Poglavlje 2

Markovljevi lanci s neprekidnim vremenom

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Slučajni procesi koje smo do sada promatrali bili su indeksirani diskretnim vremenskim skupom $\mathbb{Z}_+$. To su bili Markovljevi lanci s diskretnim vremenom, te martingali indeksirani sa $\mathbb{Z}_+$. Kod takvih slučajnih procesa promjena stanja događa se u cjelobrojnim vremenskim trenucima, t.j., proces može promijeniti stanje točno nakon jedne vremenske jedinice. U ovom poglavlju počet ćemo proučavati slučajne procese indeksirane neprekidnim vremenskim parametrom $t \in [0, \infty)$.

Započnimo formalnom definicijom slučajnog procesa s neprekidnim vremenskim parametrom.

Definicija 2.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor. Za svaki $t \geq 0$ neka je $X_t : \Omega \to S$ funkcija izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ (t.j., slučajni element u S). Familija $X = (X_t : t \geq 0)$ zove se* slučajni proces s neprekidnim vremenom *i skupom stanja S.* Put (*ili* trajektorija) *slučajnog procesa X je funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$.*

Za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, neka je $\mathbb{P}_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$ distribucija slučajnog vektora $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ (t.j., slika vjerojatnosti $\mathbb{P}$ po tom slučajnom vektoru). Familija $\{\mathbb{P}_{t_1,t_2,\ldots,t_n} : 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \in \mathbb{N}\}$ zove se familija konačno-dimenzionalnih distribucija *slučajnog procesa X.*

Ova definicija je vrlo općenita i uključuje razne klase slučajnih procesa. Na primjer, ako je skup stanja $S = \mathbb{R}$, prijelaz iz stanja u drugo stanje događa se neprekidno u vremenu. Tehnički aparat potreban za proučavanja takvih slučajnih procesa prilično je složen. Zato ćemo se ograničiti na slučajne procese s neprekidnim vremenom i diskretnim skupom stanja.

Pretpostavimo da je skup stanja S prebrojiv, te promatrajmo putove slučajnog procesa X. Budući da je skup stanja prebrojiv, očekujemo da će tipični putovi izgledati ovako: proces kreće iz nekog stanja, te provede u tom stanju neko slučajno, ali pozitivno i konačno vrijeme. Zatim skoči u novo stanje, te u tom stanju provede opet neko slučajno, ali pozitivno i konačno vrijeme, itd. Drugim riječima, očekujemo da su putovi slučajnog procesa X po dijelovima konstantne funkcije. To će sigurno biti tako ako zahtijevamo da putovi budu zdesna neprekidne funkcije.

Definicija 2.2 *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ slučajni proces s neprekidnim vremenom i skupom stanja S. Kažemo da X ima zdesna neprekidne putove ako je za sve ω funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$ zdesna neprekidna.*

Ako X ima zdesna neprekidne putove, tada za svaki $\omega \in \Omega$ i svaki $t \geq 0$ postoji $\epsilon > 0$ takav da vrijedi

$$X_s(\omega) = X_t(\omega) \qquad \text{za sve } s \in [t, t+\epsilon]\,.$$

Odavde je jasno da će putovi procesa X biti po dijelovima konstantne (zdesna neprekidne) funkcije. Primjetimo da kod procesa s prebrojivim skupom stanja vrijedi

$$\mathbb{P}_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \ldots, X_{t_n} = j_n)\,, \quad j_1, j_2, \ldots, j_n \in S$$

t.j., vjerojatnosti oblika $\mathbb{P}(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \ldots, X_{t_n} = j_n)$ u potpunosti određuju familiju konačno-dimenzionalnih distribucija. Važnost pretpostavke o neprekidnosti zdesna putova od X očituje se u tome da se vjerojatnost svakog događaja koji ovisi o X može izračunati iz konačno-dimenzionalnih distribucija od X. Ilustrirajmo to sljedećim računom: neka je $\mathbb{Q}_+ = \{q_1, q_2, \ldots,\}$ neka enumeracija nenegativnih racionalih brojeva. Za $i \in s$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_t = i \text{ za neko } t \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(X_t \neq i \text{ za sve } t \geq 0) \\
&\quad = \ 1 - \mathbb{P}(X_t \in S \setminus \{i\} \text{ za sve } t \geq 0) \\
&\quad = \ 1 - \mathbb{P}(X_t \in S \setminus \{i\} \text{ za sve } t \in \mathbb{Q}_+) \\
&\quad = \ 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j_1,\ldots,j_n \neq i} \{X_{q_1} = j_1, \ldots, X_{q_n} = j_n\}\right) \\
&\quad = \ 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_n \neq i} \mathbb{P}(X_{q_1} = j_1, \ldots, X_{q_n} = j_n)\,.
\end{aligned}$$

Neka je X zdesna neprekidni slučajni proces s neprekidnim vremenom i prebrojivim skupom stanja S. *Vremena skokova* $(J_n : n \geq 0)$ od X definiraju se na sljedeći način:

$$J_0 = 0\,, \qquad J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\}$$

za $n = 0, 1, 2, \ldots,$ gdje je $\inf \emptyset = +\infty$. Uočite, $J_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\}$, te $J_0 \leq J_1 \leq J_2 \ldots$. Štoviše, ako je $J_n < \infty$, tada zbog neprekidnosti zdesna vrijedi $J_n < J_{n+1}$. *Vremena čekanja* (ili *vremena zadržavanja*) $(W_n : n \geq 1)$ od X definiraju se

$$W_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1}\,, & J_{n-1} < \infty\,, \\ +\infty\,, & J_{n-1} = \infty\,. \end{cases}$$

Za sve $n \geq 1$ vrijedi $W_n > 0$. Uočite da za sve $n \geq 1$ imamo $J_n = W_1 + \cdots + W_n$. Stavimo

$$\zeta := \lim_{n\to\infty} J_n = \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \leq \infty\,.$$

Vrijeme ζ naziva se *vrijeme eksplozije* slučajnog procesa X. U slučaju $\zeta < \infty$, slučajni proces napravi beskonačno mnogo skokova u konačnom vremenu. Dosadašnje definicije omogućuju nam da neprekidno-vremenskom slučajnom procesu X pridružimo diskretno-vremenski slučajni proces $Y = (Y_n : n \geq 0)$ formulom

$$Y_n := X_{J_n}\,.$$

Slučajni proces Y nazivamo *proces skokova* (ili *lanac skokova*) slučajnog procesa X. Proces Y bilježi stanja kroz koja prolazi X do vremena eksplozije ζ.

Nakon gornje opće diskusije prelazimo na Markovljeve lance u neprekidnom vremenu.

Definicija 2.3 Markovljev lanac s neprekidnim vremenom *i prebrojivim skupom stanja* S *je slučajni proces* $X = (X_t : t \geq 0)$ *definiran na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *za koji vrijedi sljedeće Markovljevo svojstvo: za sve* $n \geq 1$, *za sve vremenske trenutke* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ *i sva stanja* $i_1, \ldots, i_{n-2}, i, j \in S$

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = j \,|\, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, X_{t_{n-1}} = i) = \mathbb{P}(X_{t_n} = j \,|\, X_{t_{n-1}} = i)\,. \tag{2.1}$$

Za $i, j \in S$, te $0 \leq s < t$ stavimo

$$P_{ij}(s,t) := \mathbb{P}(X_t = j | X_s = i)\,.$$

Tada (2.1) možemo zapisati u obliku

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = j \,|\, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_n} = i) = P_{ij}(t_{n-1}, t_n)\,. \tag{2.2}$$

Funkcije $P_{ij}(s,t)$ zovu se *prijelazne vjerojatnosti* Markovljevog lanca X.

Definicija 2.4 *Markovljev lanac* $X = (X_t : t \geq 0)$ *je* vremenski homogen *ako za prijelazne vjerojatnosti vrijedi*

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0, t-s)\,, \quad \textit{za sve } i,j \in S \textit{ i za sve } 0 \leq s < t\,.$$

Dakle, prijelazne vjerojatnsoti ovise samo razlici vremenskih trenutaka. U tom slučaju uvodimo oznaku $P_{ij}(t-s) := P_{ij}(s,t)$. Tada (2.2) možemo pisati u obliku

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = j \,|\, X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, X_{t_{n-1}} = i) = P_{ij}(t_n - t_{n-1})\,. \tag{2.3}$$

Analizirajmo malo detaljnije gornju jednakost. Stavimo $t = t_{n-1}$, $s = t_n - t_{n-1} > 0$. Neka je $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u : 0 \leq u \leq t)$ σ-algebra generirana slučajnim procesom do trenutka t. Uočimo da je $\mathcal{F}_t$ generirana svim događajima oblika $\{X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_m} = i_m\}$ gdje je

$0 \le t_1 < t_2 < \dots t_m \le t$, a $i_1, \dots, i_m \in S$. S druge strane, $\sigma(X_t)$ je generirana događajima $\{X_t = i\}$, $i \in S$. Stoga iz jednakosti (2.1) možemo zaključiti da vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \,|\, \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \,|\, X_t)\,,$$

odnosno u slučaju vremenski homogenog Markovljevog lanca, (2.3) daje

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \,|\, \mathcal{F}_t) = P_{X_t j}(s)\,.$$

Od sada nadalje promatramo samo vremenski homogene Markovljeve lance koje jednostavno nazivamo samo Markovljevim lancima.

Uvedimo uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}_i$, $i \in S$, formulom $\mathbb{P}_i(A) := \mathbb{P}(A|X_0 = i)$. Tada za $i, j \in S$, te $t \ge 0$ imamo

$$\mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}(X_t = j|X_0 = i) = P_{ij}(t) \tag{2.4}$$

Neka je $\lambda_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$. Tada $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ zovemo početnom distribucijom Markovljevog lance X.

Propozicija 2.5 *Neka je X Markovljev lanac s početnom distribucijom λ. Konačnodimenzionalne distribucije Markovljevog lance X dane su formulom*

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2, \dots, X_{t_n} = j_n) = \sum_{i \in S} \lambda_i P_{ij_1}(t_1) P_{j_1 j_2}(t_2 - t_1) \dots P_{j_{n-1} j_n}(t_n - t_{n-1})\,, \tag{2.5}$$

$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. *Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_t : t \ge 0)$ slučajni proces čije su konačnodimenzionalne distribucije dane formulom* (2.5). *Tada je X Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznim vjerojatnostima $P_{ij}(t)$.*

Zadatak 2.6 Dokažite Propoziciju 2.5 (Uputa: pogledajte Markovljevi lanci, dokaz Teorema 1.5)

Zadatak 2.7 Neka je X Markovljev lanac s neprekidnim vremenom. Dokažite da za sve $m, n \ge 0$, sva vremena $0 \le t_1 < \cdots < t_{m+n}$ i sva stanja $j_1, \dots, j_{m+n} \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{t_{m+n}} = j_{m+n}, \dots, X_{t_m} = j_m \,|\, X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_{m-1}} = j_{m-1}) \\ = \;& \mathbb{P}(X_{t_{m+n}} = j_{m+n}, \dots, X_{t_m} = j_m \,|\, X_{t_{m-1}} = j_{m-1})\,. \end{aligned}$$

Uvedimo iznaku $P(t) = (P_{ij}(t) : i, j \in S)$, $t \ge 0$. U slučaju konačnog skupa stanja, $P(t)$ je kvadratna matrica.

Propozicija 2.8 *Familija $(P(t) : t \ge 0)$ je* stohastička polugrupa, *t.j. vrijedi*

(a) $P(0) = I$, gdje je $I_{ij} = \delta_{ij}$.

(b) $P(t)$ je stohastička matrica, t.j., $P_{ij}(t) \ge 0$ i $\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = 1$.

(c) $P(t+s) = P(t)P(s)$ (Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti).

Dokaz: (a) Vrijedi $P_{ij}(0) = \mathbb{P}_i(X_0) = j = \delta_{ij}$.
(b) Očito je $P_{ij}(t) \geq 0$. također, za $i \in S$,

$$\sum_{j \in S} P_{ij}(t) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}_i(X_t \in S)\,.$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+s) &= \mathbb{P}_i(X_{t+s} = j) = \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_t = k, X_{t+s} = j) \\ &= \sum_{k \in S} P_{ik}(t) P_{kj}(s) = (P(t)P(s))_{ij}\,, \end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi zbog (2.5).

Pretpostavimo sada da je X Markovljev lanac koji ima zdesna neprekidne trajektorije. Tada za vrijeme prvog skoka $J_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\}$ vrijedi $J_1 > 0$. Prisjetimo se da za vrijeme čekanja W_1 imamo $W_1 = J_1$. Pokušajmo pronaći $\mathbb{P}_i$-distribuciju slučajnog vremena J_1. Za $t > 0$ imamo

$$\mathbb{P}_i(J_1 > t) = \mathbb{P}_i(X_s = X_0\,, 0 \leq s \leq t) = \mathbb{P}_i(X_s = i\,, 0 \leq s \leq t)\,.$$

Da bismo izračunali gornju vjerojatnost koristit ćemo konačnodimenzionalne distribucije. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo događaj

$$B_n := \{X_{lt/2^n} = X_0\,, l = 1, 2, \dots, 2^n\}\,.$$

Vrijedi $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, te $\cap_n B_n = \{J_1 > t\}$. Nadalje, iz formule (2.5) slijedi

$$\mathbb{P}_i(B_n) = \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \left[1 - \frac{2^n\left(1 - P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)}{2^n}\right]^{2^n}\,.$$

Pretpostavimo da postoji

$$P'_{ii}(0) = -\lim_{\delta \to 0} \frac{1 - P_{ii}(\delta)}{\delta}\,. \tag{2.6}$$

Uočimo da ako limes postoji onda je nepozitivan. Zato postoji

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \left(1 - P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} t\, \frac{1 - P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\frac{t}{2^n}} = -tP'_{ii}(0)\,.$$

Upotrebom klasičnog limesa $\lim_{m \to \infty}(1 - x_m/m)^m = e^{-x}$ kada $x_m \to x$, dobivamo da je

$$\mathbb{P}(J_1 > t) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(B_n) = \lim_{n \to \infty} \left[1 - \frac{2^n\left(1 - P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)}{2^n}\right]^{2^n} = \exp(P'_{ii}(0)t)$$

Dakle, uz pretpostavku (2.6) vidimo da J_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $-P'_{ii}(0)$. Alternativni način kojim možemo zaključiti da vrijeme prvog skoka ima eksponencijalnu distribuciju neposredno koristi Markovljevo svojstvo i karakterizaciju eksponencijalne distribucije pomoću svojstva zaboravljanja. Za $s,t>0$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(J_1 > t+s|J_1>t) &= \mathbb{P}_i(X_u = i\,, 0\le u\le s+t|X_u=i\,, 0\le u\le t)\\
&= \mathbb{P}_i(X_u = i\,, t\le u\le s+t|X_u=i\,, 0\le u\le t)\\
&= \mathbb{P}_i(X_u = i\,, t\le u\le s+t|X_t=i)\\
&= \mathbb{P}_i(X_u = i\,, 0\le u\le s) = \mathbb{P}_i(J_1>s)\,,
\end{aligned}$$

gdje treći i četvrti redak vrijede zbog Markovljevog svojstva (ovaj argument, iako u biti ispravan, nije u potpunosti precizan). Dakle, vrijeme čekanja W_1, koje je jednako vremenu prvog skoka J_1, ima svojstvo zaboravljanja, pa mu je distribucija eksponencijalna. Sličnim heurističkim argumentima može se pokazati da će (uvjetno na prošlost) i sva ostala vremena čekanja W_n imati neku eksponencijalnu distribuciju.

Zaključujemo da lanac X prelazi u novo stanje nakon nekog eksponencijalnog vremena čekanja. Jako Markovljevo svojstvo u vremenima skokova (koje ćemo kasnije dokazati) pokazuje da će proces skokova $Y=(Y_n : n\ge 0)$ definiran s $Y_n = X_{J_n}$ biti diskretno-vremenski Markovljev lanac.

