leq T)}] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y_j\mathbf{1}_{(j\leq T)}Y_k\mathbf{1}_{(k\leq T)}|\mathcal{F}_k]\big] = \mathbb{E}\big[Y_j\mathbf{1}_{(j\leq T)}\mathbf{1}_{(k\leq T)}\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_{k-1}]\big] = 0\,,$$

zbog $\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[Y_k] = 0$. Nadalje, upotrebom istog trika,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2\mathbf{1}_{(k\leq T)}\big] &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{(k\leq T)}\mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]\big] \\ &= \sigma^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(k \leq T) < \infty\,,\end{aligned}$$

zbog $\mathbb{E}T < \infty$.
(g) Za $m < n$ korištenjem dijela (g) slijedi

$$\mathbb{E}\big[(S_{n\wedge T} - S_{m\wedge T})^2\big] = \mathbb{E}\big[(\sum_{k=m+1}^{n} Y_k\mathbf{1}_{(k\leq T)})^2\big] = \mathbb{E}\big[\sum_{k=m+1}^{n} Y_k^2\mathbf{1}_{(k\leq T)}\big]\,.$$

Kada $m, n \to \infty$, desna strana teži u nulu (zbog (f)), što pokazuje da je $(S_{n\wedge T} : n \geq 0)$ Cauchjev niz u $\mathcal{L}^2$, pa stoga i konvergira u $\mathcal{L}^2$ prema S_T.
(h) Po Waldovoj jednakosti primjenjenoj na martingal Z imamo $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^2] = \sigma^2\mathbb{E}[n \wedge T]$. Desna strana po teoremu o monotonoj konvergenciji teži prema $\mathbb{E}T$, dok lijeva strana, zbog dijela (g), teži prema $\mathbb{E}[S_T^2]$.
(i) Primjenimo gornja razmatranja na slučajne varijable $\tilde{Y}_i := Y_i - \mu$.
Zadatak 1.98: (a) Prvo uočimo da zbog $0 < \lambda < \pi(2a) \leq \pi/2$ vrijedi $0 < \cos\lambda < 1$. Za $n \geq 1$ računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] &= (\cos\lambda)^{-n}\mathbb{E}\big[\cos(\lambda S_{n-1} + \lambda Y_n)|\mathcal{F}_{n-1}\big] \\ &= (\cos\lambda)^{-n}\mathbb{E}\big[\cos\lambda S_{n-1}\cos\lambda Y_n - \sin\lambda S_{n-1}\sin\lambda Y_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] \\ &= (\cos\lambda)^{-n}\Big(\cos\lambda S_{n-1}\mathbb{E}[\cos\lambda Y_n] - \sin\lambda S_{n-1}\mathbb{E}[\sin\lambda Y_n]\Big) \\ &= (\cos\lambda)^{-n}\cos\lambda S_{n-1}\cos\lambda = X_{n-1}\,,\end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi zbog $\mathbb{E}[\cos\lambda Y_n] = \frac{1}{2}\cos\lambda + \frac{1}{2}\cos(-\lambda) = \cos\lambda$, i slično $\mathbb{E}[\sin\lambda Y_n] = 0$.

(b) Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju je $\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[X_0] = 1$. S druge strane,

$$X_{n\wedge T} = \frac{\cos \lambda S_{n\wedge T}}{(\cos\lambda)^{n\wedge T}} \geq \frac{\cos \lambda a}{(\cos\lambda)^{n\wedge T}}\,.$$

Slijedi,

$$1 = \mathbb{E}[X_{n\wedge T}] \geq \cos\lambda a\ \mathbb{E}\big[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\big]\,.$$

(c) Zbog $\cos\lambda a > 0$, (b) povlači da je $\mathbb{E}[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}] \leq (\cos\lambda a)^{-1}$. Kada $n\to\infty$, $(\cos\lambda)^{-n\wedge T} \to (\cos\lambda)^{-T}$ monotono, pa po teoremu o monotonoj konvergenciji dobivamo da je

$$\mathbb{E}[(\cos\lambda)^{-T}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}] \leq (\cos\lambda a)^{-1}\,.$$

Budući da je $0<\cos\lambda<1$, vidimo da je $\mathbb{P}(T=+\infty)=0$ (u suprotnom bi bilo $\mathbb{E}[(\cos\lambda)^{-T}] = +\infty$). Slijedi $\lim_{n\to\infty}|S_{n\wedge T}| = |S_T| = a$, i

$$\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T} = \lim_{n\to\infty} (\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda S_{n\wedge T}) = (\cos\lambda)^{-T}\cos(\lambda a) = X_T\,.$$

Nadalje, $|X_{n\wedge T}| \leq |(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda S_{n\wedge T})| \leq (\cos\lambda)^{-T}$ (što je integrabilno), pa možemo primjeniti teorem o dominiranoj konvergenciji i zaključiti da je $\mathbb{E}[X_T] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] = 1$. Dakle, $1 = \mathbb{E}[X_T] = (\cos\lambda a)\mathbb{E}\big[(\cos\lambda)^{-T}\big]$.

