MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

SLUČAJNI PROCESI

2. kolokvij - 21. lipnja 2022.

(Knjige, bilježnice, dodatni papiri, kalkulatori i mobiteli **nisu** dozvoljeni!)

1. Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom, prebrojivim skupom stanje S, prijelaznom funkcijom $P_{ij}(t)$, $i, j \in S$, $t \geq 0$, i generatorskom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ te označimo $q(i) = -q_{ii}$. Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ pripadajući lanac skokova od X.

(a) (a1) (2 boda) Definirajte invarijantnu mjeru Markovljevog lance X.

(a2) (3 boda) Neka je $\lambda = (\lambda_j : j \in S)$ mjera na S. Definiramo mjeru $\mu = (\mu_j : j \in S)$ sa $\mu_j := \lambda_j q(j)$. Dokažite da je λ invarijantna mjera lanca X ako i samo ako je μ invarijantna mjera lanca skokova Y.

(b) (3 boda) Pretpostavimo da je S konačan. Neka je $J_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\}$ vrijeme prvog skoka, te neka je za $i \in S$, $S_i = \inf\{t > J_1 : X_t = i\}$ vrijeme prvog povratka u stanje i. Definiramo

$$\gamma_j := \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_i} \mathbf{1}_{\{X_t = j\}} \, dt \right) , \quad j \in S .$$

Dokažite da je $\gamma = (\gamma_j : j \in S)$ invarijantna mjera za X.

(c) Pretpostavimo da je S konačan.

(c1) (2 boda) Iskažite Kolmogorovljevu diferencijalnu jednadžbu unaprijed za prijelaznu funkciju $(P(t) : t \geq 0)$, $P(t) = (P_{ij}(t) : i, j \in S)$.

(c2) (3 boda) Generatorska matrica Markovljeg lance $X = (X_t : t \geq 0)$ sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ dana je s

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Izračunajte prijelaznu matricu $P(t)$, $t \geq 0$.

Rješenje:

(a1) Mjera $\lambda = (\lambda_j : j \in S)$ je invarijantna mjera za X ako je netrivijalna i vrijedi $\lambda Q = 0$.

(a2) Za sve $i, j \in S$ vrijedi $q(i)(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = q_{ij}$, pa je

$$(\mu(\Pi - I))_j = \sum_{i \in S} \mu_i(\pi_{ij} - \delta_{ij}) = \sum_{i \in S} \lambda_i q_{ij} = (\lambda Q)_j .$$

Dakle, $\mu(\Pi - I) = 0$ ako i samo ako je $\lambda Q = 0$ što dokazuje tvrdnju.

(b) Stavimo $\sigma_i = \min\{n > 0 : Y_n = i\}$ i $\nu_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=1}^{\sigma_i} \mathbf{1}_{\{Y_n=j\}}$. Neka je $(W_n : n \geq 1)$ niz vremena čekanja Markovljevog lanca X. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} W_{n+1} \mathbf{1}_{\{Y_n=j,\, n<\sigma_i\}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(W_{n+1} \,|\, Y_n = j) \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{Y_n=j,\, n<\sigma_i\}}) \\
&= \frac{1}{q(j)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{Y_n=j,\ n<\sigma_i\}}) \\
&= \frac{1}{q(j)} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\sigma_i-1} \mathbf{1}_{\{Y_n=j\}} = \frac{\nu_j}{q(j)}\,,
\end{aligned}$$

gdje je u drugom retku korišteno Markovljevo svojstvo. Budući da je $\nu = (\nu_j : j \in S)$ invarijantna mjera diskretno-vremenskog Markovljevog lanca Y te $\nu_j = \gamma_j q(j)$, iz dijela (b2) slijedi da je γ invarijantna mjera za X.

(c1) Kolmogorovljeva diferencijalna jednadžba unatrag glasi $P'(t) = P(t)Q$.

(c2) Iz Kolmogorvljeve diferencijalne jednadžbe unaprijed slijedi

$$\begin{array}{ccc}
P'_{11}(t) = -3P_{11}(t) & P'_{12}(t) = P_{11}(t) & P'_{13}(t) = 2P_{11}(t) \\
P'_{21}(t) = 0 & P'_{22}(t) = 0 & P'_{23}(t) = 0 \\
P'_{31}(t) = 0 & P'_{32}(t) = 0 & P'_{33}(t) = 0.
\end{array}$$

Iz $P'_{11}(t) = -3P_{11}$ i početnog uvjeta $P_{11}(0) = 1$ slijedi $P_{11}(t) = e^{-3t}$. Zato jednadžba $P'_{12}(t) = P_{11}$ postaje $P'_{12}(t) = e^{-3t}$ što s početnim uvjetom $P_{12}(0) = 0$ daje $P_{12}(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$. Slično dobivamo $P_{13}(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t})$.