2.2 Eksponencijalna distribucija

Razmatranja na kraju prethodne točke pokazuju da će eksponencijalna distribucija imati važnu ulogu u proučavanju Markovljevih lanaca s neprekidnim vremenom. Zato u ovoj točki istražujemo neka svojstva eksponencijalne distribucije.

Prisjetimo se da slučajna varijabla T ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $q\in(0,\infty)$ ako funkcija distribucije F od T ima oblik

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x<0\,,\\ 1-e^{-qx}\,, & x\ge 0\,. \end{cases}$$

Pišemo $T\sim\mathcal{E}(q)$. Eksponecijalna slučajna varijabla je apsolutno neprekidna s gustoćom $f(x) = qe^{-qx}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$. Nadalje vrijedi $\mathbb{E}T = 1/q$, te $\mathrm{Var}(T) = 1/q^2$. Za sve $x>0$ imamo

$$\mathbb{E}\left[e^{-xT}\right] = \int_0^\infty e^{-xt}qe^{-qt}\,dt = q\int_0^\infty e^{-(x+q)t}\,dt = \frac{q}{q+x}\,. \tag{2.7}$$

Označimo sa $\bar F$ rep slučajne varijable s funkcijom distribucije F: $\bar F(x) := 1-F(x) = \mathbb{P}(T > x)$.

Propozicija 2.9 *Eksponencijalna slučajna varijabla ima svojstvo zaboravljanja*

$$\mathbb{P}(T>t+s\,|\,T>t) = \mathbb{P}(T>s)\,, \qquad \text{za sve } t,s\ge 0\,. \tag{2.8}$$

Obratno, ako nenegativna slučajna varijabla T zadovoljava (2.8), tada je T eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $q=-\log\bar F(1)\in(0,\infty)$.

Napomena 2.10 U obratu propozicije, pretpostavka da T zadovoljava (2.8) implicitno uključuje da su sve uvjetne vjerojatnosti dobro definirane, t.j., $\bar{F}(t) = \mathbb{P}(T > t) > 0$ za sve $t \geq 0$.

Dokaz: Uočite da je (2.8) ekvivalentno s

$$\bar{F}(t+s) = \bar{F}(t)\bar{F}(s)\,, \qquad \text{za sve } t, s \geq 0\,. \tag{2.9}$$

Ako je T eksponencijalna s parametrom q, tada je $\bar{F}(t) = e^{-qt}$, pa vrijedi (2.9). Obratno, neka vrijedi (2.9). Stavimo $a = \bar{F}(1) \in [0,1]$. Zbog Napomene 2.10 vrijedi $a > 0$. Kada bi bilo $\bar{F}(1) = 1$, tada bi zbog (2.9) imali $\mathbb{P}(T > n) = \bar{F}(n) = \bar{F}(1)^n = 1$, te stoga $\mathbb{P}(T = \infty) = \lim_n \mathbb{P}(T > n) = 1$ što je nemoguće. Dakle, $0 < a < 1$. Iz (2.9) slijedi

$$\bar{F}(n) = \bar{F}(1 + \cdots + 1) = \bar{F}(a)^n = a^n\,.$$

Slično

$$a = \bar{F}(1) = \bar{F}\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \left(\bar{F}(1)\right)^n\,,$$

otkud $\bar{F}(1/n) = a^{1/n}$. Za $q = m/n \in \mathbb{Q}_+$ imamo

$$\bar{F}(q) = \bar{F}\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\bar{F}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^q\,.$$

Budući da je F neprekidna zdesna, to isto vrijedi i za $\bar{F}$. Neka je $t \geq 0$ i $(q_k : k \geq 1)$ padajući niz racionalnih brojeva koji konvergira prema t. Tada je

$$\bar{F}(t) = \lim_{k\to\infty} \bar{F}(q_k) = \lim_{k\to\infty} a^{q_k} = a^t\,.$$

Stavimo $q := -\log a = -\log \bar{F}(1) \in (0,\infty)$. Tada je $\bar{F}(t) = e^{-(\log a)t} = e^{-qt}$, odnosno T ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom q. ∎

Zadatak 2.11 Neka je $(x_n : n \geq 1)$ niz realnih brojeva takvih da je $0 < x_n < 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} x_n > 0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - x_n) < \infty\,.$$

(Uputa: $\prod_{n=1}^{\infty} x_n > 0$ ako i samo ako $\sum_{n=1}^{\infty} \log x_n > -\infty$, te iskoristite da je $\log x \sim x - 1$ za x blizu 1.)

Propozicija 2.12 *Neka je $(T_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli takvih da T_n ima parametar q_n. Tada vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n < \infty \ \textit{g.s.} \quad \textit{ako i samo ako} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty\,.$$

Dokaz: Pretpostavimo $\sum_n 1/q_n < \infty$. Upotrebom teorema o monotonoj konvergenciji imamo

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty\,,$$

što povlači da je $\sum_{n=1}^{\infty} T_n < \infty$ g.s. Obratno, neka je $\sum_{n=1}^{\infty} T_n < \infty$. Tada zbog nezavisnosti imamo

$$0 < \mathbb{E}\left(e^{-\sum_{n=1}^{\infty} T_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{-T_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{q_n+1}\,,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (2.7). Iz Zadatka 2.11 slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{q_n}{q_n+1}\right) < \infty\,.$$

Odavde slijedi da je $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$, pa zbog $2/(q_n+1) > 1/q_n$ za sve n za koje je $q_n > 1$, dobivamo da konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$. ∎

Propozicija 2.13 *(a) Neka su T_1 i T_2 nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrima q_1 i q_2. Tada slučajna varijabla $T := \min(T_1, T_2)$ ima eksponenijalnu distribuciju s parametrom $q_1 + q_2$.*
(b) Neka je $(T_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli, $T_n \sim \mathcal{E}(q_n)$, te $q := \sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$. Stavimo $T = \inf_n T_n$. Tada postoji slučajna varijabla $N \in \mathbb{N}$ takva da je $\mathbb{P}(T = T_N) = 1$. Ako je $N = n$, tada je $T_n < T_j$ za sve $j \neq n$. Nadalje, T i N su nezavisne, $T \sim \mathcal{E}(q)$, te $\mathbb{P}(N = n) = q_n/q$.

Dokaz: (a) Za sve $t \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\min(T_1, T_2) > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t) = e^{-q_1 t}e^{-q_2 t} = e^{-(q_1+q_2)t}\,.$$

(b) Definiramo $N = n$ ako je $T_n < T_j$ za sve $j \neq n$, a inače N ne definiramo. Tada je za sve $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = n, T \geq t) &= \mathbb{P}(T_n \geq t, T_j > T_n \text{ za sve } j \neq n) \\
&= \int_t^{\infty} q_n e^{-q_n s} \mathbb{P}(T_j > s \text{ za sve } j \neq n)\, ds \\
&= \int_t^{\infty} q_n e^{-q_n s} \prod_{j\neq n} e^{-q_j s}\, ds \qquad (2.10) \\
&= \int_t^{\infty} q_n e^{-qs}\, ds = \frac{q_n}{q}\, e^{-qt}\,.
\end{aligned}$$

Slijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n \text{ za neki } n) = 1$, što znači da je $\mathbb{P}(T = T_N) = 1$. Po definiciji je sada $\mathbb{P}(T = T_N) = 1$ na događaju $\{N = n\}$. Nezavisnost slučajnih varijabli T i N, te njihove distribucije slijede iz gornjeg računa. ∎

Zadatak 2.14 Opravdajte jednakost (2.10).

Zadatak 2.15 (a) Neka su T i S nenegativne, nezavisne, apsolutno neprekidne slučajne varijable s funckijama gustoće f_T i f_S. Tada za svaki $t \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(T < t < T+S) = \int_0^t f_T(u) \left(\int_{t-u}^{\infty} f_S(v)\, dv \right) du\,.$$

Specijalno, ako je $T \sim \mathcal{E}(q)$ i $S \sim \mathcal{E}(r)$, tada je

$$\mathbb{P}(T < t < T+S) = \begin{cases} \frac{q}{r-q}\left(e^{-qt} - e^{-rt}\right), & q \neq r\,, \\ qte^{-qt}\,, & q = r\,. \end{cases}$$

(b) Ako su $T \sim \mathcal{E}(q)$ i $S \sim \mathcal{E}(r)$ nezavisne, tada vrijedi

$$\mathbb{P}(T > S) = \frac{r}{q+r} \quad \text{i} \quad r\,\mathbb{P}(T < t < T+S) = q\,\mathbb{P}(S < t < T+S)\,.$$

2.3 Konstrukcija Markovljevog lanca pomoću lanca skokova

U ovoj točki cilj nam je konstruirati jednu klasu Markovljevih lanaca s neprekidnim vremenom. Ta klasa ne obuhvaća sve Markovljeve lance, ali je dovoljno široka za sve praktične primjene. Nakon konstrukcije samog procesa, pokazat ćemo da ima Markovljevo svojstvo.

Pretpostavimo da je $Z = (Z_n : n \geq 0)$ diskretno-vremenski Markovljev lanac na prebrojivom skupu stanja S s početnom distribucijom $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$, te prijelaznom matricom $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$ takvom da je $\pi_{ii} = 0$ za sve $i \in S$. Neka je $(E_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrom 1, te pretpostavimo da su E_n nezavisne od Markovljevog lanca Z. Konačno, neka je dana funkcija $q : S \to (0, \infty)$. Sve slučajne varijable definirane su na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kao i obično, s $\mathbb{P}_i$ označavamo uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(\cdot \,|\, Z_0 = i)$. Primjetite da su osnovni podaci prijelazna matrica Π i funkcija q (početna distribucija je također dana, ali nije važna za konstrukciju).

Pomoću Markovljevog lanca Z i niza $(E_n : n \geq 1)$ želiko konstruirati Markovljev lanac $X = (X_t : t \geq 0)$ s neprekidnim vremenom.

Stavimo $J_0 = 0$, te $W_1 = \frac{E_1}{q(Z_0)}$. Tada za sve $s \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_1 > s \,|\, Z_0 = i) &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{E_1}{q(Z_0)} > s, Z_0 = i\right)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{E_1}{q(i)} > s, Z_0 = i\right)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{E_1}{q(i)} > s\right)\mathbb{P}(Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} = e^{-q(i)s}\,, \end{aligned}$$

gdje prva jednakost u drugom retku slijedi iz nezavisnosti slučajnih varijabli Z_0 i E_1, a druga zbog $E_1/q(i) \sim \mathcal{E}(q(i))$. To pokazuje da uz $\mathbb{P}_i$ slučajna varijabla W_1 ima eksponecijalnu distribuciju s parametrom $q(i)$. Stavimo

$$J_1 = J_0 + W_1 \quad \text{i} \quad X_t = Z_0\,, \text{ za } J_0 \leq t < J_1\,.$$

Nadalje, neka je $W_2 = \frac{E_2}{q(Z_1)}$. Slično kao gore slijedi da je

$$\mathbb{P}(W_1 > s \mid Z_1 = i) = e^{-q(i)s} .$$

Stavimo

$$J_2 = J_1 + W_2 \quad \text{i} \quad X_t = Z_1 \,, \text{ za } J_1 \leq t < J_2 \,.$$

Konstrukciju nastavljamo induktivno. Pretpostavimo da su već konstruirane slučajne varijable $(J_m : 0 \leq m \leq n)$, $(W_m : 1 \leq m \leq n)$, te $(X_t : 0 \leq t < J_n)$ (uočite da X_t nije nužmo definirana na cijelom Ω). Stavimo

$$W_{n+1} = \frac{E_{n+1}}{q(Z_n)} \,, \quad J_{n+1} = J_n + W_{n+1} \quad \text{i} \quad X_t = Z_n \,, \text{ za } J_n \leq t < J_{n+1} \,.$$

Očito vrijedi $J_n = \sum_{m=1}^n W_m$, $n \geq 1$, te

$$J_n - J_{n-1} = W_n = \frac{E_n}{q(Z_{n-1})} \,, \quad n \geq 1 \,. \tag{2.11}$$

Stavimo $\zeta := \lim_{n\to\infty} J_n = \sum_{n=1}^\infty W_n \leq \infty$. Uočite da je slučajna varijabla X_t definirana na (slučajnom) intervalu $[0, \zeta)$, te da vrijedi

$$X_t = \sum_{n=0}^\infty Z_n \mathbf{1}_{[J_n, J_{n+1})}(t) \,. \tag{2.12}$$

Uvedimo dodatno stanje koje ćemo označiti s ∂ (to stanje se često zove *groblje*), te stavimo $X_t = \delta$ za $t \geq \zeta$. Vrijeme ζ zovemo vrijeme eksplozije (ili ponekad vrijeme života). Za konstruirani proces $X = (X_t : 0 \leq t < \zeta)$ kažemo da je *regularan* ako je $\mathbb{P}_i(\zeta = +\infty) = 1$ za sve $i \in S$. U tom slučaju je X_t definiran za sve $t \geq 0$.

Propozicija 2.16 *Slučajne varijable* $(W_n : n \geq 1)$ *su uvjetno nezavisne i eksponencijalno distribuirane uz dano* $\mathcal{G} := \sigma(Z_n : n \geq 0)$.

Dokaz: Neka je $n \geq 1$, te $u_1, \ldots, u_n \geq 0$, $i_0, \ldots, i_{n-1} \in S$. Računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_m > u_m, 1 \leq m \leq n \mid Z_0 = i_0, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1}) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{E_m}{q(Z_{m-1})} > u_m, 1 \leq m \leq n \,,\ Z_0 = i_0, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1}\right)}{\mathbb{P}(Z_0 = i_0, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1})} \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{E_m}{q(i_{m-1})} > u_m, 1 \leq m \leq n\right) = \prod_{m=1}^n e^{-q(i_{m-1})u_m} \,,
\end{aligned}$$

gdje prva jednakost u trećem retku slijedi zbog nezavisnosti lanca Z i slučajnih varijabli E_m, a druga zbog međusobne nezavisnosti i distribucije slučajnih varijabli E_m. Označimo li sa $\mathcal{G}_{n-1}$ σ-algebru generiranu sa $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$, gornju jednakost možemo pisati kao

$$\mathbb{P}(W_m > u_m, 1 \leq m \leq n \mid \mathcal{G}_{n-1}) = \prod_{m=1}^n e^{-q(Z_{m-1})u_m} \,.$$

Odavde čitamo da je za sve $1 \leq m \leq n$

$$\mathbb{P}(W_m > u_m \,|\, \mathcal{G}_{n-1}) = e^{-q(Z_{m-1})u_m}\,, \tag{2.13}$$

te zato

$$\mathbb{P}(W_m > u_m, 1 \leq m \leq n \,|\, \mathcal{G}_{n-1}) = \prod_{m=1}^{n} \mathbb{P}(W_m > u \,|\, \mathcal{G}_{n-1})\,.$$

Iz (2.13) jednostavno slijedi da vrijedi i

$$\mathbb{P}(W_m > u_m \,|\, \mathcal{G}) = e^{-q(Z_{m-1})u_m}\,. \tag{2.14}$$

Zaista, stavimo $A = \{W_m > u_m)$. Tada za svaki $B \in \mathcal{G}_{n-1}$, $n \geq m$, imamo

$$\mathbb{E}[1_A 1_B] = \mathbb{E}[e^{-q(Z_{m-1})u_m} 1_B]\,.$$

No tada gornja jednakost vrijedi i za sve $B \in \cup_{n=m}^{\infty} \mathcal{G}_{n-1}$, a budući da je $\mathcal{G} = \sigma(\cup_{n=m}^{\infty} \mathcal{G}_{n-1})$, slijedi da jednakost vrijedi i za sve $B \in \mathcal{G}$. No to znači da vrijedi (2.14).

