Poglavlje 3

Procesi obnavljanja

3.1 Uvod i elementarni teorem obnavljanja

Neka je $(Y_n : n \geq 0)$ niz nenegativnih nezavisnih slučajnih varijabli definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo da su slučajne varijable $(Y_n : n \geq 1)$ jednako distribuirane s funkcijom distribucije F, $F(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x)$, $n \geq 1$, te da nisu identički jednake nuli. Dakle

$$\mathbb{P}(Y_n < 0) = 0\,, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) < 1\,, \quad n \geq 1\,, \tag{3.1}$$

odnosno pomoću funkcije distribucije, $F(0-) = 0$ i $F(0) < 1$. Za slučajnu varijablu Y_0 *ne* pretpostavljamo da je jednako distribuirana kao ostale slučajne varijable. Označimo sa G funkciju distribucije od Y_0.

Definicija 3.1 Proces obnavljanja *(ili* niz obnavljanja*) je slučajni proces* $S = (S_n : n \geq 0)$ *definiran sa* $S_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 0$, *gdje je* $(Y_n : n \geq 1)$ *niz nenegativnih nezavisnih slučajnih varijabli takvih da su* $(Y_n : n \geq 1)$ *jednako distribuirane.*

Primjetimo da je S u stvari slučajna šetnja u $\mathbb{R}_+$ s početnom pozicijom $S_0 = Y_0 \geq 0$ koja ima nenegativne korake. U kontekstu teorije obnavljanja, o veličinama S_n razmišljamo kao o trenucima pojavljivanja nekog fenomena, a S_n zovemo vremenima obnavljanja. Ukoliko je $Y_0 = 0$ (t.j., $S_0 = 0$) kažemo da je $S = (S_n : n \geq 0)$ *čisti* proces obnavljanja. U slučaju $\mathbb{P}(Y_0 > 0) > 0$ (odnosno $G(0) < 1$) govorimo o *odgođenom* procesu obnavljanja.

Primjer 3.2 (a) U trenutku $t = 0$ stavimo novu žarulju, te to shvaćamo kao prvo obnavljanje. Nakon što žarulja pregori, nakon nekog slučajnog vremena $S_1 = Y_1$, trenutno je zamijenimo novom žaruljom. To je drugo obnavljanje. Druga žarulja ima slučajno vrijeme života Y_2, te nakon što pregori trenutno je zamijenimo. To treće obnavljanje dogodi se u trenutku $S_2 = Y_1 + Y_2$. Postupak se nastavlja. Uz pretpostavku da su vremena života žarulja nezavisna i jednako distribuirana imamo čisti proces obnavljanja.
(b) Pretpostavimo da smo došli u prostoriju sa žaruljom u trenutku $t = 0$, te da je žarulja već gorjela neko vrijeme. Označimo sa Y_0 preostalo vrijeme života te žarulje (od $t = 0$ nadalje).

Nakon što žarulja pregori, trenutno je zamijenimo novom žaruljom (što je prvo obnavljanje) itd. Proces obnavljanja koji vidimo je odgođen proces.
(c) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac sa skupom stanja S. Odaberimo neko stanje $i \in S$, te definirajmo vremena povratka u stanje i kao

$$\tau_0 := \min\{k \geq 0 : X_k = i\}, \quad \tau_{n+1} = \min\{k > \tau_n : X_k = i\}, \, n \geq 0 .$$

Tada je $(\tau_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja. Zaista, duljine izleta iz stanja i, $\tau_0, \tau_1 - \tau_0, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}, \dots$ su nezavisne slučajne varijable, a $\tau_1 - \tau_0, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}, \dots$ su jednako distribuirane (uz vjerojatnost $\mathbb{P}_j$, $j \in S$). Uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$, $(\tau_n : n \geq 0)$ je čisti proces obnavljanja ($\mathbb{P}_i(\tau_0 = 0) = 1$), dok je uz vjerojatnosti $\mathbb{P}_j$, $j \neq i$, to odgođen proces obnavljanja.

Zadatak 3.3 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s distribucijama $\mathbb{P}_X$, odnosno $\mathbb{P}_Y$, te funkcijama distribucije F_X, odnosno F_Y. Stavimo $Z = X + Y$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}_Z(A) = \int \mathbb{P}_X(A - y)\, \mathbb{P}_Y(dy) = \int \mathbb{P}_Y(A - x)\, \mathbb{P}_X(dx) , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) .$$

Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_Z$ zove se *konvolucija* vjerojatnosnih mjera $\mathbb{P}_X$ i $\mathbb{P}_Y$, i označava se sa $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Y * \mathbb{P}_X$. Funkcija distribucije slučajne varijable Z je konvolucija funkcija distribucije F_X i F_Y i jednaka je

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - y)\, dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x - y)\, dF_X(y) .$$

Oznaka: $F_Z = F_X * F_Y = F_Y * F_X$. Ako su X i Y apsolutno neprekidne s gustoćama f_X, odnosno f_Y, tada je i Z apsolutno neprekidna s gustoćom

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x - y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x - y) f_X(y)\, dy$$

koja označava se sa $f_Z = f_X * f_Y = f_Y * f_X$.

Zadatak 3.4 Promatramo familiju $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vjerojatnosnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pokažite da je $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), *)$ komutativni monoid s neutralnim elementom δ_0.

Ako je F funkcija distribucije nenegativne slučajne varijable X, induktivno definiramo n-struku konvoluciju F^{n*} sa

$$F^{0*} = \mathbf{1}_{[0,\infty)} , \qquad F^{n*} = F^{(n-1)*} * F , n \geq 1 .$$

Propozicija 3.5 *Neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja. Tada je*

$$\mathbb{P}(S_n \leq x) = F^{n*}(x) , \quad x \geq 0$$

ako je S čisti proces obnavljanja, odnosno

$$\mathbb{P}(S_n \leq x) = (G * F^{n*})(x) , \quad x \geq 0$$

ako je X odgođeni proces obnavljanja.