Iz $P'_{21}(t) = 0$ i $P_{21}(0) = 0$ slijedi $P_{21}(t) = 0$, a iz $P'_{22}(t) = 0$ i $P_{22}(0) = 1$ slijedi $P_{22}(t) = 1$ (stanje 2 je apsorpcijsko). Na isti način $P_{23}(t) = P_{31}(t) = P_{22}(t) = 0$ te $P_{33}(t) = 1$.

2.

(a) (3 boda) Pretpostavite da je $X = (X_t : t \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac sa skupom stanja S. Dokažite da je X regularan.

(b) Fabijanov restoran ima vrtnu terasu pa promet u restoranu jako ovisi o vremenskim uvjetima. Fabijan dane kategorizira u oblačne (O), sunčane (S) i kišne (K). Dugogodišnjim opažanjem Fabijan je zaključio da se vremenski uvjeti mijenjaju po neprekidno-vremenskom Markovljevom lancu $X = (X_t : t \geq 0)$ s generatorskom matricom (stanja su redom O, S, K)

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

(b1) (2 boda) Nađite stacionarnu distribuciju od X.

(b2) (3 boda) Vrijeme je oblačno. Izračunajte očekivani broj dana do sunčanog razdoblja.

(b3) (2 boda) Upravo smo ušli u kišno razdoblje. Izračunajte očekivani broj dana do ponovnog ulaska u kišno razdoblje.

(b4) (2 boda) Dnevna zarada u restoranu ovisi o vremenu. Za kišnog dana zarada je 1000 Kn, za oblačnog 3000 Kn, a za sunčanog 8000 Kn. Izračunajte Fabijanovu asimptotsku prosječnu zaradu po danu.

Rješenje:

(a) Pokazujemo da je $\mathbb{P}_i(\zeta = \infty) = 1$ za svaki $i \in S$. Neka je $\tau_i(0) = 0$, te $\tau_i(n) = \min\{k > \tau_i(n-1) : Y_k = i\}$, $n \geq 1$, n-to vrijeme povratka lanca skokova Y u stanje i. Po pretpostavci je $\mathbb{P}_i(\tau_i(n) < \infty)$ za sve $n \geq 1$. Tada je

$$\zeta \geq \sum_{n=0}^{\infty} W_{\tau_i(n)+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{\tau_i(n)+1}}{q(i)} = +\infty \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.}$$

(b) Označimo, zbog jednostavnosti zapisa, stanja na sljedeći način: $1 = O$, $2 = S$ i $3 = K$.

(b1) Odmah se vidi da je lanac ireducibilan. Budući da ima konačno mnogo stanja, slijedi da je povratan, a po Propoziciji 2.19 slijedi da je regularan. Stacionarna distribucija $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ je rješenje sustava $\mu Q = 0$, $\mu_1 + \mu_1 + \mu_3 = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{6}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{18}\mu_3 \\ 0 &= \frac{2}{18}\mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{18}\mu_3 \\ 0 &= \frac{1}{18}\mu_1 - \frac{1}{9}\mu_3 \\ 1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $\mu = \left(\frac{12}{23}, \frac{5}{23}, \frac{6}{23}\right)$.

(b2) Stavimo $T_2 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 2\}$ te $k_j = \mathbb{E}_j[T_2]$. Traži se $k_1 = \mathbb{E}_1[T_2]$. Po Teoremu 2.36, (k_1, k_2, k_3) je jedinstveno rješenje sustava $k_2 = 0$, $\sum_j q_{ij} k_j = -1$, $i \neq 2$. Dobivamo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{18}k_3 &= -1 \\ \frac{1}{18}k_1 - \frac{1}{9}k_3 &= -1\,, \end{aligned}$$

otkud rješavanjem slijedi $k_1 = \frac{54}{5} = 10.8$ ($k_3 = \frac{72}{5}$).

Alternativno: upotrebom relacija $\pi_{ij} = -q_{ij}/q_{ii}$ izračunamo prijelaznu matricu Π pripadajućeg lanca skokova. Slijedi

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo da su očekivana vremena čekanja u stanjima 1 i 3 jednaka 6, odnosno 9. Sustav jednadžbi za k_1 i k_3 glasi

$$\begin{aligned} k_1 &= 6 + \tfrac{1}{3}k_3 \\ k_3 &= 9 + \tfrac{1}{2}k_1 \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $k_1 = \frac{54}{5}$.