Slično

$$\mathbb{P}(W_m > u_m, 1 \leq m \leq n \,|\, \mathcal{G}) = \prod_{m=1}^{n} \mathbb{P}(W_m > u_m \,|\, \mathcal{G})\,.$$

Zadnja jednakost i (2.14) pokazuju da su $(W_m : m \geq 1)$ uvjetno nezavisne uz dano $\mathcal{G}$, te da je $W_m \sim \mathcal{E}(q(Z_{m-1}))$ uz dano $\mathcal{G}$. ∎

Propozicija 2.17 *Za $n \geq 0$ neka je $\mathcal{H}_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n; W_1, \ldots, W_n) = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n; J_1, \ldots, J_n)$. Za $j \in S$ i $u > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = j, W_{n+1} > u \,|\, \mathcal{H}_n) = \pi_{Z_n j}\, e^{-q(Z_n)u} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j, W_{n+1} > u \,|\, Z_n)\,. \tag{2.15}$$

Napomena 2.18 Uočite da jednakost (2.15) kaže da su slučajni vektor (Z_{n+1}, W_{n+1}) i σ-algebra $\mathcal{H}_n$ uvjetno nezavisni uz dano Z_n. To slijedi iz definicije i Zadatka 1.29.

Dokaz: Za $i_0, \ldots, i_n \in S$, te $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{n+1} = j, W_{n+1} > u \,|\, Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n, (W_1, \ldots, W_n) \in B) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(Z_{n+1} = j, \frac{E_{n+1}}{q(i_n)} > u, Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n, \left(\frac{E_1}{q(i_0)}, \ldots, \frac{E_n}{q(i_{n-1})}\right) \in B\right)}{\mathbb{P}\left(Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n, \left(\frac{E_1}{q(i_0)}, \ldots, \frac{E_n}{q(i_{n-1})}\right) \in B\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z_{n+1} = j, Z_n = i_n, \ldots, Z_0 = i_0)}{\mathbb{P}(Z_n = i_n, \ldots, Z_0 = i_0)} \frac{\mathbb{P}\left(\left(\frac{E_1}{q(i_0)}, \ldots, \frac{E_n}{q(i_{n-1})}\right) \in B\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\frac{E_1}{q(i_0)}, \ldots, \frac{E_n}{q(i_{n-1})}\right) \in B\right)} \mathbb{P}\left(\frac{E_{n+1}}{q(i_n)} > u\right) \\
&= \pi_{ij}\, e^{-q(i_n)u}\,.
\end{aligned}$$

To dokazuje prvu jednakost u (2.15), dok je druga tada očigledna. ∎

Vratimo se sada vremenu eksplozije ζ i nađimo dovoljne uvjete da je X regularan, t.j. $\mathbb{P}_i(\zeta = +\infty) = 1$ za sve $i \in S$.

Propozicija 2.19 *Za svako $i \in S$ vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(\zeta < \infty) = \mathbb{P}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} < \infty\right). \tag{2.16}$$

Slučajni proces X je regularan ako i samo ako je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q(Z_n)} = +\infty \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s., za sve } i \in S\,. \tag{2.17}$$

Specijalno, ako je $\sup_{i\in S} q(i) < \infty$ (što je uvijek ispunjeno ako je S konačan), tada je X regularan.

Dokaz: Vrijedi $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{q(Z_{n-1})}$. Po Propoziciji 2.16, uvjetno na $\mathcal{G} = \sigma(Z_n : n \geq 1)$, ζ je zbroj nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrima $q(Z_{n-1})$. Iz Propozicije 2.12 slijedi da je

$$\mathbb{P}(\zeta < \infty \,|\, \mathcal{G}) = \begin{cases} 1\,, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q(Z_{n-1})} < \infty\,, \\ 0\,, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q(Z_{n-1})} = \infty\,, \end{cases}$$

odnosno

$$\mathbb{P}(\zeta < \infty \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{1}_{\{\sum_n 1/q(Z_{n-1})<\infty\}} \text{ g.s.}$$

Računanjem $\mathbb{P}_i$-očekivanja slijedi (2.16), dok je (2.17) neposredna posljedica. Konačno, ako je $c := \sup_{i\in S} q(i) < \infty$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q(Z_{n-1})} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c} = +\infty\,,$$

pa je po već dokazanom X regularan. ∎

Primjetimo da smo u konstrukciji procesa X zahtijevali da je $q(i) \in (0, \infty)$ za sva stanja $i \in S$. Dobiveni proces X se u takvom slučaju naziva *stabilnim*. Mogli smo dopustiti da vrijedi $q(i) = 0$ za neka (ili sva) stanja $i \in S$. U tom slučaju bismo uz dano $Z_{n-1} = i$ imali $W_n = E_n/q(Z_{n-1}) = +\infty$, odnosno vrijeme čekanja bilo bi beskonačno. To znači da bi stanje $i \in S$ bilo apsorbirajuće za proces X. Dana konstrukcija se jednostavno može modificirati tako da dopušta slučaj $q(i) = 0$. Druga mogućnost je dopustiti $q(i) = +\infty$ za neko stanje $i \in S$. Tada bi uz dano $Z_{n-1} = i$ vrijedilo $W_n = 0$. Takvo stanje $i \in S$ naziva se *trenutnim* - proces odmah napušta stanje. Gornja konstrukcija ne obuhvaća Markovljeve procese s neprekidnim vremenom koji dopuštaju trenutna stanja. S druge strane, postoje

Markovljevi lanci s neprekidnim vremenom i prebrojivim skupom stanja kod kojih su sva stanja trenutna.

Definiramo vremena skokova procesa X kao $\widetilde{J}_0 = 0$, te za $n \geq 0$, $\widetilde{J}_{n+1} := \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_{\widetilde{J}_n}\}$. Odmah se vidi da je $\widetilde{J}_n = J_n$, te $X_{J_n} = Z_n$. To znači da je diskretno-vremenski Markovljev lanac Z proces skokova neprekidno-vremenskog slučajnog procesa X.

U nastavku ove točke dokazujemo da je u slučaju regularnosti konstruiran proces $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom u smislu Definicije 2.3.

Teorem 2.20 *Pretpostavimo da je X regularan, t.j., $\mathbb{P}_i(\zeta = +\infty) = 1$ za sve $i \in S$. Tada je X Markovljev lanac s neprekidnim vremenom.*

Dokaz teorema je prilično složen i dugačak, te ćemo ga provesti u nekoliko koraka. Definirajmo prvo prijelaznu funkciju $P_{ij}(t)$ od X formulom

$$P_{ij}(t) := \mathbb{P}_i(X_t = j)\,, \quad t \geq 0,\ i, j \in S\,. \tag{2.18}$$

Zbog Propozicije 2.5, da bismo dokazali da je X Markovljev, dovoljno je pokazati da konačno-dimenzionalne distribucije od X zadovoljavaju

$$\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, \ldots, X_{t_n} = j_n) = P_{ij_1}(t_1)P_{j_1 j_2}(t_2 - t_1) \ldots P_{j_{n-1} j_n}(t_n - t_{n-1})$$

za sve $n \geq 1$, sve $j_1, \ldots, j_n \in S$ i sve $0 < t_1 < \cdots < t_n$. Mi ćemo se zbog jednostavnosti zapisa ograničiti na slučaj $n = 2$, te za sve $i, j_1, j_2 \in S$ i $0 < t_1 < t_2$ dokazati jednakost

$$\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) = P_{ij_1}(t_1)P_{j_1 j_2}(t_2 - t_1)\,. \tag{2.19}$$

Neka su $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $0 \leq n_1 < n_2$, te $i_{n_1}, \ldots, i_{n_2-1} \in S$. Promotrimo slučajnu varijablu $\sum_{l=n_1}^{n_2} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}$. Kao zbroj nezavisnih apsolutno neprekidnih slučajnih varijabli, to je također apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Označimo njenu funkciju gustoće sa $f_{i_{n_1},\ldots,i_{n_2}}^{(n_1,n_2)}$. Uvedimo još konvenciju $f^{(0,-1)} = 1$ i $\sum_{l=0}^{-1} = 0$.

Lema 2.21 *Za $t \geq 0$, te $i, j \in S$ vrijedi*

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) & \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \leq t < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n+1}}{q(j)} \right) \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \ldots, Z_n = j) \qquad (2.20)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \int_0^t f_{i,i_1,\ldots,i_{n-1}}^{(0,n-1)}(u) e^{-q_j(u)(t-u)}\, du \cdot \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \ldots, Z_n = j)\,. \qquad (2.21) \end{aligned}$$

Dokaz: Računamo

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j) &= \mathbb{P}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n \mathbf{1}_{[J_n, J_{n+1})}(t) = j\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(Z_n = j, J_n \le t < J_{n+1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \mathbb{P}_i(J_n \le t < J_{n+1}, Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \mathbb{P}_i\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t < \sum_{l=0}^{n} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t < \sum_{l=0}^{n} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right) \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \dots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j)\,,
\end{aligned}
$$

gdje zadnja nejednakost slijedi zbog nezavisnosti lanca Z i slučajnih varijabli $(E_l : l \ge 1)$. To dokazuje (2.20). Da bismo dokazali (2.21), stavimo prvo zbog jednostavnosti $f = f^{(0,n-1)}_{i,i_1,\dots i_{n-1}}$. Zbog nezavisnosti, gustoća slučajnog vektora $\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, \frac{E_{n+1}}{q(i_n)}\right)$ jednaka je produktu $f(u) \cdot q(j)e^{-q(j)v}$. Slijedi (vidi Zadatak 2.15)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n+1}}{q(i_n)}\right) \\
&= \iint_{u \le t < u+v} f(u) q(j) e^{-q(j)v}\, du\, dv \\
&= \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} f(u) q(j) e^{-q(j)v}\, du\, dv \\
&= \int_0^t f(u) e^{-q(j)(t-u)}\, du\,.
\end{aligned}
$$

∎

Lema 2.22 *Za* $0 \le n_1 < n_2$, $i_0, i_1, \dots, i_{n_2} \in S$, *te* $0 < t_1 < t_2$ *vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n_1-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, \sum_{l=0}^{n_2-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_2 < \sum_{l=0}^{n_2} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right) \\
&= \int_0^{t_1} f^{(0,n_1-1)}_{i_0,\dots,i_{n_1-1}}(u) e^{-q(i_{n_1})(t_1-u)}\, du \cdot \mathbb{P}\left(\sum_{l=n_1}^{n_2-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_2 - t_1 < \sum_{l=n_1}^{n_2} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right). \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Dokaz: Uvodimo jednostavnije oznake: $f = f^{(0,n_1-1)}_{i_0,\ldots,i_{n_1}-1}$ i $g = f^{(n_1+1,n_2-1)}_{i_{n_1+1},\ldots,i_{n_2-1}}$. Komponente slučajnog vektora

$$\left(\sum_{l=0}^{n_1-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, \frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})}, \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, \frac{E_{n_2+1}}{q(i_{n_2})}\right)$$

su nezavisne, te je gustoća tog vektora jednaka $f(u_1)q(i_{n_1})e^{-q(i_{n_1})u_2}g(u_3)q(i_{n_2})e^{-q(i_{n_2})u_4}$. Lijeva strana u (2.22) jednaka je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n_1-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})},\ \sum_{l=0}^{n_1-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right.\\
&\qquad\left.\le t_2 < \sum_{l=0}^{n_1-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})}\right)\\
&= \iiiint\limits_{\substack{u_1\le t_1<u_1+u_2\\ u_1+u_2+u_3\le t_2<u_1+u_2+u_3+u_4\\ u_i\ge 0, i=1,2,3,4}} f(u_1)q(i_{n_1})e^{-q(i_{n_1})u_2}g(u_3)q(i_{n_2})e^{-q(i_{n_2})u_4}\,du_1\,du_2\,du_3\,du_4\\
&= \int_0^{t_1}\int_{t_1-u_1}^{\infty} f(u_1)q(i_{n_1})e^{-q(i_{n_1})u_2}\\
&\qquad\cdot\left(\int_0^{t_2-(u_1+u_2)}\int_{t_2-(u_1+u_2+u_3)}^{\infty} g(u_3)q(i_{n_2})e^{-q(i_{n_2})u_4}\,du_3\,du_4\right)du_1\,du_2\\
&\qquad\{v_1=u_1, v_2=u_1+u_2-t_1, dv_1\,dv_2 = du_1, du_2\}\\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{\infty} f(v_1)q(i_{n_1})e^{-q(i_{n_1})(v_2-v_1+t_1)}\\
&\qquad\cdot\left(\int_0^{t_2-t_1-v_2}\int_{t_2-t_1-v_2-u_3}^{\infty} g(u_3)q(i_{n_2})e^{-q(i_{n_2})u_4}\,du_3\,du_4\right)dv_1\,dv_2\\
&= \int_0^{t_1} f(v_1)e^{-q(i_{n_1})(t_1-v_1)}\,dv_1 \iiint\limits_{\substack{0\le v_2+u_3\le t_2-t_1\\ t_2-t_1<v_2+u_3+u_4}} q(i_{n_1})e^{-q(i_{n_1})v_2}g(u_3)q(i_{n_2})e^{-q(i_{n_2})u_4}\,dv_2\,du_3\,du_4\\
&= \int_0^{t_1} f(v_1)e^{-q(i_{n_1})(t_1-v_1)}\,dv_1\\
&\qquad\cdot\mathbb{P}\left(\frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_2-t_1 < \frac{E_{n_1+1}}{q(i_{n_1})} + \sum_{l=n_1+1}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n_2+1}}{q(i_{n_2})}\right), \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

što je desna strana u (2.22).

Lema 2.23 *Za* $n \geq 0$, $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$, *te* $0 < t_1 < t_2$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \leq t_1 < t_2 < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n+1}}{q(i_n)}\right) \\
&= \int_0^{t_1} f^{(0,n-1)}_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}(u) e^{-q(i_n)(t_1-u)}\, du \cdot \mathbb{P}\left(0 \leq t_2 - t_1 < \frac{E_{n+1}}{q(i_n)}\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Dokaz: Označimo opet zbog jednostavnosti $f = f^{(0,n-1)}_{i_0,\ldots,i_{n-1}}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \leq t_1 < t_2 < \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n+1}}{q(i_n)}\right) \\
&= \iint\limits_{\substack{u_1 \leq t_1 < t_2 < u_1 + u_2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0}} f(u_1) q(i_n) e^{-q(i_n) u_2}\, du_1\, du_2 \qquad \left(\begin{array}{l} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_1 + u_2 - t_1 \end{array}\right) \\
&= \int_0^{t_1} \int_{t_2 - t_1}^{\infty} f(v_1) q(i_n) e^{-q(i_n)(v_2 - v_1 + t_1)}\, dv_1\, dv_2 \\
&= \int_0^{t_1} f(v_1) e^{-q(i_n)(t_1 - v_1)}\, dv_1 \int_{t_2 - t_1}^{\infty} q(i_n) e^{-q(i_n) v_2}\, dv_2 \\
&= \int_0^{t_1} f(v_1) e^{-q(i_n)(t_1 - v_1)}\, dv_1\, \mathbb{P}\left(0 \leq t_2 - t_1 < \frac{E_{n+1}}{q(i_n)}\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Napomena 2.24 Definiramo $n_1 = n_2 = n$. Tada, uz konvenciju $\sum_{l=n_1}^{n_1-1} = 0$, (2.23) možemo napisati u obliku formule (2.22).

