MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

SLUČAJNI PROCESI

Pisana provjera znanja - 18. lipnja 2020.

(Knjige, bilježnice, dodatni papiri i kalkulatori **nisu** dozvoljeni!)

1.

(a1) (5 bodova) Neka je X nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je $\mathbb{E}[X] < \infty$, te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Definirajte $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$.

(a2) (7 bodova) Neka je X Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda \in (0, \infty)$, Y Poissonova s parametrom $\mu \in (0, \infty)$, te pretpostavimo da su X i Y nezavisne. Stavimo $Z := X + Y$. Za $n \in \mathbb{Z}_+$ izračunajte $\mathbb{P}(X = k | Z = n)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, te izvedite formulu za $\mathbb{E}[X|Z]$.

(b1) (5 bodova) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F}$, neka je $X = (X_n)_{n \geq 0}$ adaptiran slučajni proces, te neka je $H = (H_n)_{n \geq 0}$ predvidiv slučajni proces. Definirajte martingalnu transformaciju procesa X po procesu H.

(b2) (8 bodova) Neka je $X = (X_n)_{n \geq 0}$ integrabilan slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Dokažite da je X $\mathbb{F}$-martingal ako i samo za svaki omeđen $\mathbb{F}$-predvidiv proces $H = (H_n)_{n \geq 0}$ takav da je $H_0 = 0$ vrijedi $\mathbb{E}\big[(H \cdot X)_n\big] = 0$ za sve $n \geq 0$. Ovdje je $((H \cdot X)_n)_{n \geq 0}$ martingalna transformacija procesa X po procesu H. (Treba dokazati oba smjera.)

Rješenje:

(a1) *Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$* je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to [0, \infty]$ takva da vrijedi

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A X\big] \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{G}\,.$$

(a2) Koristimo poznatu činjenicu da je zbroj nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli opet Poissonova slučajna varijabla, odnosno, preciznije, $Z \sim P(\lambda + \mu)$. Za $0 \leq k \leq n$ računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k|Z = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, Z = n)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(Z = n)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \; \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k} \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Iz gornjeg izraza zaključujemo da, uvjetno na $Z = n$, X ima binomnu distribuciju s parametrima n i $\lambda/(\lambda + \mu)$. Slijedi da je uvjetno na Z, $X \sim B(Z, \lambda/(\lambda + \mu))$. Zato je $\mathbb{E}[X|Z]$ jednako očekivanju binomne distribucije $B(Z, \lambda/(\lambda + \mu))$, tj.

$$\mathbb{E}[X|Z] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} Z\,.$$

(b1) *Martingalna transformacija procesa X po procesu H* je slučajni proces $H \cdot X = ((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ definiran sa

$$(H \cdot X)_n = H_0 X_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1}), \quad n \geq 0 .$$

(b2) Neka je X martingal. Uočimo prvo da je $\mathbb{E}|(H \cdot X)_n| \leq |H_0||X_0| + \sum_{m=1}^{n} |H_m||X_m - X_{m-1}|$, što je integrabilno kao zbroj produkata integrabilnih slučajnih varijabli s ograničenim slučajnim varijablama. Također je očito da je $H \cdot X$ adaptiran. Za $n \geq 0$ računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[(H \cdot X)_{n+1}|\mathcal{F}_n\big] &= \mathbb{E}\big[(H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n\big] \\ &= (H \cdot X)_n + \mathbb{E}\big[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n\big] \\ &= (H \cdot X)_n + H_{n+1}\mathbb{E}\big[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n\big] \\ &= (H \cdot X)_n , \end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog $\mathcal{F}_n$-izmjerivosti od H_{n+1}, a četvrti zbog $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$. Dakle, $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ je martingal. Budući da zbog pretpostavke $H_0 = 0$ vrijedi $(H \cdot X)_0 = 0$, slijedi da je $\mathbb{E}[(H \cdot X)_n] = \mathbb{E}[(H \cdot X)_0] = 0$.

