Slučajni procesi

predavanja

Zoran Vondraček

7. travnja 2025.

Sadržaj

Poglavlje 1

Martingali

1.1 Uvjetno očekivanje

U ovom odjeljku definirat ćemo uvjetno očekivanje slučajne varijable s obzirom na σ-podalgebru, povezati definirani pojam s uobičajenim uvjetnim očekivanjem s obzirom na događaj pozitivne vjerojatnosti, te navesti najvažnija svojstva uvjetnog očekivanja.

Fiksirajmo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Podsjetimo se što to znači: (i) Ω je neprazan skup čije elemente zovemo elementarnim događajima; (ii) $\mathcal{F}$ je σ-algebra događaja na Ω, t.j., neprazna familija podskupova od Ω koja sadrži Ω, te je zatvorena na komplementiranje i prebrojive unije; (iii) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je σ-aditivna funkcija na $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ koju zovemo *vjerojatnost*.

Označimo sa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovu σ-algebru na $\mathbb{R}$. To je najmanja σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži sve poluotvorene interval $(a, b]$, $-\infty < a \le b < \infty$. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}$ može se karakterizirati kao σ-algebra na $\mathbb{R}$ generirana (i) svim otvorenim intervalima u $\mathbb{R}$, (ii) svim otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, (iii) svim beskonačnim intervalima tipa $(-\infty, b]$, itd. Borelovu σ-algebru na d-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$ označavat ćemo s $\mathcal{B}_d$.

Definicija 1.1 Slučajna varijabla *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *izmjeriva u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$*.* Slučajni vektor *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *izmjeriva u paru* σ*-algebri* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_d)$*.*

Napomena 1.2 (a) Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne: (i) X je slučajna varijabla, t.j. $\{X \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ za svaki $B \in \mathcal{F}$, (ii) za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$, (iii) za svaki otvoren skup $U \subset \mathbb{R}$ vrijedi $\{X \in U\} \in \mathcal{F}$.
(b) Neka je $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, te X d-dimenzionalni slučajni vektor na $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada je $Y := g \circ X = g(X)$ slučajna varijabla, budući da je kompozicija izmjerivih funkcija opet izmjeriva funkcija.
(c) Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Označimo i-tu komponentu od X sa X_i, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada možemo pisati $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$. Vrijedi sljedeća karakterizacija: X je slučajni vektor ako i samo ako je X_i slučajna varijabla za sve $i = 1, 2, \ldots, d$. Zaista, jedan smjer slijedi iz činjenice da je $X_i = \pi_i \circ X$, gdje je $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ projekcija na i-tu koordinatu. Za drugi smjer

koristimo $\{X \in \prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i]\} = \cap_{i=1}^{d}\{a_i < X \le b_i\} \in \mathcal{F}$, te činjenicu da je za izmjerivost dovoljno pokazati da X dobro invertira skupove iz generiraućeg prstena.

Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je primjer prostora s mjerom, a slučajna varijabla X na Ω je izmjeriva funkcija. Teorija mjere nam govori kako integrirati slučajnu varijablu X u odnosu na σ-aditivnu mjeru $\mathbb{P}$. To nas vodi do pojma očekivanja slučajne varijable.

Definicija 1.3 *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla. Kažemo da X ima matematičko očekivanje ako vrijedi*

$$\mathbb{E}|X| := \int_\Omega |X|\, d\mathbb{P} = \int_\Omega |X|(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) < \infty\,.$$

U tom slučaju definiramo matematičko očekivanje *od X kao*

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)\,.$$

Napomena 1.4 (a) Uočimo da $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ima očekivanje ako je $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (odnosno X je integrabilna), i u tom slučaju je očekivanje od X upravo integral od X u odnosu na mjeru $\mathbb{P}$.
(b) Pretpostavimo da je X nenegativna slučajna varijabla. Tada je uvijek dobro definiran integral $\int_\Omega X\, d\mathbb{P}$ s tim da može biti jednak $+\infty$. U tom slučaju kažemo da X ima matematičko očekivanje $\mathbb{E}X = \int_\Omega X\, d\mathbb{P} \in [0, +\infty]$.

Kako računamo očekivanje od X, te kakva je veza gornje definicije matematičkog očekivanja s definicijama s kojima smo se do sada susretali? Ključnu ulogu u tome igra pojam distribucije od X, t.j., vjerojatnosti inducirane slučajnom varijablom X.

Definicija 1.5 *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.* Vjerojatnost inducirana slučajnom varijablom X*, ili* distribucija od X*, je funkcija $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \to [0, 1]$ definirana formulom*

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))\,, \quad B \in \mathcal{B}\,.$$

Drugim riječima, $\mathbb{P}_X$ je slika vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}$ po funkciji X.

Zadatak 1.6 Pokažite da je $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \to [0, 1]$ σ-aditivna funkcija, te da vrijedi $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$. Dakle, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ je vjerojatnosni prostor.

Neka je $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ funkcija distribucije slučajne varijable X, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$. Tada imamo

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

odnosno,

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}_X((a, b])\,, \quad -\infty < a \le b < \infty. \tag{1.1}$$

Gornja relacija pokazuje da u suštini nema razlike između funkcije distribucije F_X i distribucije $\mathbb{P}_X$. Funkcija distribucije F_X je opis (vjerojatnosnih svojstava) slučajne varijable X pomoću neopadajuće realne funkcije, dok je distribucija $\mathbb{P}_X$ opis slučajne varijable X pomoću vjerojatnosne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Funkcija F_X i mjera $\mathbb{P}_X$ su u 1-1 relaciji danoj formulom (1.1).

Zadatak 1.7 Neka je $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija, takva da je $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ i $F(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Pokažite da postoji vjerojatnosni prostor i slučajna varijabla X definirana na tom vjerojatnosnom prostoru takvi da je $F_X = F$ (drugim riječima, za proizvoljnu vjerojatnosnu distribuciju uvijek možemo naći slučajnu varijablu s tom distribucijom).

Lema 1.8 *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Tada slučajna varijabla $g(X)$ ima matematičko očekivanje ako i samo ako je $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$. U tom slučaju vrijedi*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X)\, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} g\, d\mathbb{P}_X\,.$$

Dokaz: Neka je $g = \mathbf{1}_B$ za $B \in \mathcal{B}$. Tada po definiciji od $\mathbb{P}_X$ vrijedi

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X)] = \int_\Omega \mathbf{1}_B(X)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbf{1}_{\{X\in B\}}\, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B) = \int_\mathbb{R} \mathbf{1}_B\, d\mathbb{P}_X\,.$$

Sada se gornja relacija na standardan način proširi prvo na nenegativne jednostavne funkcije, zatim na nenegativne izmjerive, te konačno na sve izmjerive funkcije za koje ima smisla. ∎

Primjer 1.9 (a) Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da za skup $D := \{a_1, a_2, \dots\}$ vrijedi $\mathbb{P}(X \in D) = 1$. Zbog izmjerivosti imamo $\{X = a_i\} \in \mathcal{F}$ za sve $i = 1, 2, \dots$. Označimo $p_i = \mathbb{P}(X = a_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Tada je X diskretna slučajna varijabla s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo distribuciju $\mathbb{P}_X$. Vrijedi $\mathbb{P}_X(\{a_i\}) = \mathbb{P}(X = a_i) = p_i$, otkud neposredno slijedi da je

$$\mathbb{P}_X = \sum_i p_i \delta_{a_i}\,.$$

Prisjetimo se da je za $a \in \mathbb{R}$, δ_a mjera koncentrirana u točki a ukupne mase 1: $\delta_a(B) = \mathbf{1}_B(a)$, te da je $\int_\mathbb{R} g\, d\delta_a = g(a)$. Zato je

$$\mathbb{E}|X| = \int_\mathbb{R} |x|\, d\mathbb{P}_X = \int_\mathbb{R} |x|\, d\left(\sum_i p_i\delta_{a_i}\right) = \sum_i |a_i| p_i\,.$$

Dakle, X ima očekivanje ako i samo ako je $\sum_i |a_i| p_i < \infty$. U tom slučaju, isti račun kao gore pokazuje da je

$$\mathbb{E}X = \int_\mathbb{R} x\, d\mathbb{P}_X = \sum_i a_i p_i\,.$$

(b) Za slučajnu varijablu X kažemo da je *apsolutno neprekidna* ako postoji Borelova funkcija $f = f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da je $\int_\mathbb{R} f_X\, d\lambda = 1$ i vrijedi

$$F_X(x) = \int_{(-\infty, x]} f_X(y)\, d\lambda(y)\,.$$

Ovdje je λ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Uočimo da se gornja relacija proširuje do

$$\mathbb{P}_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{(a,b]} f_X \, d\lambda \,, \quad -\infty < a \le b < \infty \,.$$

Preslikavanje $B \mapsto \int_B f_X \, d\lambda$ je (vjerojatnosna) mjera na $\mathcal{B}$ koja se (zbog gornje jednakosti) podudara s $\mathbb{P}_X$ na poluprstenu poluotvorenih intervala. Zato su te dvije mjere jednake na $\mathcal{B}$, t.j.,

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X \, d\lambda \,, \quad B \in \mathcal{B} \,,$$

odnosno $\mathbb{P}_X$ je apsolutno neprekidna s obzirom na Lebesguevu mjeru λ s Radon-Nykodimovom derivacijom f_X. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabilna s obzirom na $\mathbb{P}_X$. Tada vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} g f_X \, d\lambda \,.$$

Dokaz se provodi standardnim postupkom, počevši od indikatora skupova, preko jednostavnih i nenegativnih, sve do integrabilnih funkcija. Iz gornje relacije i Leme 1.8 odmah čitamo da je

$$\mathbb{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x| \, d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) \, d\lambda(x) \,,$$

odnosno X ima matematičko očekivanje ako i samo ako $\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) \, d\lambda(x) < \infty$. U tom slučaju isti račun pokazuje da je

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, d\lambda(x) \,.$$

Za slučajni vektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ kažemo da je apsolutno neprekidan ako postoji Borelova funkcija $f_X : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ takva da za sve $B \in \mathcal{B}_d$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(y) \, d\lambda(y) \,,$$

gdje ovdje λ označva d-dimezionalnu Lebesgueovu mjeru.

Nakon što smo precizno definirali pojam očekivanja, možemo prijeći na uvjetno očekivanje. Za događaj $A \in \mathcal{F}$ pozitivne vjerojatnosti, $\mathbb{P}(A) > 0$, definira se pojam uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(\cdot | A)$ formulom

$$\mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \,.$$

Preciznije, funkcija $\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \to [0,1]$ definirana sa

$$\mathbb{P}_A(B) := \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

je vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ koju zovemo *uvjetna vjerojatnost*. Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koja ima očekivanje. *Uvjetno očekivanje od X uz dano A* definira se formulom

$$\mathbb{E}[X|A] := \mathbb{E}_A X = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}_A \,.$$

Zadatak 1.10 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}|X| < \infty$. Pokažite da je tada i $\mathbb{E}_A|X| < \infty$, te vrijedi

$$\mathbb{E}[X|A] = \mathbb{E}_A X = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]}{\mathbb{P}(A)}\,.$$

Pretpostavimo sada da je $\{A_1, A_2, \dots\}$ (konačna ili prebrojivo beskonačna) izmjeriva particija od Ω (t.j., $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, te $\cup_i A_i = \Omega$) takva da je $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra generirana tom particijom. Jednostavno se vidi da je $B \in \mathcal{G}$ ako i samo ako je $B = \emptyset$ ili je jednak uniji (nekih) skupova iz particije. Neka je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja je $\mathcal{G}$-izmjeriva. To znači da je $Y^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ za sve $B \in \mathcal{B}$.

Zadatak 1.11 Pokažite da je Y konstanta na svakom A_i. Obratno, ako je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija koja je konstanta na svakom A_i, tada je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla.

Definicija 1.12 *Neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$ generirana prebrojivom particijom $\{A_1, A_2, \dots\}$, te neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje.* Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$ *definira se formulom*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \sum_i \mathbb{E}[X|A_i]\mathbf{1}_{A_i} = \sum_i \frac{\mathbb{E}[1_{A_i}X]}{\mathbb{P}(A_i)}\,\mathbf{1}_{A_i}\,. \tag{1.2}$$

Dakle, ako je $\omega \in A_i$, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X|A_i]$.

Sljedeća propozicija daje karakterizaciju ovako definiranog uvjetnog očekivanja.

Propozicija 1.13 *Neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$ generirana prebrojivom particijom $\{A_1, A_2, \dots\}$, te neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]\,, \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{G}\,. \tag{1.3}$$

Obratno, neka je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva, integrabilna slučajna varijabla na Ω takva da vrijedi

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]\,, \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{G}\,. \tag{1.4}$$

Tada je $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s.

Dokaz: Budući da je svaki $A \in \mathcal{G}$ (prebrojiva) unija disjunktnih skupova iz particije, relaciju (1.3) dovoljno je dokazati za svaki A_i. Međutim, na A_i vrijedi da je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}X]/\mathbb{P}(A_i)$, pa je

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_i}\frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}X]}{\mathbb{P}(A_i)}\right] = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}X]}{\mathbb{P}(A_i)}\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}X]\,.$$

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (1.4), te uzmimo $A = A_i$. Budući da je Y po pretpostavci $\mathcal{G}$-izmjeriva, slijedi da je $Y = c_i$ na A_i, gdje je $c_i \in \mathbb{R}$. Iz (1.4) čitamo

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}X] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}Y] = c_i\mathbb{P}(A_i)\,,$$

odnosno $c_i = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i} X]/\mathbb{P}(A_i)$. To dokazuje da je

$$Y(\omega) = \frac{\mathbb{E}[1_{A_i} X]}{\mathbb{P}(A_i)}, \quad \omega \in A_i,$$

odnosno $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. ∎

Zadatak 1.14 Neka je $\Omega_1 = \{0,1\}$, $\mathbb{P}_1(\{1\}) = p \in (0,1)$, $\mathbb{P}_1(\{0\}) = 1-p$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\Omega = \Omega_1^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^n$. Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je model za n-ponovljenih nezavisnih pokusa s dva ishoda. Za $i = 1, 2, \dots, n$, definiramo $X_i(\omega) = X_i((\omega_1, \dots, \omega_n)) := \omega_i$. Nadalje, neka je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te za $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathcal{F}_i := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_i)$.
(a) Precizno opišite $\mathcal{F}_i$.
(b) Neka je $X := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ($X \sim B(n,p)$). Izračunajte $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_i]$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Zadatak 1.15 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ((0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, te neka je $X(\omega) = \omega$ (ideniteta). Za $n \in \mathbb{N}$, definiramo σ-algebru $\mathcal{F}_n$ kao σ-algebru generiranu particijom $\{(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}] : i = 1, 2, \dots, 2^n\}$. Izračunajte $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$.

Neka je sada $\mathcal{G}$ proizvoljna σ-podalgebra od $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Motivirani karakterizacijom iz Propozicije 1.13, želimo na sličan način definirati uvjetno očekivanje slučajne varijable X uz danu σ-algebru $\mathcal{G}$. Dakle, želimo naći $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y takvu da vrijedi

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X], \quad \text{za sve } A \in \mathcal{G}. \tag{1.5}$$

Pretpostavimo prvo da je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nenegativna slučajna varijabla s konačnim očekivanjem, $\mathbb{E}X < \infty$. Definiramo funkciju $\mathbb{Q} : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ formulom

$$\mathbb{Q}(A) := \int_\Omega \mathbf{1}_A X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X], \quad A \in \mathcal{G}. \tag{1.6}$$

Pomoću Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi da je $\mathbb{Q}$ σ-aditivna mjera na $\mathcal{G}$. Štoviše, $\mathbb{Q}$ je apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$ - vjerojatnost $\mathbb{P}$ restringirana na σ-algebru $\mathcal{G}$. Zaista, ako je $A \in \mathcal{G}$ takav da je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada je i $\mathbb{Q}(A) = 0$. Dakle, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$, pa po Radon-Nykodimovom teoremu postoji $\mathcal{G}$-izmjeriva funkcija $Y : \Omega \to [0, +\infty]$ takva da je

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Y \, d\,\mathbb{P}_{|\mathcal{G}} = \int_A Y \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y], \quad A \in \mathcal{G}.$$

Usporedimo li s definicijom od $\mathbb{Q}$, vidimo da vrijedi (1.5).

Definicija 1.16 *Neka je X nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za koju je $\mathbb{E}X < \infty$, te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$.* Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$ *je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to [0, \infty]$ takva da vrijedi*

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A X\big], \quad \textit{za sve } A \in \mathcal{G}. \tag{1.7}$$

Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla koja ima očekivanje, tada definiramo

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}],$$

gdje su $X^+ := \max(X, 0)$ i $X^- := -\min(X, 0)$ pozitivni, odnosno negativni, dio slučajne varijable X.

