Pitanja vezana za predavanja iz kolegija Slučajni procesi

ZORAN VONDRAČEK
zoran.vondracek@math.hr

1. Imam pitanje u vezi jednog teorema iz kolegija Slučajni procesi, radi se o Teoremu 1.84 (Doobova maksimalna nejednakost). Točnije zanima me sljedeći dio dokaza: "Budući da je T omeđeno vrijeme zaustavljanja, $T \leq n$, po Teoremu 1.71 (submartingalna verzija) vrijedi $\mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_n)$", tu nisam siguran kako po Tm.1.71 slijedi navedena nejednakost.
   Odgovor: Tu nedostaje dio dokaza. Vratimo se na Teorem 1.63 i Propoziciju 1.68. Submartingalna verzija Propozicije 1.68 kaže da je zaustavljen proces X^T submartingal, te da vrijedi $\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_{T\wedge n}$. To se dokazuje korištenjem martingalne transformacije pomoću predvidivog procesa $(H_m)_{m\geq 0}$ definiranog s $H_0 = 0$ te $H_m = 1_{m\leq T}$, $m \geq 1$. Definiramo novi proces $K = (K_m)_{m\geq 0}$ s $K_m := 1 - H_m$, $m \geq 0$. Tada je K opet nenegativan i predvidiv, te je po Teoremu 1.63 proces $K \cdot X$ submartingal, otkud $\mathbb{E}(K \cdot X)_0 \leq \mathbb{E}(K \cdot X)_n$. Nadalje, zbog $H_m + K_m = 1$ imamo $X = H \cdot X + K \cdot X$. Također, zbog $K_0 = 1$ vrijedi $(K \cdot X)_0 = K_0X_0 = X_0$. Izračunajmo još $(K \cdot X)_n$. Iz dokaza Propozicije 1.68 vidimo da je $(H \cdot X)_n = X_{T\wedge n} - X_0$. Zato je
   $$(K \cdot X)_n = X_n - (H \cdot X)_n = X_n - (X_{T\wedge n} - X_0).$$
   Nejednakost $\mathbb{E}(K \cdot X)_0 \leq \mathbb{E}(K \cdot X)_n$ postaje $\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}(X_n - X_{T\wedge n}) + \mathbb{E}X_0$, otkud
   $$\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_n\,.$$
   Budući da je $T \leq n$, slijedi tražena nejednakost.

2. Prije Teorema 3.24 o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja jednadžbe obnavljanja je diskusija koja glasi ovako: "Ako je F funkcija distribucije slučajne varijable Y takve da je $m = F(\infty) = P(Y < \infty) = 1$, tada po Propoziciji 3.12 vrijedi $U(t) < \infty$ za sve $t \geq 0$. Ako je $m < 1$, definiramo $F_m := F/m$ za koju vrijedi $F_m(\infty) = 1$." Mene nije jasno kako je moguće uopće da je $F(\infty) < 1$. Nije li svojstvo svake funkcije distribucije da je $F(\infty) = 1$?
   Odgovor: U ovom odjeljku funkcija F nije nužno funkcija distribucije (nenegativne) slučajne varijable. Na vrhu stranice 101 piše kakva svojstva ima funkcija F koja se javlja u jednadžbi obnavljanja. Traži se da je $F(\infty) < \infty$ (a ne nužno $F(\infty) = 1$). Vezano za citirani tekst, u (3.24) je dodatna pretpostavka da je $F(\infty) \leq 1$. To znači da je F funkcija distribucije nenegativne i moguće defektne slučajne varijable Y. Za slučajnu varijablu kažemo da je defektna ako je $\mathbb{P}(Y = \infty) > 0$. Primjer defektne slučajne varijable je prvo vrijeme pogađanja T stanja 1 nesimetrične jednostavne slučajne šetnje koja se s većom vjerojatnosti pomiče nalijevo nego na desno. Takva šetnja s pozitivnom vjerojatnosti nikad ne pogađa stanje 1, te za takve elementarne događaje ω stavimo $T(\omega) = \infty$. Za defektnu slučajnu varijablu Y vrijedi $1 > \mathbb{P}(Y < \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(Y \leq t) = \lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty)$.

3. Zanima me tvrdi li se u spomenutom Teoremu 3.24 da rješenje jednadžbe obnavljanja postoji i jedinstveno je te da je ono lokalno ograničeno ili se tvrdi da postoji rješenje koje je lokalno ograničeno i jedinstveno, ali onda možda mogu možda postojati druga rješenja koja nisu lokalno ograničena.
   Odgovor: Teorem tvrdi (1) da postoji lokalno ograničeno rješenje, i (2) da je lokalno ograničeno rješenje jedinstveno. U principu bi mogla postojati druga rješenja koja nisu lokalno ograničena.