Zadatak 1.99: (a) Za $n\geq 1$ računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\Big|\mathcal{F}_{n-1}\right] &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left(\frac{q}{p}\,p + \frac{p}{q}\,q\right) \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

(b) Vrijedi

$$\left\{\sup_{1\leq m\leq n} S_m \geq k\right\} = \left\{\sup_{1\leq m\leq n}\left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k\right\} = \left\{\sup_{1\leq m\leq n} Z_m \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k\right\}.$$

Po Doobovoj maksimalnoj nejednakosti je

$$\left(\frac{q}{p}\right)^k \mathbb{P}\left(\sup_{1\leq m\leq n} Z_m \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k\right) \leq \mathbb{E}[Z_n] = 1\,.$$

Pustimo $n\to\infty$. Tada $\sup_{1\leq m\leq n} Z_m \nearrow \sup_{1\leq m} Z_m$, pa po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 1} S_n \geq k) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} Z_n \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k\,.$$

Za $q > p$ računamo

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{n\geq 1} S_n\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\geq 1} S_n \geq k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{q}{q-p}\,.$$

Zadatak 1.100: (a) Po jakom zakonu velikih brojeva, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu < 0$ g.s., otkud $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ g.s. Zato je niz $(S_n : n \geq 0)$ odozgo omeđen, pa je $W = \sup_n S_n < +\infty$ g.s.
(b) Za $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\mathbb{E}\Big[e^{\lambda S_{n+1}}\big|\mathcal{F}_n\Big] = e^{\lambda S_n}\mathbb{E}\Big[e^{\lambda X_{n+1}}\Big] = e^{\lambda S_n} e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}\,.$$

(c) Tražimo λ_0 takav da je $e^{\lambda_0\mu + \frac{1}{2}\lambda_0^2\sigma^2} = 1$, odnosno $\lambda_0\mu + \frac{1}{2}\lambda_0^2\sigma^2 = 0$. Jedinstveno strogo pozitivno rješenje je $\lambda_0 = -2\mu/\sigma^2$.
(d) Po Doobovoj maksimalnoj nejednakosti vrijedi

$$a\mathbb{P}\left(\sup_{1\leq m\leq n} e^{\lambda_0 S_m} \geq a\right) \leq \mathbb{E}\Big[e^{\lambda_0 S_n}\Big]\,,$$

pa je po teoremu o monotonoj konvergenciji

$$\mathbb{P}\left(e^{\lambda_0 W} \geq a\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} e^{\lambda_0 S_n} \geq a\right) \leq \frac{1}{a}\,.$$

Druga nejednakost sada jednostavno slijedi:

$$\mathbb{P}(W > t) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda_0 W} > e^{\lambda_0 t}\right) \leq e^{-\lambda_0 t}\,.$$

(e) Zbog $e^{\lambda w} = 1 + \lambda \int_0^w e^{\lambda t}\, dt$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[e^{\lambda W}\big] &= 1 + \lambda\mathbb{E}\Big[\int_0^W e^{\lambda t}\, dt\Big] = 1 + \lambda\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,W]}(t)e^{\lambda t}\, dt\Big] \\
&= 1 + \lambda \int_0^\infty \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{[0,W]}(t)e^{\lambda t}\big]\, dt \\
&= 1 + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbb{P}(W > t)\, dt \\
&\leq 1 + \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda_0 - \lambda)t}\,.
\end{aligned}$$

Ako je $\lambda < \lambda_0$, zadnji integral konvergira, pa je $\mathbb{E}\big[e^{\lambda W}\big] < \infty$.
Zadatak 1.101: (a) U Zadatku 1.97 je pokazano da je $S_n^2 - n\sigma^2$ martingal uz $\mathbb{E}Y_i = 0$ i $\mathbb{E}Y_i^2 = \sigma^2$. Zbog $\mathbb{E}Y_i^2 = 1/2 + 1/2 = 1$, slijedi da je $\langle S\rangle_n = n$.
(b) Zbog $|\mathrm{sign}(x)| \leq 1$ i nezavisnosti slučajnih varijabli Y_i, odmah se vidi da je $\mathbb{E}X_n^2 \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}Y_i^2 \leq n$. Dakle, proces X je kvadratno-integrabilan. Nadalje,