Napomena 1.17 (a) U slučaju $X \geq 0$ diskusija neposredno prije Definicije 1.16 pokazuje egzistenciju uvjetnog očekivanja: $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$-g.s. Nadalje, uvjetno očekivanje jedinstveno je $\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$-g.s. Zaista, ako su Y_1 i Y_2 dvije $\mathcal{G}$-izmjerive slučajne varijable takve da obje zadovoljavaju (1.5), tada su obje jednake Radon-Nykodimovoj derivaciji $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$. Međutim, Radon-Nykodimova derivacija jedinstvena je gotovo sigurno (u odnosu na mjeru na odgovarajućoj σ-algebri).
(b) Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s konačnim očekivanjem, to znači da je X integrabilna, odnosno $\mathbb{E}X^+ < \infty$ i $\mathbb{E}X^- < \infty$. Zato su dobro definirana uvjetna očekivanja $\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]$ i $\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$ (i $\mathbb{P}_{|\mathcal{G}}$-g.s. su konačna), pa možemo definirati $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ kao njihovu razliku. Jednostavno se vidi da $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ također zadovoljava jednakost (1.5).
(c) Ako relacija (1.5) vrijedi za sve događaje A iz nekog π-sustava koji generira $\mathcal{G}$, tada ta relacija vrijedi i za sve $A \in \mathcal{G}$. Zaista, i lijeva i desna strana u (1.5) definiraju mjeru na $\mathcal{G}$. Dvije mjere koje se podudaraju na π-sustavu, podudaraju se i na σ-algebri generiranoj tim π-sustavom.
(d) Neka je $B \in \mathcal{F}$. *Uvjetna vjerojatnost od B uz dano $\mathcal{G}$* definira se formulom

$$\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{G}].$$

Neka je $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla, te neka je $\sigma(Z) = Z^{-1}(\mathcal{B})$ σ-algebra generirana sa Z. Uvjetno očekivanje slučajne varijable X uz dano Z definiramo sa

$$\mathbb{E}[X|Z] := \mathbb{E}[X|\sigma(Z)].$$

Zadatak 1.18 Neka je (X, Z) slučajni vektor sa zajedničkom funkcijom gustoće $f_{X,Z}(x, z)$, te neka su f_X i f_Z pripadajuće marginalne gustoće. Prisjetimo se da je

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Z}(x, z)\, dx\,;$$

specijalno, $f_Z(z) = 0$ povlači da je $f_{X,Z}(x, z) = 0$ za s.s. $x \in \mathbb{R}$. Uvjetna gustoća od X uz dano Z definira se formulom

$$f_{X|Z}(x|z) := \begin{cases} \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)}\,, & f_Z(z) > 0\,, \\ 0\,, & f_Z(z) = 0\,. \end{cases}$$

Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija takva da je

$$\mathbb{E}|h(X)| = \int_{\mathbb{R}} |h(x)| f_X(x)\, dx < \infty\,.$$

Definiramo

$$g(z) := \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|Z}(x|z)\, dx\,,$$

(uobičajeno je označavati $g(z) = \mathbb{E}[h(X)|Z = z]$). Stavimo $Y := g(Z)$. Tada vrijedi $Y = \mathbb{E}[h(X)|Z]$-g.s.

Definicija 1.19 *Neka su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ dvije σ-podalgebre od $\mathcal{F}$. Kažemo da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$* nezavisne *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\,\mathbb{P}(H)\,, \quad \textit{za sve } G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\,.$$

Neka je $\mathcal{K}$ još jedna σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Kažemo da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ uvjetno nezavisne uz dano $\mathcal{K}$ *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(G \cap H|\mathcal{K}) = \mathbb{P}(G|\mathcal{K})\,\mathbb{P}(H|\mathcal{K}) \ \textit{g.s.}, \quad \textit{za sve } G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\,.$$

Zadatak 1.20 Slučajne varijable X i Y su nezavisne ako i samo ako su nezavisne σ-algebre $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.

Zadatak 1.21 Neka su X i Y integrabilne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako su X i Y nezavisne, tada je i njihov produkt XY integrabilna slučajna varijabla i vrijedi $\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$.

U sljedećoj propoziciji navodimo neka osnovna, ali važna, svojstva uvjetnog očekivanja.

Propozicija 1.22 *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabilna slučajna varijabla, te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra of $\mathcal{F}$.*

(a) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ g.s.

(b) $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}X$.

(c) (linearnost) Ako su X_1 i X_2 integrabilne slučajne varijable, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tada je

$$\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}] = a_1\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] \ \textit{g.s.}$$

(d) $\big|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big| \le \mathbb{E}\big[\,|X|\,\big|\,\mathcal{G}\big]$.

(e) (monotonost) Ako je $X \ge 0$ g.s., tada je i $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ge 0$ g.s.

(f) Ako je Y omeđena $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je

$$\mathbb{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ \textit{g.s.}$$

(h) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big|\mathcal{H}\big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \ \textit{g.s.}$$

(g) Ako je $\sigma(\sigma(X), \mathcal{H})$ nezavisna od $\mathcal{G}$, tada je

$$\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \text{ g.s.}.$$

Specijalno, ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}X$ g.s.

Dokaz: Svojstva (a) i (e) slijede direktno iz definicije, a svojstvo (b) uzimanjem $A = \Omega$ u (1.5).
(c) Dovoljno je pokazati da je $a_1\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}]$ verzija od $\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}]$, odnosno da vrijedi

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(a_1\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}])\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(a_1X_1 + a_2X_2)\big], \quad A \in \mathcal{G}.$$

No to je posljedica linearnosti očekivanja.
(d) Upotrebom definicije i svojsta (c) slijedi

$$\big|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big| = \big|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]\big| \leq \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}] = \mathbb{E}\big[\,|X|\,\big|\,\mathcal{G}\big].$$

(f) Pretpostavimo da je $X \geq 0$. Neka je prvo $Y = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathcal{G}$. Za proizvoljni $A \in \mathcal{G}$, zbog $A \cap B \in \mathcal{G}$ i (1.5), vrijedi

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(\mathbf{1}_B\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{A\cap B}\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{A\cap B}X\big] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(\mathbf{1}_BX)\big],$$

Dakle

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\big] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(YX)\big]$$

za $Y = \mathbf{1}_B$. Uobičajenim postupkom gornju jednakost proširujemo prvo na nenegativne jednostavne $\mathcal{G}$-izmjerive slučajne varijable Y, a zatim na sve nenegativne $\mathcal{G}$-izmjerive slučajne varijable Y. Ako je Y omeđena, tada su i Y^+ i Y^- omeđene, što povlači da su Y^+X i Y^-X integrabilne. To dokazuje tvrdnju za $X \geq 0$. Opći slučaj slijedi rastavljanjem $X = X^+ - X^-$.
(h) Stavimo $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Za proizvoljni $A \in \mathcal{H}$ imamo

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}]\big] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_AY] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_AX],$$

gdje smo u prvoj i posljednjoj jednakosti iskoristili (1.5). Gornja jednakost pokazuje da je $\mathbb{E}[Y|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$, odnosno $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big|\mathcal{H}\big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
(g) Možemo pretpostaviti da je $X \geq 0$. Za $G \in \mathcal{G}$ i $H \in \mathcal{H}$ su slučajne varijable $X\mathbf{1}_H$ i $\mathbf{1}_G$ nezavisne (po pretpostavci o nezavisnosti σ-algebri $\sigma(\sigma(X), \mathcal{H})$ i $\mathcal{G}$), pa je (po Zadatku 1.21)

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}X] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G(\mathbf{1}_HX)] = \mathbb{P}(G)\mathbb{E}[\mathbf{1}_HX].$$

Označimo $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$. Tada je $\mathbf{1}_HZ$ $\mathcal{H}$-izmjeriva, pa je stoga nezavisna od $\mathcal{G}$. Na isti način kao gore,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}Z] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G(\mathbf{1}_HZ)] = \mathbb{P}(G)\mathbb{E}[\mathbf{1}_HZ].$$

Slijedi

$$\int_{G\cap H} Z\, d\mathbb{P} = \int_{G\cap H} X\, d\mathbb{P}, \quad G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}. \tag{1.8}$$

S druge strane, $F \mapsto \int_F Z\, d\mathbb{P}$ i $F \mapsto \int_F X\, d\mathbb{P}$ su mjere na $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ koje se po (1.8) podudaraju na π-sustavu $\{G \cap H : G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$ koji generira $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Zato vrijedi

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F Z] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_F X]\,, \qquad \text{za sve } F \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})\,,$$

odnosno, $Z = \mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})]$. Dakle, $\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.

Dokažimo i specijalan slučaj, X nezavisna s $\mathcal{G}$. Uzmimo $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$. Tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}X$, $\sigma(\sigma(X), \mathcal{H}) = \sigma(X)$, i $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathcal{G}$, otkud slijedi tvrdnja. Alternativno, bez korištenja opće tvrdnje, specijalna slučaj dokazujemo na sljedeći način: ako je $A \in \mathcal{G}$, tada zbog nezavisnosti od A i X imamo

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X] = \mathbb{E}\mathbf{1}_A\, \mathbb{E}X = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}X]\,,$$

pa tvrdnja slijedi iz definicije uvjetnog očekivanja. ∎

Zadatak 1.23 Nađite primjer vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dviju σ-podalgebri $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ i $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, te slučajne varijable X takve da je

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big|\mathcal{H}\big] \neq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\big|\mathcal{G}\big]\,.$$

Navedimo i dokažimo još neka svojstva uvjetnog očekivanja.

Propozicija 1.24 *(a) (uvjetni teorem o monotonoj konvergenciji) Neka je* $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ *i* $X = \lim_n X_n$. *Tada je* $0 \leq \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}] \leq \cdots \leq \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *g.s., i vrijedi* $\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *g.s.*

(b) (uvjetna Fatouova lema) Neka je $X_n \geq 0$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$. *Tada vrijedi* $\mathbb{E}[\liminf_n X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_n \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *g.s.*

(c) (uvjetni teorem o dominiranoj konvergenciji) Neka je $(X_n : n \geq 1)$ *niz slučajnih varijabli takvih da je* $|X_n| \leq Y$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}Y < \infty$, *te neka je* $X = \lim_n X_n$ *g.s. Tada je* X *integrabilna i vrijedi* $\lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *g.s.*

(d) (uvjetna Jensenova nejednakost) Neka je $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija i* $\mathbb{E}|\phi(X)| < \infty$. *Tada vrijedi* $\phi\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big) \leq \mathbb{E}\big[\phi(X)|\mathcal{G}\big]$ *g.s.*

Dokaz: (a) Zbog linearnost i nenegativnosti uvjetnog očekivanja slijedi da je $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}]$ g.s. za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato je dobro definirana $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $Y := \limsup_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$ i vrijedi $Y = \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]$ g.s. Tvrdimo da je $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s. Dovoljno je (i treba) pokazati da je $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]$ za svaki $A \in \mathcal{G}$. Međutim

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\big] = \lim_n \big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}]\big] = \lim_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X_n] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]\,,$$

gdje prva jednakost slijedi iz definicije slučajne varijable Y, druga i četvrta iz Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji, a treća iz (1.5).

(b) i (c) se dokazuju na sličan način kao tvrdnja (a) upotrebom Fatouove leme, odnosno teorema o dominiranoj konvergenciji.
(d) Za dokaz će nam trebati sljedeći pomoćni rezultat: postoji niz $((a_n, b_n) : n \in \mathbb{N})$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, takav da vrijedi

$$\phi(x) = \sup_n (a_n x + b_n)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Riječima, konveksna funkcija ϕ se može prikazati kao supremum prebrojivo mnogo linearnih funkcija. Zbog $\phi(x) \geq a_n x + b_n$, $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je $\phi(X) \geq a_n X + b_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zbog monotonosti uvjetnog očekivanja (i činjenice da je prebrojiva unija $\mathbb{P}$-nul skupova, opet $\mathbb{P}$-nul skup) zaključujemo da je

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq a_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] + b_n\,, \text{ za sve } n \in \mathbb{N} \text{ g.s.}$$

Zato je

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq \sup_n \big(a_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] + b_n\big) = \phi\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big) \text{ g.s.}\,.$$

Zadatak 1.25 Za $p \geq 1$ vrijedi $\big|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big|^p \leq \mathbb{E}\big[|X|^p\big|\mathcal{G}\big]$.

Zadatak 1.26 Neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, te X slučajna varijabla nezavisna od $\mathcal{G}$. Ako je $h : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ Borelova funkcija, tada je

$$\mathbb{E}[h(X,Y)|\mathcal{G}] = H(Y) \text{ g.s.}$$

gdje je $H(y) := \mathbb{E}[h(X,y)]$.

Propozicija 1.27 *Pretpostavimo da je X kvadratno-integrabilna slučajna varijabla, $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaku $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Z\big] = 0\,. \tag{1.9}$$

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je $X \geq 0$. Za proizvoljni $A \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big]\,.$$

Na standardan način gornja jednakost se proširuje sa $\mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{G}$, na nenegativne $\mathcal{G}$-izmjerive slučajne varijable Z:

$$\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}\big[Z\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big]\,. \tag{1.10}$$

Ako je $X \in \mathcal{L}^2$, tada je po Zadatku 1.25 $\mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Pretpostavimo da je i $Z \in \mathcal{L}^2$. Tada su zbog Hölderove nejednakosti ZX i $Z\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ integrabilne, pa vrijedi $\mathbb{E}[ZX] \in \mathbb{R}$ i $\mathbb{E}\big[Z\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] \in \mathbb{R}$. Zato (1.10) možemo zapisati u obliku

$$\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)Z\big] = 0\,,$$

što dokazuje propoziciju u specijalnom slučaju $X \geq 0$ i $Z \geq 0$. Opći slučaj slijedi pomoću dekompozicije $X = X^+ - X^-$, $Z = Z^+ - Z^-$. ∎

Korolar 1.28 *Za* $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] = \inf\big\{\mathbb{E}[(X-Y)^2] : Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), Y \textit{ je } \mathcal{G} - \textit{izmjeriva}\big\} .$$

Dokaz: Za $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koja je $\mathcal{G}$-izmjeriva računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2] &= \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y\big)^2\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] + 2\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y\big)\big] + \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y\big)^2\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] + \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - Y\big)^2\big] \\
&\geq \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] ,
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi iz Propozicije 1.27. Jednakost u zadnjem retku postiže se ako i samo ako je $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s. ∎

Zadaci:

Zadatak 1.29 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ tri σ-podalgebre od $\mathcal{F}$ takve da vrijedi $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Pokažite da su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ uvjetno nezavisne uz dano $\mathcal{K}$ ako i samo ako vrijedi

$$\mathbb{P}(G|\mathcal{K}) = \mathbb{P}(G|\mathcal{H}) \text{ g.s.,} \quad \text{za sve } G \in \mathcal{G} .$$

Zadatak 1.30 Neka su X i Y nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s istim parametrom $p \in (0,1)$ definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiramo slučajnu varijablu $Z := \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$. Izračunajte $\mathbb{E}[X|Z]$ i $\mathbb{E}[Y|Z]$, te ispitajte da li su te slučajne varijable nezavisne.

Zadatak 1.31 Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda \in (0, \infty)$, te neka je $Y := X_1 + X_2$. Izračunajte $\mathbb{P}(X_1 = n|Y)$.

Zadatak 1.32 Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnom distribucijom s parametrom 1, te neka je $Y := X_1 + X_2$. Izračunajte $\mathbb{E}[X_1|Y]$ i $\mathbb{P}(X_1 < 3|Y)$.

Zadatak 1.33 (a) Za kvadratno-integrabilnu slučajnu varijablu X i σ-podalgberu $\mathcal{G}$ definira se *uvjetna varijanca* formulom $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) := \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2|\mathcal{G}\big]$. Dokažite da vrijedi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})\big] + \mathrm{Var}\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big) .$$

(b) Ako je X kvadratno integrabilna i $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, tada vrijedi

$$\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\big)^2\big] = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] + \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\big)^2\big] .$$

Uočite da je (a) specijalni slučaj od (b) uz $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Zadatak 1.34 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-podalgebra. Za $A \in \mathcal{F}$ definiramo događaj $B := \{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}] = 0\} = \{\mathbb{P}(A \,|\, \mathcal{G}) = 0\}$. Pokažite da je $B \subset A^c$ g.s.

Zadatak 1.35 (a) Ako su $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takve da vrijedi $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = X$ g.s. i $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2$, tada je $X = Y$ g.s.
(b) Ako je $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \overset{d}{=} Y$ (t.j., te dvije varijable su jednako distribuirane), tada je $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$ g.s.
(c)* Dokažite tvrdnju (b) uz pretpostavku $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Uputa: Ako je $\mathbb{E}|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}|X|$, tada je $\mathrm{sign}(X) = \mathrm{sign}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$ g.s., i primjenite na $X = Y - c$.

Zadatak 1.36 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $(E, \mathcal{E})$ izmjeriv prostor, te $X, Y, Z : \Omega \to E$ slučajni elementi s vrijednostima u E (to znači da su izmjerivi u paru $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$). Pretpostavimo da su (X, Z) i (Y, Z) jednako distribuirani. Specijalno, X i Y su jednako distribuirani. Označimo sa μ njihovu zajedničku distribuciju, $\mu = \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.
(a) Neka je $f : E \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija izmjeriva u paru $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ (odn. takva da je $f(X)$ integrabilna). Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[f(X)|Z] = \mathbb{E}[f(Y)|Z] \text{ g.s.}$$

(b) Neka je $g : E \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija izmjeriva u paru $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ (odn. takva da je $g(X)$ integrabilna), $h_1(X) := \mathbb{E}[g(Z)|X]$, $h_2(Y) := \mathbb{E}[g(Z)|Y]$. Pokažite da je $h_1 = h_2$ μ-g.s

Zadatak 1.37 Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ integrabilne, nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable. Stavimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
(a) Pokažite da je $\mathbb{E}[X_1|S] = \frac{S}{n}$ (Uputa: upotrijebite Zadatak 1.36 (a))
(b) Izračunajte $\mathbb{E}[S\,|X_1]$.

Zadatak 1.38* Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda > 0$. Stavimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
(a) Odredite uvjetnu distribuciju od X_1 uz dano S, te tada izračunajte $\mathbb{E}[X_1|S]$.
(b) Izračunajte $\mathbb{E}[X_1^2|S]$ i $\mathbb{E}[X_1 X_2|S]$.
Uputa: Izračunajte uvjetnu gustoću $f_{X_1|S}(x_1|s)$. Gustoću $f_{X_1,S}$ računajte na sljedeći način: neka je $T = X_2 + \cdots + X_n$. Tada je $T \sim \Gamma(n-1, \lambda)$ i nezavisna je s X_1. To daje gustoću slučajnog vektora (X_1, T). Slučajni vektor $(X_1, S) = (X_1, X_1 + T)$ je linearna transformacija od (X_1, T) (odgovarajuća matrica je $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$). Sada iskoristite teorem o zamjeni varijabli (vidi N. Sarapa, str.366, Teorem 11.9).