(b3) Neka je $S_3 = \inf\{t \geq J_1 : X_t = 3\}$ prvo vrijeme povratka u stanje 3 (ovdje je J_1 vrijeme prvog skoka). Po Propoziciji 2.46 vrijedi (uz oznaku $q_3 = -q_{33} = 1/9$)

$$\mathbb{E}_3 S_3 = \frac{1}{\mu_3 q_3} = \frac{1}{\frac{6}{23}\frac{1}{9}} = \frac{69}{2}\,.$$

(Alternativno, i kompliciranije, može se koristiti metoda iz (c)).

(b4) Definiramo $f(1) = 3000$, $f(2) = 10000$ i $f(3) = 1000$. Traži se $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_t)\,dt$. Po ergodskom teoremu (Teorem 2.54) to je g.s. jednako

$$\sum_j f(j)\mu_j = 3000 \times \frac{12}{23} + 8000 \times \frac{5}{23} + 1000 \times \frac{6}{23} = \frac{82000}{23} \approx 3565.22$$

Napomena: Ukoliko je stacionarna distribucija krivo izračunata, a dijelovi (b3) i (b4) ispravno napravljeni s krivom stacionarnom distribucijom, dodijeljenji su svi bodovi.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

3. Neka je $Y_0 = 0$, $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, nenegativnih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s funkcijom distribucije F takvih da je $\mathbb{P}(Y_n > 0) > 0$, $n \geq 1$, te neka je $S = (S_n : n \geq 0)$ čisti proces obnavljanja: $S_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 0$.

(a) (a1) (3 boda) Iskažite elementarni teorem obnavljanja.

(a2) (4 boda) Dokažite elementarni teorem obnavljanja u slučaju kad su slučajne varijable Y_n ograničene.

(b) (b1) (3 boda) Neka je $N = (N_t : t \geq 0)$ brojeći proces za čisti proces obnavljanja $S = (S_n : n \geq 0)$. Za $t > 0$ definiramo *dob* kao slučajnu varijablu $A_t := t - S_{N_t - 1}$. Za $x > 0$ stavite $\alpha(t) = \mathbb{P}(A_t \leq x)$. Dokažite da $\alpha(t)$ zadovoljava jednadžbu obnavljanja

$$\alpha(t) = (1 - F(t))\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + \int_0^t \alpha(t - y) dF(y).$$

(b2) (3 boda) Koristeći teorem o egzistenciji rješenja jednadžbe obnavljanja, napišite rješenje gornje jednadžbe obnavljanja.

Rješenje:

(a1) Neka je $\mu := \mathbb{E}Y_1 \leq \infty$. Tada vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

(uz konvenciju $1/\infty = 0$).

(a2) Prvo pokazujemo

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{U(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

Za $\mu < \infty$, pomoću jakog zakona velikih brojeva za brojeći proces i Fatouove leme imamo

$$\frac{1}{\mu} = \mathbb{E}\left(\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t}\right) \leq \liminf_{t \to \infty} \frac{\mathbb{E}N_t}{t} = \liminf_{t \to \infty} \frac{V(t)}{t}.$$

Za obratnu nejednakost pretpostavimo prvo da su $Y_0, Y_1, \ldots$ ograničene slučajne varijable, odnosno da postoji $c > 0$ takav da je $Y_0 \leq c$ i $Y_n \leq c$, $n \geq 1$. Iz Waldove jednakosti slijedi

$$V(t) = \mathbb{E}N_t = \frac{\mathbb{E}S_{N_t} - \mathbb{E}Y_0}{\mathbb{E}Y_1} = \frac{\mathbb{E}S_{N_t} - \mathbb{E}Y_0}{\mu}.$$

Nadalje, zbog $S_{N_t - 1} \leq t$ $\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}Y_0 / t = 0$, te $S_{N_t} = S_{N_t - 1} + Y_{N_t} \leq t + c$ imamo

$$\begin{aligned} \limsup_{t \to \infty} \frac{V(t)}{t} &= \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{\mu} \frac{\mathbb{E}S_{N_t} - \mathbb{E}Y_0}{t} = \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{\mu} \frac{\mathbb{E}(S_{N_t} + Y_{N_t}}{t} \\ &\leq \frac{1}{\mu} \limsup_{t \to \infty} \frac{t + c}{t} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

(b1) Za $x > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A_t \leq x) = \mathbb{P}(A_t \leq x, Y_1 > t) + \mathbb{P}(A_t \leq x, Y_1 \leq t)\,. \tag{1}$$

Na događaju $\{Y_1 > t\}$ vrijedi $A_t = t$, pa je

$$\mathbb{P}(A_t \leq x, Y_1 > t) = \mathbb{P}(t \leq x, Y_1 > t) = \mathbb{P}(Y_1 > t)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,. \tag{2}$$