Konačno, za $0 \leq n_1 \leq n_2$, te $i, i_1, \ldots, i_{n_2}$, zbog Markovljevog svojstva vrijedi

$$\mathbb{P}_i(Z_l = i_l, l = 1, 2, \ldots, n_2) = \mathbb{P}_i(Z_l = i_l, l = 1, 2, \ldots, n_1) \mathbb{P}_{i_{n_1}}(Z_1 = i_{n_1+1}, \ldots, Z_{n_2-n_1} = i_{n_2}). \tag{2.24}$$

Dokaz Teorema 2.20: Za $i, j_1, j_2 \in S$ i $0 < t_1 < t_2$ računamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) &= \mathbb{P}_i\left(\sum_{n_1=0}^{\infty} Z_{n_1}\mathbf{1}_{[J_{n_1},J_{n_1+1})}(t_1) = j_1, \sum_{n_2=0}^{\infty} Z_{n_2}\mathbf{1}_{[J_{n_2},J_{n_2+1})(t_2)} = j_2\right) \\
&= \sum_{n_1\le n_2} \mathbb{P}_i(Z_{n_1} = j_1, J_{n_1} \le t_1 < J_{n_1+1}, Z_{n_2} = j_2, J_{n_2} \le t_2 < J_{n_2+1}) \\
&= \sum_{n_1\le n_2} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1} \\ i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1} \\ (i_{n_1}=j_1, i_{n_2}=j_2)}} \mathbb{P}_i(J_{n_1} \le t_1 < J_{n_1+1}, J_{n_2} \le t_2 < J_{n_2+1},\, Z_l = i_l, l = 1,\dots,n_2) \\
&= \sum_{n_1\le n_2} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1} \\ i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1} \\ (i_{n_1}=j_1, i_{n_2}=j_2)}} \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{n_1-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_1 < \sum_{l=0}^{n_1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, \sum_{l=0}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_2 \sum_{l=0}^{n_2}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right) \\
&\qquad \cdot\mathbb{P}_i(Z_l = i_l,\, l = 1,\dots,n_2)\,,
\end{aligned}
$$

gdje zadnja jednakost slijedi zbog nezavisnosti lanca Z i niza $(E_n : n \ge 1)$. Za prvi faktor u gornjoj sumi koristimo (2.22) (odnosno (2.23)), a za drugi (2.24). Slijedi

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n_1-1} \\ (i_{n_1}=j_1)}} \int_0^{t_1} f^{(0,n_1-1)}_{i,i_1,\dots,i_{n_1-1}}(u)e^{-q(j_1)(t_1-u)}\,du \cdot \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1,\dots,Z_{n_1} = j_1) \\
&\quad \cdot \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \sum_{\substack{i_{n_1+1},\dots,i_{n_2-1} \\ (i_{n_2}=j_2)}} \mathbb{P}\left(\sum_{l=n_1}^{n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t_2 - t_1 < \sum_{l=n_1}^{n_2}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right) \mathbb{P}_{j_1}(Z_1 = i_{n_1+1},\dots,Z_{n_2-n_1} = i_{n_2})\,.
\end{aligned}
$$

Po Lemi 2.21, prvi redak gore jednak je $P_{ij_1}(t_1)$. U drugom retku napravimo zamjenu varijable sumacije $\tilde n_2 = n_2 - n_1$, uvedemo nove oznake za stanja $k_1 = i_{n_1+1}, k_2 = i_{n_1+2},\dots,k_{\tilde n_2-1} = i_{n_1+n_2-n_1+1} = i_{n_2-1}$, te iskoristimo da sve slučajne varijable E_l imaju istu distribuciju. Slijedi

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(X_{t_1} = j_1, X_{t_2} = j_2) \\
&= P_{ij_1}(t_1) \sum_{\tilde n_2=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{\tilde n_2-1} \\ (k_{\tilde n_2}=j_2)}} \mathbb{P}\left(\sum_{l=0}^{\tilde n_2-1}\frac{E_{l+1}}{q(k_l)} \le t_2 - t_1 < \sum_{l=0}^{\tilde n_2}\frac{E_{l+1}}{q(k_l)}\right) \\
&\qquad \cdot\mathbb{P}_{j_1}(Z_1 = k_1,\dots,Z_{\tilde n_2-1} = k_{\tilde n_2-1}, Z_{\tilde n_2} = j_2) \\
&= P_{ij_1}(t_1)P_{j_1j_2}(t_2 - t_1)\,,
\end{aligned}
$$

gdje zadnji redak slijedi opet iz Leme 2.21. ∎

2.4 Jednadžba unatrag i generatorska matrica

U prošloj točki konstruirali smo slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ krenuvši od diskretno-vremenskog Markovljevog lanca $Z = (Z_n : n \geq 0)$ s prijelaznom matricom $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$, niza nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli $(E_n : n \geq 1)$, te funkcije $q : S \to (0, \infty)$. Uz pretpostavku da je X regularan proces, pokazali samo da zadovoljava Markovljevo svojstvo. Na prijelaznu matricu Π i funkciju q možemo gledati kao na lokalne karakteristike Markovljevog lance X: ako se X nalazi u stanju $i \in S$, tada u stanje $j \in S$, $j \neq i$, prelazi s vjerojatnosti π_{ij} nakon vremena čekanja koje je eksponencijalno s parametrom $q(i)$. Postavlja se pitanje kako ti lokalni parametri određuju globalne karakteristike lance, t.j. vjerojatnosti $P_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$. Odgovor na to pitanje daju integralna i diferencijalna jednadžba unatrag. Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je lanac X regularan.

Teorem 2.25 *(Integralna jednadžba unatrag) Za sve $i, j \in S$ i $t > 0$ vrijedi*

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q(i)t} + \int_0^t q(i) e^{-q(i)s} \sum_{k \neq i} \pi_{ik} P_{kj}(t-s)\, ds\,. \tag{2.25}$$

Dokaz: Vrijedi

$$\mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 > t) + \mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 \leq t) =: A + B\,.$$

Prvi član je lako izračunati. Ako je $j \neq i$, tada je $\mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 > t) = 0$, dok za $j = i$ imamo $\mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 > t) = \mathbb{P}_i(J_1 > t) = e^{-q(i)t}$. Dakle, A je jednak prvom članu na desnoj strani od (2.25). Da bismo izračunali drugi član, postupamo slično kao u dokazu Tereoma 2.20:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 \leq t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(Z_n = j, J_1 \leq t, J_n \leq t < J_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \mathbb{P}_i(J_1 \leq t, J_n \leq t < J_{n+1}, Z_1 = i_1, \ldots, Z_{n-1} = i_{n-1}, Z_n = j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1} \\ (i_0 = i, i_n = j)}} \mathbb{P}\left(\frac{E_1}{q(i)} \leq t, \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \leq t < \sum_{l=0}^{n} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \right) \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1, \ldots, Z_n = j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{n-1} \\ (i_0 = i, i_n = j)}} \mathbb{P}\left(\frac{E_1}{q(i)} \leq t, \sum_{l=0}^{n-1} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \leq t < \sum_{l=0}^{n} \frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \right) \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}_i(Z_1 = i_1) \mathbb{P}_{i_1}(X_1 = i_2, \ldots, Z_{n-1} = j)\,,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

gdje smo u zadnjem retku iskoristili Markovljevo svojstvo lanca Z.

Sada želimo izračunati vjerojatnost u predzadnjem retku. Označimo, zbog jednostavnosti, $f^{(1,n-1)}_{i_1,\dots,i_{n-1}}$ sa f. Slučajni vektor

$$\left(\frac{E_1}{q(i)}, \sum_{l=0}^{n-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}, \frac{E_{n+1}}{q(j)}\right)$$

ima funkciju gustoće $q(i)e^{-q(i)u_1}f(u_2)q(j)e^{-q(j)u_3}$. Zato je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{E_1}{q(i)} \le t, \frac{E_1}{q(i)} + \sum_{l=0}^{n-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t < \frac{E_1}{q(i)} + \sum_{l=0}^{n-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} + \frac{E_{n+1}}{q(j)}\right)\\
&= \iiint\limits_{\substack{u_1\le t\\ u_1+u_2\le t<u_1+u_2+u_3\\ u_1\ge 0, u_2\ge 0, u_3\ge 0}} q(i)e^{-q(i)u_1}f(u_2)q(j)e^{-q(j)u_3}\,du_1\,du_2\,du_3\\
&= \int_0^t q(i)e^{-q(i)u_1}\left(\int_0^{t-u_1}\int_{t-u_1-u_2}^{\infty} f(u_2)q(j)e^{-q(j)u_3}\,du_2\,du_3\right)du_1\\
&= \int_0^t q(i)e^{-q(i)u_1}\left(\iint\limits_{u_2\le t-u_1<u_2+u_3} f(u_2)q(j)e^{-q(j)u_3}\,du_2\,du_3\right)du_1\\
&= \int_0^t q(i)e^{-q(i)u_1}\,\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t-u_1 < \sum_{l=1}^{n}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right)du_1\,.
\end{aligned}$$

Uvrstimo li to u (2.26) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 \le t)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1\ne i}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_{n-1}\\(i_n=j)}} \int_0^t q(i)e^{-q(i)s}\,\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t-s < \sum_{l=1}^{n}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\right)ds\\
&\qquad\qquad \cdot\pi_{ii_1}\mathbb{P}_{i_1}(Z_1 = i_2,\dots,Z_{n-1}=j)\\
&= \int_0^t q(i)e^{-q(i)s}\sum_{i_1\ne i}\pi_{ii_1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_2,\dots,i_{n-1}\\(i_n=j)}}\mathbb{P}\Big(\sum_{l=1}^{n-1}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)} \le t-s < \sum_{l=1}^{n}\frac{E_{l+1}}{q(i_l)}\Big)\\
&\qquad\qquad \cdot\mathbb{P}_{i_1}(Z_1 = i_2,\dots,Z_{n-1}=j)\Big)\,ds\,.
\end{aligned}$$

Uvedimo sada novi indeks sumacije $m = n-1$, te označimo $k = k_0 = i_1, k_1 = i_2, \dots, k_{m-2} =$

$i_{n-1}, k_{m-1} = j$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(X_t = j, J_1 \le t) \\
&= \int_0^t q(i)e^{-q(i)s} \sum_{k\neq i} \pi_{ik} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{m-2} \\ (k_0=i_1, k_{m-1}=j)}} \mathbb{P}\Big(\sum_{l=0}^{m-1} \frac{E_{l+1}}{q(k_l)} \le t-s < \sum_{l=0}^{m} \frac{E_{l+1}}{q(k_l)} \Big) \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}_k(Z_1 = k_1, \dots, Z_m = j) \Big) \, ds \\
&= \int_0^t q(i)e^{-q(i)s} \sum_{k\neq i} \pi_{ik} P_{kj}(t-s)\, ds \,,
\end{aligned}$$

gdje je zadnji redak posljedica jednakosti (2.20). Dobiveni izraz jednak je drugom izrazu na desnoj strani od (2.25). ∎

Uočimo da zamjenom varijabli $u = t - s$, jednakost (2.25) prelazi u

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-q(i)t} + e^{-q(i)t} \int_0^t q(i) e^{q(i)u} \sum_{k\neq i} \pi_{ik} P_{kj}(u)\, du \,. \tag{2.27}$$

Definicija 2.26 Generatorska matrica *(ili Q-matrica) Markovljevog lanca $X = (X_t : t \ge 0)$ je matrica $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ definirana s*

$$q_{ij} = \begin{cases} -q(i)\,, & j = i\,, \\ q(i)\pi_{ij}\,, & j \neq i\,. \end{cases} \tag{2.28}$$

Primjetimo da je $q_{ii} < 0$, $q_{ij} \ge 0$ za $j \neq i$, te da za svaki $i \in S$ vrijedi

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = -q(i) + \sum_{j\neq i} q(i)\pi_{ij} = 0\,. \tag{2.29}$$

Matrica Q potpuno je određena prijelaznom matricom Π i funkcijom q. Obratno, pretpostavimo da je dana matrica $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ takva da je $q_{ii} < 0$, te $\sum_{j\in S} q_{ij} = 0$ za sve $i \in S$. Definiramo funkciju $q : S \to (0, \infty)$, te matricu $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$ sa

$$q(i) = -q_{ii} \quad \pi_{ii} = 0\,, \quad \pi_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}\,.$$

Odmah se vidi da je $\pi_{ij} \ge 0$, te $\sum_{j\in S} \pi_{ij} = 1$ za sve $i \in S$, t.j., Π je stohastička matrica.

Teorem 2.27 *(Diferencijalna jednadžba unatrag) Za sve $i, j \in S$ je $t \mapsto P_{ij}(t)$ neprekidno diferencijabilna funkcija i vrijedi*

$$P'(t) = QP(t)\,, \quad t \ge 0\,. \tag{2.30}$$

Specijalno, za $t = 0$ imamo $P'(0) = Q$.

Dokaz: Napišimo jednakost (2.27) u obliku

$$P_{ij}(t) = e^{-q(i)t}\left(\delta_{ij} + \int_0^t q(i)e^{q(i)u}\big(\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)\big)\,du\right).$$

Podintegralna funkcija $u \mapsto q(i)e^{q(i)u}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)$ je omeđena na $[0,t]$ (uočite $\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u) \leq 1$), te je stoga njen integral neprekidna funkcija od t. Zato je i izraz u zagradi neprekidna funkcija od t, te je i produkt s $e^{-q(i)t}$ neprekidna funkcija od t. Zaključujemo da je za sve $i,j \in S$, $t \mapsto P_{ij}(t)$ neprekidna funkcija. Odavde slijedi da je $\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)$ red neprekidnih funkcija. Nadalje, zbog $\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u) \leq \sum_{k\neq i}\pi_{ik}$, taj red uniformno konvergira. Zaista, indeksiramo li elemente od S skupom $\mathbb{Z}_+$, vrijedi $\sum_{k>n}\pi_{ik}P_{kj}(u) \leq \sum_{k>n}\pi_{ik}$, što je uniformno (po u) malo za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)$ limes uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija, zaključujemo da je $u \mapsto \sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)$ također neprekidna funkcija. Međutim, to znači da je integral

$$t \mapsto \int_0^t q(i)e^{q(i)u}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)\,du$$

diferencijabilna funkcija od t, te vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\delta_{ij} + \int_0^t q(i)e^{q(i)u}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)\,du\right) = q(i)e^{q(i)t}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(t)\,.$$

Budući da je $P_{ij}(t)$ produkt gornje funkcije i diferencijabilne funkcije $e^{-q(i)t}$, zaključujemo da je $P_{ij}(t)$ diferencijabilna. Nadalje, za sve $i,j \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned}
P'_{ij}(t) &= -q(i)e^{-q(i)t}\left(\delta_{ij} + \int_0^t q(i)e^{q(i)u}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(u)\,du\right) + e^{-q(i)t}q(i)e^{q(i)t}\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(t)\\
&= -q(i)P_{ij}(t) + q(i)\sum_{k\neq i}\pi_{ik}P_{kj}(t) = \sum_{k\in S}\big(-q(i)\delta_{ik} + q(i)\pi_{ik}P_{kj}(t)\big)\\
&= \sum_{k\in S} q_{ik}P_{kj}(t)
\end{aligned}$$

što dokazuje jednakost (2.30). Budući da je $\sum_{k\in S} q_{ik}P_{kj}(t)$ uniformno konvergentan red neprekidnih funkcija, zaključujemo da je $P'_{ij}(t)$ neprekidna. Konačno, iz $\mathbb{P}_i(X_0 = j) = \delta_{ij}$ slijedi $P(0) = I$, te iz (2.30) odmah slijedi da je $P'(0) = Q$. ∎

Prisjetimo se oznake $o(h)$, $h \to 0$: za funkciju $\phi : (0,\epsilon) \to \mathbb{R}$ pišemo $\phi(h) = o(h)$ ako vrijedi

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h)}{h} = 0\,.$$

Pogledajmo sada jednakost $P'(0) = Q$ po komponentama. Za $i \in S$ vrijedi

$$-q(i) = q_{ii} = P'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ii}(h) - P_{ii}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ii}(h) - 1}{h} \,,$$

što možemo pisati u obliku

$$1 - P_{ii}(h) = -q_{ii}h + o(h) = q(i)h + o(h) \,.$$

Uočite da je lijeva strana jednaka vjerojatnosti da proces koji kreće iz stanja $i \in S$, u trenutku $h > 0$ više nije u stanju i (t.j., da je napustio stanje i do trenutka $h > 0$). Za male h, ta vjerojatnost proporcionalna je vremenu h s konstantom proporcionalnosti $q(i) = -q_{ii}$. Zato ima smisla zvati $q(i)$ brzinom (ili stopom) napuštanja stanja i. Uočite još da je $q(i) = \frac{1}{\mathbb{E}_i W_1}$ recipročna vrijednost očekivanog vremena čekanja u stanju $i \in S$.

Za $j \neq i$ imamo

$$q(i)\pi_{ij} = q_{ij} = P'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} \,,$$

što možemo pisati kao

$$\mathbb{P}_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h) \,.$$

Dakle, vjerojatnost prelaska iz stanja i u stanje $j \neq i$ u malom vremenu $h > 0$ proporcionalna je vremenu h s konstantom proporcionanosti q_{ij}.