Zadatak 1.39 Neka je $(X_n : n \geq 0)$ niz nezavisnih slučajnih vektora s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Stavimo $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k : k \leq n)$. Pokažite da za svaku ograničenu Borelovu funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[f(S_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[f(S_n)|S_{n-1}] \text{ g.s.}\,, \quad n \geq 1\,, \tag{1.11}$$

te izrazite to uvjetno očekivanje pomoću distribucije $\mathbb{P}_{X_n}$. Uputa: upotrijebite Zadatak 1.26. Primjetite da je relacija (1.11) oblik Markovljevog svojstva slučajne šetnje S.

1.2 Definicija i primjeri martingala

U ovom odjeljku uvodimo pojmove martingala, supermartingala i submartingala, pokazujemo nekoliko primjera takvih slučajnih procesa, te navodimo osnovna svojstva. Na početku dajemo formalnu definiciju slučajnog procesa.

Definicija 1.40 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor, te neka je za svaki* $n \in \mathbb{Z}_+$ X_n *slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Familija* $X = (X_n : n \geq 0)$ *naziva se* slučajni proces *(s diskretnim vremenom).*

Nastavljamo poznatim primjerom slučajne šetnje.

Primjer 1.41 (Slučajna šetnja) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih, integrabilnih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo sa μ njihovo zajedničko očekivanje, $\mu = \mathbb{E}Y_1 \in \mathbb{R}$. Definiramo $X_0 = 0$, te $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Familija $X = (X_n : n \geq 0)$ je slučajni proces s vrijednostima u $\mathbb{R}$ koji zovemo *slučajna šetnja*. Uvodimo familiju σ-podalgebri $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ kao $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ za $n \geq 1$. Uočite da zbog $Y_i = X_i - X_{i-1}$ vrijedi $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. σ-algebra $\mathcal{F}_n$ generirana je događajima oblika $\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n\}$. O događajima u σ-algebri $\mathcal{F}_n$ mislimo kao o događajima koji su poznati do trenutka n. Alternativno, $\mathcal{F}_n$ sadrži informaciju o slučajnom procesu X dostupnu do trenutka n. Očito je da je $\mathbb{F}$ neopadajuća familija σ-podalgebri od $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$, za sve $n \geq 1$. Primjetimo, također, da su sve slučajne varijable Y_k, $k \geq n+1$, nezavisne od σ-algebre $\mathcal{F}_n$.

Pretpostavimo da nam je poznata informacija o slučajnom procesu X do trenutka n, odnosno poznata nam je σ-podalgebra $\mathcal{F}_n$. Što možemo reći o uvjetnom očekivanju od X_{n+1} uz danu informaciju? Račun koji slijedi je fundamentalan, jer se u sličnom obliku primjenjuje u svim situacijama kod kojih su prirasti procesa nezavisni:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n + \mathbb{E}Y_{n+1} = X_n + \mu$$

Budući da je $\mathbb{E}X_n = n\mu$, slijedi da je

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = X_n - \mathbb{E}X_n \,, \quad n \geq 0 \,.$$

Specjalno, u slučaju kada je $\mu = 0$ vrijedi $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ g.s., za sve $n \geq 0$. Dakle, želimo li predvidjeti vrijednost slučajnog procesa X u trenutku $n+1$, X_{n+1}, na osnovu informacije dostupne do (uključivo) trenutka n, najbolje što možemo napraviti je da predvidimo da će ta vrijednost biti jednaka vrijednosti u trenutku n, X_n. U slučaju da su X_n kvadratno-integrabilne slučajne varijable, Korolar 1.28 tome daje precizan smisao: X_n je najbolja $\mathcal{F}_n$-procjena od X_{n+1} u smislu najmanjih kvadrata. Takav slučajni proces nazivat ćemo martingalom.

Definicija 1.42 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *prostor elementarnih događaja.*
(a) Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ*-podalgebri of* $\mathcal{F}$ *takvih da je* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ *za svaki* $n \geq 0$ *zove se* filtracija *(od* $\mathcal{F}$*).*

(b) Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zove se adaptiran *s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ ako je za svaki $n \geq 0$ slučajna varijabla X_n $\mathcal{F}_n$-izmjeriva.*
(c) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces. Za $n \geq 0$ definiramo $\mathcal{F}_n^0 := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Tada se filtracija $\mathbb{F}^0 = (\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0)$ zove prirodna filtracija *od X.*

Definicija 1.43 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija, $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces. Pretpostavimo da je X adaptiran s obzirom na $\mathbb{F}$, te da je $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ za sve $n \geq 0$.*
(a) X se zove martingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingal*), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \ \textit{g.s.}, \quad \textit{za sve } n \geq 0\,.$$

(b) X se zove supermartingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-supermartingal*), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \ \textit{g.s.}, \quad \textit{za sve } n \geq 0\,.$$

(c) X se zove submartingal *(preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-submartingal*), ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \ \textit{g.s.}, \quad \textit{za sve } n \geq 0\,.$$

Napomena 1.44 (a) Primjetimo da je X supermartingal ako i samo ako je $-X$ submartingal. Također, X je martingal ako i samo ako je istovremeno i supermartingal i submartingal.
(b) Ako nije specificirana filtracija s obzirom na koju je X martingal, uvijek se podrazumijeva da se radi o prirodnoj filtraciji $\mathbb{F}^0$ procesa $X = (X_n : n \geq 0)$.

Zadatak 1.45 Pretpostavimo da je X martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Pokažite da je tada X i martingal s obzirom na prirodnu filtraciju.

Iz relacije $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ g.s., uzimanjem očekivanja slijedi $\mathbb{E}X_{n+1} = \mathbb{E}X_n$. Dakle, proces koji je martingal ima konstantno očekivanje: $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ za sve $n \geq 0$. Slično, ako je X supermartingal (odn. submartingal), tada je $\mathbb{E}X_n \geq \mathbb{E}X_{n+1}$ (odn. $\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_{n+1}$). Možemo reći da je martingal slučajni proces koji je konstantan u srednjem, dok je supermartingal proces koji u srednjem opada.

Zadatak 1.46 Nađite primjer slučajnog procesa $X = (X_n : n \geq 0)$ takvog da vrijedi: (i) X_n je integrabilna za sve $n \geq 0$, (ii) $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ za sve $n \geq 0$, (iii) X *nije* martingal s obzirom na prirodnu filtraciju.

Zadatak 1.47 Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal takav da je $n \mapsto \mathbb{E}X_n$ konstantna funkcija. Dokažite da je tada X martingal.

Jedan od najvažnijih primjera martingala, slučajnu šetnju, opisali smo u Primjeru 1.41. Pogledajmo sada još dva jednostavna primjera martingala.

Primjer 1.48 (Produkt pozitivnih nezavisnih slučajnih varijabli) Neka su $Y_1, Y_2, \ldots$ nezavisne nenegativne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}Y_n = 1$ za sve $n \geq 1$. Definiramo $X_0 := 1$, $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, te za $n \geq 1$, $X_n := Y_1 Y_2 \cdots Y_n$, $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Uočimo prvo da je zbog nezavisnosti i integrabilnosti slučajnih varijabli $Y_1, \ldots, Y_n$, slučajna varijabla X_n također integrabilna (vidi Zadatak 1.21). Nadalje, za $n \geq 1$, zbog nezavisnoti Y_{n+1} i $\mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}Y_{n+1} = X_n \text{ g.s.}$$

Dakle, X je martingal. Poslije ćemo vidjeti konkretne primjere ovakvih *multiplikativnih* martingala.

Primjer 1.49 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, $\mathbb{F}$ filtracija, te Y integrabilna slučajna varijabla. Za $n \geq 0$ definiramo $X_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$. Tada je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal. Zaista, za $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{n+1}]\big|\mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ g.s.}$$

Propozicija 1.50 *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-supermartingal, tada za sve $0 \leq m < n$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \leq X_m \textit{ g.s.}$$

Ako je X martingal, tada za sve $0 \leq m < n$ vrijedi

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m \textit{ g.s.}$$

Dokaz: Po definiciji tvrdnja vrijedi za $n = m + 1$. Neka je $n = m + k$, $k \geq 2$. Tada je

$$\mathbb{E}[X_{m+k}|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_{m+k}|\mathcal{F}_{m+k-1}]\big|\mathcal{F}_m] \leq \mathbb{E}[X_{m+k-1}|\mathcal{F}_m] \leq \cdots \leq \mathbb{E}[X_{m+1}|\mathcal{F}_m] \leq X_m \text{ g.s.},$$

i slično u slučaju martingala. ∎

Propozicija 1.51 *(a) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal i $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija takva da je $\mathbb{E}|\phi(X_n)| < \infty$ za sve $n \geq 0$, tada je $(\phi(X_n) : n \geq 0)$ submartingal.*
(b) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal i $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neopadajuća konveksna funkcija takva da je $\mathbb{E}|\phi(X_n)| < \infty$ za sve $n \geq 0$, tada je $(\phi(X_n) : n \geq 0)$ submartingal.

Dokaz: (a) Integrabilnost i adaptiranost (na istu filtraciju $\mathbb{F}$) su očiti. Za $n \geq 0$, upotrebom uvjetne Jensensove nejednakosti, slijedi

$$\mathbb{E}[\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \phi\big(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\big) = \phi(X_n) \text{ g.s.}$$

(b) Dokaz je isti, osim što je za submartingal $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$, pa treba pretpostaviti da je ϕ neopadajuća. ∎

Korolar 1.52 *(a) Neka je $p \geq 1$. Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal takav da je $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ za sve $n \geq 0$, tada je $(|X_n|^p : n \geq 0)$ submartingal.*
(b) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal i $a \in \mathbb{R}$, tada je $(X_n \vee a : n \geq 0)$ opet submartingal. Specijalno, $(X_n^+ : n \geq 0)$ je submartingal ($x^+ = x \vee 0$).
(c) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal, tada je za sve $a \in \mathbb{R}$, $(X_n \wedge a : n \geq 0)$ opet supermartingal.

Dokaz: Tvrdnje (a) i (b) slijede neprosredno iz Propozicije 1.51, budući da su $\phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$, i $\phi(x) = x \vee a$ konveksne funkcije. Specijalan slučaj u (b) slijedi za $a = 0$.
(c) Definiramo $Y_n := -X_n$. Tada je $(Y_n : n \geq 0)$ submartingal. Jednostavno se vidi da vrijedi $X_n \wedge a = -(Y_n \vee (-a))$, pa tvrdnja slijedi iz (b). ∎

Teorem 1.53 *(Doobova dekompozicija) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-submartingal. Tada postoje martingal $M = (M_n : n \geq 0)$ i slučajni proces $A = (A_n : n \geq 0)$ takav da je $0 = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ g.s., A_n je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv za sve $n \geq 1$, i vrijedi*

$$X = M + A\,.$$

Nadalje, dekompozicija s gornjim svojstvima je jedinstvena.

Napomena 1.54 Slučajni proces $A = (A_n : n \geq 0)$ za koji vrijedi $A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ g.s. zove se *neopadajući proces*. Slučajni proces $Y = (Y_n : n \geq 1)$ takav da je Y_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva za sve $n \geq 1$ zove se *predvidiv* (vidi Definiciju 1.61). Dakle, slučajni proces A iz tvrdnje teorema je predvidiv, neopadajući proces koji se naziva *kompenzator* submartingala X.

Dokaz: Definiramo $A_0 = 0$, te $M_0 = X_0$, tako da vrijedi $X_0 = M_0 + A_0$. Induktivno definiramo

$$A_n := A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \quad \text{i} \quad M_n := X_n - A_n\,.$$

Zbog $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$ vrijedi $A_n \geq A_{n-1}$ g.s. Nadalje, budući da je po pretpostavci indukcije A_{n-1} $\mathcal{F}_{n-2} \subset \mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv, a $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}$ je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv, slijedi da je A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv. Nadalje imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - A_n = (X_{n-1} + A_n - A_{n-1}) - A_n \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}\,. \end{aligned}$$
∎

Zadatak 1.55 Dokažite jedinstvenost Doobove dekompozicije.

Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ za koji vrijedi $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ za sve $n \geq 0$ zove se *kvadratno-integrabilan* slučajni proces.

Korolar 1.56 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ kvadratno-integrabilni martingal. Tada postoji jedinstven neopadajući, predvidiv proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_n : n \geq 0)$, $\langle X \rangle_0 = 0$, takav da je $X^2 - \langle X \rangle$ martingal.*

Dokaz: Po Korolaru 1.52 je $X^2 = (X_n^2 : n \geq 0)$ submartingal. Po Teoremu 1.53 postoje martingal M i neopdajući predvidiv proces A takvi da vrijedi $X^2 = M + A$. Stavimo $\langle X \rangle := A$. Tada je $X^2 - \langle X \rangle = M$ martingal. ∎

Napomena 1.57 Neopadajući, predvidiv proces $\langle X \rangle$ naziva se *kvadratna varijacija* martingala X. Iz alternativnog rješenja Zadatka 1.55, te Zadatka 1.58(e) slijedi da je

$$\langle X \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2 - X_{k-1}^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right]$$

što objašnjava naziv kvadratna varijacija.

Zadaci:

Zadatak 1.58 Neka su $X = (X_n : n \geq 0)$ i $Y = (Y_n : n \geq 0)$ kvadratno-integrabilni martingali na filtriranom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

(a) Pokažite da vrijedi $\mathbb{E}[X_m Y_n | \mathcal{F}_m] = X_m Y_m$ g.s. za sve $m \leq n$.

(b) Pokažite da je $\mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})]$.

(c) Pokažite da je $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k - X_{k-1})$.

(d) Pokažite da su slučajne varijable X_0, $X_k - X_{k-1}$, $k \geq 1$, po parovima ortogonalne (slučajne varijable $Z, W \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ su ortogonalne ako je $\mathbb{E}[ZW] = 0$).

(e) Pokažite da vrijedi $\mathbb{E}[X_n^2 - X_{n-1}^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}]$.

Zadatak 1.59 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 0. Pretpostavimo da postoji funkcija izvodnica momenata $\phi(\lambda) := \log \mathbb{E}[e^{\lambda Y_1}] < \infty$. Neka je nadalje $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces definiran s $X_0 = 0$, $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, te $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$. Definiramo slučajni proces $Z^\lambda = (Z_n^\lambda : n \geq 0)$ formulom

$$Z_n^\lambda = \exp(\lambda X_n - n\phi(\lambda))\,.$$

Dokažite da je Z^λ martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$.

Zadatak 1.60 Za proces $X = (X_n : n \geq 0)$ kažemo da ima *nezavisne priraste*, ako je za svaki $n \geq 0$ prirast $X_{n+1} - X_n$ nezavisan od σ-algebre $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Pretpostavimo da je X kvadratno-integrabilan martingal s nezavisnom prirastima. Definiramo $\sigma_0^2 = \mathrm{Var}(X_0)$, te $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n - X_{n-1})$, $n \geq 1$.

(a) Pokažite da je $\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k^2$.

(b) Izračunajte kvadratnu varijaciju $\langle X \rangle$ martingala X.

1.3 Martingalna transformacija i teorem o opcionalnom zaustavljanju

Pojam martingala usko je vezan s igrama na sreću, odnosno kockanjem. Čak i samo ime *martingal* dolazi od kockarske igre. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces takav da su slučajne varijable X_n integrabilne. Za $n \geq 1$ označimo $\Delta_n := X_n - X_{n-1}$. O razlici Δ_n razmišljamo kao o jediničnom dobitku (ili gubitku) u n-toj igri na sreću. Igra koju igramo je fer, ako vrijedi $0 = \mathbb{E}[\Delta_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]$, odnosno ako je proces X martingal. Većina igara na sreću je ne-fer (za igrača, no ne za kasino), t.j., očekivani dobitak u svakoj igri, uvjetno na prethodne igre, je negativan: $0 \geq \mathbb{E}[\Delta_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]$. Ne-fer igre odgovaraju supermartingalima. Tipičan primjer ne-fer igre je rulet.

Kako se efektivno kockamo? Neposredno prije n-te igre uložimo određeni iznos u tu igru, na primjer, iznos H_n. Taj iznos smije ovisiti o ishodima prethodnih igara (igre u trenucima $1, 2, \ldots, n-1$), ali očito ne može ovisiti o ishodu n-te igre. Ako sa $\mathbb{F}^0$ označimo prirodnu filtraciju procesa X, tada zaključujemo da ulog H_n (neposredno prije n-te igre) mora bit $\mathcal{F}^0_{n-1}$-izmjeriva slučajna varijabla. Naš dobitak (gubitak) u n-toj igri jednak je tada $H_n \Delta_n = H_n(X_n - X_{n-1})$. Ukupni dobitak do (uključivo) n-te igre jednak je

$$\sum_{m=1}^{n} H_m \Delta_m = \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1})\,.$$

Jedno od osnovnih pitanja (barem u kockanju) je da li možemo odabrati strategiju $(H_n : n \geq 0)$ koja će nekako poništiti činjenicu da igramo ne-fer igru (rulet) i osigurati nam dobitak. Da bismo odgovorili na to pitanje, formalizirajmo gornje razmatranje.

Definicija 1.61 *Neka je $\mathbb{F}$ filtracija na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Slučajni proces $H = (H_n : n \geq 0)$ zove se* predvidiv *s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako je H_0 $\mathcal{F}_0$-izmjeriva, te H_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriva slučajna varijabla za sve $n \geq 1$.*

Definicija 1.62 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F}$, neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ adaptiran slučajni proces, te neka je $H = (H_n : n \geq 0)$ predvidiv slučajni proces.* Martingalna transformacija procesa X po procesu H *je slučajni proces $H \cdot X = ((H \cdot X)_n : n \geq 0)$ definiran sa*

$$(H \cdot X)_n = H_0 X_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1})\,, \quad n \geq 0\,.$$

Sljedeći teorem kaže da ne postoji (predvidiva) strategija ulaganja kojom ćete pobijediti ne-fer igru.