Jedno od osnovnih pitanja u teoriji obnavljanja je koliko se obnavljanja dogodilo do nekog trenutka. Uvodimo pojam *brojećeg procesa* $N = (N_t : t \geq 0)$ sa

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Uočite da N broji moguće obnavljanje u trenutku $t = 0$.

Napomena 3.6 Uočite da vrijedi $N_t = \min\{n \geq 0 : S_n \geq t\}$, odnosno N_t možemo interpretirati i kao prvo vrijeme prijelaza preko nivoa t.

Očekivani broj obnavljanja do trenutka $t \geq 0$ definira *funkciju obnavljanja* koju označavamo s U, odnosno V, ovisno o tome da li je proces obnavljanja čist ili odgođen. Preciznije, ako je $S = (S_n : n \geq 0)$ čisti proces obnavljanja, imamo zbog (3.2)

$$U(t) := \mathbb{E}N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t), \quad t \geq 0, \tag{3.3}$$

a ako je S odgođen imamo

$$V(t) := \mathbb{E}N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} (G * F^{n*})(t), \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Nadalje vrijedi

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (G * F^{n*})(t) = G * \left(\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*} \right)(t) = (G * U)(t), \quad t \geq 0, \tag{3.5}$$

gdje je za svaku funkciju $g : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$(g * U)(x) := \int_{\infty}^{\infty} g(x-y)\, dU(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3.7 Neka je $Y_0 = 0$, te $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih $\mathcal{E}(\lambda)$ slučanih varijabli. Promatramo proces obnavljanja $S = (S_n : n \geq 0)$. Vrijedi $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, te

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_n) = 1 + \widetilde{N}_t.$$

Usporedimo li s Primjerom 2.57 vidimo da se N razlikuje od Poissonovog procesa za 1, obnavljanje u trenutku $t = 0$. Izračunajmo funkciju obnavljanja $U(t)$.

Zadatak 3.8 Neka je $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, funkcija distribucije od $\mathcal{E}(\lambda)$. Dokažite da za svaki $n \geq 1$ vrijedi

$$F^{n*}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx.$$

Slijedi da je za $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx \\
&= 1 + \int_0^t \lambda \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{-\lambda x}\, dx = 1 + \lambda t\,.
\end{aligned}
$$

Zadatak 3.9 Pretpostavimo da vrijedi $Y_n \sim \Gamma(2,1)$, $n \geq 1$. Izračunajte funkciju obnavljanja U pripadajućeg brojećeg procesa.

Vratimo se na opći proces obnavljanja $S = (S_n : n \geq 0)$ i dokažimo nekoliko pomoćnih rezultata.

Lema 3.10 *Vrijedi* $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ *g.s.*

Dokaz: Uočimo da je $t \to N_t$ neopadajuća funkcija, pa postoji $\lim_{t\to\infty} N_t \leq +\infty$. Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} N_t < \infty) > 0$. Zbog $\{\lim_{t\to\infty} N_t < \infty\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\lim_{t\to\infty} N_t \leq n\}$ slijedi da postoje $\epsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} N_t \leq n) = \epsilon > 0$. Tada je $\mathbb{P}(N_t \leq n) \geq \epsilon$ za sve $t \geq 0$, odnosno $\mathbb{P}(N_t > n) \leq 1-\epsilon$, za sve $t \geq 0$. Budući da je $\{N_t > n\} = \{S_n \leq t\}$ slijedi $\mathbb{P}(S_n \leq t) \leq 1-\epsilon$ za sve $t \geq 0$. Puštanjem $t \to \infty$ dobivamo $\mathbb{P}(S_n < \infty) \leq 1-\epsilon$ što je kontradikcija sa $S_n < \infty$ g.s. ∎

Zabilježimo sljedeće važne relacije koje povezuje proces obnavljanja $S = (S_n : n \geq 0)$ i pripadajući brojeći proces $N = (N_t : t \geq 0)$:

$$
\begin{aligned}
\{N_t \leq n\} &= \{S_n > t\}\,, \quad n \geq 0\,, &(3.6)\\
\{N_t = n\} &= \{S_{n-1} \leq t < S_n\}\,, \quad n \geq 1\,, &(3.7)
\end{aligned}
$$

$$
S_{N_t-1} \leq t < S_{N_t} \quad \text{na } \{N_t \geq 1\}\,. \tag{3.8}
$$

Teorem 3.11 *(Jaki zakon velikih brojeva za brojeći proces) Pretpostavimo da je* $\mu := \mathbb{E}Y_1 < \infty$. *Tada vrijedi*

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu} \quad g.s. \tag{3.9}
$$

Dokaz: Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{Y_0}{n} + \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \right) = \mu \quad \text{g.s.}
$$

Budući da je po Lemi 3.10 $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ g.s., slijedi

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu \quad \text{g.s.} \tag{3.10}
$$

Po (3.8) vrijedi $S_{N_t-1} \leq t < S_{N_t}$ na $\{N_t \geq 1\}$, pa je

$$\frac{S_{N_t-1}}{N_t-1}\frac{N_t-1}{N_t} = \frac{S_{N_t-1}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t}}{N_t}\,.$$

Pustimo $t \to \infty$ i iskoristimo (3.10). Slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N_t} = \mu \quad \text{g.s.}$$

U nastavku želimo dokazati elementarni teorem obnavljanja koji kaže da se i prosječni očekivani broj obnavljanja ponaša asimptotski kao $1/\mu$. Za to nam trebaju dvije pomoćne tvrdnje.