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} + \mathbb{E}[\mathrm{sign}(S_{n-1})Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} + \mathrm{sign}(S_{n-1})\mathbb{E}[Y_n] = X_{n-1}\,.$$

Proces $\langle X\rangle$ je neopadajući predvidiv proces iz Doobove dekompozicije submartingala X^2, te iz dokaza Doobove dekompozicije čitamo

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle_n - \langle X\rangle_{n-1} &= \mathbb{E}[X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}^2 \\
&= X_{n-1}^2 + 2X_{n-1}\mathbb{E}\big[\mathrm{sign}(S_{n-1})Y_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] + \mathbb{E}\big[(\mathrm{sign}(S_{n-1})Y_n)^2|\mathcal{F}_{n-1}\big] - X_{n-1}^2 \\
&= X_{n-1}\mathrm{sign}(S_{n-1})\mathbb{E}[Y_n] + (\mathrm{sign}(S_{n-1}))^2\mathbb{E}[Y_n^2] \\
&= (\mathrm{sign}(S_{n-1}))^2 = \mathbf{1}_{(S_{n-1}\neq 0)}\,.
\end{aligned}$$

Zbog $\langle X\rangle_0 = 0$ dobivamo

$$\langle X\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(S_{k-1}\neq 0)}\,.$$

(c) Neka je $|S_n| = N_n + B_n$ Doobova dekompozicija submartingala $(|S_n| : n \geq 0)$. Na događaju $\{S_n > 0\}$ vrijedi $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1} \geq 0$, te $|S_{n+1}| - |S_n| = S_{n+1} - S_n = Y_{n+1}$. Zato je

$$\mathbb{E}\big[(|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbf{1}_{(S_n>0)}|\mathcal{F}_n\big] = \mathbf{1}_{(S_n>0)}\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0\,.$$

Slično, na $\{S_n > 0\}$ je $|S_{n+1}| - |S_n| = S_n - S_{n+1} = -Y_{n+1}$, te je

$$\mathbb{E}\big[(|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbf{1}_{(S_n<0)}|\mathcal{F}_n\big] = \mathbf{1}_{(S_n>0)}\mathbb{E}[-Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0\,.$$

Iz dokaza Doobove dekompozicije imamo

$$\begin{aligned}
B_{n+1} - B_n &= \mathbb{E}\big[|S_{n+1}| - |S_n|\,\big|\,\mathcal{F}_n\big] \\
&= \mathbb{E}\big[(|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbf{1}_{(S_n>0)}|\mathcal{F}_n\big] + \mathbb{E}\big[(|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbf{1}_{(S_n<0)}|\mathcal{F}_n\big] \\
&\quad + \mathbb{E}\big[(|S_{n+1}| - |S_n|)\mathbf{1}_{(S_n=0)}|\mathcal{F}_n\big] \\
&= \mathbf{1}_{(S_n=0)}\mathbb{E}\big[|Y_{n+1}|\,\big|\,\mathcal{F}_n\big] = \mathbf{1}_{(S_n=0)}\,.
\end{aligned}$$

Zbog $B_0 = 0$ slijedi

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{(S_k=0)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(S_{k-1}=0)}$$

(usporedite s $\langle X\rangle_n$ u dijelu (b) i $\langle S\rangle_n$ u (a): $\langle S\rangle_n = \langle X\rangle_n + B_n$).

4.2 Markovljevi lanci s neprekidnim vremenom

Zadatak 2.30: Budući da tQ i sQ komutiraju, iz Zadatka 2.29 (d) slijedi da je $e^{(t+s)Q} = e^{tQ+sQ} = e^{tQ}e^{sQ}$, odnosno $P(t+s) = P(t)P(s)$. Nadalje, red potencija

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tQ)^n}{n!}$$

ima beskonačni radijus konvergencije. Stavimo $Q^n = (q_{ij}^{(n)})$, za $n \geq 1$, te $q_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$. Tada možemo pisati po komponentama

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} q_{ij}^{(n)}$$

gdje red konevrgira apsolutno i uniformno na $\mathbb{R}$. Slijedi da je P_{ij} diferencijabilna (kao red potencija), i derivaciju možemo izračunati tako da deriviramo član po član:

$$\begin{aligned} P'_{ij}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} q_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{d} q_{ik}^{(n-1)} q_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, q_{ik}^{(n-1)} \right) q_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{d} P_{ik}(t) q_{kj}\,. \end{aligned}$$