Teorem 1.63 *Neka je $H = (H_n : n \geq 0)$ predvidiv proces takav da je H_n ograničena slučajna varijabla za svaki $n \geq 0$.*
(a) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal i $H_n \geq 0$ za sve $n \geq 0$, tada je $H \cdot X$ opet supermartingal

(b) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal i $H_n \geq 0$ za sve $n \geq 0$, tada je $H \cdot X$ opet submartingal.
(c) Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal, tada je $H \cdot X$ opet martingal.

Dokaz: Uočimo prvo da je $\mathbb{E}|(H \cdot X)_n| \leq |H_0||X_0| + \sum_{m=1}^n |H_m||X_m - X_{m-1}|$, što je integrabilno kao zbroj produkata integrabilnih slučajnih varijabli s ograničenim slučajnim varijablama. Također je očito da je $H \cdot X$ adaptiran.
(a) Neka je X supermartingal. Za $n \geq 0$ računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(H \cdot X)_{n+1}|\mathcal{F}_n\big] &= \mathbb{E}\big[(H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n\big] \\
&= (H \cdot X)_n + \mathbb{E}\big[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n\big] \\
&= (H \cdot X)_n + H_{n+1}\mathbb{E}\big[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n\big] \\
&\leq (H \cdot X)_n \,,
\end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog $\mathcal{F}_n$-izmjerivosti od H_{n+1}, a četvrti zbog $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] \leq 0$ i $H_{n+1} \geq 0$. Slučajevi (b) i (c) se dokazuje na isti način. ∎

Definicija 1.64 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor s filtracijom $\mathbb{F}$. Funkcija $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ zove se* vrijeme zaustavljanja *s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ (ili $\mathbb{F}$-vrijeme zaustavljanja), ako vrijedi*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \,, \quad \textit{za sve } n \geq 0 \,.$$

Zadatak 1.65 Pokažite da je $T : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ $\mathbb{F}$-vrijeme zaustavljanja ako i samo ako vrijedi $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ za sve $n \geq 0$.

Zadatak 1.66 (a) Za $m \in \mathbb{N}$ definiramo $T(\omega) = m$ za sve $\omega \in \Omega$. Tada je T vrijeme zaustavljanja.
(b) Ako su T i S dva $\mathbb{F}$-vremena zaustavljanja, tada je $T \wedge S$ također $\mathbb{F}$-vrijeme zaustavljanja.
(c) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, te neka je $B \in \mathcal{B}$ Borelov podskup od $\mathbb{R}$. Tada je vrijeme pogađanja skupa B definirano s

$$T_B := \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}$$

vrijeme zaustavljanja s obzirom na $\mathbb{F}$.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces i T vrijeme zaustavljanja. Na događaju $\{T < \infty\}$ definiramo X_T formulom

$$X_T = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{\{T=n\}} \,.$$

Riječima, $X_T = X_n$ na događaju $\{T = n\}$. Budući da za svaki Borelov skup B imamo

$$\{X_T \in B\} \cap \{T < \infty\} = \cup_{n=0}^{\infty}(\{X_n \in B\} \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F} \,,$$

slijedi da je X_T slučajna varijabla na $\{T < \infty\}$.

Definicija 1.67 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces i T vrijeme zaustavljanja.* Proces zaustavljen u vremenu T, $X^T = (X_n^T : n \geq 0)$, *definira se formulom*

$$X_n^T := X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n\,, & n < T \\ X_T\,, & n \geq T \end{cases}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Propozicija 1.68 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ (super)martingal i T vrijeme zaustavljanja. Tada je i zaustavljen proces X^T (super)martingal. U slučaju supermartingala vrijedi*

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0\,, \quad \text{za sve } n \geq 0\,, \tag{1.12}$$

dok je u slučaju martingala

$$\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0\,, \quad \text{za sve } n \geq 0\,. \tag{1.13}$$

Dokaz: Propozicija je jednostavni korolar Teorema 1.63. Zaista, definirajmo strategiju $H = (H_n : n \geq 0)$ na sljedeći način: $H_0 = 0$, te za $n \geq 1$, $H_n = \mathbf{1}_{\{n \leq T\}}$ (riječima, ulažemo jedinični ulog do vremena T nakon kojeg prestajemo kockati). Budući da je $\{n \leq T\} = \{T < n\}^c = \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$, slijedi da je proces H predvidiv. Izračunajmo martingalnu transformaciju $H \cdot X$:

$$(H\cdot X)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{\{m\leq T\}}(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{T\wedge n}(X_m - X_{m-1}) = X_{T\wedge n} - X_0\,.$$

Budući da je $H_n \geq 0$, martingalna transformacija (super)martingala je (super)martingal. (Ne)jednakost (1.12), odnosno (1.13) slijede direktno iz svojstva (super)martingala. ∎

Pretpostavimo $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ i pogledajmo pažljivo jednakost (1.13). Pustimo li $n \to \infty$ slijedi $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T$. Da li možemo zaključiti da vrijedi $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$? Sljedeći primjer pokazuje da to općenito ne mora vrijediti.

Primjer 1.69 Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna, simetrična slučajna šetnja s koracima ± 1. Tada je X martingal i $\mathbb{E}X_n = 0$ za sve $n \geq 0$. Definirajmo $T = \min\{n \geq 0 : X_n = 1\}$. Tada je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ (vidi Markovljevi lanci, Primjer 6.12 (a) i Teorem 6.11; poslije ćemo dati martingalni dokaz te činjenice). Očito vrijedi $X_T = 1$, te $\mathbb{E}X_T = 1$. Zato je $\mathbb{E}X_T \neq \mathbb{E}X_0$.

Primjer 1.70 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima -1 i 1, te s parametrom $p \in (0, 1/2]$; $\mathbb{P}(Y_n = +1) = p$. Definiramo proces X sa $X_0 = 0$, te $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$. Uočite da je za $p = 1/2$ proces X martingal, a za $p \in (0, 1/2)$ supermartingal. Definiramo strategiju kockanja $H = (H_n : n \geq 1)$ na sljedeći način: $H_1 = 1$, te za $n \geq 2$,

$$H_n = 2H_{n-1}\mathbf{1}_{(Y_{n-1}=-1)} + \mathbf{1}_{(Y_{n-1}=1)} = \begin{cases} 2H_{n-1}\,, & Y_{n-1} = -1\,, \\ 1\,, & Y_{n-1} = 1\,. \end{cases}$$

Riječima, svaki put kad izgubimo podvostručimo ulog, a nakon što dobijemo uložimo opet jednu novčanu jedinicu. Takva kockarska strategija naziva se *martingal.* Po Teoremu 1.63, proces $H \cdot X$ je supermartingal za $p \in (0, 1/2)$, odnosno martingal za $p = 1/2$. Neka je $T = \min\{n \geq 1 : Y_n = 1\}$, te primjetimo da je T geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Stoga je $\mathbb{E}T = 1/p$ i $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Izračunajmo $(H \cdot X)_T$, t.j. ukupni dobitak u trenutku kada prvi put dobijemo u igri. Uočite da su vrijednosti strategije H u trenucima $1, 2, \dots, T$ bile redom jednake $1, 2, 2^2, \dots, 2^{T-2}, 2^{T-1}$, dok su dobici $H_m(X_m - X_{m-1}) = H_m Y_m$ bili $-1, -2, -2^2, \dots, -2^{T-2}$, te 2^{T-1}. Dakle,

$$(H \cdot X)_T = \sum_{m=1}^{T} H_m(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^{T-1} -2^{m-1} + 2^{T-1} = 1\,.$$

S druge strane, zaustavljen proces $(H \cdot X)^T$ je supermartingal za $p \in (0, 1/2)$ (odnosno martingal za $p = 1/2$). Kao i u prethodnom primjeru zaključujemo da ne vrijedi $\mathbb{E}\big[(H \cdot X)_T\big] \leq \mathbb{E}\big[(H \cdot X)_1\big] = 0$, zbog $(H \cdot X)_T = 1$.

Iz gornje diskusije vidimo da ako se zaustavimo u trenutku T, t.j. prestanemo s kockanjem, naš ukupni dobitak jednak je točno jednu novčanu jedinicu. Dakle, opisan strategija sigurno vodi do dobitka. U čemu je onda problem? Izračunajmo naš ukupni očekivani ulog do prve igre u kojoj dobivamo. Taj ulog je jednak

$$\sum_{m=1}^{T-1} 2^{m-1} = 2^{T-1} - 1\,.$$

Nadalje,

$$\mathbb{E}\left[2^{T-1}\right] = \sum_{n=1} 2^{n-1} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} [2(1-p)]^n = \infty\,.$$

Rezultati koji govore pod kojim uvjetima možemo zaključiti da vrijedi $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ zovu se teoremi o opcionalnom zaustavljanju, i jedan su od dva najvažnija tipa teorema o martingalima.

Teorem 1.71 *(Doobov teorem o opcionalnom zaustavljanju) Neka je T vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.*
(a) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal. Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

(i) T je omeđeno (t.j. postoji $N > 0$ takav da je $T(\omega) \leq N$ za sve $\omega \in \Omega$);

(ii) X je omeđen (t.j. postoji $K > 0$ takav da je $|X_n(\omega)| \leq K$ za sve $\omega \in \Omega$ i sve $n \geq 0$);

(iii) $\mathbb{E}T < \infty$, te postoji $K \geq 0$ takav da je $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq K$ za sve $\omega \in \Omega$ i sve $n \geq 0$.

Tada je X_T integrabilna slučajna varijabla i vrijedi $\mathbb{E}X_T \le \mathbb{E}X_0$.
(b) Ako je X martingal i vrijedi jedno od svojstava (i)-(iii), tada je X_T integrabilna i vrijedi $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$.

Dokaz: (a) Po Propoziciji 1.68 vrijedi da je $(X_{T\wedge n} : n \ge 0)$ supermartingal, te $\mathbb{E}X_{T\wedge n} \le \mathbb{E}X_0$ za sve $n \ge 0$. U slučaju (i), za $n = N$ imamo $X_{T\wedge N} = X_T$, i $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_{T\wedge N} \le \mathbb{E}X_0$. U slučaju (ii), $|X_{T\wedge n}| \le K$, te možemo iskoristiti teorem o dominiranoj konvergenciji koji daje $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} \le \mathbb{E}X_0$. U slučaju (iii) imamo (vidi dokaz Propozicije 1.68)

$$|X_{T\wedge n}| \le |X_0| + \sum_{m=1}^{T\wedge n} |X_m - X_{m-1}| \le |X_0| + KT\,.$$

Slučajna varijabla $|X_0| + KT$ je po pretpostavci integrabilna, pa opet možemo iskoristiti teorem o dominiranoj konvergenciji.
(b) Primjenimo (a) na supermartingale X i $-X$. ∎

Zadatak 1.72 Neka je $X = (X_n : n \ge 0)$ nenegativan supermartingal i T vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Tada vrijedi $\mathbb{E}X_T \le \mathbb{E}X_0$.

Primjer 1.73 Neka je $(Y_n : n \ge 1)$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = +1) = 1/2$, te neka je $S = (S_n : n \ge 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja: $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Definiramo prvo vrijeme pogađanja stanja 1 kao

$$T := \min\{n \ge 0 : S_n = 1\}\,,$$

Želimo pokazati da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, te naći distribuciju slučajne varijable T. Ključ martingalnog pristupa ovakvom problemu je pronaći dobar martingal.

Neka je $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) = \sigma(S_1, \dots, S_n)$ i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \ge 0)$. Fiksirajmo $\lambda \in \mathbb{R}$ i uočimo da je $\mathbb{E}[e^{\lambda Y_n}] = \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) = \cosh\lambda$. Zato je

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda Y_n}}{\cosh\lambda}\right] = 1\,.$$

Nadalje, $(e^{\lambda Y_n}/\cosh\lambda : n \ge 1)$ je niz nezavisnih slučajnih varijabli. Definiramo slučajni proces $X = (X_n : n \ge 0)$ kao $X_0 := 1$, te

$$X_n := \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{\lambda Y_j}}{\cosh\lambda} = \frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh\lambda)^n}\,, \quad n \ge 1\,.$$

Iz primjera 1.48 slijedi da je X martingal. Budući da je T vrijeme zaustavljanja za filtraciju $\mathbb{F}$, iz teorema o opcionalnom zaustavljanju primjenjenog na ograničeno vrijeme zaustavljanja $T \wedge n$ slijedi

$$1 = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}}\right]\,, \quad n \ge 1\,.$$

Neka je od sada $\lambda > 0$. Primjetimo da je $S_{T\wedge n} \leq 1$, pa je $e^{\lambda S_{T\wedge n}} \leq e^{\lambda}$, za sve $n \geq 1$. Budući da je $\cosh x \geq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je $X_{T\wedge n} \leq e^{\lambda}$ za sve $n \geq 1$. Nadalje, možemo pisati

$$1 = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh\lambda)^{n}}\mathbf{1}_{\{T=\infty\}}\right]. \tag{1.14}$$

Pustimo $n \to \infty$. Na događaju $\{T = \infty\}$ vrijedi $S_n \leq 0$, pa je $e^{\lambda S_n} \leq 1$ za sve $n \geq 0$. Budući da $(\cosh\lambda)^n \to \infty$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_n}}{(\cosh\lambda)^{n}}\mathbf{1}_{\{T=\infty\}}\right] = 0\,.$$

Na događaju $\{T < \infty\}$ vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} e^{\lambda S_{T\wedge n}} = e^{\lambda S_T} = e^{\lambda}$, te $\lim_{n\to\infty}(\cosh\lambda)^{T\wedge n} = (\cosh\lambda)^T$. Po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{T\wedge n}}}{(\cosh\lambda)^{T\wedge n}}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda}}{(\cosh\lambda)^{T}}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\right].$$

Zadnja dva limesa zajedno s (1.14) daju

$$1 = \mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda}}{(\cosh\lambda)^{T}}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\right],$$

odnosno

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(\cosh\lambda)^{T}}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\right] = e^{-\lambda}\,. \tag{1.15}$$

Pustimo sada $\lambda \to 0$. Vrijedi $\lim_{\lambda\to 0} 1/(\cosh\lambda) = 1$. Zbog $0 < 1/(\cosh\lambda) \leq 1$, možemo upotrijebiti teorem o dominiranoj konvergenciji i zaključiti da je

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}] = \lim_{\lambda\to 0} e^{-\lambda} = 1\,.$$

Jednakost (1.15) sada postaje

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(\cosh\lambda)^{T}}\right] = e^{-\lambda}\,. \tag{1.16}$$

Stavimo

$$\alpha = \frac{1}{\cosh\lambda} = \frac{2}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} < 1\,,$$

otkud rješavanjem kvadratne jednažbe dobivamo

$$e^{-\lambda} = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$$

(rješenje s pozitivnim predznakom otpada, jer je $\alpha < 1$). Uvrstimo li u (1.16) i iskoristimo razvoj u red funkcije $\alpha \mapsto \sqrt{1-\alpha^2}$ slijedi

$$\mathbb{E}\big[\alpha^T\big] = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\binom{\frac{1}{2}}{m}\alpha^{2m-1}\,.$$

S druge strane, funkcija izvodnica od T jednaka je

$$\mathbb{E}\big[\alpha^T\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T=n)\alpha^n \,.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(T=n) = \begin{cases} (-1)^{m+1}\binom{\frac{1}{2}}{m}\,, & n = 2m-1\,, \\ 0\,, & n = 2m\,. \end{cases}$$

Primjer 1.74 U ovom primjeru pokazujemo vezu Markovljevih lanaca i supermartingala. Neka je S prebrojiv skup, $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces s vrijednostima u S definiran na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s početnom distribucijom μ, $\mu(j) = \mathbb{P}(X_0 = j)$, te $P = (p(i,j) : i,j \in S)$ stohastička matrica. Definiramo σ-podalgebre $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 0$. Pretpostavljamo da je X Markovljev lanac, odnosno da vrijedi Markovljevo svojstvo u sljedećem obliku:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | \mathcal{F}_n) = p(X_n, j)\,.$$

Ako je $f : S \to [0,\infty)$, tada iz gornje relacije slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{j\in S} f(X_{n+1})\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=j\}}|\mathcal{F}_n\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j\in S} f(j)\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=j\}}|\mathcal{F}_n\Big] \\ &= \sum_{j\in S} f(j)\mathbb{P}(X_{n+1}=j|\mathcal{F}_n) = \sum_{j\in S} p(X_n,j)f(j)\,, \end{aligned} \tag{1.17}$$

gdje drugi redak slijedi iz uvjetnog teorema o monotonoj konvergenciji.

Za nenegativnu funkciju $h : S \to [0,\infty)$ definiramo funkciju $Ph : S \to [0,\infty)$ kao

$$Ph(i) := \sum_{j\in S} p(i,j)h(j)\,.$$

Funkcija h zove se *superharmonijska* (za P, odnosno za Markovljev lanac X) ako vrijedi $Ph \leq h$ na S. Funkcija h zove se *harmonijska* ako vrijedi $Ph = h$ na S. Pretpostavimo da je h superharmonijska. Pomoću (1.17) računamo

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \sum_{j\in S} p(X_n,j)h(j) = Ph(X_n) \leq h(X_n)\,, \quad n \geq 0\,,$$

što znači da je slučajni proces $(h(X_n) : n \geq 0)$ nenegativan supermartingal. Uočimo da to vrijedi za svaku početnu distribucije μ.

Za $i,j \in S$ definiramo

$$f(i,j) := \mathbb{P}_i(T_j < \infty)\,,$$

gdje je $\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot|X_0 = i)$, a $T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$ prvo vrijeme povratka u j (uz ovakvu definiciju vremena T_j je $f(j,j)$ vjerojatnost povratka u stanje j).