Propozicija 3.12 *Funkcija obnavljanja U je neopadajuća, neprekidna zdesna i vrijedi $U(t) < \infty$ za sve $t \geq 0$.*

Dokaz: Zbog $t \to N_t$ neopadajuća, slijedi da je i $t \to U(t) = \mathbb{E}N_t$ neopadajuća. Neka je $t > 0$ fiksan. Pokazujemo da je $U(t) < \infty$. Zbog $\mathbb{P}(Y_n > 0) > 0$ za $n \geq 1$, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$\mathbb{P}(Y_n > \delta) =: \epsilon > 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k\delta \geq t$. Zbog

$$\{Y_1 > \delta, \ldots, Y_k > \delta\} \subset \{S_k > k\delta\} \subset \{S_k > t\} = \{N_t \leq k\}\,,$$

te nezavisnosti slučajnih varijabli $(Y_n : n \geq 1)$, vrijedi

$$\epsilon^k = \mathbb{P}(Y_1 > \delta, \ldots, Y_k > \delta) \leq \mathbb{P}(N_t \leq k)\,,$$

odnosno

$$P(N_t > k) \leq 1 - \epsilon^k\,. \tag{3.11}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t > 2k) &= \mathbb{P}(S_{2k} \leq t) = \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_k + Y_{k+1} + \cdots + Y_{2k} \leq t) \\
&\leq \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_k \leq t, Y_{k+1} + \cdots + Y_{2k} \leq t) \\
&= \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_k \leq t)\mathbb{P}(Y_{k+1} + \cdots + Y_{2k} \leq t) \\
&= \mathbb{P}(S_k \leq t)^2 = \mathbb{P}(N_t > k)^2 \leq (1-\epsilon^k)^2\,,
\end{aligned}$$

gdje smo koristili nezavisnost i jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $(Y_n : n \geq 1)$, i gdje zadnja nejednakost slijedi iz (3.11). Induktivno slijedi

$$\mathbb{P}(N_t > mk) \leq (1-\epsilon^k)^m\,, \quad \text{za sve } m \geq 1\,. \tag{3.12}$$

Zbog Fubinijevog teorema i gornje nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathbb{E}N_t = \int_0^\infty \mathbb{P}(N_t > s)\,ds = \sum_{m=0}^\infty \int_{mk}^{(m+1)k} \mathbb{P}(N_t > s)\,ds \\ &\le \sum_{m=0}^\infty \int_{mk}^{(m+1)k} \mathbb{P}(N_t > mk)\,ds \\ &= k\sum_{m=0}^\infty \mathbb{P}(N_t > mk) \le k\sum_{m=0}^\infty (1-\epsilon^k)^m < \infty\,. \end{aligned}$$

Konačno, dokažimo da je U neprekidna zdesna. Neka je $t \ge 0$ i $(t_n : n \ge 1)$ padajući niz takav da je $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Budući da je $N_{t_n} \le N_{t_1}$, a N_{t_1} je integrabilna po dokazanom ($U(t_1) = \mathbb{E}N_{t_1} < \infty$), po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobivamo da je $U(t) = \mathbb{E}N_t = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}N_{t_n} = \lim_{n\to\infty} U(t_n)$. ∎

Propozicija 3.13 *(Waldova jednakost) Vrijedi*

$$\mathbb{E}S_{N_t} = \mathbb{E}N_t\,\mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_0\,, \tag{3.13}$$

s tim da obje strane mogu biti $+\infty$.

Dokaz: Računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_{N_t} &= \mathbb{E}\sum_{i=0}^{N_t} Y_i = \mathbb{E}\sum_{i=0}^\infty Y_i \mathbf{1}_{\{i\le N_t\}} \\ &= \sum_{i=0}^\infty \mathbb{E}\left(Y_i\mathbf{1}_{\{i\le N_t\}}\right) = \mathbb{E}Y_0 + \sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}\left(Y_i\mathbf{1}_{\{i-1<N_t\}}\right) \end{aligned}$$

Budući da je $\{i-1 < N_t\} = \{N_t \le i-1\}^c = \{S_{i-1} > t\}^c = \{Y_1 + \cdots + Y_{i-1} > t\}^c$, slijedi da je događaj $\{i-1 < N_t\}$ nezavisan od slučajne varijable Y_i. Zato vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S_{N_t} &= \mathbb{E}Y_0 + \sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}Y_i\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{i-1<N_t\}}) = \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}Y_1\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(N_t > i-1) \\ &= \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}Y_1\sum_{i=0}^\infty \mathbb{P}(N_t > i) = \mathbb{E}Y_0 + \mathbb{E}Y_1\,\mathbb{E}N_t\,. \end{aligned}$$ ∎

Teorem 3.14 *(Elementarni teorem obnavljanja) Neka je $\mu := \mathbb{E}Y_1 \le \infty$. Tada vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{3.14}$$

(uz konvenciju $1/\infty = 0$).

Dokaz: Dokažimo prvo da vrijedi

$$\frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \,. \tag{3.15}$$

Ako je $\mu = \infty$, tvrdnja je očita. Za $\mu < \infty$, pomoću Teorema 3.11 i Fatouove leme imamo

$$\frac{1}{\mu} = \mathbb{E}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t}\right) \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N_t}{t} = \liminf_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \,.$$

Za obratnu nejednakost pretpostavimo prvo da su $Y_0, Y_1, \ldots$ ograničene slučajne varijable, odnosno da postoji $c > 0$ takav da je $Y_0 \leq c$ i $Y_n \leq c$, $n \geq 1$. Iz Waldove jednakost (3.13) slijedi

$$V(t) = \mathbb{E}N_t = \frac{\mathbb{E}S_{N_t} - \mathbb{E}Y_0}{\mathbb{E}Y_1} = \frac{\mathbb{E}S_{N_t} - \mathbb{E}Y_0}{\mu} \,.$$