Obratno, treba pokazati da za svaki $n \geq 0$ vrijedi $X_{n-1} = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$, odnosno da za svaki $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ vrijedi $\mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{n-1}\mathbf{1}_A]$. Definirajmo slučajni proces $H = (H_j : j \geq 0)$ na sljedeći način:

$$H_j := \begin{cases} \mathbf{1}_A , & j = n , \\ 0 , & j \neq n . \end{cases}$$

Tada je H nenegativan, predvidiv proces ($H_n = \mathbf{1}_A$ je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva). Po pretpostavci je $\mathbb{E}\big[(H \cdot X)_n\big] = 0$. Međutim,

$$(H \cdot X)_n = H_0 X_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j (X_j - X_{j-1}) = \mathbf{1}_A (X_n - X_{n-1}) .$$

Slijedi $0 = \mathbb{E}\big[(H \cdot X)_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A (X_n - X_{n-1})\big]$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

2.

(a1) (5 bodova) Iskažite teorem o g.s. konvergenciji submartingala.

(a2) (8 bodova) Dokažite teorem o g.s. konvergenciji submartingala.

(b) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Definiramo slučajnu šetnju $X = (X_n : n \geq 0)$ sa $X_0 = 1$ i $X_n = 1 + Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$ (uočite da šetnja kreće iz stanja 1). Neka su $T_0 = \{n \geq 0 : X_n = 0\}$ i $T_5 = \{n \geq 0 : X_n = 5\}$ vremena pogađanja stanja 0, odnosno 5, a $T = \min\{n \geq 0 : X_n \in \{0, +5\}\} = \min\{T_0, T_5\}$.

(b1) (6 bodova) Dokažite da vrijedi $\mathbb{E}X_T = 1$. Detaljno argumentirajte!

(b2) (6 bodova) Izračunajte $\mathbb{P}(T_0 < T_5)$.

Rješenje:

(a1) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal takav da vrijedi

$$\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty .$$

Tada postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s., te vrijedi $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

(a2) Neka su $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Zbog $(X_n - a)^+ \leq X_n^+ + |a|$, iz Leme 1.80 (nejednakost-prelazaka) slijedi da je za sve $n \geq 0$

$$\mathbb{E}U_n([a,b]) \leq \frac{1}{b-a}\Big(|a| + \mathbb{E}X_n^+\Big) \leq \frac{1}{b-a}\Big(|a| + \sup_m \mathbb{E}X_m^+\Big) < \infty .$$

Budući da niz $(U_n([a,b]) : n \geq 0)$ monotono raste prema $U([a,b])$, po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da je

$$\mathbb{E}U([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}U_n([a,b]) \leq \frac{1}{b-a}\Big(|a| + \sup_m \mathbb{E}X_m^+\Big) < \infty .$$

Zaključujemo da je $U([a,b]) < \infty$ g.s. Iz činjenice da je prebrojiva unija $\mathbb{P}$-nul skupova opet $\mathbb{P}$-nul skup, slijedi

$$\mathbb{P}\Big(U([a,b]) < \infty \text{ za sve } a, b \in \mathbb{Q}, a < b\Big) = 1 .$$

Iz Leme 1.79 (o konvergenciji nizova) zaključujemo da je $\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$ g.s. Definiramo $X_\infty := \limsup_{n\to\infty} X_n$ na događaju na kojem je $\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$, te $X_\infty = 0$ inače. Tada je X_∞ slučajna varijabla i vrijedi $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s.

Još preostaje pokazati da je $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$. Budući da iz $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. slijedi također $X_\infty^+ = \lim_{n\to\infty} X_n^+$, po Fatouovoj lemi imamo

$$\mathbb{E}X_\infty^+ \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^+ \le \sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty\,.$$

Nadalje, zbog $\mathbb{E}X_0 \le \mathbb{E}X_n$, imamo $\mathbb{E}X_n^- = \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n \le \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0$. Ponovno pomoću Fatouove leme

$$\mathbb{E}X_\infty^- \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^- < \infty\,.$$

Dakle, $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

(b1) Slučajni proces X je jednostavna simetrična slučajna šetnja koja kreće iz stanja 1, te je stoga martingal. Po Propoziciji1.68, zaustavljen proces X^T je također martingal. Štoviše, zbog $|X_{T\wedge n}| \le 5$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, X^T je omeđen martingal. Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju vrijedi $\mathbb{E}X_T^T = \mathbb{E}X_0^T = \mathbb{E}X_0$, što povlači $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_T^T = \mathbb{E}X_0 = 1$.