Pretpostavimo da je X ireducibilan i povratan što povlači da je $f(i,j)=1$ za sve $i,j\in S$. Neka je h superharmonijska funkcija. Zbog $\mathbb{P}_i(T_j<\infty)=f(i,j)=1$, zaključujemo da je $\mathbb{E}_i[h(X_{T_j})]=h(j)$. Budući da je $(h(X_n)\,:\,n\geq 0)$ supermartingal, po Zadatku 1.72 imamo $\mathbb{E}_i[h(X_{T_j})]\leq h(i)$. Dakle, za proizvoljne $i,j\in S$ vrijedi $h(j)\leq h(i)$. To očigledno povlači da je h konstanta. Dakle, svaka superharmonijska funkcija ireducibilnog i povratnog Markovljevog lanca je konstanta.

Zadatak 1.75 Neka je X Markovljev lanac takav da je svaka superharmonijska funkcija konstanta. Dokažite da je tada X ireducibilan i povratan. Uputa: Pokažite da vrijedi

$$f(i,j)=\sum_{k\neq j}p(i,k)f(k,j)+p(i,j)\geq \sum_{k\in S}p(i,k)f(k,j)\,,$$

odnosno da je funkcija $i\mapsto f(i,j)$ superharmonijska za svaki $j\in S$.

Zadaci:

Zadatak 1.76 Neka je $X=(X_n\,:\,n\geq 0)$ integrabilan slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n\,:\,n\geq 0)$. Dokažite da je X $\mathbb{F}$-martingal ako i samo ako za svako ograničeno $\mathbb{F}$-vrijeme zaustavljanja T vrijedi $\mathbb{E}X_T=\mathbb{E}X_0$.

Zadatak 1.77 Neka je $X=(X_n\,:\,n\geq 0)$ integrabilan slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n\,:\,n\geq 0)$. Dokažite da je X $\mathbb{F}$-martingal ako i samo za svaki omeđen $\mathbb{F}$-predvidiv proces $H=(H_n\,:\,n\geq 0)$ takav da je $H_0=0$ vrijedi $\mathbb{E}\big[(H\cdot X)_n\big]=0$ za sve $n\geq 0$.

Zadatak 1.78 Neka su $X=(X_n\,:\,n\geq 0)$ i $Y=(Y_n\,:\,n\geq 0)$ dva supermartingala (odnosno, martingala) na filtriranom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$. Neka je T vrijeme zaustavljanja takvo da vrijedi $X_T\leq Y_T$ (odnosno, $X_T=Y_T$) na događaju $\{T<\infty\}$. Definiramo proces $Z=(Z_n\,:\,n\geq 0)$ formulom

$$Z_n=\begin{cases} Y_n\,, & \text{ako je } n<T\,,\\ X_n\,, & \text{ako je } n\geq T\,.\end{cases}$$

Dokažite da je Z supermartingal (odnosno, martingal) s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$.

1.4 Konvergencija martingala

U ovoj točki proučavamo konvergenciju martingala kada $n\to\infty$. Prvo ćemo gledati konvergenciju gotovo sigurno, a zatim konvergenciju u prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ za $p>1$.

Za konvergenciju g.s. ključna opservacija je sljedeća jednostavna karakterizacija konvergencije niza realnih brojeva. Neka je $x:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}$ niz realnih brojeva. Za $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, definiramo $t_0:=-1$, te za $k\geq 1$,

$$\begin{aligned} t_{2k-1} &:= \min\{m>t_{2k-2}\,:\,x_m\leq a\}\,,\\ t_{2k} &:= \min\{m>t_{2k-1}\,:\,x_m\geq b\}\,,\end{aligned}$$

uz konvenciju da je $\min \emptyset = \infty$. Uočite da je $x(t_{2k-1}) \leq a$, dok je $x(t_{2k}) \geq b$, što znači da između t_{2k-1} i t_{2k} niz x radi prijelaz od ispod nivoa a do iznad nivoa b. To objašnjava sljedeću definiciju. Za $n \in \mathbb{N}$, neka je

$$u_n = u_n([a,b]) = \max\{k : t_{2k} \leq n\}$$

ukupan broj prelaza intervala $[a,b]$ prema gore niza x do trenutka n, te

$$u = u([a,b]) := \lim_{n\to\infty} u_n([a,b]) = \sup\{k : t_{2k} < \infty\}$$

ukupan broj prelazaka intervala $[a,b]$ prema gore niza x.

Lema 1.79 *Neka je $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ niz realnih brojeva. Tada postoji $\lim_{n\to\infty} x_n \in [-\infty, +\infty]$ ako i samo ako za sve $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, vrijedi da je $u([a,b]) < \infty$.*

Dokaz: Pretpostavimo da niz $(x_n : n \geq 0)$ ne konvergira u $[-\infty, +\infty]$. Tada je $\liminf_n x_n < \limsup_n x_n$, pa postoje $a, b \in \mathbb{Q}$, takvi da je $\liminf_n x_n < a < b < \limsup_n x_n$. Odavde očito slijedi da je $u([a,b]) = \infty$. Obratno, ako za neke $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, vrijedi $u([a,b]) = \infty$, onda niz $(x_n : n \geq 0)$ sadrži beskonačano mnogo članova manjih od a i beskonačno mnogo članova većih od b. Zato je $\liminf_n x_n \leq a < b \leq \limsup_n x_n$, pa niz $(x_n : n \geq 0)$ ne konvergira. ∎

Pretpostavimo sada da je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. Slično kao gore, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definiramo $T_0 := -1$, te za $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} T_{2k-1} &:= \min\{m > T_{2k-2} : X_m \leq a\}\,, \\ T_{2k} &:= \min\{m > T_{2k-1} : X_m \geq b\}\,. \end{aligned}$$

Tada su T_{2k-1} i T_{2k}, $k \geq 1$, $\mathbb{F}$-vremena zaustavljanja. Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$, neka je

$$U_n = U_n([a,b]) = \max\{k : T_{2k} \leq n\}$$

ukupan broj prelaza intervala $[a,b]$ prema gore submartingala X do trenutka n, te

$$U = U([a,b]) := \lim_{n\to\infty} U_n([a,b]) = \sup\{k : T_{2k} < \infty\}$$

ukupan broj prelazaka intervala $[a,b]$ prema gore submartingala X. Tada su U_n i U slučajne varijable. Uočimo da je $\{T_{2k-1} < m \leq T_{2k}\} = \{T_{2k-1} \leq m-1\} \cap \{T_{2k} \leq m-1\}^c \in \mathcal{F}_{m-1}$. Dakle, definiramo li slučajni proces $H = (H_m : m \geq 0)$ formulom

$$H_m := \begin{cases} 1\,, & \text{ako je } m \in (T_{2k-1}, T_{2k}] \text{ za neki } k \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{inače}\,, \end{cases} \tag{1.18}$$

tada je H predvidiv proces. Uočite da je $H_m = 1$ u trenucima m u kojima submartingal X radi prijelaz od ispod nivoa a do iznad nivoa b.

Lema 1.80 *(Nejednakost prelazaka) Neka je $X = (X_m : m \geq 0)$ submartingal. Tada za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$(b-a)\mathbb{E}\big[U_n\big] \leq \mathbb{E}\big[(X_n - a)^+\big] - \mathbb{E}\big[(X_0 - a)^+\big]\,, \tag{1.19}$$

gdje smo stavili $U_n = U_n([a, b])$.

Dokaz: Stavimo $Y_m := (X_m - a)^+$. Iz Korolara 1.52 slijedi da je $Y = (Y_m : m \geq 0)$ submartingal. Uočimo da je broj prelazaka prema gore intervala $[0, b-a]$ za submartingal Y jednak broju prelazaka prema gore intervala $[a, b]$ za submartingal X. Neka su T_{2k-1} i T_{2k} vremena zaustavljanja definirana za proces Y, te neka je $H = (H_m : m \geq 0)$ predvidiv proces definiran u (1.18) (također za proces Y). Izračunajmo martingalnu transformaciju $(H \cdot Y)_n$. Vrijedi

$$(H \cdot Y)_n = \sum_{m=1}^{n} H_m(Y_m - Y_{m-1}) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{\{H_m = 1\}}(Y_m - Y_{m-1})\,.$$

Prisjetimo se da je $H_m = 1$ samo u trenucima m takvim da je $T_{2k-1} < m \leq T_{2k}$ za neki k, t.j., u onim trenucim m u kojima Y radi prijelaz od ispod nivoa 0 do iznad nivoa $b - a$. Zbroj prirasta $Y_m - Y_{m-1}$ po svim trenucima m unutar takvog jednog dovršenog prijelaza nije manji od $b - a$. Budući da je broj takvih dovršenih prijelaza do vremena n jednak U_n, oni u gornjoj sumi doprinose barem $(b-a)U_n$. Još treba uzeti u obzir zadnji, eventualno nedovršeni prijelaz. Pretpostavimo da takav prijelaz započinje u (slučajnom) vremenu $K < n$. U tom vremenu vrijedi $Y_K = 0$. Zato je $\sum_{m=K}^{n}(Y_m - Y_{m-1}) = Y_n - Y_K = Y_n \geq 0$. Zaključujemo da je

$$(H \cdot Y)_n \geq (b-a)U_n\,.$$

Stavimo $K_m := 1 - H_m$, $m \geq 1$. Tada je $Y_n - Y_0 = ((H + K) \cdot Y)_n = (H \cdot Y)_n + (K \cdot Y)_n$. Po Teoremu 1.63 (b), $K \cdot Y$ je submartingal, pa vrijedi $0 = \mathbb{E}\big[(K \cdot Y)_0\big] \leq \mathbb{E}\big[(K \cdot Y)_n\big]$. Dakle,

$$\mathbb{E}\big[Y_n\big] - \mathbb{E}\big[Y_0\big] = \mathbb{E}\big[Y_n - Y_0\big] \geq \mathbb{E}\big[(H \cdot Y)_n\big] \geq (b-a)\mathbb{E}\big[U_n\big]\,,$$

što dokazuje tvrdnju. ∎

Teorem 1.81 *(O konvergenciji submartingala) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal takav da vrijedi*

$$\sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty\,.$$

Tada postoji $X_\infty = \lim_{n \to \infty} X_n$ g.s., te vrijedi $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

Dokaz: Neka su $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Zbog $(X_n - a)^+ \leq X_n^+ + |a|$, iz Leme 1.80 slijedi da je za sve $n \geq 0$

$$\mathbb{E}U_n([a, b]) \leq \frac{1}{b-a}\Big(|a| + \mathbb{E}X_n^+\Big) \leq \frac{1}{b-a}\Big(|a| + \sup_m \mathbb{E}X_m^+\Big) < \infty\,.$$

Budući da niz $(U_n([a,b]) : n \geq 0)$ monotono raste prema $U([a,b])$, po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da je

$$\mathbb{E}U([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}U_n([a,b]) \leq \frac{1}{b-a}\Big(|a| + \sup_m \mathbb{E}X_m^+\Big) < \infty\,.$$

Zaključujemo da je $U([a,b]) < \infty$ g.s. Iz činjenice da je prebrojiva unija $\mathbb{P}$-nul skupova opet $\mathbb{P}$-nul skup, slijedi

$$\mathbb{P}\big(U([a,b]) < \infty \text{ za sve } a,b \in \mathbb{Q}, a < b\big) = 1\,.$$

Iz Leme 1.79 zaključujemo da je $\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$ g.s. Definiramo $X_\infty := \limsup_{n\to\infty} X_n$ na događaju na kojem je $\limsup_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n$, te $X_\infty = 0$ inače. Tada je X_∞ slučajna varijabla i vrijedi $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s.

Još preostaje pokazati da je $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$. Budući da iz $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. slijedi također $X_\infty^+ = \lim_{n\to\infty} X_n^+$, po Fatouovoj lemi imamo

$$\mathbb{E}X_\infty^+ \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^+ \leq \sup_n \mathbb{E}X_n^+ < \infty\,.$$

Nadalje, zbog $\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_n$, imamo $\mathbb{E}X_n^- = \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0$. Ponovno pomoću Fatouove leme

$$\mathbb{E}X_\infty^- \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^- < \infty\,.$$

Dakle, $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$. ∎

Korolar 1.82 *Ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ supermartingal takav da je $X_n \geq 0$ g.s. za sve $n \geq 0$, tada postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s., te vrijedi $\mathbb{E}X_\infty \leq \mathbb{E}X_0$.*

Dokaz: Definiramo $Y_n := -X_n$, $n \geq 0$. Tada je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ submartingal i vrijedi $Y_n^+ = 0$ (zbog $Y_n \leq 0$). Zato je $\sup_n \mathbb{E}Y_n^+ = 0 < \infty$, pa po Teoremu 1.81 postoji $Y_\infty = \lim_{n\to\infty} Y_n$ g.s., i $Y_\infty \leq 0$. Stavimo li $X_\infty = -Y_\infty$, slijedi da $X_n \to X_\infty$ g.s. Po Fatouovoj lemi imamo $\mathbb{E}X_\infty \leq \liminf_n \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_0$. ∎

Primjer 1.83 U ovom primjeru pokazujemo da nenegativan martingal ne mora konvergirati u $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ takva da je $X_0 = 1$. Tada je X martingal i vrijedi $\mathbb{E}X_n = 1$ za sve $n \geq 0$. Definiramo vrijeme zaustavljanja $T := \min\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Vrijedi $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Promatramo zaustavljen proces $X^T = (X_{T\wedge n} : n \geq 0)$. Po Propoziciji 1.68, X^T je (nenegativan) martingal. Zato je $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_{T\wedge 0} = \mathbb{E}X_0 = 1$. Očito vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T = 0$ g.s. S druge strane, $(X_{T\wedge n} : n \geq 0)$ *ne* konvergira prema $X_T = 0$ u $\mathcal{L}^1$, jer je $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = 1$, dok je $\mathbb{E}X_T = 0$.

Kod proučavanja konvergencije niza slučajnih varijabli u $\mathcal{L}^p$ prostorima ključnu ulogu imaju maksimalne nejednakosti. U slučaju martingala, važne su Doobove (maksimalne) nejednakosti.

Teorem 1.84 *(Doobova maksimalna nejednakost) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ submartingal, te $\lambda > 0$. Za $n \geq 0$ stavimo $A = \{\max_{0 \leq m \leq n} X_m \geq \lambda\}$. Tada vrijedi*

$$\lambda \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}\big[X_n \mathbf{1}_A\big] \leq \mathbb{E}\big[X_n^+\big] . \tag{1.20}$$

Dokaz: Definiramo vrijeme T sa

$$T = \inf\{m \geq 0 : X_m \geq \lambda\} \wedge n .$$

Jednostavno se provjeri da je T vrijeme zaustavljanja (s obzirom na filtraciju uz koju je X submartingal). Na događaju A imamo $X_T \geq \lambda$, pa je

$$\lambda \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\lambda \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A] . \tag{1.21}$$

Budući da je T omeđeno vrijeme zaustavljanja, $T \leq n$, po Teoremu 1.71 (submartingalna verzija) vrijedi $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_n$. Na događaju A^c vrijedi $T = n$, pa je $\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{A^c}] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{A^c}]$. Zato je

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_A] . \tag{1.22}$$

Iz (1.21) i (1.22) slijedi prva nejednakost u (1.20). Druga nejednakost je jednostavna posljedica činjenice da je $X_n \mathbf{1}_A \leq X_n^+ \mathbf{1}_A \leq X_n^+$. ∎

Korolar 1.85 *(Kolmogorovljeva nejednakost) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}Y_n = 0$ i $\mathbb{E}Y_n^2 < \infty$ za svaki $n \geq 1$, te neka je $S_0 = 0$ i $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$. Tada za svaki $x \geq 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\big(\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \geq x\big) \leq \frac{1}{x^2} \mathrm{Var}(S_n) . \tag{1.23}$$

Dokaz: Uočite da je slučajni proces $(S_n : n \geq 0)$ martingal (vidi argument u Primjeru 1.41). Po Korolaru 1.52 je proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran s $X_n = S_n^2$ submartingal. Po Teoremu 1.84 (uz $\lambda = x^2$) vrijedi

$$\mathbb{P}\big(\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \geq x\big) = \mathbb{P}\big(\max_{1 \leq m \leq n} X_m \geq x^2\big) \leq \frac{1}{x^2} \mathbb{E}[X_n^+] = \frac{1}{x^2} \mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{x^2} \mathrm{Var}(S_n) .$$

Za sljedeći teorem potrebna nam je elementarna formula za računanju očekivanja.

Lema 1.86 *Neka je Z nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $p \geq 1$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\big[Z^p\big] = \int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{P}(Z > t)\, dt .$$

Dokaz: Pomoću Fubinijevog teorema računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(Z>t)\,dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\left(\int_\Omega \mathbf{1}_{\{Z>t\}}\,d\mathbb{P}\right)dt \\
&= \int_\Omega\left(\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbf{1}_{\{Z>t\}}\,dt\right)d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega\left(\int_0^Z pt^{p-1}\,dt\right)d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\big[Z^p\big]
\end{aligned}$$

∎

Teorem 1.87 *(Doobova nejednakost) Neka je $X=(X_n : n\geq 0)$ submartingal i $\overline{X}_n := \max_{0\leq m\leq n} X_m^+$. Tada za svaki $p>1$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\big[\overline{X}_n^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[(X_n^+)^p\big]\,. \tag{1.24}$$

Specijalno, ako je $Y=(Y_n : n\geq 0)$ martingal i $Y_n^* := \max_{0\leq m\leq n}|Y_m|$, tada za sve $p>1$ vrijedi

$$\mathbb{E}\big[|Y_n^*|^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|Y_n|^p\big]\,. \tag{1.25}$$

Dokaz: Ako je Y martingal, tada je po Propoziciji 1.51, $X_n := |Y_n|$ submartingal i vrijedi $X_n^+ = |Y_n|$, te $\overline{X}_n = Y_n^*$. Zato (1.25) slijedi iz prvog dijela teorema.