Korolar 2.28 *(Diferencijalna jednadžba unaprijed) Neka je S konačan. Tada za sve $i, j \in S$ vrijedi*

$$P'(t) = P(t)Q \,, \quad t \geq 0 \,. \tag{2.31}$$

Dokaz: Zbog Markovljevog svojstva prijelazna funkcija zadovoljava Chapman-Kolomogorovljevu jednakost

$$P(t+s) = P(t)P(s) \,, \quad t, s \geq 0 \,. \tag{2.32}$$

Budući da je po Teoremu 2.27 funkcija P diferencijabilna, (2.32) možemo derivirati po varijabli s što daje $P'(t+s) = P(t)P'(s)$. Stavimo $s = 0$, pa slijedi $P'(t) = P(t)Q$. ∎

U slučaju konačnog prostora stanja, konstrukcija prijelazne funkcije $P(t)$ iz generatorske matrice Q puno je jednostavnija. U sljedećim zadacima detaljnoje opisana ta konstrukcija.

Zadatak 2.29 (eksponencijalna funkcija matrice) Neka je $M_d(\mathbb{R})$ vektorski prostor $d \times d$ realnih matrica. Na $M_d(\mathbb{R})$ su definirane operatorska norma i sup-norma formulama

$$|Q| = \sup_{x\neq 0} \frac{|Qx|}{|x|} \,, \quad \|Q\|_\infty = \sup_{i,j} |q_{ij}| \,.$$

(a) Dokažite da za sve $Q \in M_d(\mathbb{R})$ vrijedi $\|Q\|_\infty \leq |Q| \leq d\|Q\|_\infty$.

(b) Dokažite da za sve $Q_1, Q_2 \in M_d(\mathbb{R})$ vrijedi $|Q_1+Q_2| \leq |Q_1|+|Q_2|$ i $|Q_1Q_2| \leq |Q_1|\,|Q_2|$.

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$E_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^k}{k!}\,.$$

(c) Dokažite da je $(E_n : n \geq 1)$ Cauchyjev niz (s obzirom na ekvivalentne norme $|\,|$ i $\|\,\|_\infty$). Koristeći činjenicu da su svi konačno-dimenzionalni normirani prostori potpuni, zaključite da je dobro definirana eksponencijalna funckija matrice Q:

$$e^Q := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}\,.$$

(d) Ako $Q_1, Q_2 \in M_d(\mathbb{R})$ komutiraju, tada vrijedi $e^{Q_1+Q_2} = e^{Q_1}e^{Q_2}$.

Zadatak 2.30 Neka je Q $d \times d$ matrica. Za $t \geq 0$ definiramo $P(t) = e^{tQ}$.

(a) Dokažite da za sve $s, t \geq 0$ vrijedi $P(s+t) = P(s)P(t)$ (svojstvo polugrupe).

(b) Dokažite da je $(P(t) : t \geq 0)$ jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe unatrag $P'(t) = QP(t)$.

(c) Dokažite da je $(P(t) : t \geq 0)$ jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe unaprijed $P'(t) = P(t)Q$.

Zadatak 2.31 Neka je $Q = (q_{ij})$ $d \times d$ matrica, te $P(t) = e^{tQ}$. Dokažite da je Q neka Q-matrica (t.j., vrijedi $q_{ii} \leq 0$, $q_{ij} \geq 0$ za $j \neq i$, te $\sum_j q_{ij} = 0$) ako i samo ako je $P(t)$ stohastička matrica za sve $t \geq 0$.

2.5 Svojstva Markovljevog lanca s neprekidnim vremenom

Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom i prostorom stanja S. Označimo s $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ generatorsku matricu od X, te sa $P(t) = (P_{ij}(t) : i, j \in S)$ prijelaznu matricu u vremenu $t \geq 0$. Neka je $(J_n : n \geq 0)$ niz vremena skokova od X, te $Y = (Y_n : n \geq 0)$, $Y_n = X_{J_n}$, lanac skokova pridružen procesu X. Označimo s $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$ prijelaznu matricu (diskretno-vremenskog) lanca Y. Tada je $\pi_{ii} = 0$, te $\pi_{ij} = -q_{ij}/q_{ii}$, $j \neq i$. Definirajmo još $q(i) = -q_{ii}$. Možemo pretpostaviti da je X konstruiran pomoću lanca skokova Y kao u 2.3.

U ovoj točki promatrat ćemo razna svojstva Markovljevog lanca X kao što su klase, vjerojatnosti i vremena apsorpcije, povratnost i prolaznost, invarijantna mjera i stacionarna distribucija, te granična distribucija. Pokazat će se da većina rezultata neposredno slijedi iz odgovarajućih rezultata za proces skokova Y.

Uvedimo sljedeće oznake za vremena pogađanja skupova za lance X, odnosno Y: ako je $B \subset S$, definiramo

$$T_B := \inf\{t \geq 0 :\, X_t \in B\}\,, \qquad \tau_B := \min\{n \geq 0 :\, Y_n \in B\}\,.$$

Definicija 2.32 *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j* dostižno *iz i, u oznaci $i \longrightarrow j$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i(X_t = j \text{ za neko } t \geq 0) > 0\,.$$

Stanja $i, j \in S$ komuniciraju*, u oznaci $i \longleftrightarrow j$ ako vrijedi $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$.*

Očito je komuniciranje relacija ekvivalencije. Pojmovi *klasa komuniciranja*, *zatvorena klasa*, *apsorbirajuće stanje* i *ireducibilnost* definiraju se analogno kao kod Markovljevih lanaca s diskretnim vremenom.

Teorem 2.33 *Za $i \neq j$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $i \longrightarrow j$;

(b) $i \longrightarrow j$ za lanac skokova Y;

(c) postoje stanja $i_0, i_1, \ldots, i_n$ sa $i_0 = i$, $i_n = j$ takva da je $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \ldots q_{i_{n-1} i_n} > 0$;

(d) $p_{ij}(t) > 0$ za sve $t > 0$;

(e) $p_{ij}(t) > 0$ za neki $t > 0$.

Dokaz: Očito vrijedi $(d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo da vrijedi (b). Po Markovljevi lanci, Propozicija 3.2, postoje stanja $i_0, i_1, \ldots, i_n$ sa $i_0 = i$, $i_n = j$ takva da je $\pi_{i_0 i_1} \pi_{i_1 i_2} \ldots \pi_{i_{n-1} i_n} > 0$. Zbog $q_{kl} = q(k)\pi_{kl}$ za sve $k, l \in S$, $k \neq l$, slijedi (c). Konačno, dokazujemo $(c) \Rightarrow (d)$. Ako je $q_{kl} > 0$, tada za sve $t > 0$ vrijedi

$$p_{kl}(t) = \mathbb{P}_k(X_t = l) \geq \mathbb{P}_k(J_1 \leq t, Y_1 = l, W_2 > t) = (1 - e^{-q(k)t})\pi_{kl}\, e^{-q(l)t} > 0\,.$$

Budući da vrijedi (c), gornja nejednakost zajedno s Chapman-Kolmogorovljevom jednakosti daje

$$p_{ij}(t) \geq p_{i_0 i_1}(t/n) p_{i_1 i_2}(t/n) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t/n) > 0$$

za sve $t > 0$. ∎

Sada promatramo vjerojatnosti pogađanja skupa $B \subset S$. Očito vrijedi da je

$$\{T_B < \infty\} = \{\tau_B < \infty\}\,, \qquad T_B = J_{\tau_B}\,.$$

Definirajmo vjerojatnost da X, počevši iz i, pogodi skup B:

$$h_i^B := \mathbb{P}_i(T_B < \infty) = \mathbb{P}_i(\tau_B < \infty)\,.$$

Teorem 2.34 *Neka je $B \subset S$. Vektor $h^B = (h_i^B : i \in S)$ je minimalno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} h_i^B = 1 & \textit{za } i \in B\,, \\ \sum_{j\in S} q_{ij} h_j^B = 0 & \textit{za } i \notin B\,. \end{cases} \tag{2.33}$$

Dokaz: Po Markovljevi lanci, Teorem 4.2, $h^B = (h_i^B : i \in S)$ je minimalno rješenje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{cases} h_i^B = 1 & \text{za } i \in B\,, \\ h_i^B = \sum_{j\in S} \pi_{ij} h_j^B & \text{za } i \notin B\,. \end{cases}$$

Zbog $\pi_{ii} = 0$, te $\pi_{ij} = -q_{ij}/q_{ii}$ slijedi tvrdnja. ∎

Označimo sa

$$k_i^B := \mathbb{E}_i[T_B]$$

očekivano vrijeme da $X = (X_t : t \geq 0)$ dođe u skup $B \subset S$.

Primjer 2.35 Neka je generatorska matrica Markovljevog lanca $X = (X_t : t \geq 0)$ dana s

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Želimo izračunati $k_1 := \mathbb{E}_1[T_4]$, očekivano vrijeme od 1 do 4. Krenuvši iz 1, lance provede srednje vrijeme $1/q(1) = 1/2$ u stanju 1, a tada s jednakom vjerojatnosti prelazi u 2 ili 3. Stavimo li $k_i = \mathbb{E}_i[T_4]$, slijedi

$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3\,.$$

Slično,

$$k_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_3\,, \quad k_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2\,.$$

Rješavanjem slijedi $k_1 = \frac{17}{12}$.

Teorem 2.36 *Neka je $B \subset S$. Vektor $k^B = (k_i^B : i \in S)$ je minimalno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} k_i^B = 0\,, & \textit{za } i \in B\,, \\ -\sum_{j\in S} q_{ij} k_j^B = 1\,, & \textit{za } i \notin B\,. \end{cases} \tag{2.34}$$

Dokaz: Pokazujemo da vektor k^B zadovoljava (2.34). Ako je $i \in B$, tada je $T_B = 0$ $\mathbb{P}_i$-g.s., pa je $k_i^B = \mathbb{E}_i[T_B] = 0$. Pretpostavimo $i \notin B$. Tada je $T_B \geq J_1$, pa zbog Markovljevog svojstva lanca skokova Y imamo

$$\mathbb{E}_i[T_B - J_1 \,|\, Y_1 = j] = \mathbb{E}_j[T_B]\,.$$

Zato je

$$k_i^B = \mathbb{E}_i[T^B] = \mathbb{E}_i[J_1] + \sum_{j\neq i} \mathbb{E}_i[T_B - J_1 \,|\, Y_1 = j]\mathbb{P}(Y_1 = j) = \frac{1}{q(i)} + \sum_{j\neq i} \pi_{ij} k_j^B \,.$$

Nakon množenja s $-q(i) = q_{ii}$ slijedi

$$-\sum_{j\in S} q_{ij} k_j^B = 1\,.$$

Zadatak 2.37 Dokažite minimalnost u prethodnom teoremu.

U nastavku proučavamo povratnost i prolaznost lanca $X = (X_t : t \geq 0)$.

Definicija 2.38 *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S. Stanje $i \in S$ je* povratno *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \textit{ je neomeđen}) = 1\,.$$

Stanje $i \in S$ je prolazno *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \textit{ je neomeđen}) = 0\,.$$

Teorem 2.39 *(i) Ako je $i \in S$ povratno za lanac skokova $Y = (Y_n : n \geq 0)$, tada je i povratno za $X = (X_t : t \geq 0)$.*
(ii) Ako je $i \in S$ prolazno za lanac skokova $Y = (Y_n : n \geq 0)$, tada je i prolazno za $X = (X_t : t \geq 0)$.
(iii) Svako stanje je ili povratno ili prolazno.
(iv) Povratnost i prolaznost su svojstva klase.

Dokaz: (i) Prvo pokazujemo da je $\mathbb{P}_i(\zeta = \infty) = 1$. Neka je $\tau_i(0) = 0$, te $\tau_i(n) = \min\{k > \tau_i(n-1) : Y_k = i\}$, $n \geq 1$, n-to vrijeme povratka lanca Y u stanje i. Po pretpostavci je $\mathbb{P}_i(\tau_i(n) < \infty)$ za sve $n \geq 1$. Tada je

$$\zeta \geq \sum_{n=0}^{\infty} W_{\tau_i(n)+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{\tau_i(n)+1}}{q(i)} = +\infty \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.}$$

Zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} J_n = \infty$ $\mathbb{P}_i$-g.s., pa zato i $\lim_{n\to\infty} J_{\tau_i(n)} = \infty$ $\mathbb{P}_i$-g.s. Budući da je $X_{J_{\tau_i(n)}} = Y_{\tau_i(n)} = i$, slijedi da je $\{t \geq 0 : X_t = i\}$ neomeđen $\mathbb{P}_i$-g.s.
(ii) Pretpostavimo da je $i \in S$ prolazno za lanac skokova Y. Tada i nije apsorbirajuće stanje za Y, pa stoga nije apsorbirajuće niti za X. Stavimo

$$N = \sup\{n \geq 0 : Y_n = i\} < \infty \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.}\,.$$

Slijedi da je $\{t \geq 0 : X_t = i\}$ omeđen odozgo s J_{N+1}, što je $\mathbb{P}_i$-g.s. konačno.
(iii) i (iv) Te dvije tvrdnje slijede iz (i) i (ii), te odgovarajućih tvrdnji za lanac skokova. ∎

Uočite da tvrdnje (i) i (ii) kažu da je $i \in S$ povratno za Y ako i samo ako je povratno za X.

Za $i \in S$ definiramo vrijeme S_i formulom

$$S_i = \inf\{t \geq J_1 : X_t = i\}.$$

Teorem 2.40 *(i) Ako je $q(i) = 0$ ili $\mathbb{P}_i(S_i < \infty) = 1$, tada je $i \in S$ povratno i vrijedi $\int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt = \infty$.*
(ii) Ako je $q(i) > 0$ i $\mathbb{P}_i(S_i < \infty) < 1$, tada je i prolazno i vrijedi $\int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt < \infty$.

Dokaz: (i) Ako je $q(i) = 0$, tada je i apsorbirajuće stanje za X, pa je $P_{ii}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = i) = 1$ otkud slijedi $\int_0^\infty P_{ii}(t) = \infty$. Pretpostavimo da je $q(i) > 0$. Stavimo $\sigma_i = \min\{n > 0 : Y_n = i\}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}_i(\sigma_i < \infty) = \mathbb{P}_i(S_i < \infty) = 1,$$

pa slijedi da je i povratno za Y. Zato je povratno i za X. Označimo $\Pi^n = (\pi_{ij}^{(n)} : i, j \in S)$. Pokazat ćemo da je

$$\int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt = \frac{1}{q(i)} \sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}. \tag{2.35}$$

Po Markovljevi lanci, Teorem 6.4, slijedit će da je $i \in S$ povratno za X ako i samo ako vrijedi $\int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt = \infty$. Upotrebom Fubinijevog teorema imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty P_{ii}(t)\, dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_t=i\}})\, dt &= \mathbb{E}_i \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=i\}}\, dt \\
&= \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^\infty W_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=i\}} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i\big(W_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=i\}}\big) \\
&= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i(W_{n+1} \,|\, Y_n = i)\mathbb{P}_i(Y_n = i) = \frac{1}{q(i)} \sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}.
\end{aligned}$$

(ii) Slijedi iz $\mathbb{P}_i(\sigma_i < \infty) = \mathbb{P}_i(S_i < \infty) < 1$ i jednakosti (2.35). ∎

Propozicija 2.41 *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac. Za $h > 0$ definiramo $Z = (Z_n : n \geq 0)$ sa $Z_n = X_{nh}$.*

(i) Ako je $i \in S$ povratno za X tada je i povratno za Z.

(ii) Ako je $i \in S$ prolazno za X tada je i prolazno za Z.