Nadalje, zbog $S_{N_t - 1} \leq t$ (vidi (3.8)), $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}Y_0/t = 0$, te $S_{N_t} = S_{N_t-1} + Y_{N_t} \leq t + c$ imamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\mu} \frac{\mathbb{E}S_{N_t} - \mathbb{E}Y_0}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\mu} \frac{\mathbb{E}(S_{N_t} + Y_{N_t}}{t} \\
&\leq \frac{1}{\mu} \limsup_{t\to\infty} \frac{t+c}{t} = \frac{1}{\mu} \,.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Neka su sada Y_0 i Y_n, $n \geq 1$, proizvoljne. Za $c > 0$ definiramo slučajne varijable

$$Y_0^c = Y_0 \wedge c \,, \qquad Y_n^c = Y_n \wedge c \,, \quad n \geq 1 \,.$$

Tada je $(Y_n^c : n \geq 1)$ niz n.j.d. slučajnih varijabli, nezavisnih od Y_0^c, i sve su odozgo omeđene sa c. Nadalje, za pripadajući proces obnavljanja S^c vrijedi

$$S_n^c = Y_0^c + Y_1^c + \cdots + Y_n^c \leq Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n \leq S_n \,,$$

što povlači da za pripadajući brojeći proces N^c imamo

$$N_t^c = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^c \leq t\}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}} = N_t \,.$$

Specijalno, $V^c(t) := \mathbb{E}N_t^c \geq \mathbb{E}N_t = V(t)$. Iz (3.16) čitamo

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{V^c(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(Y_1 \wedge c)} \,. \tag{3.17}$$

Međutim, $\lim_{c\to\infty} Y_1 \wedge c = Y_1$, pa iz Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi da je $\lim_{c\to\infty} \mathbb{E}(Y_1 \wedge c) = \mathbb{E}Y_1 = \mu \leq \infty$. Pustimo $c \to \infty$ u (3.17). Dobivamo

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \,.$$

Zajedno s (3.16) to dokazuje teorem. ∎

Elementarni teorem obnavljanja specijalni je slučaj općeg teorema obnavljanja koji je u literaturi poznat pod imenom Blackwellov teorem obnavljanja. Za $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ definiramo očekivani broj obnavljanja u skupu A sa

$$V(A) = \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \in A\}} .$$

Lagano se vidi da je V σ-aditivna funkcija na $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ koju zovemo *mjera obnavljanja*. Uočite vezu funkcije obnavljanja i mjere obnavljanja: $V(t) = V([0,t])$. Nadalje, mjera V može se zapisati kao beskonačan red mjera

$$V(A) = G(A) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(A) .$$

Neka je $Y \geq 0$ slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Za F kažemo da je aritmetička, ako postoji $a > 0$ takav da je $\mathbb{P}(Y \in \{0, a, 2a, \dots\}) = 1$.

Teorem 3.15 *Neka je F nearitmetička funkcija distribucije i $\mu = \mathbb{E}Y_1 = \int_0^\infty x\, F(dx) \leq \infty$. Tada za sve $x > 0$ vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} V((t, t+x]) = \lim_{t\to\infty} (V(t+x) - V(t)) = \frac{x}{\mu} . \tag{3.18}$$

Ovaj teorem nećemo dokazivati.

Zadatak 3.16 Izvedite elementarni teorem obnavljanja iz Blackwellovog.

Neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja, te pretpostavimo da u trenutku S_n, $n \geq 1$, primimo nagradu (u širem smislu) u slučajnom iznosu Q_n. Pretpostavljamo da je $(Q_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje nisu nužno nezavisne od niza $(Y_n : n \geq 0)$ (npr., dozvoljen je slučaj $Q_n = cY_n$, $c > 0$: čim dulje čekamo na obnavljanje, tim primamo veću nagradu). Stavimo još $Q_0 = 0$. Definiramo *proces obnavljanja s nagradom* $R = (R_t : t \geq 0)$ sa

$$R_t = \sum_{n=0}^{N_t - 1} Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}} , \quad t \geq 0 . \tag{3.19}$$

Uočite da druga jednakost slijedi zbog $\{n \leq N_t - 1\} = \{n < N_t\} = \{S_n \leq t\}$. U sljedećoj propoziciji računamo asimptotsku prosječnu nagradu.

Propozicija 3.17 *Pretpostavimo da je $\mathbb{E}|Q_1| < \infty$, te $\mathbb{E}Y_1 = \mu \in (0, \infty)$. Tada je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\mathbb{E}Q_1}{\mu} \quad g.s. \tag{3.20}$$

Dokaz: Vrijedi

$$\frac{R_t}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{N_t-1} Q_n}{t} = \frac{\sum_{n=0}^{N_t-1} Q_n}{N_t - 1} \, \frac{N_t - 1}{t} \,. \tag{3.21}$$

Po jakom zakonu velikih brojeva je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} Q_i = \mathbb{E}Q_1$ g.s., pa zbog $N_t \to \infty$ g.s., imamo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{N_t-1} Q_i}{N_t - 1} = \mathbb{E}Q_1 \quad \text{g.s.}$$

Po Teoremu 3.11 je $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t-1}{t} = \frac{1}{\mu}$ g.s. Tvrdnja slijedi puštanjem $t \to \infty$ u (3.21). ∎

Zadatak 3.18 Usprkos već poznatim higijenskim problemima, Fabijanov restoran relativno dobro posluje. Pretpostavite da su vremena između dolazaka gostiju u Fabijanov restoran nezavisna i jednako distribuirana, te da je očekivano vrijeme između dolazaka 5 minuta. Trošak po večeri za gosta je slučajan i ima funkciju gustoće

$$h(x) = \frac{1000}{9} \, x^{-2} \,, \quad 100 \le x \le 1000 \,.$$

Uz pretpostavku da gosti troše nezavisno jedan od drugog, nađite prosječan utržak po satu u Fabijanovom restoranu.

3.2 Jednadžba obnavljanja

Ovu točku započinjemo s par napomena o integraciji u donosu na neopadajuću funckiju. Neka je $U : [0,\infty) \to [0,\infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija. Proširimo U na $(-\infty, 0)$ sa $U(t) = 0$ za sve $t < 0$. (U cijeloj ovoj točki vrijedit će konvencija da se funkcije definirane samo na $[0,\infty)$ automatski proširuju tako da na $(-\infty, 0)$ budu identički nula.) Neka je μ mjera na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ takva da za sve $-\infty < a \le b < \infty$ vrijedi

$$\mu((a,b]) = U(b) - U(a) \,,$$

Neka je $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ Borelova funkcija. Uvodimo oznaku

$$\int_0^\infty g(t) \, dU(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) g(t) \mu(dt) \,.$$

Pogledajmo neke specijalne slučajeve gornjeg integrala, te pokažimo kako se takvi integrali računaju.