Dokazujemo prvu tvrdnju. Uočite da je zbog Propozicije 1.51, $(X_n^+ : n\geq 0)$ ponovno submartingal. Po Teoremu 1.84 vrijedi

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\big[X_n^+\mathbf{1}_{\{\overline{X}_n>\lambda\}}\big]\,.$$

Iz gornje nejednakosti, Leme 1.86 i Fubinijevog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\overline{X}_n^p\big] &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(\overline{X}_n>\lambda)\,d\lambda \\
&\leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\left(\lambda^{-1}\int_\Omega X_n^+\mathbf{1}_{\{\overline{X}_n>\lambda\}}\,d\mathbb{P}\right)d\lambda \\
&= \int_\Omega X_n^+\left(\int_0^{\overline{X}_n} p\lambda^{p-2}\,d\lambda\right)d\mathbb{P} \\
&= \frac{p}{p-1}\int_\Omega X_n^+\overline{X}_n^{p-1}\,d\mathbb{P} \\
&\leq q\left(\mathbb{E}[|X_n^+|^p]\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}[|\overline{X}_n|^p]\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

∎

U zadnjem retku koristili smo Hölderovu nejednakost uz oznaku $q = p/(p-1)$ (t.j., $1/p + 1/q = 1$). Kada bismo znali da je $\mathbb{E}[|\overline{X}_n|^p] < \infty$, tada bismo gornju nejednakost mogli podijeliti s $\left(\mathbb{E}[|\overline{X}_n|^p]\right)^{1/q}$ što bi (zbog $1 - 1/p = 1/q$) dalo

$$\left(\mathbb{E}[|\overline{X}_n|^p\right)^{1/p} \leq q \left(\mathbb{E}[(X_n^+)^p]\right)^{1/p} ,$$

odnosno (1.24). Budući da za sada ne znamo da vrijedi $\mathbb{E}[|\overline{X}_n|^p] < \infty$, gornji dokaz trebamo malo modificirati. Za proizvoljni $M > 0$ promatramo $\overline{X}_n \wedge M$ (što je omeđena slučajna varijabla, pa ima sve momente). Za $M > \lambda$ vrijedi $\{\overline{X}_n \wedge M > \lambda\} = \{\overline{X}_n > \lambda\}$, pa imamo

$$\lambda \mathbb{P}(\overline{X}_n \wedge M > \lambda) = \mathbb{P}(\overline{X}_n > \lambda) \leq \mathbb{E}\big[X_n^+ \mathbf{1}_{\{\overline{X}_n > \lambda\}}\big] = \mathbb{E}\big[X_n^+ \mathbf{1}_{\{\overline{X}_n \wedge M > \lambda\}}\big] .$$

S druge strane, za $M \leq \lambda$, obje strane su jednake nula, $\{\overline{X}_n \wedge M > \lambda\} = \emptyset$, pa opet vrijedi gornja nejednakost. Zato možemo provesti isti račun kao u (1.26) sa $\overline{X}_n \wedge M$ umjesto $\overline{X}_n$ i dobiti

$$\mathbb{E}\big[(\overline{X}_n \wedge M)^p\big] \leq q \left(\mathbb{E}[(X_n^+)^p]\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}[|\overline{X}_n \wedge M|^p]\right)^{1/q} .$$

Sada možemo podijeliti s $\left(\mathbb{E}[|\overline{X}_n \wedge M|^p]\right)^{1/q}$, te nakon potenciranja dobivamo

$$\mathbb{E}\big[(\overline{X}_n \wedge M)^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(X_n^+)^p] .$$

Pustimo $M \to \infty$. Pomoću Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\mathbb{E}\big[\overline{X}_n^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(X_n^+)^p] .$$

Teorem 1.88 *(Konvergencija u $\mathcal{L}^p$) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal takav da za $p > 1$ vrijedi*

$$\sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] < \infty . \tag{1.27}$$

Tada postoji slučajna varijabla X_∞ takva da je $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. i u $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Napomena 1.89 Za slučajni proces X za koji vrijedi (1.27) kažemo da je ograničen u $\mathcal{L}^p$. Zaista, ako sa $\| \ \|_p$ označimo (polu-)normu u $\mathcal{L}^p$, tada uvjet (1.27) možemo zapisati kao $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$. Konvergencija u $\mathcal{L}^p$ znači da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[|X_n - X_\infty|^p\big] = 0$. Uočite da to povlači da je $\mathbb{E}X_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$ (Hölderova nejednakost).

Dokaz: Uočimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_n^+ \leq \mathbb{E}|X_n| &= \mathbb{E}\big[|X_n|\, \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq 1\}}\big] + \mathbb{E}\big[|X_n|\, \mathbf{1}_{\{|X_n| > 1\}}\big] \\ &\leq 1 + \mathbb{E}\big[|X_n|^p\, \mathbf{1}_{\{|X_n| > 1\}}\big] \leq 1 + \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] . \end{aligned}$$

Zato je $\sup_n \mathbb{E}X_n^+ \leq \sup_n \left(1 + \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big]\right) < \infty$ po pretpostavci teorema. Po Teoremu 1.81 postoji slučajna varijabla X_∞ takva da vrijedi $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. Preostaje dokazati konvergenciju u $\mathcal{L}^p$. Stavimo $X_n^* = \max_{1\leq m\leq n}|X_m|$ i $X^* = \sup_m |X_m|$. Tada je za sve $n \geq 0$ $X_n^* \leq X_{n+1}^* \leq X^*$ i $X^* = \lim_{n\to\infty} X_n^*$. Po Teoremu 1.87 imamo

$$\mathbb{E}\big[(X_n^*)^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] < \infty\,.$$

Iz Lebesguevog teorema o monotonoj konvergenciji i pretpostavke (1.27) slijedi

$$\mathbb{E}\big[(X^*)^p\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[(X_n^*)^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] < \infty\,,$$

odnosno $X^* \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Budući da su slučajne varijable $|X_n|$ i $|X_\infty|$ dominirane p-integrabilnom slučajnom varijablom X^*, po teoremu o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X_\infty|^p = 0$. ∎

Korolar 1.90 *Pretpostavimo da je $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i definiramo $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$, $n \geq 0$, gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija. Stavimo $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n)$. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \text{ g.s. i u } \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\,.$$

Dokaz: Iz uvjetne Jensenove nejednakosti slijedi

$$\mathbb{E}\big[|X_n|^p\big] = \mathbb{E}\Big[\big|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]\big|^p\Big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{F}_n]\big] = \mathbb{E}\big[|X|^p\big]\,,$$

otkud slijedi da je $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] \leq \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. Po Teoremu 1.88 postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. i u $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Budući da je X_n izmjeriva s obzirom na $\mathcal{F}_\infty \supset \mathcal{F}_n$, slijedi da je X_∞ također $\mathcal{F}_\infty$ izmjeriva. Preostaje identificirati X_∞ i $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$. Neka je $A \in \mathcal{F}_n$. Tada je zbog Hölderove nejednakosti

$$\limsup_{m\to\infty} \mathbb{E}\big[|X_m - X_\infty|\mathbf{1}_A\big] \leq \limsup_{m\to\infty} \Big(\mathbb{E}|X_m - X_\infty|^p\Big)^{1/p} \mathbb{P}(A)^{1/q} = 0\,,$$

otkud slijedi da je $\mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_m \mathbf{1}_A]$. Zbog martingalnog svojstva za svaki $m \geq n$ vrijedi $\mathbb{E}[X_m \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]$ $(A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m)$, pa zaključujemo da je $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbf{1}_A]$. Budući da je $n \geq 0$ bio proizvoljan slijedi

$$\int_A X\, d\mathbb{P} = \int_A X_\infty\, d\mathbb{P}\,, \qquad \text{za sve } A \in \cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n\,.$$

Familija $\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n$ je π-sustav i generira σ-algebru $\mathcal{F}_\infty$. Zato gornja relacija vrijedi i za sve $A \in \mathcal{F}_\infty$, što znači da je $X_\infty = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$. ∎

Napomena 1.91 Gornji rezultat vrijedi i uz slabiju pretpostavku da je $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada je konvergencija prema $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$ g.s. i u $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Zadaci:

Zadatak 1.92 Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal, $X_0 = 0$, takav da postoji $M > 0$ sa svojstvom $|X_n - X_{n-1}| \leq M$ za sve $n \geq 1$. Stavimo

$$\begin{aligned} A &= \{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ postoji i konačan je }\}, \\ B &= \{\liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty,\ \limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty\}. \end{aligned}$$

Dokažite da je $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$, t.j., martingal X gotovo sigurno ili konvergira prema konačanom limesu ili oscilira između $-\infty$ i $+\infty$. (Uputa: za $K \geq 1$ promatrajte $T_K = \min\{n \geq 0 : X_n \leq -K\}$ i iskoristite da je $X_{n\wedge T_K} + K + M$ nenegativan martingal.)

Zadatak 1.93 (Drugi Borel-Cantellijev zakon 0-1) Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $(A_n : n \geq 1)$ niz događaja takvih da je $A_n \in \mathcal{F}_n$.

(a) Vrijedi

$$\{A_n \text{ b.m.p. }\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty\right\} \text{g.s.}$$

(b.m.p. je kratica za beskonačno mnogo puta, odnosno $\{A_n \text{ b.m.p. }\} = \limsup_n A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$). (Uputa: stavite $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{1}_{A_k} - \mathbb{P}(A_k|\mathcal{F}_{k-1}))$, $n \geq 1$, i iskoristite Zadatak 1.92.)

(b) Pretpostavimo da je $(A_n : n \geq 1)$ familija nezavisnih događaja. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, tada je $\mathbb{P}(\{A_n \text{ b.m.p. }\}) = 1$.

Zadatak 1.94 (Kolmogorovljev zakon 0-1) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiramo σ-algebre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), \qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right), \\ \mathcal{F}^n &= \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \ldots), \qquad \mathcal{F}^\infty = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

σ-algebra $\mathcal{F}^\infty$ naziva se *repna σ-algebra*, a događaji u $\mathcal{F}^\infty$ *repni događaji*. Dokažite da za svaki $A \in \mathcal{F}^\infty$ vrijedi $\mathbb{P}(A) = 0$ ili $\mathbb{P}(A) = 1$. (Uputa: promatrajte martingal $X_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n]$.)

Zadatak 1.95 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s normalnom distribucijom $N(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$. Definiramo $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$, $X_0 = 0$, te $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$.

(a) Za $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo $Z_n^\lambda = \exp(\lambda X_n - \frac{1}{2} n \lambda^2 \sigma^2)$. Pokažite da je $Z^\lambda = (Z_n^\lambda : n \geq 0)$ $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$-martingal.

(b) Pokažite da za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, $(Z_n^\lambda : n \geq 0)$ konvergira g.s. prema konačnoj slučajnoj varijabli Z_∞^λ. Izračunajte Z_∞^λ.

Zadatak 1.96 Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zove se *Gaussov* ako za svaki $n \geq 0$ slučajni vektor $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ ima (višedimenzionalnu) normalnu distribuciju. Pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ Gaussov proces i martingal, te definiramo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

(a) Dokažite da X ima nezavisne priraste (t.j., $X_{n+1} - X_n$ je nezavisna od $\mathcal{F}_n$).

(b) Neka je $\langle X \rangle$ kvadratna varijacija martingala X. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo $Z_n^\lambda = \exp(\lambda X_n - \frac{1}{2}\lambda^2 \langle X \rangle_n)$. Dokažite da je $Z^\lambda = (Z_n^\lambda : n \geq 0)$ martingal. Da li konvergira g.s.? (Uputa: pogledajete Zadatak 1.60)

Zadatak 1.97 (Waldova jednakost) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih, integrabilnih slučajnih varijabli. Stavimo $\mu = \mathbb{E}Y_1$, $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Neka je T vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbb{E}T < \infty$.

(a) Definiramo $X_n = S_n - n\mu$. Pokažite da je $X = (X_n : n \geq 0)$ martingal.

(b) Pokažite da za sve $n \geq 1$ vrijedi $\mathbb{E}[S_{n \wedge T}] = \mu \mathbb{E}[n \wedge T]$.

(c) Pokažite da je S_T integrabilna slučajna varijabla, te da vrijedi *Waldova jednakost* $\mathbb{E}[S_T] = \mu \mathbb{E}[T]$ (uputa: promatrajte prvo $Y_1 \geq 0$).

(d) Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = +1) = 1/2$, te neka je za $a \in \mathbb{N}$, $T_a = \min\{n \geq 1 : S_n \geq a\}$. Iz Primjera 1.73 slijedi da je $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$. Dokažite da je $\mathbb{E}[T_a] = +\infty$.

Neka je nadalje $\mathbb{E}[Y_1^2] < +\infty$ i stavimo $\sigma^2 = \mathrm{Var}[Y_1]$. Pretpostavimo prvo da je $\mu = 0$ i definiramo $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$.

(e) Dokažite da je $(Z_n : n \geq 0)$ $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$-martingal.

(f) Pokažite da je za sve $j < k$,

$$\mathbb{E}\big[Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq T\}} Y_k \mathbf{1}_{\{k \leq T\}}\big] = 0\,,$$

te da je $\mathbb{E}\big[\sum_{k=1}^\infty Y_k^2 \mathbf{1}_{\{k \leq T\}}\big] < +\infty$.

(g) Dokažite da je $(S_{n \wedge T} : n \geq 0)$ Cauchyjev niz u $\mathcal{L}^2$, te zaključite da je $S_T = \lim_{n\to\infty} S_{n \wedge T}$ u $\mathcal{L}^2$.

(h) Pokažite da vrijedi $\mathbb{E}\big[S_T^2\big] = \sigma^2 \mathbb{E}\big[T\big]$.

(i) Ispustimo pretpostavku da je $\mu = 0$. Pokažite da vrijedi $\mathbb{E}\big[(S_T - \mu T)^2\big] = \sigma^2 \mathbb{E}\big[T\big]$.

Zadatak 1.98 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(Y_i = -1) = \mathbb{P}(Y_i = +1) = 1/2$. Definiramo $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Neka je $a \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $0 < \lambda < \pi/(2a)$. Označimo sa $T = \min\{n \geq 1 : |S_n| = a\}$ prvo vrijeme izlaska iz $(-a, a)$.

(a) Pokažite da je $X_n = (\cos\lambda)^{-n}\cos(\lambda S_n)$ $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$-martingal.

(b) Dokažite da vrijedi

$$1 = \mathbb{E}\big[X_{n\wedge T}\big] \geq \cos(\lambda a)\mathbb{E}\big[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\big] .$$

(c) Zaključite da je $T < +\infty$ g.s., te izračunajte $\mathbb{E}\big[(\cos\lambda)^{-T}\big] = (\cos(\lambda a))^{-1}$.

Zadatak 1.99 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(Y_i = +1) = p$, $\mathbb{P}(Y_i = -1) = q = 1-p$. Definiramo $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(a) Neka je $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Dokažite da je $Z = (Z_n : n \geq 0)$ pozitivan martingal.

(b) Pomoću Doobove maksimalne nejednakosti pokažite da je

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k ,$$

te da ako je $q > p$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{n\geq 0} S_n\Big] \leq \frac{p}{q-p} .$$

U vezi s ovim zadatkom pogledajte Primjer 1.115.

Zadatak 1.100 Neka je $(Y_n : n \geq 0)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s normalnom distribucijom $N(\mu, \sigma^2)$ gdje je $\mu < 0$. Definiramo $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Stavimo

$$W = \sup_{n\geq 0} S_n .$$

(a) Pokažite da je $W < \infty$ g.s. (uputa: po jakom zakonu velikih brojeva $S_n/n \to \mu < 0$ g.s.)

(b) Za $\lambda \in \mathbb{R}$ izračunajte $\mathbb{E}\big[e^{\lambda S_{n+1}} | \mathcal{F}_n\big]$.

(c) Pokažite da postoji jedinstven $\lambda_0 > 0$ takav da je $(e^{\lambda_0 S_n} : n \geq 0)$ martingal.

(d) Pokažite da je za sve $a > 1$,

$$\mathbb{P}\big(e^{\lambda_0 W} > a\big) \leq \frac{1}{a} ,$$

te da je za $t > 0$, $\mathbb{P}(W > t) \leq e^{-\lambda_0 t}$.

(e) Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda W}\big] = 1 + \lambda \int_0^\infty e^{\lambda t}\mathbb{P}(W > t)\, dt ,$$

te izvedite da je za $\lambda < \lambda_0$, $\mathbb{E}\big[e^{\lambda W}\big] < \infty$.

Zadatak 1.101 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(Y_i = -1) = \mathbb{P}(Y_i = +1) = 1/2$. Definiramo $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Definiramo funkciju sign sa

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,, \\ -1\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Neka je nadalje $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces definiran s

$$X_0 = 0\,, \quad X_n = \sum_{k=1}^{n} \text{sign}(S_{k-1}) Y_k\,, \quad n \geq 1\,.$$

(a) Izračunajte $\langle S \rangle_n$.

(b) Pokažite da je $X = (X_n : n \geq 0)$ kvadratno-integrabilan martingal, te izračunajte kvadratnu varijaciju $\langle X \rangle_n$.

(c) Izračunajte Doobovu dekompoziciju submartingala $(|S_n| : n \geq 0)$.

1.5 Uniformna integrabilnost i konvergencija u L^1

Definicija 1.102 *Familija slučajnih varijabli $(X_i)_{i \in I}$ definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se* uniformno integrabilna *ako vrijedi*

$$\lim_{M \to \infty} \left(\sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| > M\}} |X_i| \, d\mathbb{P} \right) = 0. \tag{1.28}$$

Uočimo da ako je X integrabilna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tada po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{M \to \infty} \int_{\{|X| > M\}} |X| \, d\mathbb{P} = \lim_{M \to \infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|X| > M\}} |X|] = 0.$$

Odavde vidimo da je svaka *konačna* familija integrabilnih slučajnih varijabli uniformno integrabilna.