Alternativno: za svako $n \in \mathbb{N}$ je $T \wedge n = \min\{T, n\}$ ograničeno vrijeme zaustavljanja. Zato je po teoremu o opcionalnom zaustavljanju $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0 = 1$. Budući da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T$ g.s. Nadalje, $|X_{T\wedge n}| \le 5$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa možemo primijeniti teorem o dominiranoj konvergenciji i zaključiti da je $\mathbb{E}X_T = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} = 1$.

Napomena: T **nije** omeđeno vrijeme zaustavljanja, a X **nije** ograničen proces. Zato se **ne mogu** direktno primijeniti slučajevi (i) i (ii) teorema o opcionalnom zaustavljanju (Teorem 1.71). Točno je da je $\mathbb{E}T < \infty$ te $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \le 1$, te bi se mogao primjeniti slučaj (iii) tog teorema. Međutim, za to prvo treba dokazati da je $\mathbb{E}T < \infty$. To nije očito, jer je $\mathbb{E}T_0 = \mathbb{E}T_5 = \infty$.

(b2) Iz dijela (b1) imamo

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_T, T_0 < T_5] + \mathbb{E}[X_T, T_5 < T_0] = \mathbb{E}[X_{T_0}, T_0 < T_5] + \mathbb{E}[X_{T_5}, T_5 < T_0] \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(T_0 < T_5) + 5\mathbb{P}(T_5 < T_0) = 5\mathbb{P}(T_5 < T_0). \end{aligned}$$

Slijedi $\mathbb{P}(T_5 < T_0) = 1/5$, otkud $\mathbb{P}(T_0 < T_5) = 4/5$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

3.

(a1) (5 bodova) Iskažite Kolmogorovljevu integralnu jednadžbu unatrag za funkcije prijelaza $P_{ij}(t)$ regularnog Markovljevog lanca s neprekidnim vremenom $X = (X_t)_{t\geq 0}$. Definirajte sve pojmove koji se pojavljuju.

(a2) (7 bodova) Iz integralne jednadžbe unatrag izvedite Kolmogorovljeve diferencijalne jednadžbe unatrag. U izvodu možete pretpostaviti da su funkcije prijelaza $P_{ij}(t)$ diferencijabilne i da je prostor stanja S konačan.

(b) Za vrijeme svoje poluprofesionalne košarkaške karijere Fabijan je fluktuirao između tri stanja: 1–potpuno sposoban za igru, 2–lakše ozlijeđen, ali može igrati, i 3–teže ozlijeđen i sjedi na klupi. Klupski je liječnik nakon dugotrajnog promatranja zaključio da se Fabijanova stanja mogu modelirati Markovljevim procesom $X = (X_t)_{t\geq 0}$ s generatorskom matricom (parametri su zadani u danima)

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

(b1) (4 boda) Fabijan je teže ozlijeđen. Izračunajte očekivani broj dana da bi Fabijan bio potpuno sposoban.

(b2) (5 bodova) Izračunajte stacionarnu distribuciju.

(b3) (4 boda) Izračunajte asimptotski očekivani postotak dana u kojima je Fabijan potpuno sposoban za igru.

Rješenje:

(a1) Za sve $i, j \in S$ i $t > 0$ vrijedi

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q(i)t} + \int_0^t q(i) e^{-q(i)s} \sum_{k\neq i} \pi_{ik} P_{kj}(t-s)\, ds\,. \tag{1}$$

Ovdje je $P_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$, $q(i)$ parametar eksponencijalne distribucije vremena čekanja u stanju $i \in S$, π_{ik} prijelazna vjerojatnost pripadajućeg lanca skokova iz i u k.