Dokaz: Tvrdnja (ii) je očigledna: ako je skup $\{t \geq 0 : X_t = i\}$ omeđen, tada je $Z_n = X_{nh} = i$ najviše konačno mnogo puta ($\mathbb{P}_i$-g.s). Pretpostavimo da je $i \in S$ povratno za X. Za $nh \leq t < (n+1)h$ vrijedi

$$\begin{aligned}
P_{ii}((n+1)h) &= \mathbb{P}_i(X_{(n+1)h} = i) \geq \mathbb{P}_i(X_t = i, X_{(n+1)h} = i) \\
&= \mathbb{P}_i(X_t = i)\mathbb{P}_i(X_{(n+1)h-t} = i) \geq P_{ii}(t)e^{-q(i)h}.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt \le e^{q(i)h}\int_0^\infty P_{ii}((n+1)h)\,dt = he^{q(i)h}\sum_{n=1}^\infty P_{ii}(nh) = he^{q(i)h}\sum_{n=1}^\infty P_{ii}^{(n)}(h)\,.$$

Tvrdnja proizlazi iz Markovljevi lanci, Teorem 6.4, i Teorema 2.40. ∎

Definicija 2.42 *Neka je $X = (X_t : t \ge 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i generatorskom matricom Q. Netrivijalna mjera $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ zove se* invarijantna mjera *za X (odnosno za Q) ako vrijedi*

$$\lambda Q = 0\,. \tag{2.36}$$

Invarijantna (ili stacionarna) distribucija *je invarijantna mjera koja je vjerojatnosna distribucija. Za mjeru λ i matricu Q kažemo da su u* detaljnoj ravnoteži *ako vrijedi*

$$\lambda_i q_{ij} = \lambda_j q_{ji}\,, \quad \textit{za sve } i,j \in S\,. \tag{2.37}$$

Uočimo da ako su λ i Q u detaljnoj ravnoteži, tada je λ invarijantna za Q. Zaista

$$(\lambda Q)_i = \sum_{j\in S}\lambda_j q_{ji} = \sum_{j\in S}\lambda_i q_{ij} = 0\,.$$

Teorem 2.43 *Neka je X Markovljev lanac s generatorskom matricom Q, te Y pripadajući lanac skokova s prijelaznom matricom Π. Za mjeru $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ stavimo $\mu_i = \lambda_i q(i)$, $\in S$. Tada je ekvivalentno:*

(i) λ je invarijantna za X;

(b) μ je invarijantna za Y, t.j., $\mu = \mu\Pi$.

Dokaz: Za sve $i,j \in S$ vrijedi $q(i)(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = q_{ij}$, pa je

$$(\mu(\Pi - I))_j = \sum_{i\in S}\mu_i(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_{i\in S}\lambda_i q_{ij} = (\lambda Q)_j\,.$$

Propozicija 2.44 *Neka je Markovljev lanac $X = (X_t : t \ge 0)$ s generatorskom matricom Q ireducibilan i povratan. Tada X ima invarijantnu mjeru λ koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu.*

Dokaz: U trivijalnom slučaju kada je $S = \{i\}$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je $|S| \ge 2$. Zbog ireducibilnosti je tada $q(i) > 0$ za sve $i \in S$ (u suprotnom bi postojalo apsorbirajuće stanje, pa lanac ne bi mogao biti povratan). Zbog Teorema 2.33 i Teorema 2.39 slijedi da je lanac skokova Y ireducibilan i povratan. Po Markovljevi lanci, Teorem 7.11, lanac skokova Y ima invarijantnu mjeru μ koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. Zbog Teorema 2.43, mjera λ definirana s $\lambda_i = \mu_i/q(i)$ je invarijantna za X i jedinstvena je do na multiplikativnu konstantu. ∎

Podsjetimo se da je stanje $i \in S$ povratno za X ako je ili $q(i) = 0$ ili $\mathbb{P}_i(S_i < \infty) = 1$. Definiramo *očekivano vrijeme povratka* u stanje $i \in S$ kao

$$m_i := \mathbb{E}_i(S_i)\,, \quad i \in S\,.$$

Definicija 2.45 *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac. Stanje $i \in S$ je* pozitivno povratno *ako vrijedi ili $q(i) = 0$ ili $m_i = \mathbb{E}_i(S_i) < \infty$. Povratno stanje i koje nije pozitivno povratno zove se* nul-povratno.

Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan i $q(i) > 0$ za sve $i \in S$. Za $i \in S$ definiramo $\gamma^i = (\gamma^i_j : j \in S)$ kao

$$\gamma^i_j := \mathbb{E}_i\left(\int_0^{S_i \wedge \zeta} \mathbf{1}_{\{X_t = j\}}\, dt\right).$$

Uočite da je γ^i_j očekivano vrijeme koje lanac X provede u stanju $j \in S$ prije prvog povratka u stanje $i \in S$ (ukoliko lanac prije ne eksplodira). Po teoremu o monotonoj konvergenciji vrijedi

$$\sum_{j \in S} \gamma^i_j = \mathbb{E}_i\left(\int_0^{S_i \wedge \zeta} \sum_{j \in S} \mathbf{1}_{\{X_t = j\}}\, dt\right) = \mathbb{E}_i(S_i \wedge \zeta)\,.$$

Neka je nadalje

$$\nu^i_j := \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\sigma_i - 1} \mathbf{1}_{\{Y_n = j\}}\,, \quad j \in S$$

ukupno očekivano vrijeme koje lanac skokova Y provede u $j \in S$ prije prvog povratka u stanje i. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\gamma^i_j &= \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} W_{n+1} \mathbf{1}_{\{Y_n = j,\, n < \sigma_i\}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(W_{n+1} \,|\, Y_n = j)\mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{Y_n = j,\, n < \sigma_i\}}) \\
&= \frac{1}{q(j)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{Y_n = j, n < \sigma_i\}}) \\
&= \frac{1}{q(j)}\, \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\sigma_i - 1} \mathbf{1}_{\{Y_n = j\}} = \frac{\nu^i_j}{q(j)}\,,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

gdje je u drugom retku korišteno Markovljevo svojstvo.

Propozicija 2.46 *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac. Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

(i) Sva stanja su pozitivno povratna.

(ii) Postoji pozitivno povratno stanje.

(iii) Lanac je regularan i ima stacionarnu distribuciju λ.

U slučaju kada vrijede gornja svojstva imamo $m_i = 1/(\lambda_i q(i))$ za sve $i \in S$.

Dokaz: Isključimo trivijalan slučaj $S = \{i\}$. Zbog ireducibilnosti je tada $q(i) > 0$ za sve $i \in S$. Jasno je da (i) povlači (ii). Pretpostavimo da vrijedi (ii) te neka je $i \in S$ to pozitivno povratno stanje. Tada je i povratno, te je lanac skokova Y također povratan. Iz dokaza Teorema 2.39 (i) slijedi da je lanac X regularan. Po Markovljevi lanci, Propozicija 7.8, vrijedi $\nu^i \Pi = \nu^i$, pa iz Teorema 2.43 i jednakosti (2.38) slijedi $\gamma^i Q = 0$. Zbog

$$\sum_{j \in S} \gamma_j^i = \mathbb{E}_i(S_i) = m_i < \infty$$

slijedi da je $\lambda = (\lambda_j : j \in S)$ definirana s $\lambda_j := \gamma_j^i / m_i$ stacionarna distribucija.

Pretpostavimo da vrijedi (iii), t.j. da je λ stacionarna distribucija. Za proizvoljan $i \in S$ definiramo $\mu = (\mu_j : j \in S)$ sa

$$\mu_j = \frac{\lambda_j q(j)}{\lambda_i q(i)}\,.$$

Tada je $\mu_i = 1$ i $\mu \Pi = \mu$ zbog Teorema 2.43. Po Markovljevi lanci, Propozicija 7.10, vrijedi $\mu_j \geq \nu_j^i$ za sve $j \in S$. Slijedi

$$\begin{aligned} m_i &= \sum_{j \in S} \gamma_j^i = \sum_{j \in S} \frac{\nu_j^i}{q(j)} \leq \sum_{j \in S} \frac{\mu_j}{q(j)} \\ &= \sum_{j \in S} \frac{\lambda_j}{\lambda_i q(i)} = \frac{1}{\lambda_i q(i)} < \infty\,, \end{aligned}$$

što pokazuje da je $i \in S$ pozitivno povratno.

Zadnja tvrdnja propozicije slijedi na isti način kao zadnja tvrdnja Teorema 7.14, Markovljevi lanci. ∎

Napomena 2.47 Usporedite gornji teorem s Teoremom 7.14, Markovljevi lanci. Na prvi pogled oba teorema tvrde isto. Međutim, u Primjeru 2.63 pokazat ćemo da Markovljev lanac s neprekidnim vremenom X može imati stacionarnu distribuciju, ali da nije pozitivno povratan (čak ni povratan). To je moguće samo tako da je vrijeme života ζ lanca X konačno.

Sljedeći rezultat povezuje definiciju invarijantne mjere s analognom definicijom za diskretno-vremenski Markovljev lanac.

Teorem 2.48 *Neka je X ireducibilan i povratan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q i stohastičkom polugrupom $(P(t) : t \geq 0)$, te neka je λ mjera na skupi stanja S. Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

(i) $\lambda Q = 0$;

(ii) $\lambda P(t) = \lambda$;

Dokaz: Budući da je X povratan, iz dokaza Teorema 2.39 (i) slijedi da je lanac X regularan. Po Propoziciji 2.41, diskretno-vremenski lanac $Z_n = X_{ns}$ s prijelaznom matricom $P(s)$ je povratan. Slijedi da je mjera λ koja zadovoljava (i) ili (ii) jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. Fiksiramo $i \in S$ i definiramo

$$\gamma_j = \mathbb{E}_i \int_0^{S_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt\,.$$

U dokazu Propozicije 2.46 pokazano je da je $\gamma Q = 0$. Pokazujemo da vrijedi $\gamma P(s) = \gamma$, t.j, γ je invarijantna za $P(s)$. Upotrebom jakog Markovljevog svojstva u vremenu S_i dobivamo,

$$\mathbb{E}_i \int_0^{s} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt = \mathbb{E}_i \int_{S_i}^{S_i+s} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt\,,$$

otkud

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \mathbb{E}_i \int_0^{S_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt \\
&= \mathbb{E}_i \int_0^{s+S_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt - \mathbb{E}_i \int_{S_i}^{s+S_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt \\
&= \mathbb{E}_i \int_0^{s+S_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt - \mathbb{E}_i \int_0^{s} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt \\
&= \mathbb{E}_i \int_s^{s+S_i} \mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\, dt \\
&= \mathbb{E}_i \int_0^{S_i} \mathbf{1}_{\{X_{s+u}=j\}}\, du
\end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi zamjenom varijabli $u = t - s$. Nadalje, upotrebom Fubinijevog teorema,

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{s+u} = j, u < S_i)\, du \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k\in S} \mathbb{P}_i(X_{s+u} = j, X_u = k, u < S_i)\, du \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k\in S} \mathbb{P}_i(X_u = k, u < S_i) P_{kj}(s)\, du \\
&= \sum_{k\in S} \left(\mathbb{E}_i \int_0^{S_i} \mathbf{1}_{\{X_u=k\}}\, du \right) P_{kj}(s) \\
&= \sum_{k\in S} \gamma_k P_{kj}(s)\,.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da vrijedi (i). Tada je $\lambda = c\gamma$ za neki $c > 0$. Budući da je γ invarijantna za $P(s)$, slijedi da je i λ invarijantna za $P(s)$. Obrat se dokazuje na isti način. ∎

Napomena 2.49 Pretpostavimo da je prostor stanja S konačan. Tada se gornji rezultat može dokazati jednostavnije na sljedeći način. Diferencijalna jednadžba unatrag kaže da je $P'(s) = QP(s)$. Slijedi

$$\frac{d}{ds}\lambda P(s) = \lambda P'(s) = \lambda Q P(s)\,,$$

gdje je prva jednakost opravdana činjenicom da je suma $\sum_{k\in S}\lambda_k P_{kj}(s)$ konačna. Ako vrijedi $\lambda Q = 0$, tada je $(d/ds)\lambda P(s) = 0$, odnosno $s \to \lambda P(s)$ je konstanta. Zbog $\lambda P(0) = \lambda$, slijedi $\lambda P(s) = \lambda$ (za sve $s \geq 0$).

Definicija 2.50 *Vjerojatnosna distribucija* $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ *se zove* granična distribucija *Markovljevog lanca* $X = (X_t : t \geq 0)$ *ako vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \lambda_j\,, \qquad \textit{za sve } i, j \in S\,. \tag{2.39}$$

Lema 2.51 *Neka je* Q *generatorska matrica polugrupe* $(P(t) : t \geq 0)$ *Tada za sve* $t, h \geq 0$ *vrijedi*

$$\big|P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)\big| \leq 1 - e^{-q(i)h}\,.$$

Dokaz: Imamo

$$\begin{aligned}
\big|P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)\big|| &= \big|\sum_{k\in S} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t)\big| \\
&= \big|\sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - (1 - P_{ii}(h))P_{ij}(t)\big| \\
&\leq \big|(1 - P_{ii}(h))P_{ij}(t)\big| \leq 1 - P_{ii}(h) \\
&\leq \mathbb{P}_i(J_1 \leq h) = 1 - e^{-q(i)h}\,.
\end{aligned}$$
∎

Teorem 2.52 *(Konvergencija prema graničnoj distribuciji) Neka je* $X = (X_t : t \geq 0)$ *ireducibilan i regularan Markovljev lanac s generatorskom matricom* Q *i polugrupom* $(P(t) : t \geq 0)$. *Pretpostavimo da* X *ima invarijantnu distribuciju* λ. *Tada je* λ *ujedno i granična distribucija.*

Napomena 2.53 Uočite da za razliku od diskretno-vremenskog slučaja, kod neprekidnog vremena *ne* postoji mogućnost periodičnosti.

Dokaz: Fiksirajmo $h > 0$ i definiramo $Z = (Z_n : n \geq 0)$ sa $Z_n = X_{nh}$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(Z_{n+1} = i_{n+1} \,|\, Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n) \\
&\quad = \mathbb{P}_i(X_{(n+1)h} = i_{n+1} \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_{nh} = i_n) = P_{i_n i_{n+1}}(h)\,,
\end{aligned}$$

što znači da je Z diskretno-vremenski Markovljev lanac s prijelaznom matricom $P(h)$. Po Teoremu 2.33 vrijedi $P_{ij}(h) > 0$ (za sve $i,j \in S$), što povlači da je Z ireducibilan i aperiodičan. Iz Teorema 2.48 slijedi da je λ invarijantna distribucija za Z. Po Markovljevi lanci, Teorem 8.9, slijedi da za sve $i,j \in S$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(nh) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}(h) = \lambda_j \,.$$

Dakle, konvergencija vrijedi po točkama oblika nh. Popunjavamo pomoću Leme 2.51. Fiksirajmo stanje $i \in S$. Za dani $\epsilon > 0$ postoji $h > 0$ takav da je

$$1 - e^{-q(i)s} \leq 1 - e^{-q(i)h} < \epsilon/2 \quad \text{za sve } 0 \leq s \leq h \,.$$

Nadalje, za taj $h > 0$ postoji N takav da za sve $n \geq N$ vrijedi

$$|P_{ij}(nh) - \lambda_j| < \epsilon/2 \,.$$

Neka je $t \geq Nh$. Tada postoji $n \geq N$ takav da je $nh \leq t < (n+1)h$, te je stoga

$$|P_{ij}(t) - \lambda_j| \leq |P_{ij}(t) - P_{ij}(nh)| + |P_{ij}(nh) - \lambda_j| \leq 1 - e^{-q(i)(t-nh)} + \epsilon/2 < \epsilon \,.$$

To dokazuje da vrijedi $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \lambda_j$. ∎

Na kraju navodimo bez dokaza *ergodski teorem* za neprekidno-vremenski Markovljev lanac X.

Teorem 2.54 *(Ergodski teorem) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ ireducibilan Markovljev lanac s generatorskom matricom Q. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s = i\}}\, ds = \frac{1}{m_i q(i)} \right) = 1 \,,$$

gdje je $m_i = \mathbb{E}_i(S_i)$ očekivano vrijeme povratka u stanje $i \in S$. Ako je X pozitivno povratan sa stacionarnom distribucijom λ, tada za svaku omeđenu funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s)\, ds = \lambda(f) \right) = 1 \,,$$

gdje je $\lambda(f) = \int_S f\, d\lambda = \sum_{j\in S} f(j)\lambda_j$.