Lema 1.103 *(i) Neka je $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ funkcija takva da vrijedi $\lim_{x \to \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$, te neka je $(X_i)_{i \in I}$ familija slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je $\sup_{i \in I} \mathbb{E}\phi(|X_i|) < \infty$, tada je $(X_i)_{i \in I}$ uniformno integrabilna.*
(ii) Ako je familija $(X_i)_{i \in I}$ uniformno integrabilna, tada je $\sup_{i \in I} \mathbb{E}|X_i| < \infty$ (tj. familija $(X_i)_{i \in I}$ je omeđena u $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

Dokaz: (i) Stavimo $C := \sup_{i\in I} \mathbb{E}\phi(|X_i|)$. Za $M > 0$ definiramo $\epsilon_M := \sup_{x\geq M} \frac{x}{\phi(x)}$ i uočimo da po pretpostavci vrijedi $\lim_{M\to\infty} \epsilon_M = 0$. Tada za proizvoljni $i \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\{|X_i|>M\}} |X_i|\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[|X_i|, |X_i| > M] &= \mathbb{E}\left[\frac{|X_i|}{\phi(|X_i|)}\phi(|X_i|), |X_i| > M\right] \\ &\leq \epsilon_M \mathbb{E}[\phi(|X_i|), |X_i| > M] \leq C\epsilon_M.\end{aligned}$$

Puštanjem $M \to \infty$ slijedi

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>M\}} |X_i|\, d\mathbb{P} \leq \lim_{M\to\infty} C\epsilon_M = 0.$$

(ii) Neka je $M > 0$ takav da vrijedi $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|, |X_i| > M] \leq 1$. Tada je za sve $i \in I$

$$\mathbb{E}|X_i| = \mathbb{E}[|X_i|, |X_i| \leq M] + \mathbb{E}[|X_i|, |X_i| > M] \leq M + \mathbb{E}[|X_i|, |X_i| > M] \leq M + 1$$

što dokazuje tvrdnju. ∎

Primjeri funkcije ϕ kao u Lemi 1.103 su $\phi(x) = x^p$ za $p > 1$ i $\phi(x) = x \log^+ x$. Uočite da iz leme slijedi da ako je $\sup_{i\in I} \mathbb{E}|X_i|^p < \infty$, $p > 1$, tada je familija $(X_i)_{i\in I}$ uniformno integrabilna. Drugim riječima, omeđenost u $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p > 1$, povlači uniformnu integrabilnost.

U nastavku će nam trebati dvije leme.

Lema 1.104 *Neka su μ i ν dvije mjere na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ takve da je $\nu(\Omega) < \infty$. Tada je $\nu \ll \mu$ (ν apsolutno neprekidna u odnosu na μ) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $A \in \mathcal{F}$ takve da je $\mu(A) < \delta$ vrijedi $\nu(A) < \epsilon$.*

Dokaz: Prisjetimo se da $\nu \ll \mu$ znači da za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ vrijedi i $\nu(A) = 0$.

Pretpostavimo da je $\nu \ll \mu$, ali da ne vrijedi tvrdnja iz leme. To znači da postoji $\epsilon > 0$ takav da sa svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $A_k \in \mathcal{F}$ tako da je $\mu(A_k) < 2^{-k}$ i $\nu(A_k) \geq \epsilon$. Tada je za sve $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mu\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) < 2^{-n+1}, \\ \nu\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) &\geq \nu(A_n) \geq \epsilon.\end{aligned}$$

Stavimo $A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \lim_{n\to\infty} \mu\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = 0, \\ \nu(A) &= \lim_{n\to\infty} \nu\big(\cup_{k=n}^{\infty} A_k\big) \geq \epsilon.\end{aligned}$$

No, to je kontradikcija s $\nu \ll \mu$.

Obratno, neka je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ te neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Budući da je $\mu(A) = 0 < \delta$, slijedi $\nu(A) < \epsilon$. Kako to vrijedi za svaki $\epsilon > 0$, zaključujemo da je $\nu(A) = 0$. ∎

Teorem 1.105 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $X \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada je familija $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \ \ \sigma-podalgebra\}$ uniformno integrabilna.*

Dokaz: Definiramo mjeru ν na $\mathcal{F}$ kao

$$\nu(A) := \int_A |X| \, d\mathbb{P}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Zbog X integrabilna vrijedi da je ν konačna. Također, ν je apsolutno neprekidna s obzirom na $\mathbb{P}$. Po Lemi 1.104 za proizvoljni $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$\mathbb{P}(A) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A |X|) < \epsilon.$$

Izaberimo $M > 0$ takav da je $\mathbb{E}|X|/M < \delta$. Tada je

$$\int_{\{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>M|\}} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \, d\mathbb{P} \leq \int_{\{\mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G})>M\}} \mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G})| \, d\mathbb{P} = \int_{\{\mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G})|>M\}} |X| \, d\mathbb{P}.$$

Iz Markovljeve nejednakosti dobivamo

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G}) > M) \leq \frac{1}{M}\mathbb{E}[\mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G})] = \frac{\mathbb{E}|X|}{M} < \delta.$$

Zbog izbora δ vrijedi

$$\int_{\{\mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G})>M\}} \mathbb{E}(|X|\big|\mathcal{G})| \, d\mathbb{P} < \epsilon \qquad \text{za sve } \mathcal{G} \subset \mathcal{F}.$$

Zbog $\epsilon > 0$ proizvoljan, dokaz je gotov. ∎

Prisjetimo se da ako $X_n \to X$ g.s., tada i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Obratno, ako $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, tada posoji podniz (n_k) takav da $X_{n_k} \to X$ g.s. Iz te dvije činjenice zaključujemo sljedeće: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ako i samo ako svaki podniz X_{n_m} ima daljnji podniz $X_{n_{m_k}}$ koji g.s konvergira prema X.

Lema 1.106 *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, tada $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$. Ako je, dodatno, f omeđena, tada $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$.*

Dokaz: Neka je X_{n_m} neki proizvoljni podniz. Budući da $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, X_{n_m} ima daljnji podniz $X_{n_{m_k}}$ koji g.s konvergira prema X. Zbog f neprekidna, $f(X_{n_{m_k}}) \to f(X)$ g.s. To znači da proizvoljni podniz $f(X_{n_m})$ niza $f(X_n)$ ima daljnji podniz $f(X_{n_{m_k}})$ koji g.s. konvergira prema $f(X)$. No to znači da $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.

Ako je f dodatno omeđena, po teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi da $\mathbb{E}f(X_{n_{m_k}}) \to \mathbb{E}f(X)$. To znači da svaki podniz $\mathbb{E}f(X_{n_m})$ niza $\mathbb{E}f(X_n)$ ima daljnji podniz $\mathbb{E}f(X_{n_{m_k}})$ koji konvergira prema $\mathbb{E}f(X)$. No to znači da $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$. ∎

Teorem 1.107 *Pretpostavimo da* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. *Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalente:*
(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ *je uniformno integrabilna familija;*
(ii) $X_n \to X$ *u* L^1*;*
(iii) $\mathbb{E}|X_n| \to \mathbb{E}|X| < \infty$.

Dokaz: (i) ⇒ (ii): Za $M > 0$ definiramo funkciju

$$\phi_M(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq M \\ M, & x > M \\ -M, & x < -M. \end{cases}$$

Uočimo prvo da za svaku slučajnu varijablu Y vrijedi

$$|\phi_M(Y) - Y| = \mathbf{1}_{(Y<-M)}|-M-Y| + \mathbf{1}_{(Y>M)}|M-Y| = \mathbf{1}_{(|Y|>M)}\big||Y|-M\big| \leq \mathbf{1}_{(|Y|>M)}|Y|.$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n - X| &\leq \mathbb{E}|X_n - \phi_M(X_n)| + \mathbb{E}|\phi_M(X_n) - \phi_M(X)| + \mathbb{E}|\phi_M(X) - X| \\ &\leq \mathbb{E}(|X_n|, |X_n| > M) + \mathbb{E}|\phi_M(X_n) - \phi_M(X)| + \mathbb{E}(|X|, |X| > M) \\ &\leq \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|X_n|, |X_n| > M) + \mathbb{E}|\phi_M(X_n) - \phi_M(X)| + \mathbb{E}(|X|, |X| > M). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Budući da je ϕ_M neprekidna funkcija, po Lemi 1.106 zaključujemo da $\phi_M(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \phi_M(X)$, odnosno $\phi_M(X_n) - \phi_M(X) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Zbog $|\phi_M(X_n) - \phi_M(X)| \leq M$, iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\phi_M(X_n) - \phi_M(X)| = 0$, t.j., drugi član u (1.29) teži prema nuli kad $n \to \infty$. Slijedi da je

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| \leq \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|X_n|, |X_n| > M) + \mathbb{E}(|X|, |X| > M).$$

Sada pustimo $M \to \infty$. Prvi član gore teži prema nuli zbog pretpostavle o uniformnoj integrabilnosti. Po Fatouvoj lemi je $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| \leq \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ zbog Leme 1.103(ii). Zato je i $\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}(|X|, |X| > M) = 0$. Zaključujemo da je $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| = 0$, odnosno $X_n \to X$ u L^1.
(ii) ⇒ (iii). To je očito.
(iii) ⇒ (i). Za $M > 0$ definiramo $\psi_M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sa

$$\psi_M(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq M-1 \\ 0, & x \geq M \\ \text{linearna}, & M-1 \leq x \leq M. \end{cases}$$

Uz ovakvu definiciju funkcije ψ_M vrijedi $|x|\mathbf{1}_{(|x|>M)} \leq |x| - \psi_M(|x|)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(|X_n|, |X_n| > M) \leq \mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}\psi_M(|X_n|) \\ &= \big(\mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}|X|\big) + \big(\mathbb{E}|X| - \mathbb{E}\psi_M(|X|)\big) + \big(\mathbb{E}\psi_M(|X|) - \mathbb{E}\psi_M(|X_n|)\big) \\ &\leq \big|\mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}|X|\big| + \big(\mathbb{E}|X| - \mathbb{E}\psi_M(|X|)\big) + \big|\mathbb{E}\psi_M(|X|) - \mathbb{E}\psi_M(|X_n|)\big|. \end{aligned}$$

Budući da je funkcija $\psi_M \circ |\cdot|$ neprekidna i omeđena, iz Leme 1.106 slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\psi_M(|X_n|) = \mathbb{E}\psi_M(|X|)$. Zato i zbog pretpostavke, za proizvoljni $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\big|\mathbb{E}|X_n| - \mathbb{E}|X|\big| \leq \epsilon$ i $\big|\mathbb{E}\psi_M(|X|) - \mathbb{E}\psi_M(|X_n|)\big| \leq \epsilon$. Slijedi da je

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbb{E}(|X_n|, |X_n| > M) \leq 2\epsilon + \big(\mathbb{E}|X| - \mathbb{E}\psi_M(|X|)\big).$$

Nadalje, $\lim_{M\to\infty} \psi_M(x) = x$ za sve $x \geq 0$, te stoga $\psi_M(|X|) \to |X|$ g.s. Po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je $\mathbb{E}|X| = \lim_{M\to\infty} \mathbb{E}\psi_M(|X|)$. Zato postoji $M_0 > 0$ tako da za sve $M \geq M_0$,

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbb{E}(|X_n|, |X_n| > M) \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

To dokazuje da je familija $(X_N)_{n\geq 0}$ uniformno integrabilna, otkud odmah slijedi da je i cijela familija $(X_n)_{n\geq 1}$ također uniformno integrabilna. ∎

Teorem 1.108 *Za submartingal $(X_n)_{n\geq 0}$ je ekvivalentno:*
(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ je uniformno integrabilan;
(ii) $(X_n)_{n\geq 0}$ konvergira u L^1.

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): Iz uniformne integrabilnosti slijedi omeđenost u L^1: $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Zato submartingal $(X_n)_{n\geq 0}$ konvergira g.s. prema nekoj slučajnoj varijabli X. Iz Teorema 1.107 slijedi da $X_n \to X$ i u L^1.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Neka $X_n \to X$ u L^1. Tada $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, pa iz Teorema 1.107 slijedi da je $(X_n)_{n\geq 0}$ uniformno integrabilna familija. ∎

Teorem 1.109 *Za martingal $(X_n)_{n\geq 0}$ je ekvivalentno:*
(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ je uniformno integrabilan;
(ii) $(X_n)_{n\geq 0}$ konvergira u L^1.
(iii) Postoji integrabilna slučajna varijabla X takva da je $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ g.s. za sve $n \geq 0$.

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): Slijedi iz Teorema 1.108.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): To je praktički dokazano u Korolaru 1.90. Neka je $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ u L^1. Za $m > n$ je $\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n$ g.s., pa za $A \in \mathcal{F}_n$ vrijedi $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_m) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_n)$. Nadalje,

$$\limsup_{m\to\infty} \Big| \int_A X_m \, d\mathbb{P} - \int_A X \, d\mathbb{P} \Big| \leq \int \mathbf{1}_A |X_m - X| \, d\mathbb{P} \leq \int |X_m - X| \, d\mathbb{P} \to 0, \quad \text{kada } m \to \infty$$ ∎

Iz $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_m) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_n)$ puštanjem $m \to \infty$ slijedi $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X)$ za svaki $A \in \mathcal{F}_n$. To znači da je $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ g.s.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Slijedi iz Teorema 1.105.

1.6 Primjeri i primjene martingala

Primjer 1.110 (Jednostavni proces grananja) Neka je $(Y_i^n : i \geq 1, n \geq 1)$ familija nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Definiramo niz $Z = (Z_n : n \geq 0)$ sa $Z_0 = 1$, te za $n \geq 1$

$$Z_n = \begin{cases} Y_1^n + \cdots + Y_{Z_{n-1}}^n \,, & \text{ako je } Z_{n-1} > 0\,, \\ 0\,, & \text{ako je } Z_{n-1} = 0\,. \end{cases}$$

Slučajni proces Z zove se *jednostavni proces grananja* (ili *Galton-Watsonov proces*). Slučajnu varijablu Z_n interpretiramo kao broj jedinki neke populacije u n-toj generaciji, a Y_i^n kao slučajni broj potomaka koje daje i-ta jedinka u $n-1$-voj generaciji. Neka je

$$p_k = \mathbb{P}(Y_i^n = k)$$

distribucija potomaka i pretpostavimo da je očekivani broj potomaka konačan: $\mu := \mathbb{E}Y_i^n = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k < \infty$. Neka je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te za $n \geq 1$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_i^m : i \geq 1, 1 \leq m \leq n)\,.$$

Tada je slučajna varijabla Z_n izmjeriva s obzirom na $\mathcal{F}_n$, t.j., slučajni proces Z je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$-adaptiran. Nadalje, slučajne varijable Y_i^m, $m \geq n+1$ su nezavisne od σ-algebre $\mathcal{F}_n$.

Lema 1.111 *Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran sa $X_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$, $n \geq 0$ je $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-martingal.*

Dokaz: Budući da su sve slučajne varijable nenegativne, očekivanje i uvjetno očekivanje je dobro definirano. Za $n \geq 0$ računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[Z_{n+1}\mathbf{1}_{(Z_n=k)}|\mathcal{F}_n\big] &= \mathbb{E}\big[(Y_1^{n+1} + \cdots + Y_{Z_n}^{n+1})\mathbf{1}_{Z_n=k}|\mathcal{F}_n\big] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)}\mathbb{E}\big[Y_1^{n+1} + \cdots + Y_k^{n+1}|\mathcal{F}_n\big] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)}\mathbb{E}\big[Y_1^{n+1} + \cdots + Y_k^{n+1}\big] \\ &= \mathbf{1}_{(Z_n=k)}k\mu\,. \end{aligned}$$

Pomoću uvjetnog teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n\big] &= \mathbb{E}\big[\sum_{k=0}^{\infty} Z_{n+1}\mathbf{1}_{(Z_n=k)}|\mathcal{F}_n\big] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[Z_{n+1}\mathbf{1}_{(Z_n=k)}|\mathcal{F}_n\big] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{1}_{(Z_n=k)}k\mu \\ &= \mu Z_n\,. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{Z_{n+1}}{\mu^{n+1}}\Big|\mathcal{F}_n\right] = \frac{Z_n}{\mu^n} = X_n\,.$$

Nadalje, računanjem očekivanja u gornjoj relaciji dobivamo $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[Z_0] = 1$, pa su slučajne varijable X_n integrabilne. Također slijedi $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n \mathbb{E}[X_n] = \mu^n$. ∎

Iz Korolara 1.82 i gornje leme zaključujemo da postoji

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\mu^n} \text{ g.s.},$$

te da je $X_\infty \geq 0$ g.s. i $\mathbb{E}[X_\infty] \leq \mathbb{E}[X_0] = 1$. Sada možemo dokazati teorem o izumiranju (preciznije, dio teorema).

Teorem 1.112 *(a) Ako je $\mu < 1$, tada je $Z_n = 0$ za dovoljno velike n, te je $X_\infty = 0$.*

(b) Ako je $\mu = 1$ i $\mathbb{P}(Y_i^m = 1) < 1$, tada je $Z_n = 0$ za dovoljno velike n, te je $X_\infty = 0$.

(c) Ako je $\mu > 1$, tada je $\mathbb{P}(Z_n > 0 \text{ za sve } n) > 0$.