Primjer 3.19 (a) U je apsolutno neprekidna. Pretpostavimo da postoji Borelova funkcija $u : [0,\infty) \to [0,\infty)$ takva da je $U(t) = \int_0^t u(x) \, dx$ (gdje dx označava Lebesgueovu mjeru). Tada je $\mu(dt) = u(t) \, dt$, te

$$\int_0^\infty g(t) \, dU(t) = \int_0^\infty g(t) u(t) \, dt \,.$$

(b) U je diskretna. Pretpostavimo da postoje nizovi $(a_i : i \geq 0)$ i $(w_i : i \geq 0)$ nenegativnih brojeva takvi da je

$$U(t) = \sum_{a_i \leq t} w_i\,, \quad t \geq 0\,.$$

Tada je $\mu = \sum_{i\geq 0} w_i \delta_{a_i}$ i vrijedi

$$\int_0^\infty g(t)\, dU(t) = \sum_{i\geq 0} g(a_i) w_i\,.$$

(c) U je mješovita. Preptostavimo da je $U(t) = \alpha U_{\mathrm{an}}(t) + \beta U_{\mathrm{d}}(t)$ gdje su $\alpha, \beta > 0$, U_{an} apsolutno neprekidna, te U_{d} diskretna. Tada je

$$\int_0^\infty g(t)\, dU(t) = \alpha \int_0^\infty g(t)\, dU_{\mathrm{an}}(t) + \beta \int_0^\infty g(t)\, dU_{\mathrm{d}}(t)\,.$$

Zadatak 3.20 Čest slučaj u teoriji obnavljanja je funkcija obnavljanja U oblika $U(t) = 1 + \int_0^t u(s)\, ds$, gdje je u nenegativna integrabilna funkcija na $[0, \infty)$. Pokažite da za Borelovu funkciju $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ vrijedi

$$\int_0^\infty g(t)\, dU(t) = g(0) + \int_0^\infty g(t) u(t)\, dt\,.$$

Definicija 3.21 *Neka je $U : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija, te neka je $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokalno ograničana funkcija (t.j., g je ograničena na svakom ograničenom intervalu).* Konvolucija *funkcija U i g definira se kao*

$$(U * g)(t) = \int_0^t g(t - x)\, U(dx)\,. \tag{3.22}$$

Uočite da budući da je g ograničena na $[0, t]$, funkcija $x \mapsto g(t - x)$ je integrabilna u odnosu na $dU(x) = \mu(dx)$, pa je integral u (3.22) dobro definiran. Ako je $g \geq 0$, tada je $U * g \geq 0$.

Zadatak 3.22 Neka je $U : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija, te $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija.
(a) Vrijedi

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |(U * g)(s)| \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \right) U(t)\,,$$

odnosno, $U * g$ je lokalno ograničena.
(b) Ako je g neprekidna zdesna, tada je i $U * g$ neprekidna zdesna.
(c) Budući da je U lokalno ograničena i neprekidna zdesna, možemo definirati $U^{2*} = U * U$. Zbog (a) i (b) je $U * U$ opet lokalno ograničena i neprekidna zdesna, pa induktivno možemo definirati $U^{n*} = U^{(n-1)*} * U$, $n \geq 2$. Stavmo još $U^{0*} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$. Ako je g lokalno ograničena i neprekidna zdesna, po (a) i (b) je $U * g$ lokalno ograničena i neprekidna zdesna, te možemo promatrati $U * (U * g)$. Dokažite da vrijedi

$$U * (U * g) = (U * U) * g\,,$$

te općenito $U * (U^{(n-1)*} * g) = U^{n*} * g$ za $n \geq 1$.

Neka je $F : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funckija takva da je $F(t) = 0$ za sve $t < 0$, te $\lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty) < \infty$. Neka je, nadalje, $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija takva da je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$. *Jednadžba obnavljanja* je konvolucijska jednadžba oblika

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)\, dF(x)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3.23}$$

Ovdje je $Z : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija koja se traži. Ako su F i z definirane samo na $[0,\infty)$, proširimo ih na $(-\infty, 0)$ tako da budu identički jednake nuli. Uočite da (3.23) možemo kraće pisati kao $Z = z + F * Z$.

Primjer 3.23 (Osnovni primjer) Neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ proces obnavljanja, neka je F funkcija distribucije slučajnih varijabli $(Y_n : n \geq 1)$, te neka je U funkcija obnavljanja, $U(t) = \mathbb{E}N_t$. Po (3.3) imamo $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Slijedi

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + \big(F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}\big)(t) = F^{0*}(t) + \big(F * \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}\big)(t) \\ &= F^{0*}(t) + (F * U)(t)\,. \end{aligned}$$

Dakle

$$U = F^{0*} + F * U = 1 + F * U\,,$$

t.j., U zadovoljava jednadžbu obnavljanja $Z = z + F * Z$ uz $z = F^{0*} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$.

Promotrimo sada odgođen proces obnavljanja S gdje slučajna varijabla Y_0 ima funkciju distribucije G. Neka je $V(t) = \mathbb{E}N_t$ pripadajuća funkcija obnavljanja. Po (3.4) vrijedi $V = G * U$. Zato je

$$\begin{aligned} V &= G * U = G * (F^{0*} + F * U) = G * F^{0*} + G * (F * *U) \\ &= G + F * (G * U) = G + F * V\,, \end{aligned}$$

odnosno V zadovoljava jednadžbu obnavljanja $Z = z + F * Z$ uz $z = G$.