Uočite da je $\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}}\, ds$ srednje vrijeme koje lanac X provede u stanju i. To znači da $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=i\}}\, ds$ možemo interpretirati kao asimptotsko srednje vrijeme u stanju i.

Zadatak 2.55 Za vrijeme svoje poluprofesionalne košarkaške karijere Fabijan je fluktuirao između tri stanja: 0-potpuno sposoban za igru, 1-lakše ozlijeđen, ali može igrati, i 2-teže ozlijeđen i sjedi na klupi. Klupski je liječnik nakon dugotrajnog promatranja zaključio da se

Fabijanova stanja mogu modelirati Markovljevim procesom $X = (X_t : t \geq 0)$ kod kojeg je prijelazna matrica lanca skokova dana sa

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu su vremena čekanja u stanjima $0, 1, 2$ eksponencijalne slučajne varijable s parametrima 1/3, 1/3 i 1/6.

(a) Odredite generatorsku matricu Q.

(b) Izračunajte koliki je asimptotski očekivani postotak Fabijanovog sjedenja na klupi.

(c) Fabijan dobiva 400 Kn po danu kada je potpuno spreman za igru, 300 Kn kada igra ozlijeđen, i 200 Kn za sjedenje na klupi. Kolika je asimptotska prosječna Fabijanova zarada po utakmici.

Zadatak 2.56 Na tečaju kuhanja masne hrane Fabijan susreće ljupku gospođicu Herminu, te nakon što nekako smogne hrabrosti uspije je upitati za izlazak. Nakon što je led probijen, Hermina i Fabijan viđaju se redovito. Veza je međutim pomalo burna i fluktuira između perioda velike zaljubljenosti (stanje 1), britkog kriticizma uvjetovanog provođenjem previše vremena zajedno (stanje 2), zbunjenosti o stanju i smjeru veze (stanje 3), te emocionalne iscrpljenosti uzrokovane Fabijanovom neumjerenošću u popravljanju svog posla (Fabijan vodi restoran). Fluktuacije među stanjima slijede Markovljev lanac s prijelaznom matricom

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vremena provedena u stanjima 1,2,3,4 su eksponencijalna s parametrima 1/3, 1/2, 1/4 i 1. Neka X_t označava stanje veze u trentuku $t \geq 0$.

(a) Izračunajte asimptotsko prosječno vrijeme koje par provede u velikoj zaljubljenosti.

(b) Fabijan je primjetio da mu posao u restoranu ide bolje kada je zaljubljen. Zarada po danu iznosi 4000 Kn u stanju 1, 2000 Kn u stanju 2, 3000 Kn u stanju 3, te 1500 Kn u stanju 4. Izračunajte asimptotsku zaradau po danu za restoran.

2.6 Primjeri

Primjer 2.57 (Poissonov proces) Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ determinističko gibanje na desno na $\mathbb{Z}_+$. Prijelazna matrica tog lanca je $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_+)$ gdje je $\pi_{ii+1} = 1$, $i \geq 0$, te $\pi_{ij} = 0$, $j \neq i + 1$. Definiramo $q : \mathbb{Z}_+ \to (0, \infty)$ sa $q(i) = q$, $q \in (0, \infty)$. Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac kojem je Y lanac skokova. Budući da je funkcija q omeđena, iz Propozicije 2.19 slijedi da je X regularan. Generatorska matrica Q od X ima oblik

$$Q = \begin{bmatrix} -q & q & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -q & q & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -q & q & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ zove se *Poissonov proces* s parametrom q. Izračunjamo prijelazne funkcije $(P(t) : t \geq 0)$ od X. Prvo računamo $P_{0j}(t) = \mathbb{P}_0(X_t = j)$. Upotrijebit ćemo diferencijalnu jednadžbu unaprijed: $P'(t) = P(t)Q$ (pogledajte što se dobiva upotrebom diferencijalne jednadžbe unatrag). Prvi redak tog sustava jednadžbi jest

$$\begin{array}{rcl} P'_{00}(t) & = & -qP_{00}(t) \\ P'_{01}(t) & = & qP_{00}(t) - qP_{01}(t) \\ P'_{02}(t) & = & qP_{01}(t) - qP_{02}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P'_{0\,j+1}(t) & = & qP_{0j}(t) - qP_{0\,j+1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Rješenje prve jednadžbe je $P_{00}(t) = e^{-qt}$ (zbog početnog uvjeta $P_{00}(0) = 1$). Druga jednadžba sada se može zapisati kao

$$P'_{01}(t) + qP_{01}(t) = qe^{-qt}.$$

Rješenje pripadajuće homogene jednadžbe $P'_{01}(t) + qP_{01}(t) = 0$ je Ce^{-qt}. Nehomogenu jednadžbu rješavamo metodom varijacije konstanti, $P_{01}(t) = C(t)e^{-qt}$. Diferencijalna jednadžba za C jest $C'(t) = q$, pa slijedi $P_{01}(t) = (qt + C)e^{-qt}$. Početni uvjet $P_{01}(0) = 0$ daje

$$P_{01}(t) = qte^{-qt}.$$

Pretpostavimo da vrijedi

$$P_{0j}(t) = \frac{(qt)^j}{j!}\, e^{-qt}, j \geq 1.$$

Lako se pokaže da je tada rješenje jednadžbe $P'_{0\,j+1}(t) = qP_{0j}(t) - qP_{0\,j+1}(t)$ jednako

$$P_{0\,j+1}(t) = \frac{(qt)^{j+1}}{(j+1)!}\, e^{-qt},$$

što dokazuje korak indukcije. Zaključujemo da za sve $j \geq 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}_0(X_t = j) = \frac{(qt)^j}{j!}\, e^{-qt},$$

odnosno da X_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom q (otkud ime procesu). Na sličan način se može pokazati da vrijedi

$$\mathbb{P}_i(X_t = j) = \begin{cases} 0\,, & i > j\,, \\ \frac{(qt)^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-qt}\,, & i \le j\,. \end{cases}$$

Budući da je Y prolazan, isto vrijedi i za X. Na isti način, budući da Y nema invarijantnu mjeru, nema je niti X.

Prisjetimo se konstrukcije procesa X pomoću diskretno-vremenskog lanca Y i niza nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli $(E_n : n \ge 1)$. Stavimo $W_n = E_n/q$, $n \ge 1$. Tada je $(W_n : n \ge 1)$ niz nezavisnih $\mathcal{E}(q)$ slučajnih varijabli. Nadalje, $J_0 = 0$, te $J_n = W_1 + \cdots + W_n$, $n \ge 1$. Tada je

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \mathbf{1}_{[J_n, J_{n+1})}(t)\,.$$

Uz početno stanje $i = 0$, imamo $Y_n = n$, pa je

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{1}_{[J_n, J_{n+1})}(t) \quad \mathbb{P}_0\text{-g.s.}$$

To možemo zapisati kao $X_t = n$ ako i samo ako je $J_n \le t < J_{n+1}$.

Definirajmo *brojeći proces* $N = (N_t : t \ge 0)$ sa

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(J_n)\,, t \ge 0\,.$$

Uočite da N_t broji koliko skokova J_n se dogodilo do trenutka $t \ge 0$. Budući da je $J_n = \sum_{k=1}^n W_k$, N_t broji koliko se nezavisnih eksponencijalnih vremena (s parametrom q) dogodilo do trenutka $t \ge 0$. Očito vrijedi da je $N_t = n$ ako i samo ako je $J_n \le t < J_{n+1}$ što pokazuje da je $X_t = N_t$. Dakle, brojeći proces N je u stvari Poissonov proces s parametrom q (koji kreće iz nule). Izračunajmo direktno distribuciju slučajne varijable N_t. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(J_n \le t < J_{n+1}) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n W_k \le t < \sum_{k=1}^n W_k + W_{n+1}\right) \\ &= \iint\limits_{u \le t < u+v} f(u,v)\, du\, dv\,, \end{aligned}$$

gdje je $f(u,v)$ gustoća slučajnog vektora $(\sum_{k=1}^n W_k, W_{n+1})$. Prva komponenta ima $\Gamma(n,q)$-distribuciju, odnosno funkcija gustoće joj je

$$g(u) = \frac{1}{(n-1)!} q^n u^{n-1} e^{-qu} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u)\,.$$

Druga komponenta je nezavisna od prve i ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom q. Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \iint\limits_{u \le t < u+v} f(u,v)\, du\, dv \\
&= \int_0^t \int_{t-u}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} q^n u^{n-1} e^{-qu} q e^{-qv}\, dv\, du \\
&= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} q^n u^{n-1} e^{-qu} e^{-q(t-u)}\, du = \frac{(qt)^n}{n!}\, e^{-qt}\,.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.58 Neka je $X = (X_t : t \ge 0)$ Poissonov proces s parametrom λ.

(a) Dokažite da za $0 \le s < t$ prirast $X_t - X_s$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda(t-s)$.

(b) Dokažite da su za $0 \le s < t$ slučajne varijable X_s i $X_t - X_s$ nezavisne.

Zadatak 2.59 (Stanjivanje Poissonovog procesa) Fabijan je vlasnik restorana poznatog po izvrsnoj hrani i ne tako izvrsnim higijenskim uvjetima. Posjetitelji, privučeni sjajnim kritikama Fabijanovih delicija, dolaze u restoran po Poissonovom procesu s parametrom $\lambda > 0$. No, pogledavši unutrašnjost restorana, s vjerojatnosti $p \in (0,1)$ se zbog bojazni za svoje zdravlje okrenu i odu Fabijanovoj konkurenciji dvoja vrata niz ulicu. Neka je $X = (X_t : t \ge 0)$ slučajni proces koji opisuje broj posjetitelja koji su do trenutka $t \ge 0$ došli do vrata Fabijanovog restorana, te $\Xi = (\Xi_t : t \ge 0)$ broj posjetitelja do trenutka $t \ge 0$ čiji je apetit prevladao strah od uvjeta u restoranu. Opišite proces Ξ, nađite distribuciju slučajne varijable Ξ_t, te nađite $\mathbb{E}\Xi_t$. Kakav proces čine posjetitelji koji su otišli kod Fabijanove konkurencije? Pretpostavite da svaki drugi posjetitelj uđe u Fabijanov restoran. Što u tom slučaju možete reći o pripadajućem procesu?

Zadatak 2.60 (Superpozicija Poissonovih procesa) Higijenski problem Fabijanovog restorana sastoji se, među ostalim, i u tome što u juhu često upadaju muhe, a miševi se znaju pojaviti pod stolom (nezavisno od dolijetanja muha). Ako muhe doleću u juhu po Poissonovom procesu s parametrom $\lambda > 0$, a miševi se pojavljuju po Poissonovom procesu s parametrom $\mu > 0$, kakav proces čine neugodni događaji za stolom u Fabijanovom restoranu? Preciznije, ako je $X = (X_t : t \ge 0)$ proces koji broji muhe do trenutka $t \ge 0$, a $Y = (Y_t : t \ge 0)$ proces koji broji miševe, ispitajte svojstva procesa $Z = (Z_t : t \ge 0)$ definiranog s $Z_t = X_t + Y_t$.

Primjer 2.61 Neka je $X = (X_t : t \ge 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S takav da je funkcija $q : S \to (0, \infty)$ jednaka konstanti q. Pripadajući lanac skokova je $Y = (Y_n : n \ge 0)$ s prijelaznom matricom $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$. Vremena skokova J_n lanca X dana su sa

$$J_n = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} E_j\,,$$

gdje je $(E_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih $\mathcal{E}(1)$ slučajnih varijabli. Tada vrijedi

$$X_t = Y_n\,, \text{ za } J_n \leq t < J_{n+1}\,. \tag{2.40}$$

Neka je kao u prethodnom primjeru

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(J_n)\,, t \geq 0\,.$$

Tada je $N_t = n$ ako i samo ako vrijedi $J_n \leq t < J_{n+1}$. Zajedno s (2.40) zaključujemo da je

$$X_t = Y_{N_t}\,, t \geq 0\,.$$

Dakle, Markovljev lanac X jednak je pripadajućem lancu skokova računatom u Poissonovom procesu s parametrom $q > 0$. Uočimo da su lanac Y i Poissonov proces N nezavisni. Izračunajmo prijelaznu funkciju $P(t)$ lanca X. Vrijedi

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}_i(Y_{N_t} = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(Y_n = j, N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(Y_n = j)\mathbb{P}_i(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ij}^{(n)}\, e^{-qt} \frac{(qt)^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Primjer 2.62 (Proces rađanja) Pretpostavimo kao i u Primjeru 2.57 da je lanac skokova Y determinističko gibanje na desno na $\mathbb{Z}_+$, te neka je $q : \mathbb{Z}_+ \to \infty$ dana funkcija. Pripadajući proces $X = (X_t : t \geq 0)$ zove se *(čisti) proces rađanja*. Uočite da se proces X monotono giba po Z_+, te da je vrijeme čekanja u $i \in \mathbb{Z}_+$ eksponencijalno distribuirano s parametrom $q(i)$. Interpretacija je da proces X opisuje populaciju u kojoj nema umiranja. Iz Propozicije 2.19 slijedi da je proces regularan ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q(i)} = +\infty\,.$$

U suprotnom proces eksplodira u konačnom vremenu.

Specijalan slučaj gornjeg procesa je *linearni proces rađanja* (ili *Yuleov proces*) kod kojeg je $q(i) = qi$, $q \in (0,\infty)$, $i \geq 1$. Zbog $\sum_{i=1}^{\infty} 1/(qi) = +\infty$, proces je regularan. Interpretacija linearnog procesa rađanja X je sljedeća: proces opisuje broj jedinki neke populacije. Svaka jedinka u populaciji se nakon eksponencijalnog vremena s parametrom $q > 0$ podijeli na dvije nove jedinke. Eksponencijalna vremena za pojedine jedinke su nezavisna. Neka je $i \geq 1$ broj jedinki neke populacije u trenutku $t > 0$. Zbog svojstva zaboravljanja eksponencijalne distribucije, možemo pretpostaviti da je vrijeme do podjele svake od tih i jedinki eksponencijalno s parametrom q (jedinka je zaboravila da je doživjela do vremena t), te da su ta vremena nezavisna. Kako izgleda distribucija vremena do prve podjele jedne od tih jedinki? To vrijeme će po Propoziciji 2.13 imati opet eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\sum_{j=1}^{i} q = qi$. Dakle, proces X će iz stanja i prijeći u stanje $i+1$ nakon eksponencijalnog vremena s parametrom qi. To objašnjava stope prijelaza kod linearnog procesa rađanja.

Primjer 2.63 (Proces rađanja i umiranja) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja $\mathbb{Z}_+$ i generatorskom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ zadanom sa $q_{i\,i+1} = \lambda_i$, $i \geq 0$, $q_{i\,i-1} = \mu_i$, $i \geq 1$, $q_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i)$, $i \geq 1$, te $q_{ij} = 0$ u svim ostalim slučajevima. Dakle,

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

Lanac skokova $Y = (Y_n : n \geq 0)$ dan je prijelaznim vjerojatnostima

$$\pi_{i\,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} =: p_i\,, i \geq 0\,, \qquad \pi_{i\,i+1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} =: q_i\,, i \geq 1\,.$$

Primjetimo da je X ireducibilan ako i samo ako je $\lambda_i > 0$ za sve $i \geq 0$, te $\mu_i > 0$ za sve $i \geq 1$.