(a2) Jednakost (1) možemo napisati u obliku

$$P_{ij}(t) = e^{-q(i)t} \left(\delta_{ij} + \int_0^t q(i) e^{q(i)u} \big(\sum_{k\neq i} \pi_{ik} P_{kj}(u) \big)\, du \right)\,. \tag{2}$$

Budući da smo pretpostavili da je $P_{ij}(t)$ diferencijabilna, možemo derivirati lijevu stranu u (1). Funkcija

$$t \mapsto \int_0^t q(i) e^{q(i)u} \sum_{k\neq i} \pi_{ik} P_{kj}(u)\, du$$

je također diferencijabilna funkcija od t kao integral produkta neprekidnih i ograničenih funkcija $q(i)e^{q(i)u}$ i $\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)$ (suma je konačna po pretpostavci), te vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\delta_{ij}+\int_0^t q(i)e^{q(i)u}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)\,du\right)=q(i)e^{q(i)t}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(t)\,.$$

Sada deriviramo lijevu i desnu stranu jednakosti (2): za sve $i,j\in S$,

$$\begin{aligned}
P'_{ij}(t) &= -q(i)e^{-q(i)t}\left(\delta_{ij}+\int_0^t q(i)e^{q(i)u}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)\,du\right)+e^{-q(i)t}q(i)e^{q(i)t}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(t)\\
&= -q(i)P_{ij}(t)+q(i)\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(t)=\sum_{k\in S}\big(-q(i)\delta_{ik}+q(i)\pi_{ik}P_{kj}(t)\big)\\
&= \sum_{k\in S}q_{ik}P_{kj}(t).
\end{aligned}$$

gdje smo koristili vezu $q(i)\pi_{ik}=q_{ik}$. U matričnom obliku dobivamo $P'(t)=QP(t)$.

(b) (b1) Vrijeme čekanja u stanju "teže ozlijeđen" je eksponencijalno s parametrom $1/12$. Iz stanja "teže ozlijeđen" Fabijan može prijeći samo u stanje "potpuno sposoban". Slijedi da je očekivani broj dana jednak 12.

(b2) Stacionarna distribucija $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ je rješenje sustava $\lambda Q=0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. Rješavanjem dobivamo $\lambda=(\frac{6}{14},\frac{1}{14},\frac{7}{14})$.

(b3) Traži se $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_t=1\}}\,dt$. Po ergodskom teoremu (Teorem 2.54), taj limes je g.s. jednak $\lambda_1=6/14$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4.

(a) (5 bodova) Neka je $(S_n)_{n\geq 0}$ čisti proces obnavljanja. Definirajte pripadajući brojeći proces i funkciju obnavljanja.

(b) (5 bodova) Iskažite elementarni teorem obnavljanja.

(c) (7 bodova) Dokažite Waldovu jednakost.

(d) Dolasci autobusa linije A na autobusno stajalište tvore Poissonov proces sa stopom dva autobusa u satu, dok dolasci autobusa linije Z tvore nezavisan Poissonov proces sa stopom od 6 autobusa u satu. Dolazak putnika na autobusno stajalište tvori Poissonov proces sa stopom 30 putnika po satu nezavisan od dolazaka autobusa.

(d1) (4 boda) Dolazite na autobusno stajalište. Nađite vjerojatnost da će autobus linije Z doći prije autobusa linije A.

(d2) (4 boda) Nađite distribucija broja putnika koji dolaze na stajalište između dva dolaska autobusa linije Z.

Rješenje:

(a) Brojeći proces $(N_t)_{t\geq 0}$ definiran je sa $N_t := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$. Funkcija obnavljanja je funkcija $U : [0, \infty) \to [0, \infty]$ definirana sa $U(t) := \mathbb{E}N_t$.

(b) Neka je $\mu := \mathbb{E}Y_1 \leq \infty$. Tada vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

(uz konvenciju $1/\infty = 0$).

(c) Waldova jednakost kaže da je

$$\mathbb{E}S_{N_t} = \mathbb{E}N_t \, \mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_0 \,,$$

s tim da obje strane mogu biti $+\infty$.