Vratimo se na opću jednadžbu obnavljanja $Z = z + F * Z$. Osnovno pitanje, kao i kod svake jednadžbe, je pitanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Pretpostavimo da vrijedi:

$$m := F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t) \leq 1\,, \quad F(0-) = 0\,, \quad F(0) < 1\,. \tag{3.24}$$

To znači da je F funkcija distribucije nenegativne, i moguće defektne slučajne varijable Y: $P(Y < 0) = 0$, $P(Y = 0) < 1$ i $P(Y < \infty) \leq 1$. Motivirani jednakosti (3.3) definiramo funkciju $U : [0,\infty) \to [0,\infty]$ kao

$$U(t) := \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3.25}$$

Ako je F funkcija distribucije slučajne varijable Y takve da je $m = F(\infty) = \mathbb{P}(Y < \infty) = 1$, tada po Propoziciji 3.12 vrijedi $U(t) < \infty$ za sve $t \geq 0$. Ako je $m < 1$, definiramo $F_m := F/m$ za koju vrijedi $F_m(\infty) = 1$. Uočite također da je $F_m^{n*} = m^{-n}F^{n*}$ za sve $n \geq 0$, pa je

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n F_m^{n*}(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} F_m^{n*}(t) < \infty\,.$$

Dakle, $U(t) < \infty$ za sve $t \geq 0$. Nadalje, na isti način kao u Primjeru 3.23 vrijedi

$$U = F^{0*} + F * U\,. \tag{3.26}$$

Teorem 3.24 *Neka je $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija takva da je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$, neka je F neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija za koju vrijedi* (3.24)*, te neka je U definirana s* (3.25)*. Tada je funkcija $U * z$ jedinstveno lokalno ograničeno rješenje jednadžbe obnavljanja* (3.23) *koje iščezava na* $(-\infty, 0)$.

Dokaz: Budući da je z lokalno ograničena funkcija, iz Zadatka 3.22 (a) slijedi da je za svaki $T > 0$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (U * z)(t) \leq \left(\sup_{0 \leq t \leq T} z(t) \right) U(T)\,,$$

što znači da je $U * z$ lokalno ograničena. Primjenom jednakosti (3.26) dobivamo

$$F * (U * z) = (F * U) * z = (U - F^{0*}) * z = U * z - z\,,$$

odnosno $U * z = z + F * (U * z)$. Preostaje dokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da su Z_1 i Z_2 dva lokalno ograničena rješenja takva da je $Z_1(t) = 0 = Z_2(t)$ za sve $t < 0$. Stavimo $Z = Z_1 - Z_2$. Tada je Z lokalno ograničena funkcija za koju vrijedi $Z(t) = 0$ za sve $t < 0$, i Z zadovoljava jednadžbu

$$Z = Z_1 - Z_2 = (z + F * Z_1) - (z + F * Z_2) = F * (Z_1 - Z_2) = F * Z\,.$$

Jednakost $Z = F * Z$ možemo iterirati, pa slijedi da je $Z = F^{n*} * Z$ za sve $n \geq 1$. Opet po Zadatku 3.22 (a) slijedi da je za svaki $T > 0$ i sve $n \geq 1$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T} |(F^{n*} * Z)(t)| \leq \big(\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)| \big) F^{n*}(T)\,. \tag{3.27}$$

Međutim, iz $\sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(T) = U(T) < \infty$ slijedi $\lim_{n\to\infty} F^{n*}(T) = 0$. Pustimo $n \to \infty$ u (3.27). Slijedi da je $\sup_{0 \leq t \leq T} |Z(t)| = 0$. Zbog $T > 0$ proizvoljan, dobivamo da je $Z = 0$ na $[0, \infty)$, odnosno $Z_1 = Z_2$. ∎

Primjer 3.25 Neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ čisti proces obnavljanja, gdje $(Y_n : n \geq 1)$ imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$. U Primjeru 3.7 izračunali smo da je $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = 1 + \lambda t$. Promatramo jednadžbu obnavljanja $Z = z + F * Z$, gdje je z lokalno ograničena, a $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Iz Teorema 3.24 slijedi da je jedinstveno lokalno ograničeno rješenje te jednadžbe dano sa

$$Z(t) = (U * z)(t) = \int_0^t z(t-x)\,dU(x) = z(t-0) \cdot 1 + \int_0^t z(t-x)\lambda\,dx = z(t) + \lambda \int_0^t z(x)\,dx\,.$$

Primjer 3.26 Funkcija obnavljanja V za odgođen proces obnavljanja zadovoljava jednažbu obnavljanja

$$V = G + F * V$$

gdje je G funkcija distribucije slučajne varijable Y_0. Po elementarnom teoremu obnavljanja vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\mu}, \quad \mu = \mathbb{E}Y_1 ,$$

odnosno, asimptotski je $\frac{V(t)}{t} \sim \frac{1}{\mu}$. U ovom primjeru ćemo pokazati da postoji funkcija distribucije odgode G tako da za pripadajuću funkciju obnavljanja vrijedi $\frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ za sve $t > 0$, t.j., da je $V(t) = \frac{t}{\mu}$, $t > 0$.

Definiramo

$$G(t) := \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(x))\, dx , \quad t \geq 0 . \tag{3.28}$$

Funkcija G je očito neopadajuća i neprekidna zdesna. Uočite da je $1 - F(x) = \mathbb{P}(Y_1 > x)$ rep distribucije F, te se stoga distribucija G naziva *distribucija integriranog repa*. Provjerimo daje $G(\infty) = 1$, t.j., da je G vjerojatnosna funkcija distribucije. Zaista,

$$G(\infty) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_1 > x)\, dx = \frac{1}{\mu}\mathbb{E}Y_1 = 1 .$$

Upotrebom parcijalne integracije (ili Fubinijevog teorema), integral u (3.28) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\int_0^t (1 - F(x))\, dx &= t - \int_0^t F(x)\, dx = t - \left(F(t)\cdot t - F(0)\cdot 0 - \int_0^t x\, dF(x) \right) \\
&= t - tF(t) + \int_0^t x\, dF(x) = t - \int_0^t (t - x)\, dF(x) .
\end{aligned}$$