Dokaz: (a) Zbog $Z_n \geq 1$ na događaju $\{Z_n > 0\}$, imamo

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(Z_n>0)}] \leq \mathbb{E}[Z_n \mathbf{1}_{(Z_n>0)}] = \mathbb{E}[Z_n] = \mu^n\,.$$

Zato je

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{(Z_n>0)}\right] = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(Z_n>0)}] \leq \sum_{n=0}^\infty \mu^n < \infty\,,$$

pa je $\sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{(Z_n>0)} < \infty$ g.s. Međutim, to znači da je $\mathbb{P}(Z_n > 0 \text{ b.m.p.}) = 0$ (b.m.p. je kratica za beskonačno mnogo puta, odnosno $\{Z_n > 0 \text{ b.m.p.}\} = \limsup_{n\to\infty}\{Z_n > 0\}$).
(b) Uz $\mu = 1$ vrijedi $X_n = Z_n$, te $\lim_{n\to\infty} Z_n = X_\infty$ g.s. Budući da je $Z_n \in \mathbb{Z}_+$, to je i $X_\infty \in \mathbb{Z}_+$, te vrijedi $Z_n = X_\infty$ za dovoljno velike n. Za $k \geq 1$ i $N \in \mathbb{N}$ računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n = k \text{ za sve } n \geq N) &= \mathbb{P}(Z_N = k, Z_n = k \text{ za sve } n \geq N+1) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=N+1}^\infty \{Y_1^n + \cdots + Y_k^n = k\}\Big) \\
&= \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=N+1}^M \{Y_1^n + \cdots + Y_k^n = k\}\right) \\
&= \lim_{M\to\infty} \prod_{n=N+1}^M \mathbb{P}(Y_1^n + \cdots + Y_k^n = k) \\
&= \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}(Y_1^1 + \cdots + Y_k^1 = k)^{M-N}\,.
\end{aligned}$$

Zbog $\mathbb{P}(Y_i^1 = 1) < 1$ slijedi da je $\mathbb{P}(Y_1^1 + \cdots + Y_k^1 = k) < 1$ (dokažite to!), pa zaključujemo da je

$$\mathbb{P}(Z_n = k \text{ za sve } n \geq N) = \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}(Y_1^1 + \cdots + Y_k^1 = k)^{M-N} = 0$$

za sve $N \in \mathbb{N}$. Budući da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_\infty = k) &= \mathbb{P}\left(\cup_{N=1}^\infty \{Z_n = k \text{ za sve } n \geq N\}\right) \\
&\leq \sum_{N=1}^\infty \mathbb{P}(Z_n = k \text{ za sve } n \geq N) = 0 \quad \text{za sve } k \geq 1\,,
\end{aligned}$$

slijedi da je $\mathbb{P}(X_\infty = 0) = 1$.
(c) Neka je $\phi(\theta) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^\infty p_k s^k$, $0 \leq s \leq 1$, funkcija izvodnica distribucije potomaka. Funkcija ϕ je strogo rastuća i konveksna na $[0,1]$ (zbog $\mu > 1$ imamo $p_0 < 1$), te vrijedi $\lim_{s\to 1-} \phi'(s) = \sum_{k=1}^\infty kp_k = \mu > 1$. Definiramo $\theta_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Očito je $\theta_0 = 0$, a za $n \geq 1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\theta_n &= \mathbb{P}(Z_n = 0) = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(Z_n = 0, Z_1 = k) = \sum_{k=0}^\infty p_k \mathbb{P}(Z_n = 0 \,|\, Z_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^\infty p_k \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)^k = \sum_{k=0}^\infty p_k \theta_{n-1}^k = \phi(\theta_{n-1})\,.
\end{aligned}$$

Budući da je ϕ strogo rastuća i $\theta_0 = 0$ slijedi da je niz $(\theta_n : n \geq 0)$ neopadajući, pa postoji $\theta_\infty = \lim_{n\to\infty} \theta_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^\infty \{Z_n = 0\})$. Zbog neprekidnosti funkcije ϕ imamo $\phi(\theta) = \phi(\lim_{n\to\infty} \theta_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(\theta_n) = \lim_{n\to\infty} \theta_{n+1} = \theta_\infty$. Iz svojstava funkcije ϕ slijedi da je $\phi_\infty \in (0,1)$ (nacrtajte graf funkcije ϕ). Zaključujemo da je $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^\infty \{Z_n = 0\}) < 1$, odnosno $\mathbb{P}(Z_n > 0 \text{ za sve } n) > 0$. ∎

Ako je $\mu \leq 1$, gornji teorem povlači da vrijedi $X_\infty = \lim_{n\to\infty} Z_n/\mu^n = 0$ g.s. U slučaju $\mu > 1$ situacija je složenija i potpun odgovor je dan u sljedećem rezultatu.

Teorem 1.113 *(Kesten, Stigum) Vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_\infty > 0) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\mu^n} > 0\right) > 0$$

ako i samo ako je $\mathbb{E}[Y_i^m \log Y_i^m] = \sum_{k=1}^\infty p_k k \log k < \infty$.

Gornji teorem nećemo dokazati, ali ćemo dati dovoljni uvjet da vrijedi $\mathbb{P}(X_\infty > 0) > 0$.

Teorem 1.114 *Pretpostavimo da je $\mu > 1$, te da postoji $\mathbb{E}[(Y_i^m)^2] = \sum_{k=1}^\infty k^2 p_k < \infty$. Tada je $\mathbb{P}(X_\infty > 0) > 0$.*

Dokaz: Stavimo $\sigma^2 := \mathrm{Var}(Y_i^m) < \infty$, te izračunajmo $\mathbb{E}[X_n^2]$. Po Zadatku 1.58 vrijedi $\mathbb{E}[X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}^2 + \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}]$. Nadalje,

$$\mathbb{E}\big[(X_n - X_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\big] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{Z_n}{\mu^n} - \frac{Z_{n-1}}{\mu^{n-1}}\right)^2 \Big|\mathcal{F}_{n-1}\right] = \mu^{-2n}\mathbb{E}\big[(Z_n - \mu Z_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\big]\,.$$

Na događaju $\{Z_{n-1} = k\}$ vrijedi

$$\mathbb{E}\big[(Z_n - \mu Z_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}\big] = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^k Y_i^n - \mu k\big)^2\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big] = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^k Y_i^n - \mu k\big)^2\Big] = k\sigma^2 = Z_{n-1}\sigma^2\,.$$

Slijedi

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_{n-1}^2] + \mathbb{E}\Big[\frac{Z_{n-1}\,\sigma^2}{\mu^{2n}}\Big] = \mathbb{E}[X_{n-1}^2] + \frac{\sigma^2}{\mu^{n+1}}\,.$$

Zbog $\mathbb{E}[X_0^2] = 1$ induktivno dobivamo

$$\mathbb{E}[X_n^2] = 1 + \sigma^2 \sum_{k=1}^n \mu^{-k-1}\,.$$

Budući da je $\sum_{k=1}^\infty \mu^{-k-1} < \infty$ slijedi da je $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$. Po Teoremu 1.88 slijedi da je $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. i u $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Specijalno, $\mathbb{E}X_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = 1$. To povlači da je $\mathbb{P}(X_\infty > 0) > 0$. ∎

Pretpostavimo $\theta := \mathbb{P}(X_\infty = 0) < 1$ (t.j. $\mathbb{P}(X_\infty > 0) > 0$). Vrijedi

$$\begin{aligned}\theta &= \mathbb{P}(X_\infty = 0) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}(X_\infty = 0 \,|\, Z_1 = k) \\ &= \sum_{k\geq 0} p_k \theta^k = \phi(\theta)\,.\end{aligned}$$

Zbog $\theta < 1$ slijedi da je θ jedinstveno rješenje jednadžbe $\theta = \phi(\theta)$ koje je manje od 1. Međutim, iz dokaza Teorem 1.112(c) tada vidimo da je $\theta = \mathbb{P}(Z_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1\}$. Zajedno s očitom inkluzijom $\{Z_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1\} \subset \{X_\infty = 0\}$ to daje $\{Z_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1\} = \{X_\infty = 0\}$ g.s.

Primjer 1.115 Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}Y_i = m < 0$, $\mathbb{P}(Y_i = 1) > 0$ i $\mathbb{P}(Y_i \geq 2) = 0$. Definiramo slučajnu šetnju $S = (S_n : n \geq 0)$ na uobičajen način $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, te filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ s $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Uočimo da se slučajna šetnja X nadesno kreće samo za jedan korak, dok ulijevo može raditi skokove. Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m < 0 \quad \text{g.s.},$$

otkud slijedi da je $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ g.s. Definiramo slučajnu varijablu

$$W := \sup_{n\geq 0} S_n \, .$$

Zbog $S_n \to -\infty$ slijedi da je $W < \infty$ g.s. Želimo izračunati distribuciju slučajne varijable W. Definirajmo

$$\phi(\lambda) := \mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_1}\big] \quad \text{i} \quad \psi(\lambda) := \log \phi(\lambda)\, , \quad \lambda \geq 0\, .$$

Funkcija ψ se zove *Laplaceov eksponent* slučajne šetnje S.

Lema 1.116 *Vrijedi $\phi(\lambda) < \infty$ za sve $\lambda \geq 0$, $\psi'(0+) = m < 0$, funkcija ψ je konveksna, $\lim_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) = +\infty$, te postoji jedinstven $\lambda_0 > 0$ takav da je $\psi(\lambda_0) = 0$.*

Dokaz: Budući da je $\mathbb{P}(Y_1 \leq 1) = 1$, vrijedi $\phi(\lambda) = \mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_1}\big] \leq e^{\lambda}$, te je stoga $\psi(\lambda) \leq \lambda < \infty$. S druge strane, $\phi(\lambda) = \mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_1}\big] \geq e^{\lambda}\mathbb{P}(Y_1 = 1) \to \infty$ za $\lambda \to \infty$. Zato je i $\lim_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) = \infty$. Nadalje,

$$\psi'(\lambda) = \frac{\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)} = \frac{\mathbb{E}\big[Y_1 e^{\lambda Y_1}\big]}{\phi(\lambda)}\, ,$$

pa je $\psi'(0+) = \mathbb{E}[Y_1]/\phi(0) = m$.

Sada pokazujemo da je ψ konveksna. Neka su $\lambda, \mu \geq 0$, $x \in (0,1)$, te stavimo $y = 1-x$. Upotrebom Hölderove nejednakosti (uz $p = 1/x$, $q = 1/y$) dobivamo

$$\begin{aligned} \phi(x\lambda + y\mu) &= \mathbb{E}\Big[e^{(x\lambda+y\mu)Y_1}\Big] = \mathbb{E}[e^{x\lambda Y_1} e^{y\mu Y_1}] \\ &\leq \big(\mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_1}\big]\big)^x \, \big(\mathbb{E}\big[e^{\mu Y_1}\big]\big)^y = \phi(\lambda)^x \phi(\mu)^y \, . \end{aligned}$$

Konveksnost od ψ slijedi logaritmiranjem.

Posljednja tvrdnja o postojanju jedinstvenog $\lambda_0 > 0$ takvog da je $\psi(\lambda_0) = 0$ je sada očigledna (skicirajte graf funkcije ψ). ∎

Definirajmo slučajni proces $Z = (Z_n : n \geq 0)$ sa $Z_n := e^{\lambda_0 S_n}$. Tada je Z martingal. Zaista,

$$\mathbb{E}\big[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] = \mathbb{E}\big[\big[e^{\lambda_0 S_{n-1}} e^{\lambda_0 Y_n}|\mathcal{F}_{n-1}\big] = e^{\lambda_0 S_{n-1}}\mathbb{E}\big[e^{\lambda_0 Y_n}\big] = Z_{n-1}\phi(\lambda_0) = Z_{n-1}\, .$$

Budući da $S_n \to -\infty$ i $\lambda_0 > 0$, slijedi da je $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$ g.s.

Za $k \geq 1$ definiramo vrijeme zaustavljanja $T_k := \min\{n \geq 1 : S_n \geq k\} = \min\{n \geq 1 : S_n = k\}$. Na događaju $\{T_k < +\infty\}$ je $S_{T_k} = k$, pa očito vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge T_k} = e^{\lambda_0 k}\, \mathbf{1}_{\{T_k<+\infty\}}\, .$$

Promotrimo zaustavljen martingal $Z^{T_k} = (Z_{n\wedge T_k} : n \geq 0)$. Taj martingal je ograničen, odozdo s 0, a odozgo s $e^{\lambda_0 k}$. Po teoremu o opcionalnom zaustavljanju je za svaki $n \geq 0$

$$1 = \mathbb{E}Z_0 = \mathbb{E}Z_{n\wedge T_k}\, .$$

Zbog omeđenosti, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} Z_{n\wedge T_k} = \mathbb{E}\big[\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge T_k}\big] = \mathbb{E}\big[e^{\lambda_0 k}\, \mathbf{1}_{\{T_k<+\infty\}}\big] = e^{\lambda_0 k}\mathbb{P}(T_k<+\infty)\,.$$

Dakle, $\mathbb{P}(T_k<+\infty) = (e^{-\lambda_0})^k$. Međutim, $\{W\geq k\} = \{T_k<+\infty\}$, što povlači $\mathbb{P}(W\geq k) = (e^{-\lambda_0})^k$. Dakle, $\mathbb{P}(W=k) = \mathbb{P}(W\geq k) - \mathbb{P}(W\geq k+1) = (e^{-\lambda_0})^k - (e^{-\lambda_0})^{k+1} = (e^{-\lambda_0})^k(1-e^{-\lambda_0})$. Čitamo da W ima geometrijsku distribuciju (na $\mathbb{Z}_+$) s parametrom $1-e^{-\lambda_0}$.

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(Y_1=1)=p$, $\mathbb{P}(Y_1=-1)=q=1-p$ gdje je $p<1/2$. Izračunajmo eksplicitno λ_0 za ovaj slučaj. Vrijedi

$$\phi(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda}\,,$$

Tražimo vrijednost λ_0 takvu da je $\phi(\lambda_0)=1$. To vodi na kvadratnu jednadžbu $pe^{2\lambda}-e^{\lambda}+q=0$ čija su rješenja $e^{\lambda}=1$ i $e^{\lambda}=q/p$. Zato je $\lambda_0=\log(q/p)$, pa W ima geometrijsku distribuciju s parametrom $1-e^{-\lambda_0}=1-p/q$.

Primjer 1.117 (Shema Georgea Polya) Kutija sadrži y crvenih i z zelenih kuglica. Svaki put kad izvučemo kuglicu iz kutije vratimo je u kutiju, te dodamo još $a\geq 1$ kuglica izvučene boje. Neka je X_n omjer zelenih, te Z_n ukupan broj zelenih kuglica, nakon n-tog izvlačenja, $n\geq 0$. Uočite da vrijedi $X_n = Z_n/(y+z+na)$. Definiramo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1,\dots,X_n)$.

Lema 1.118 *Slučajni proces $(X_n : n\geq 0)$ je martingal.*

Dokaz: Neka je $n\geq 1$. Označimo sa k ukupan broj kuglica u kutiji nakon $n-1$-vog izvlačenja. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n|X_{n-1}] &= X_{n-1}\frac{kX_{n-1}+a}{k+a} + (1-X_{n-1})\frac{kX_{n-1}}{k+a}\\ &= \frac{aX_{n-1}+kX_{n-1}}{k+a} = X_{n-1}\,.\end{aligned}$$

U gornjem računu je X_{n-1} uvjetna vjerojatnost izvlačenja zelene kuglice, a $(kX_{n-1}+a)/(k+a)$ omjer zelenih kuglica nakon dodavanja a zelenih kuglica. Slično, $(1-X_{n-1})$ je uvjetna vjerojatnost izvlačenja crvene kuglice, a $kX_{n-1}/(k+a)$ omjer zelenih kuglica nakon dodavanja a crvenih kuglica. ∎

Budući da je $X_n\geq 0$, iz Korolara 1.82 slijedi da postoji $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ g.s. Želimo izračunati distribuciju slučajne varijable X_∞. Vrijedi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Z_n = z+ma) = \mathbb{P}(\text{u prvih } n \text{ izvlačenja izvučeno je } m \text{ zelenih kuglica})\\ &= \binom{n}{m}\frac{z}{z+y}\,\frac{z+a}{z+y+a}\cdots\frac{z+(m-1)a}{z+y+(m-1)a}\,\frac{y}{z+y+ma}\cdots\frac{y+(n-m-1)a}{z+y+(n-1)a}\,.\end{aligned}$$

Gornji razlomak napisan je kao vjerojatnost da je u prvih m izvlačenja izvučena zelena kuglica, a zatim u sljedećih $n-m$ crvena kuglica. Međutim, nakon kraćeg razmišljanja vidi se da svaki redoslijed od m izvučenih zelenih i $n-m$ izvučenih crvenih kuglica ima istu vjerojatnost.

Od sada promatramo specijalan slučaj u kojem je $y=z=a=1$. Tada je za $m=0,1,\dots,n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n=1+m) &= \mathbb{P}(\text{u prvih } n \text{ izvlačenja izvučeno je } m \text{ zelenih kuglica})\\ &= \binom{n}{m}\frac{m!(n-m)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\,, \qquad m=0,1,\dots n\,,\end{aligned}$$

otkud slijedi

$$\mathbb{P}\left(X_n=\frac{m+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}\,,\quad m=0,1,\dots,n\,.$$

Dakle, X_n ima uniformnu distribuciju na skupu $\left\{\frac{1}{n+2},\frac{2}{n+2},\dots,\frac{n}{n+2},\frac{n}{n+2}\right\}$, pa je funkcija distribucije od X_n dana s

$$F_{X_n}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n+1}\mathbf{1}_{[\frac{i}{n+2},\frac{i+1}{n+2})}(x)+\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)\,.$$

Jednostavno se izračuna da je

$$\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=\begin{cases}0\,, & x<0\,,\\ x\,, & 0\le x\le 1\,,\\ 1\,, & x>1\,,\end{cases}$$

što je uniformna funkcija distribucije na $[0,1]$. Slijedi da X_∞ ima uniformnu distribuciju na $[0,1]$. U općem slučaju može se pokazati da X_∞ ima β-distribuciju s parametrima z/a i y/a, odnosno da je funkcija gustoće od X_∞ jednaka

$$f_{X_\infty}(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{z+y}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{a}\right)\Gamma\left(\frac{y}{a}\right)}\,t^{y/a-1}(1-t)^{z/a-1}\,,\quad 0<t<1\,.$$

Shema Bernarda Friedmana modifikacija je opisane sheme. Razlika je ta da se osim $a\ge 1$ kuglica izvučene boje, u kutiju dodaje i $b\ge 1$ kuglica suprotne boje. Može se pokazati da u ovom slučaju vrijedi

$$X_\infty=\lim_{n\to\infty}X_n=\frac{1}{2}\quad \text{g.s.}$$

neovisno o a i b. U slučaju $a\gg b$ to je prilično začuđujuće.