Dakle, $P'(t) = P(t)Q$. Na sličan način se, uz $q_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{d} q_{ik} q_{kj}^{(n-1)}$, dobije $P'(t) = QP(t)$. Dakle, $P(t) = e^{Qt}$ zadovoljava i jednažbu unaprijed i jednadžbu unatrag. Pretpostavimo da je $M(t)$ neko drugo rješenje diferencijalne jednadžbe unaprijed s početnim uvjetom $M(0) = I$. Tada vrijedi

$$\frac{d}{dt}(M(t)e^{-tQ}) = M'(t)e^{-tQ} + M(t)(-Qe^{-tQ}) = M(t)Qe^{-tQ} - M(t)Qe^{-tQ} = 0\,,$$

otkud slijedi da je $t \to M(t)e^{-tQ}$ konstanta. Budući daje za $t = 0$ jednaka I, slijedi $M(t)e^{-tQ} = I$ za sve $t \geq 0$, t.j., $M(t) = e^{tQ} = P(t)$ za sve $t \geq 0$.

Zadatak 2.31: Budući da je

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, q_{ij}^{(n)}\,,$$

vrijedi $P_{ij}(t) = \delta_{ij} + tq_{ij} + O(t^2)$, za $i \neq j$, te $P_{ii}(t) = 1 + q_{ii}t + O(t^2)$. Iz druge relacije slijedi $P_{ii}(t) \geq 0$ za sve dovoljno male $t \geq 0$. Neka je $i \neq j$. Pretpostavimo $q_{ij} < 0$. Tada će za dovoljno male $t \geq 0$ vrijediti i $P_{ij}(t) < 0$. Na isti način zaključujemo da ako je $P_{ij}(t) < 0$ za dovoljno male $t \geq 0$, tada je i $q_{ij} < 0$. Zaključujemo da postoji $\epsilon > 0$ takav da za sve $0 \leq t < \epsilon$ vrijedi $q_{ij} \geq 0$ sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, $i \neq j$, ako i samo ako je $P_{ij}(t) \geq 0$ za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Nadalje, neka je $P_{ij}(t) \geq 0$ za sve $0 \leq t < \epsilon$ i sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Za proizvoljni $s > 0$ odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $s/n < \epsilon$. Tada je za sve i, j

$$P_{ij}(s) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} P_{i\, i_1}(s/n) P_{i_1\, i_2}(s/n) \ldots P_{i_{n-1}\, j}(s/n) \geq 0\,.$$

Pretpostavimo da je $\sum_{j=1}^d q_{ij} = 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, d$. Tada je

$$\sum_{j=1}^d q_{ij}^{(n)} = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d q_{ik}^{(n-1)} q_{kj} = \sum_{j=1}^d q_{ik}^{(n-1)} \sum_{k=1}^d q_{kj} = 0\,.$$

Slijedi

$$\sum_{j=1}^d P_{ij}(t) = \sum_{j=1}^d \left(\delta_{ij} + \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!} q_{ij}^{(n)}\right) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^d q_{ij}^{(n)} = 1\,.$$

Obratno, ako je $\sum_{j=1}^d P_{ij}(t) = 1$ za sve $t \geq 0$, tada je

$$\sum_{j=1}^d q_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^d P_{ij}(t) = 0\,.$$

Zadatak 2.55:

(a) $q(0) = q(1) = 1/3$, $q(2) = 1/6$. Slijedi

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

(b) Traži se $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=2\}}\, ds$. Po Teoremu 2.54 taj limes je g.s. jednak $1/m_2 q(2)$ gdje je $m_2 = \mathbb{E}_2 T_2$ - očekivano vrijeme povratka u stanje 2. Po Propoziciji 2.46 je $m_2 = 1/(\lambda_2 q(2))$, gdje je $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ stacionarna distribucija. Izračunajmo prvo stacionarnu distribuciju λ rješavajući sustav $\lambda Q = 0$ uz uvjet $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Slijedi

$$\lambda = \left(\frac{9}{28}, \frac{3}{28}, \frac{16}{28}\right)\,.$$

Budući da je $\frac{1}{m_2 q(2)} = \frac{\lambda_2 q(2)}{q(2)} = \lambda_2$, traženi asimptotski postotak vremena koje Fabijan provede na klupi je $16/28 = 4/7$.