Dakle,

$$G(t) = \frac{1}{\mu} \left(t - \int_0^x (t - x)\, dF(x) \right) , \tag{3.29}$$

što možemo zapisati kao

$$\frac{1}{\mu}\, t = G(t) + \int_0^t \frac{1}{\mu}(t - x)\, dF(x) .$$

Stavimo $\widetilde{V}(t) = \frac{1}{\mu} t$. tada gornja jednakost pokazuje da $\widetilde{V}$ zadovoljava jednadžbu obnavljanja

$$\widetilde{V} = G + F * \widetilde{V} .$$

Budući da i V zadovoljava istu jednadžbu, zbog jedinstvenosti u Teoremu 3.24 zaključujemo da vrijedi

$$V(t) = \widetilde{V}(t) = \frac{1}{\mu} t , \quad t > 0 .$$

Zadatak 3.27 Neka su $X \in \mathbb{R}^n$ i $Y \in \mathbb{R}^m$ nezavisni slučajni vektori. Tada za svaki Borelov skup $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ vrijedi

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}((x,Y) \in A)\, \mathbb{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega :\ (x, Y(\omega)) \in A)\, \mathbb{P}_X(dx)\,.$$

Primjer 3.28 U Primjeru 3.23 analitički smo pokazali da funkcija obnavljanja $U(t)$ zadovoljava jednadžbu $U = F^{0*} + F * U$, odnosno

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-x)\, F(dx)\,.$$

U ovom primjeru tu jednadžbu izvodimo vjerojatnosnim argumentima.

Prvo uočimo da je

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathbb{E}(N_t, Y_1 > t) + \mathbb{E}(N_t, Y_1 \le t) = \mathbb{P}(Y_1 > t) + \mathbb{E}(N_t, Y_1 \le t) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 > t) + \sum_{n=2}^{\infty} n \mathbb{P}(Y_1 \le t, N_t = n) =: A + B\,. \end{aligned}$$

Da bismo izračunali B prvo računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 \le t, N_t = n) &= \mathbb{P}(Y_1 \le t, S_{n-1} \le t < S_n) \\ &= \mathbb{P}\big(Y_1 \le t, Y_1 + (Y_2 + \cdots + Y_{n-1}) \le t < Y_1 + (Y_2 + \cdots + Y_{n-1}) + Y_n\big) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(Y_2 + \cdots + Y_{n-1} \le t - x < Y_2 + \cdots + Y_n)\, dF(x) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_{n-2} \le t - x < Y_1 + \cdots + Y_{n-1})\, dF(x) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(S_{n-2} \le t - x < S_{n-1})\, dF(x) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(N_{t-x} = n-1)\, dF(x)\,. \end{aligned}$$

Ovdje treći redak dobivamo pomoću Zadatka 3.27. Slijedi da je

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{E}(N_t, Y_1 \le t) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t n \mathbb{P}(N_{t-x} = n-1)\, dF(x) \\ &= \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{E}\big(N_{t-x} + 1, N_{t-x} = n-1\big)\, dF(x) \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big(N_{t-x} + 1, N_{t-x} = n\big)\, dF(x) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(N_{t-x})\, dF(x) + \int_0^t dF(x) \\ &= \int_0^t U(t-x)\, dF(x) + \mathbb{P}(Y_1 \le t)\,. \end{aligned}$$

Konačno,

$$U(t) = A + B = \mathbb{P}(Y_1 > t) + \int_0^t U(t-x)\,dF(x) + \mathbb{P}(Y_1 \le t) = 1 + \int_0^t U(t-x)\,dF(x)\,.$$

Primjer 3.29 Neka je $S = (S_n : n \ge 0)$ proces obnavljanja zadan nizom $(Y_n : n \ge 0)$ i neka je $N = (N_t : t \ge 0)$ pripadajući brojeći proces. Definiramo procese $B = (B_t : t \ge 0)$ i $A = (A_t : t \ge S_0)$ formulama

$$B_t = S_{N_t} - t\,, \quad t \ge 0 \tag{3.30}$$

$$A_t = t - S_{N_t - 1}\,, \quad t \ge S_0\,. \tag{3.31}$$

Slučajnu varijablu B_t zovemo *vrijeme povratka unaprijed* (ili *ostatak života*). To je vrijeme do prvog obnavljanja nakon trenutka t. Slučajna varijabla A_t zove se *vrijeme povratak unaprijed* (ili *dob*), i predstavlja vrijeme proteklo od zadnjeg obnavljanja prije trenutka t. U kontekstu Napomene 3.6 slučajna varijabla B_t ima interpretaciju veličine preskoka preko nivoa t, dok je A_t podbačaj.

Izračunajmo funkcije distribucije slučajnih varijabli A_t i B_t. Prvo ćemo naći jednadžbu obnavljanja za funkciju distribucije od A_t uz pretpostavku da je proces obnavljanja čist, $Y_0 = 0$. Za $x > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A_t \le x) = \mathbb{P}(A_t \le x, Y_1 > t) + \mathbb{P}(A_t \le x, Y_1 \le t)\,. \tag{3.32}$$

Na događaju $\{Y_1 > t\}$ vrijedi $A_t = t$, pa je

$$\mathbb{P}(A_t \le x, Y_1 > t) = \mathbb{P}(t \le x, Y_1 > t) = \mathbb{P}(Y_1 > t)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,. \tag{3.33}$$

Kod drugog sumanda, prvo uočimo da je $\{Y_1 = S_1 \le t\} = \{N_t \ge 2\}$, pa je po definiciji od A_t