Dokaz: Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S_{N_t} &= \mathbb{E}\sum_{i=0}^{N_t} Y_i = \mathbb{E}\sum_{i=0}^{\infty} Y_i \mathbf{1}_{\{i\leq N_t\}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(Y_i \mathbf{1}_{\{i\leq N_t\}}\right) = \mathbb{E}Y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(Y_i \mathbf{1}_{\{i-1< N_t\}}\right)
\end{aligned}$$

Budući da je $\{i-1 < N_t\} = \{N_t \le i-1\}^c = \{S_{i-1} > t\}^c = \{Y_1 + \cdots + Y_{i-1} > t\}^c$, slijedi da je događaj $\{i-1 < N_t\}$ nezavisan od slučajne varijable Y_i. Zato vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}S_{N_t} &= \mathbb{E}Y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}Y_i \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{i-1<N_t\}}) = \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}Y_1 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_t > i-1) \\
&= \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}Y_1 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t > i) = \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}Y_1\, \mathbb{E}N_t\,.
\end{aligned}
$$

(d) Budući da dolasci autobusa linije A na autobusno stajalište tvore Poissonov proces sa stopom dva autobusa u satu, slijedi da su međuvremena dolazaka eksponencijalno distribuirana s parametrom $\mu_A = 2$ (očekivanje vrijeme međudolazaka je 30 minuta, odnosno 1/2 sata). Slično, međuvremena dolazaka autobusa linije Z su eksponencijalno distribuirana s parametrom $\mu_Z = 6$.

(d1) Označimo sa T_A vrijeme dolaska autobusa linije A, te sa T_Z vrijeme dolaska autobusa linije Z. Zbog svojstva zaboravljanja eksponencijalne distribucije nije važno koliko vremena je već proteklo od odlazaka zadnjih autobusa tih linija prije nego što dolazite na stajalište. Zbog toga tražimo $\mathbb{P}(T_Z < T_A)$. Funkcije gustoće slučajnih varijabli T_A i T_Z su dane sa $f_A(u) = \mu_A e^{-\mu_A u}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(u)$, odnosno $f_Z(u) = \mu_A e^{-\mu_Z u}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(u)$, a zbog nezavisnosti je njihova zajednička funkcija gustoće jednaka produktu marginalnih gustoća. Zato je

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_Z < T_A) &= \iint_{\{u,v>0,u<v\}} f_Z(u) f_A(v)\, dv\, du = \int_0^{\infty} f_Z(u) \left(\int_u^{\infty} f_A(v)\, dv \right) du \\
&= \int_0^{\infty} \mu_Z e^{-\mu_Z u} \left(\int_u^{\infty} \mu_A e^{-\mu_A v}\, dv \right) du = \int_0^{\infty} \mu_Z e^{-\mu_Z u} e^{-\mu_A u}\, du \\
&= \frac{\mu_Z}{\mu_Z + \mu_A} = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

(d2) Budući da putnici dolaze na stajalište po Poissonovom procesu s očekivanjem 30 putnika na sat, vremena između dolazaka putnika su nezavisna i eksponencijalno distribuirana s očekivanjem 1/30 sata. Zato je parametar eksponencijalne distribucije jednak $\lambda = 30$. Vrijeme između dolazaka autobusa linije Z je eksponencijalno s parametrom $\mu = \mu_Z = 6$. Neka je E slučajna varijabla koja označava vrijeme između dva dolaska autobusa linije Z, $E \sim \mathcal{E}(\mu)$. Označimo niz dolazaka putnika s $(T_n : n \ge 1)$. Ako je $(W_n : n \ge 1)$ niz vremena među dolascima, tada su $W_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$, nezavisne, i nezavisne s E. Nadalje, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Neka je N broj putnika koji dođe na stajalište između dva dolaska autobusa linije Z. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=k) &= \mathbb{P}(T_k < E < T_k + W_{k+1}) \\
&= \iiint\limits_{u<v<u+w} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, \mu e^{-\mu v}\, \lambda e^{-\lambda w}\, dw\, dv\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v}\, dv \int_{v-u}^\infty \lambda e^{-\lambda w}\, dw \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v} e^{-\lambda(v-u)}\, dv \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1}\, du \int_u^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)v}\, dv \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^\infty u^{k-1} e^{-(\lambda+\mu)u}\, du \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{(\lambda+\mu)^k}\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k .
\end{aligned}$$

Dakle, N ima geometrijsku razdiobu (na $\mathbb{Z}_+$) s parametrom

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{6}{6+30} = \frac{1}{6}\,.$$