(c) Stavimo $f(0) = 400$, $f(1) = 300$ i $f(2) = 200$. Po Teoremu 2.54 vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\, ds = \sum_{j=0}^2 f(j)\lambda_j = 275\,.$$

Zadatak 2.56: Generatorska matrica lanca jednaka je

$$Q = \begin{bmatrix} -1/3 & 7/30 & 3/30 & 0 \\ 3/20 & -1/2 & 6/20 & 1/20 \\ 2/40 & 3/40 & -1/4 & 5/40 \\ 7/10 & 0 & 3/10 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tražimo stacionarnu distribuciju λ kao rješenje sustava $\lambda Q = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$. Rješenje sustava je

$$\lambda = \left(\frac{1983}{6756}, \frac{1370}{6756}, \frac{2964}{6756}, \frac{439}{6756}\right).$$

(a) $\lim_{t\geq 0} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=1\}}\, ds = \lambda_1 = \frac{1983}{6756} \approx 0.2934$. (b) Traži se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_s)\, ds = \lambda(f) = \frac{5055625}{1689} \approx 2993.27$$

Zadatak 2.58: (a) Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t - X_s = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = n+k, X_s = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = n+k \,|\, X_s = k)\mathbb{P}(X_s = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{k\,n+k}(t-s)P_{0k}(s) = P_{0n}(t-s)\sum_{k=0}^{\infty} P_{0k}(s) \\
&= P_{0n}(t-s) = \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}\, e^{-\lambda(t-s)}\,.
\end{aligned}$$

(b) Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_s = k, X_t - X_s = k) &= \mathbb{P}(X_s = k, X_t = n+k) = \text{ vidi gore} \\
&= P_{0n}(t-s)P_{0k}(s) = \mathbb{P}(X_s = k)\mathbb{P}(X_t - X_s = n)\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.59: Po pretpostavci je X Poissonov proces s parametrom λ. To znači da su vremena $(W_n : n \geq 1)$ između dolazaka posjetitelja nezavisna i eksponencijalna s parametrom λ. Vrijeme dolaska n-tog posjetitelja je $J_n = W_1 + \cdots + W_n$. Neka je V vrijeme u kojem prvi posjetitelj uđe u restoran. Vrijeme V možemo opisati na sljedeći način. Neka je T slučajna varijabla s geometrijskom distribucijom s parametrom $p \in (0,1)$, nezavisna od procesa X (odnosno slučajnih varijabli $(W_n : n \geq 0)$). Vrijedi $\mathbb{P}(T = n) = q^{n-1}p$, gdje je $q = 1 - p$. Interpretacija od T je da je $T = n$ ako se prvih $n-1$ posjetitelja okrenulo i otišlo konkurenciji, a n-ti posjetitelj je ušao u Fabijanovov restoran. Tada vrijedi $V = J_T$ iz čega možemo izračunati distribuciju od V. Prisjetimo se prvo da J_n ima $\Gamma(n,\lambda)$ -distribuciju čije je funkcija gustoće

$$f_n(y) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}\,, \quad y > 0\,.$$

Zato je za $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V > x) &= \mathbb{P}(J_T > x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(J_n > x, T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(J_n > x)\mathbb{P}(T = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_x^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}\, dy \right) q^{n-1} p \\
&= \int_x^{\infty} \lambda p e^{-\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \lambda^{n-1} y^{n-1} q^{n-1}\, dy \\
&= \int_x^{\infty} \lambda p e^{-\lambda y} e^{q\lambda y}\, dy \\
&= \int_x^{\infty} \lambda p e^{-\lambda p}\, dy = e^{-\lambda p x}\,.
\end{aligned}$$

Dakle, $V \sim \mathcal{E}(\lambda p)$. Nakon što je prvi posjetitelj ušao u Fabijanovom restoran, proces počinje ispočetka. Zaključujemo da su vremena između ulaska posjetitelja u Fabijanov restoran nezavisna i eksponencijalno distribuirana s parametrom λp. Zato je $\Xi = (\Xi_t : t \geq 0)$ Poissonov proces s parametrom λp. Takav postupak zove se *stanjivanje* Poissonovog procesa. Sada je očito $\Xi_t \sim \mathrm{Po}(\lambda p t)$, te $\mathbb{E}\Xi_t = \lambda p t$.

Na sličan način zaključujemo da je posjetitelji koji su otišli Fabijanovoj konkurenciji tvore Poissonov proces s parametrom λq.

Ako svaki drugi posjetitelj uđe u Fabijanov restoran, tada su vremena međudolazaka nezavisna, ali imaju $\Gamma(2, \lambda)$-distribuciju. Zato pripadajući proces ne može biti Markovljev.