Zadatak 2.64 Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ ireducibilan (diskretno-vremenski) Markovljev lanac na skupu stanja S i prijelaznom matricom $P = (p_{ij} : i, j \in S)$. Dokažite da je Y prolazan ako i samo ako postoji stanje $i \in S$ i ograničena funkcija $h : S \setminus \{i\} \to \mathbb{R}$ koja nije identički jednaka nuli i zadavoljava

$$h(j) = \sum_{k \neq i} p_{jk} h(k)\,.$$

Pretpostavimo da je X ireducibilan, te nađimo pomoću prethodnog zadatka kriterij prolaznosti Markovljevog lanca X (odnosno, što je ekvivalentno, pripadajućeg lanca skokova Y). Uzmimo $i = 0$, te tražimo funkciju $h : \{1, 2, \dots\}$ takvu da za sve $j \geq 1$ vrijedi $h(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{jk} h(k)$. Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} h(1) &= p_1 h(2) \\ h(2) &= q_2 h(1) + p_2 h(3) \\ &\vdots \\ h(n) &= q_n h(n-1) + p_n h(n+1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Napišemo li $h(n)$ kao $(p_n + q_n)h(n)$, dobivamo $q_n(h(n) - h(n-1)) = p_n(h(n+1) - h(n))$, odnosno

$$h(2) - h(1) = \frac{q_1}{p_1} h(1)\,, \qquad h(n+1) - h(n) = \frac{q_n}{p_n}(h(n) - h(n-1))\,, n \geq 2\,.$$

Iteracijom slijedi

$$h(n+1) - h(n) = \frac{q_1 q_2 \dots q_n}{p_1 p_2 \dots p_n}\,,$$

odakle

$$h(n) = h(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (h(k+1) - h(k)) = h(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_1 q_2 \dots q_k}{p_1 p_2 \dots p_k}\,.$$

Vidimo da će h biti omeđeno rješenje ako i samo ako vrijedi

$$\sup_{n\geq 1} h(n) = h(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 q_2 \dots q_n}{p_1 p_2 \dots p_n} < \infty \tag{2.42}$$

Iz Zadatka 2.64 slijedi da je lanac prolazan ako i samo ako vrijedi uvjet 2.42, odnosno ekvivalentno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} < \infty\,.$$

Pronađimo sada invarijantnu mjeru η Markovljevog lanca X. Dovoljno je pronaći η tako da je u detaljnoj ravnoteži s Q, t.j. da vrijedi $\eta_i q_{ij} = \eta_j q_{ji}$ za sve $i, j \in \mathbb{Z}_+$, odnosno

$$\begin{aligned}
\eta_0 \lambda_0 &= \eta_1 \mu_1 \\
\eta_1 \lambda_1 &= \eta_2 \mu_2 \\
&\vdots \\
\eta_n \lambda_n &= \eta_{n+1} \mu_{n+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $\eta_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \eta_n$ za sve $n \geq 0$, pa iteriranjem dobivamo

$$\eta_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}\, \eta_0\,, \quad n \geq 1\,, \tag{2.43}$$

gdje je η_0 proizvoljna strogo pozitivna konstanta. Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n < \infty$, što je ekvivalentno s

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} < \infty\,.$$

Tada postoji stacionarna distribucija Markovljevog lanca X. Ukoliko je X regularan, tada će po Propoziciji 2.46 lanac biti i pozitivno povratan.

Navedimo bez dokaza kriterij regularnosti: proces rađanja i umiranja X je regularan ako i samo ako vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n \dots \mu_1}{\lambda_n \dots \lambda_1 \lambda_0} \right) = +\infty\,. \tag{2.44}$$

Promotrimo specijalan slučaj gornjeg lanca rađanja i umiranja kod kojeg se lanac skokova ponaša izvan ishodišta kao slučajna šetnja s vjerojatnošću koraka nadesno jednakoj p. Preciznije, neka je $r : \mathbb{Z}_+ \to (0, \infty)$, te pretpostavimo da je $\lambda_i = r_i p$, $i \geq 0$, te $\mu_i = r_i q$, $i \geq 1$. Uvjet prolaznosti postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n < \infty\,,$$

odnosno $q < p$. Invarijantna mjera η jednaka je

$$\eta_n = \frac{r_0}{r_n} \left(\frac{p}{q}\right)^n \eta_0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Ako je $r_n = r$ za sve $n \geq n_0$, tada vrijedi da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{r_0}{r_n} \left(\frac{p}{q}\right)^n \eta_0 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{r_0}{r_n} \left(\frac{p}{q}\right)^n \eta_0 < \infty$$

ako i samo ako je $p < q$. U tom slučaju normalizacijom invarijantne mjere η dobivamo stacionarnu distribuciju. Primjetimo nadalje da je u slučaju $r_n = r$ za sve $n \geq n_0$ lanac rađanja i umiranja X regularan. To slijedi iz Propozicije 2.19 zbog $sup_{i \geq 0} r_i < \infty$ (uočite da r_i imaju ulogi stopa $q(i)$). Iz Propozicije 2.46 slijedi da je X pozitivno povratan. S druge strane, neka je $r_i = 2^i$ i $1 < p/q < 2$. Tada vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{p}{q}\right)^n \eta_0 < \infty\,,$$

što znači da invarijantna mjera η normalizacijom postaje stacionarna distribucija. Međutim, zbog $p > q$, uvjet (2.42) pokazuje da je lanac X prolazan. U svijetlu Propozicije 2.46 zaključujemo da je to jedino moguće ako X eksplodira u konačnom vremenu.

Vratimo se na opći primjer lanca rađanja i umiranja s generatorkom matricom Q danom s (2.41). Kretanje lanca možemo interpretirati na sljedeći način: ako je lanac u stanju $i \geq 1$, pretpostavimo da su nam dane dvije nezavisne eksponencijalne slučajne varijable $R_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$ ("rađanje") i $U_i \sim \mathcal{E}(\mu_i)$ ("umiranje"). Lanac X prijeđe iz stanja i u stanje $i+1$ ako je $R_i < U_i$, a u stanje $i-1$ ako je $U_i < R_i$. Jednostavno se izračuna (vidi Zadatak 2.15) da vrijedi $\mathbb{P}(R_i < U_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$. Nadalje, vrijeme promjene stanja je $R_i \wedge U_i$ što je po Propoziciji 2.13 eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda_i + \mu_i$.

Kod *linearnog* procesa rađanja i umiranja imamo $\lambda_i = \lambda i$, te $\mu_i = \mu i$, $\lambda, \mu > 0$. Interpretacija takvog procesa slična je interpretaciji čistog procesa rađanja.

Primjer 2.65 Teorija repova bavi se situacijom u kojoj stranke (kupci, pacijenti ili slično) dolaze jedan za drugim sa željom da budu posluženi. Nakon dolaska, svaka stranka čeka u repu (redu) na prvog slobodnog poslužitelja. Broj poslužitelja može se kretati od jednog

do beskonačno. Pretpostavka je da su međuvremena dolazaka stranaka nezavisna i jednako distribuirana, te da su vremena posluživanja stranaka također nezavisna i jednako distribuirana (s distribucijom koja može biti različita od distribucije međuvremena dolazaka). Nakon što je stranka poslužena napušta sustav (servis, trgovinu ili slično). Osnovna veličina koja nas ovdje zanima je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ gdje je X_t broj stranaka u sustavu (t.j., ukupan broj stranaka koje čekaju i koje se poslužuju u trenutku t). Vrste repovi se uobičajeno označavaju kao $\alpha/\beta/s$ gdje α označava distribuciju vremena međudolazaka, β distribuciju vremena posluživanja, a s broj poslužitelja. Najjednostavnija situacija je kada su i vremena međudolazaka i vremena posluživanja eksponencijalna. Oznaka za takve repove je $M/M/s$. Slovo M stoji za "Markovljev".
(a) **M/M/1 rep:** Pretpostavimo da su međuvremena dolazaka eksponencijalna s parametrom $\lambda > 0$, a vremena posluživanja eksponencijalna s parametrom $\mu > 0$. Pretpostavimo da je broj stranaka u sustavu u trenutku $t \geq 0$ jednak $i \geq 1$, t.j., $X_t = i$. Vrijeme do dolaska sljedeće stranke R_i u sustav je eksponencijalno s parametrom λ - zbog svojstva zaboravljanja eksponencijalne distribucije nije važno koliko vremena je proteklo od dolaska zadnje stranke do trenutka t. Zbog istog razloga je vrijeme U_i preostalog posluživanja stranke koja se trenutno poslužuje eksponencijalno s parametrom μ. Vrijeme u kojem će se X promijeniti jednako je $R_i \wedge U_i$, što je eksponencijalno s parametrom $\lambda + \mu$. Vidimo da ovakav opis odgovara lancu rađanja i umiranja s generatorskom matricom

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dakle, $M/M/1$ rep je lanac rađanja i umiranja s gornjom generatorskom matricom. Iz Primjera 2.63 izvodimo sljedeće zaključke: X je prolazan ako i samo ako je $\lambda > \mu$. U tom slučaju rep će neograničeno rasti, $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$. Iz Primjera 2.63 (2.43) slijedi da je invarijantna mjera η oblika

$$\eta_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \eta_0 .$$

U slučaju $\lambda < \eta$, vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n = \eta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \eta_0 \frac{\mu}{\mu - \lambda} ,$$

otkud slijedi da je stacionarna distribucija $\rho = (\rho_n : n \geq 0)$ dana sa

$$\rho_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n , \quad n \geq 1 .$$

Uočite da je to geometrijska distribucija s parametrom $1 - \lambda/\mu$. Srednje vrijeme povratka u stanje 0 (t.j. da se rep isprazni) je po Propoziciji 2.46

$$m_0 = \frac{1}{\rho_0 r_0} = \frac{1}{(1-\lambda/\mu)\lambda} = \frac{\mu}{(\mu-\lambda)\mu} .$$

Budući da je srednje vrijeme boravka u stanju 0 jednako $1/r_0 = 1/\lambda$, slijedi da je (uz oznaku $r_0 = \lambda$ iz Primjera 2.63) srednja duljina vremena tokom kojeg je sustav neprekidno zaposlen jednaka

$$m_0 - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\mu - \lambda}\,.$$

Pretpostavimo da je početna distribucija repa X jednaka stacionarnoj distribuciji ρ. Tada će X biti stacionaran proces. Zato je

$$\mathbb{E}_\rho(X_t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\rho(X_t \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\,.$$

(b) **M/M/s rep:** Ovaj rep je sličan prethodnom uz razliku da postoji $s > 1$ poslužitelja. Distribucije vremena međudolazaka i posluživanja su eksponencijalne s parametrima λ, odnosno μ. Pretpostavimo da je $X_t = i$, $i \geq 1$. Ako je $i \leq s$, znači da je točno i poslužitelja zauzeto, te je vrijeme do oslobađanja jednog od poslužitelja minimum od i nezavisnih eksponencijanih vremena s parametrom μ što je eksponencijalno vrijeme s parametrom μi. U slučaju $i > s$, svih s poslužitelja je zauzeto, te je vrijeme do oslobađanja jednog od njih eksponencijalno s parametrm μs. Vrijeme do dolaske nove stranke u sustav je kao i prije eksponecijalno s parametrom λ. Slijedi da je generatorska matrica lanca X jednaka $Q = (q_{ij} : i, j \geq 0)$ gdje je

$$q_{i\,i+1} = \lambda\,,\ i \geq 0\,, \quad q_{i\,i-1} = \mu i\,,\ 1 \leq i \leq s\,, \quad q_{i\,i-1} = \mu s\,,\ i > s\,.$$

Vidio da je lanac X opet specijalan slučaj procesa rađanja i umiranja. Uvjet prolaznosti pišemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} = \sum_{n=1}^{s} \frac{\mu(2\mu)\ldots(n\mu)}{\lambda^n} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\mu(2\mu)\ldots(s\mu)(s\mu)^{n-s}}{\lambda^n} < \infty$$

ako i samo ako je $s\mu < \lambda$. Invarijantna mjera lanca X slijedi iz (2.43) i jednaka je

$$\eta_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\eta_0\,,\ 0 \leq n \leq s\,, \quad \eta_n = \frac{\lambda^n}{s!s^{n-s}\mu^n}\eta_0\,,\ n > s\,.$$

Ako je $\lambda < s\mu$ postoji stacionarna distribucija $\rho = (\rho_n : n \geq 0)$ dana s

$$\frac{\rho_n}{\rho_0} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 0, 1, \ldots, s\,, \\ \frac{1}{s^{n-s}s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = s+1, s+2, \ldots. \end{cases}$$

Zadatak 2.66 Promotrimo **M/M/1** rep s intenzitetom dolazaka $\lambda > 0$ i intenzitetom posluživanja $\mu > 0$. Pretpostavimo nadalje da najviše dvije stranke mogu biti u sustavu (npr., čekaonica kod liječnika ima samo jednu stolicu). Ako stranka dođe kad su u sustavu već dvije stranke, odmah odlazi. Takav rep se zove **M/M/1** rep s ograničenim kapacitetom. Neka je X_t broj stranaka u sustavu u trentuku $t \geq 0$. Pokažite da je X Markovljev lanac, nađite generatorsku matricu, te izračunajte asimptotsko prosječno vrijeme koje će poslužitelj biti bez posla.

Zadatak 2.67 Za **M/M/1** rep s intenzitetom dolazaka $\lambda > 0$ i intenzitetom posluživanja $\mu > 0$ izračunajte distribuciju broja dolazaka za vrijeme jednog posluživanja.

Primjer 2.68 (Markovljev lanac sa dva stanja) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac sa dva stanja, 0 i 1, i generatorskom matricom

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

Želimo izračunati prijelaznu funkciju $(P(t) : t \geq 0)$ tog lanca. Koristimo diferencijalnu jednadžbu unaprijed $P'(t) = P(t)Q$ uz početni uvjet $P(0) = I$. Po komponentama imamo

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -\lambda P_{00}(t) + \mu P_{01}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu(1 - P_{00}(t)) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu \\ P'_{11}(t) &= \lambda P_{10}(t) - \mu P_{11}(t) = \lambda(1 - P_{11}(t)) - \mu P_{11}(t) = -(\lambda + \mu)P_{11}(t) + \lambda\,. \end{aligned}$$

Rješenje homogene jednadžbe $P'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t)$ je $Ce^{-(\lambda+\mu)t}$, otkud uz korištenje početnog uvjeta $P_{00}(t) = 1$ slijedi da je rješenje nehomogene jednadžbe $P'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu$ dano sa

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,.$$

Na isti način se dobije da je

$$P_{11}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,.$$

Izračunajmo stacionarnu distribuciju $\rho = (\rho_0, \rho_1)$ od X rješavajući jednadžbu $\rho Q = 0$ uz uvjet $\rho_0 + \rho_1 = 1$. Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -\lambda\rho_0 + \mu\rho_1 &= 0 \\ \rho_0 + \rho_1 &= 1\,, \end{aligned}$$

čije je rješenje $\rho = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Izračunajmo još i ukupno očekivano vrijeme koje lanac provede do trenutka t u stanju 0 ako je krenuo iz stanja 0. Traži se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\,ds &= \int_0^t \mathbb{E}_0 \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\,ds = \int_0^t P_{00}(s)\,ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)s} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) ds \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} \left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, t\,. \end{aligned}$$

Asimptotsko prosječno vrijeme provedeno u stanju 0 biti će jednako

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\,ds = \rho_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\,.$$

Zadatak 2.69 Shema naknade za onesposobljenost modelirana je vremenski neprekidnim Markovljevim lancom sa stanjima A (aktivan), P (privremeno nesposoban), T (trajno nesposoban) i M (mrtav). Prijelazne stope su kako slijedi:

$$\begin{array}{lll} A \longrightarrow P:\ 3\lambda & P \longrightarrow A:\ 5\lambda & T \longrightarrow M:\ 2\alpha \\ A \longrightarrow T:\ \lambda & P \longrightarrow T:\ 2\lambda & \\ A \longrightarrow M:\ \alpha & P \longrightarrow M:\ \alpha & \end{array}$$

(i) Napišite generatorsku matricu procesa.

(ii) Izračunajte vjerojatnost da proces koji počinje u stanju A ne posjeti stanja P i T do trenutka t.

(iii) Napišite matrični oblik Kolmogorovljevih diferencijalnih jednadžbi unatrag, te ga upotrijebite za izvod diferencijalne jednadžbe za $p_{TM}(t)$, vjerojatnosti da će član sheme u stanju T u trenutku 0 biti u stanju M u trenutku t.

(iv) Riješite jednadžbu za $p_{TM}(t)$, vjerojatnost da će osiguranik, početno trajno nesposoban, biti mrtav do vremena t.