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_t \le x, Y_1 \le t) = \mathbb{P}(t - S_{N_t-1} \le x, N_t \ge 2)\\
&\quad= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(t - S_{N_t-1} \le x, N_t = n)\\
&\quad= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(t - S_{n-1} \le x, S_{n-1} \le t < S_n)\\
&\quad= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(t - (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n-1}) \le x, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} \le t < Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\\
&\quad= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t - (y + Y_2 + \cdots + Y_{n-1}) \le x, y + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} \le t < y + Y_2 + \cdots + Y_n)\,dF(y)
\end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi iz Zadatka 3.27. Nadalje je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t \le x, Y_1 \le t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t-y-S_{n-2} \le x, S_{n-2} \le t-y < S_{n-1})\, dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t-y-S_{n-2} \le x, N_{t-y} = n-1)\, dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t-y-S_{N_{t-y}-1} \le x, N_{t-y} = n-1)\, dF(y) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-y} \le x, N_{t-y} = n-1)\, dF(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-y} \le x, N_{t-y} = n)\, dF(y) \\
&= \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-y} \le x)\, dF(y)\,. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Uvedimo oznaku $\alpha(t) := \mathbb{P}(A_t \le x)$. Tada zbrajanjem jednakosti (3.33) i (3.34) slijedi

$$\alpha(t) = (1-F(t))\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + \int_0^t \alpha(t-y)\, dF(y)\,. \qquad (3.35)$$

To je jednadžba obnavljanja sa $z(t) = (1-F(t))\mathbf{1}_{[0,x]}(t)$.

Na sličan način može se naći jednadžba obnavljanja za $\beta(t) := \mathbb{P}(B_t > x)$, $x > 0$, $Y_0 = 0$. Slijedi

$$\beta(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t \beta(t-y)\, dF(y)\,. \qquad (3.36)$$

Po Teoremu 3.24 imamo

$$\mathbb{P}(A_t \le x) = \alpha(t) = U * \big((1-F)\mathbf{1}_{[0,x]}\big)(t)\,, \qquad (3.37)$$

$$\mathbb{P}(B_t > x) = \beta(t) = U * \big(1 - F(\cdot + x)\big)(t) = \int_0^t (1 - F(x+t-y))\, dU(y)\,. \qquad (3.38)$$

Izračunajmo $\mathbb{P}(B_t > x)$ za specijalna slučaj $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$. Tada po Primjeru 3.7 imamo $U(t) = 1 + \lambda t$. Iz (3.38) slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_t > x) &= 1 - F(x+t) + \lambda \int_0^t (1 - F(x+t-y))\, dy \\
&= e^{-\lambda(x+t)} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(x+t-y)}\, dy \\
&= e^{-\lambda(x+t)} - e^{-\lambda(x+t)}(1 - e^{\lambda t}) = e^{-\lambda x}\,.
\end{aligned}$$

Dakle, preostalo vrijeme života B_t ima jednaku distribuciju kao i Y_n, vrijeme između $n-1$-vog i n-tog obnavljanja, gdje je $n \geq 1$. To, naravno, nije iznenađujuće imajući u vidu svojstvo zaboravljanja eksponencijalne distribucije. Specijalno, $\mathbb{E}B_t = 1/\lambda$ za sve $t \geq 0$.

Izračunajmo sada i distribuciju od A_t :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t \leq x) &= \int_0^t (1 - F(t-y))\mathbf{1}_{[0,x]}(t-y)\, dU(y) \\
&= (1 - F(t))\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + \lambda \int_0^t (1 - F(t-y))\mathbf{1}_{[0,x]}(t-y)\, dy \\
&= e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + \lambda \int_0^t (1 - F(y))\mathbf{1}_{[0,x]}(y)\, dy \\
&= e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + \lambda \int_0^{t\wedge x} e^{-\lambda y}\, dy \\
&= e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + (1 - e^{-\lambda(t\wedge x)})\,.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(A_t \leq x) = \begin{cases} 1\,, & t \leq x\,, \\ 1 - e^{-\lambda x}\,, & t > x \end{cases} \tag{3.39}$$

Označimo sa F_{A_t} funkciju distribucije od A_t i uočimo da ta funkcija ima u točki t skok veličine $e^{-\lambda t}$. Zato je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}A_t &= \int_0^\infty x\, dF_{A_t}(x) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\, dx + te^{-\lambda t} \\
&= \left(-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^t + te^{-\lambda t} \\
&= \left(-te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}\right) + te^{-\lambda t} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\,.
\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\mathbb{E}(A_t + B_t) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}$$

što je približno jednako $\frac{2}{\lambda}$ za velike t. Međutim,

$$A_t + B_t = (t - S_{N_t-1}) + (S_{N_t} - t) = S_{N_t} - S_{N_t-1}\,,$$

duljina intervala između dva obnavljanja koji sadrži fiksno vrijeme t. Dakle

$$\mathbb{E}(S_{N_t} - S_{N_t-1}) = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t} \approx \frac{2}{\lambda} \quad \text{za velike } t\,,$$

iako je za svaki *fiksni* $n \geq 1$, $\mathbb{E}(S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{\lambda}$. To je *paradoks vremena čekanja.* Pretpostavite da tramvaj broj 11 (iz smjera Črnomerca) dolazi na Trg bana J. Jelačića po Poissonovom procesu s parametrom $\lambda > 0$. To znači da je za svaki $n \geq 1$ vrijeme između $n-1$-vog i n-tog tramvaja eksponecijalno s parametrom λ. Očekivano vrijeme između dva tramvaja je stoga $1/\lambda$, npr. 15 minuta. Vi dolazite na Trg točno u 20:00 sati, $t = 20$. Budući da tramvaji voze od zore, osam sati navečer možemo smatrati velikim vremenom. Po gornjem računu očekivano vrijeme do sljedeće jedanaestice iz Črnomerca je $\mathbb{E}B_t = 1/\lambda = 15$ minuta. Očekivano vrijeme od odlaska sa Trga prethodne jedanaestice je $\mathbb{E}A_t \approx 1/\lambda = 15$ minuta. To povlači da je očekivano vrijeme između tramvaja koji vam je pobjegao i tramvaja koji ćete uhvatiti približno 30 minuta, dvostruko više od očekivanog vremena između dva fiksna tramvaja.