Zadatak 2.60: Pokažimo prvo da je Z Markovljev proces. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, Z_{t_n} = i_n, \ldots, Z_{t_1} = i_1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z_{t_{n+1}} = i_{n+1}, Z_{t_n} = i_n, \ldots, Z_{t_1} = i_1)}{\mathbb{P}(Z_{t_n} = i_n, \ldots, Z_{t_1} = i_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} + Y_{t_{n+1}} - Y_{t_n} = i_{n+1} - i_n, X_{t_n} + Y_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} + Y_{t_1} = i_1)}{\mathbb{P}(Z_{t_n} = i_n, \ldots, Z_{t_1} = i_1)} \\
&= (X_{t_{n+1}} - X_{t_n} \text{ je nezavisno od } X_{t_n}, \ldots, X_{t_1} \text{ i slično za } Y) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n} + Y_{t_{n+1}} - Y_{t_n} = i_{n+1} - i_n)\,.
\end{aligned}$$

Isti izraz dobijemo i za $\mathbb{P}(Z_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, Z_{t_n} = i_n)$. Nadalje, zbog gornjeg računa imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_t = j \,|\, Z_s = i) &= \mathbb{P}(X_t - X_s + Y_t - Y_s = j - i) \\
&= (\text{zbroj nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli}) \\
&= \frac{((\lambda + \mu)(t - s))^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-(\lambda+\mu)(t-s)}\,.
\end{aligned}$$

Slijedi da je Z Poissonov proces s parametrom $\lambda + \mu$. Drugi način da se to vidi je pomoći procesa brojenja. Pogledajmo vrijeme prvog od mogućih događaja: u juhu je upala muha, i

pod stolom se pojavio miš. Minimum od ta dva eksponencijalna vremena ima eksponencijalnu distribuciju s parametrm $\lambda+\mu$. Dakle, vremena čekanja će biti $\mathcal{E}(\lambda+\mu)$ (i nezavisna), pa je pripadajući proces brojenja biti Poissonov s parametrom $\lambda+\mu$.
Zadatak 2.64: Pretpostavimo da je Y prolazan. Stavimo $\tau_i = \min\{n \geq 0 : Y_n = i\}$, te definiramo $h(j) := \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty)$. Tada je h omeđena funkcija (na $S \setminus \{i\}$), te budući da je Y prolazan, nije identički jednaka nuli. Za $j \neq i$ računamo

$$\begin{aligned} h(j) &= \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty, X_1 = k) \\ &= \sum_{k\neq i} \mathbb{P}_j(\tau_i = \infty, X_1 = k) = \sum_{k\neq i} \mathbb{P}_j(X_1 = k)\mathbb{P}_j(\tau_i = \infty \,|\, X_1 = k) \\ &= \sum_{k\neq i} \mathbb{P}_j(X_1 = k)\mathbb{P}_k(\tau_i = \infty) = \sum_{k\neq i} p_{jk} h(k) \end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da postoji ograničena funkcija $h : S \setminus \{i\} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $h(j) = \sum_{k\neq i} p_{jk}h(k)$ koja nije identički jednaka nuli. Proširimo h na i s $h(i) = 0$. Neka je $\alpha = \sum_{k\in S} p_{ik}h(k)$. Možemo pretpostaviti da je $\alpha \leq 0$ (u suprotnom zamijnimo h s $-h$). Tada vrijedi

$$h(j) = \sum_{k\in S} p_{jk}h(k)\,, j \neq i\,, \quad h(i) = 0 \geq \alpha = \sum_{k\in S} p_{ik}h(k)\,.$$

Budući da je h omeđena, dodavanjem konstante možemo pretpostaviti da je h nenegativna. Tada gornje relacije kažu da je h je superharmonijska za Y. Iz pretpostavke slijedi da h nije konstanta. Iz Primjera 1.74 slijedi da je Y prolazan (po tom primjeru svaka superharmonijska funkcija ireducibilnog povratnog lanca je konstantna).
Zadatak 2.66: Skup stanja procesa X je $S = \{0, 1, 2\}$. Izračunajmo intenzitete prelazaka među stanjima. Ako je sustav u stanju 0, intenzitet prelaska u stanje 1 je λ. Ako je sustav u stanju 1, gledamo minimum dva eksponencijalna vremena - vrijeme dolaska nove stranke, E_λ, i vrijeme posluživanja stranke u sustavu, E_μ. Vrijedi

$$\pi_{12} = \mathbb{P}(E_\lambda < E_\mu) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,, \quad \pi_{10} = \mathbb{P}(E_\mu < E_\lambda) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,.$$

Ako je sustav u stanju 2, više ne prima stranke, te u stanje 1 prelazi na kraju posluživanja što se događa s intenzitetom μ. Slijedi da je generatorska matrica oblika

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

Stacionarnu distribuciju $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$ tražimo iz $\nu Q = 0$ i $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = 1$. Slijedi

$$\nu = \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu}, \frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu}, \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu} \right).$$

U zadnjem dijelu zadatka traži se $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\, ds = \nu_0$.

Zadatak 2.67: Neka je E slučajna varijabla koja označava trajanje posluživanja, $E \sim \mathcal{E}(\mu)$. Označimo niz dolazaka s $(T_n : n \geq 1)$. Ako je $(W_n : n \geq 1)$ niz vremena među dolascima, tada su $W_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$, nezavisne, i nezavisne s E. Nadalje, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Neka je N broj dolazaka za vrijeme jednog posluživanja. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(J_k < E < J_k + W_{k+1}) \\
&= \iiint\limits_{u<v<u+w} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, \mu e^{-\mu v}\, \lambda e^{-\lambda w}\, dw\, dv\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v}\, dv \int_{v-u}^\infty \lambda e^{-\lambda w}\, dw \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v} e^{-\lambda(v-u)}\, dv \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1}\, du \int_u^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)v}\, dv \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^\infty u^{k-1} e^{-(\lambda+\mu)u}\, du \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{(\lambda+\mu)^k}\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k .
\end{aligned}$$

Dakle, N ima geometrijsku razdiobu (na $\mathbb{Z}_+$) s parametrom $\mu/(\lambda+\mu)$.

Zadatak 2.69:

(i) Generatorska matrica Q jednaka je

$$Q = \begin{pmatrix} -4\lambda-\alpha & 3\lambda & \lambda & \alpha \\ 5\lambda & -7\lambda-\alpha & 2\lambda & \alpha \\ 0 & 0 & -2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Označimo sa B događaj da proces koji počinje u stanju A ne posjeti stanja P i T do trenutka t. Označimo sa $W_1 = J_1$ prvo vrijeme čekanja (u stanju A), odnosno vrijeme prvog skoka. Događaj B će se dogoditi ukoliko proces do trenutka t nije izašao iz stanja A (t.j., $J_1 > t$), ili je izašao i otišao u stanje M (t.j., $J_1 \leq t$ i $X_{J_1} = M$). Slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A[B] &= \mathbb{P}_A[B, J_1 > t] + \mathbb{P}_A[B, J_1 \leq t] \\
&= \mathbb{P}_A[J_1 > t] + \mathbb{P}_A[J_1 \leq t, X_{J_1} = M] \\
&= e^{-(4\lambda+\alpha)t} + \int_0^t (4\lambda+\alpha)e^{-(4\lambda+\alpha)s}\frac{\alpha}{4\lambda+\alpha}\, ds \\
&= e^{-(4\lambda+\alpha)t} + (1 - e^{-(4\lambda+\alpha)t})\frac{\alpha}{4\lambda+\alpha}
\end{aligned}$$

(iii) Matrični oblik Kolmogorovljevih jednadžbi unatrag je

$$P'(t) = QP(t)\,.$$

Odavde izlazi $p'_{TM}(t) = -2\alpha p_{TM}(t) + 2\alpha p_{MM}(t)$, odnosno

$$p'_{TM}(t) = -2\alpha p_{TM}(t) + 2\alpha\,.$$

(iv) Stavimo $p(t) = p_{TM}(t)$. Rješenje homogene jednadžbe $p'(t) = -2\alpha p(t)$ je $p(t) = Ce^{-2\alpha t}$. Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo metodom varijacije konstanti: $p(t) = C(t)e^{-2\alpha t}$. Uvrštavanjem slijedi diferencijalna jednadžba za $C(t)$: $C'(t) = 2\alpha e^{2\alpha t}$, čije je rješenje $C(t) = e^{2\alpha t} + C$. Dakle, $p(t) = (e^{2\alpha t} + C)e^{-2\alpha t} = 1 + Ce^{-2\alpha t}$. Iz početnog uvjeta $p(0) = 0$ slijedi $C = -1$, i konačno $p(t) = 1 - e^{-2\alpha t}$.

4.3 Procesi obnavljanja

Zadatak 3.3: Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Z(A) &= \mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(X + Y \in A) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{(x,y) :\, x + y \in A\}) \\
&= \iint\limits_{\{(x,y):\, x+y\in A\}} d\mathbb{P}_X(x)\, d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{A-y} d\mathbb{P}_X(x)\, d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int \mathbb{P}_X(A - y)\, d\mathbb{P}_Y(y)\,.
\end{aligned}$$

Zbog simetrije vrijedi i druga jednakost. Uzmimo sada $A = (-\infty, x]$. Tada je

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}_Z((-\infty, x]) = \int \mathbb{P}_X((-\infty, x] - y)\, d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int \mathbb{P}_X((-\infty, x - y])\, d\mathbb{P}_Y(y) = \int F_X(x - y)\, d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - y)\, dF_Y(y)\,.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da su X i Y apsolutno neprekidne. Tada gornju jednakost možemo pisati

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-y} f_X(u)\, du \right) f_Y(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f_X(u - y)\, du \right) f_Y(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u - y) f_Y(y)\, dy \right) du = \int_{-\infty}^{x} (f_X * f_Y)(u)\, du\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 3.4: Pokazali smo da je $*$ komutativna operacija. Asocijativnost slijedi iz asocijativnosti zbrajanja slučajnih varijabli. Budući da za svaku slučajnu varijablu X vrijedi $X = X + 0 = 0 + X$, slijedi da je $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_0 * \mathbb{P}_X$. Međutim, očito je $\mathbb{P}_0 = \delta_0$.

Zadatak 3.9: Vrijedi $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \sim \Gamma(2n, 1)$, pa je

$$F^{n*}(t) = \int_0^t \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} e^{-x}\, dx\,, \quad n \geq 1.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} e^{-x}\, dx \\ &= 1 + \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) e^{-x}\, dx = 1 + \int_0^t \sinh x e^{-x}\, dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^t (e^x - e^{-x}) e^{-x}\, dx = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t (1 - e^{-2x})\, dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(t + \left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \right) \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} e^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Zadatak 3.16: Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $V(n) = V(\{0\}) + \sum_{k=1}^{n} V((k-1, k])$. Budući da po Blackwellovom teoremu (uz $x = 1$) niz $(V((n-1, n]) : n \geq 1)$ konvergira prema $\frac{1}{\mu}$, taj niz konvergira i u smisli Cesara, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{V(\{0\})}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} V((k-1, k])}{n} = \frac{1}{\mu}\,.$$

Nadalje, za $t > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n - 1 \leq t < n$. Zbog

$$\frac{V(n-1)}{n} \leq \frac{V(t)}{t} \leq \frac{V(n)}{n-1}$$

i dokazanog, slijedi $\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

Zadatak 3.18: Po Propoziciji 3.17 vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\mathbb{E} Q_1}{\mu}\,.$$

Ovdje je $R = (R_t : t \geq 0)$ proces obnavljanja s nagradom, Q_1 slučajna nagrada (t.j., trošak), a μ očekivano vrijeme između dolazaka gostiju. Zadano je $\mu = 5/60 = 1/12$ (na sat). Izračunamo

$$\mathbb{E} Q_1 = \int_{100}^{1000} \frac{1000}{9} x^{-}2\, dx = \frac{1000}{9} \log \frac{1000}{100} = \frac{1000}{9} \log 10\,.$$

Zato je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = 12 \frac{1000}{9} \log 10 = \frac{4000}{3} \log 10 \approx 3070,11 \text{ Kn}$$

Zadatak 3.22: (a) Stavimo $\|g\| = \sup_{0\le s\le t} |g(s)|$. Tada je za sve $s \le t$,

$$\begin{aligned} |(U*g)(s)| &= \Big|\int_0^s g(s-x)\,dU(x)\Big| \le \int_0^s |g(s-x)|\,dU(x) \\ &\le \int_0^s \|g\|\,dU(x) = \|g\|U(s) \le \|g\|U(t)\,. \end{aligned}$$

Napomena: integral $\int_0^s dU(s)$ interpretira se kao integral $\int_{[0,s]} dU(s) = U(s) - U(0-) = U(s)$.
(b) Neka je $t \ge 0$, te $(t_n)_{n\ge 1}$ opadajući niz takav da je $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Tada je

$$(U*g)(t_n) = \int_0^{t_n} g(t_n - x)\,dU(x) = \int_0^{t_1} \mathbf{1}_{[0,t_n]}(x) g(t_n - x)\,dU(x)\,,$$

Nadalje vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{[0,t_n]}(x) = \mathbf{1}_{[0,t]}(x)$ za sve $x \in [0,t_1]$, te zbog neprekidnosti od g zdesna, $\lim_{n\to\infty} g(t_n - x) = g(t-x)$ za sve $x \in [0,t_1]$. Zbog $\big|\mathbf{1}_{[0,t_n]}(x) g(t_n - x)\big| \le \|g\|_{[0,t_1]}$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_1} \mathbf{1}_{[0,t_n]}(x) g(t_n - x)\,dU(x) = \int_0^{t_1} \mathbf{1}_{[0,t]}(x) g(t-x)\,dU(x) = \int_0^t g(t-x)\,dU(x) = (U*g)(t)\,.$$

Zadatak 3.27: Za $x \in \mathbb{R}^n$ neka je $A_x = \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A\}$ prerez skupa A u x. Tada je A_x Borelov podskup u $\mathbb{R}^m$. Po Fubinijevom teoremu vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X,Y)\in A) &= \iint_A \mathbb{P}_{(X,Y)}(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_{A_x}(y)\,\mathbb{P}_Y(dy) \right) \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}_Y(A_x)\,\mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}(Y \in A_x)\,\mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}((x,Y)\in A)\,\mathbb{P}_X(dx)\,. \end{aligned}$$