Kod drugog sumanda, prvo uočimo da je $\{Y_1 = S_1 \leq t\} = \{N_t \geq 2\}$, pa je po definiciji od A_t

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_t \leq x, Y_1 \leq t) = \mathbb{P}(t - S_{N_t-1} \leq x, N_t \geq 2)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(t - S_{N_t-1} \leq x, N_t = n)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(t - S_{n-1} \leq x, S_{n-1} \leq t < S_n)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(t - (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n-1}) \leq x, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} \leq t < Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t - (y + Y_2 + \cdots + Y_{n-1}) \leq x, y + Y_2 + \cdots + Y_{n-1} \leq t < y + Y_2 + \cdots + Y_n)\, dF(y).
\end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t \leq x, Y_1 \leq t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t - y - S_{n-2} \leq x, S_{n-2} \leq t - y < S_{n-1})\, dF(y)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t - y - S_{n-2} \leq x, N_{t-y} = n-1)\, dF(y)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(t - y - S_{N_{t-y}-1} \leq x, N_{t-y} = n-1)\, dF(y)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-y} \leq x, N_{t-y} = n-1)\, dF(y)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-y} \leq x, N_{t-y} = n)\, dF(y)\\
&= \int_0^t \mathbb{P}(A_{t-y} \leq x)\, dF(y)\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Uvedimo oznaku $\alpha(t) := \mathbb{P}(A_t \leq x)$. Tada zbrajanjem jednakosti (2) i (3) slijedi

$$\alpha(t) = (1 - F(t))\mathbf{1}_{[0,x]}(t) + \int_0^t \alpha(t-y)\, dF(y)\,. \tag{4}$$

To je jednadžba obnavljanja sa $z(t) = (1 - F(t))\mathbf{1}_{[0,x]}(t)$.

(b2) Jedinstveno rješenje jednadžbe obnavljanja $Z = z + Z * F$ dano je s $Z = U * z$, gdje je $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t)$. Zato je

$$\alpha(t) = U * \big((1 - F)\mathbf{1}_{[0,x]}\big)(t)\,,$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4. Zbog loše ekonomske situacije Fabijan je odlučio pretvoriti svoj fini sofisticirani restoran u pizzeriju koja će se baviti i dostavom pizza.

(a) Vremena između telefonskih poziva za dostavu pizze su nezavisna i eksponencijalna, a očekivani broj poziva po satu je 6. Označimo sa N_t broj poziva do trenutka $t \geq 0$.

(a1) (3 boda) Odredite distribuciju i očekivanje slučajne varijable N_t.

(a2) (3 boda) Petak navečer je slobodan dan za Fabijana koji s društvom ide na pivo. Zbog prevelikog broja krigli večer prije, u subotu ujutro Fabijan ima problema s koncentracijom te ne uspijeva točno zabilježiti neke adrese za dostavu pizze. Vjerojatnost da Fabijan krivo zabilježi adresu za pojedini telefonski poziv je 0.3 (nezavisno po pozivima). Izračunajte očekivani broj točno dostavljenih pizza u jednom satu u subotu ujutro.

(b) Fabijanova pizzerija ima dvije peći u svakoj od kojih se može peći samo jedna pizza. Vrijeme za ispeći pizzu u prvoj peći je eksponencijalno s očekivanjem 10 minuta, a u drugoj peći eksponencijalno s očekivanjem 8 minuta (vremena su nezavisna). Gosti dolaze u pizzeriju po Poissonovom procesu s intenzitetom od 10 gostiju na sat.

(b1) (3 boda) Pizze su istovremeno stavljene u peći. Nađite distribuciju vremena čekanja da prva pizza bude pečena.

(b2) (3 boda) Odredite distribuciju broja gostiju koji uđu u restoran za vrijeme pečenja jedne pizze u *drugoj* peći.

Rješenje:

(a) (a1) $N = (N_t : t \geq 0)$ je Markovljev proces s neprekidnim vremenom čiji je proces skokova determinističko gibanje na desno na $\mathbb{Z}_+$. Stoga je N Poissonov proces. Alternativno, N je brojeći proces. Dano je $\mathbb{E}N_1 = 6$. Zato je intenzitet (parametar) Poissonovog procesa jednak $q = 6$. Slijedi da N_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom $6t$, te je stoga $\mathbb{E}N_t = 6t$.

(a2) Označimo sa $\tilde{N} = (\tilde{N}_t : t \geq 0)$ proces točno dostavljenih pizza. Tada je $\tilde{N}$ stanjen Poissonov proces, pa je po Zadatku 2.59 to opet Poissonov proces s parametrom $6 \times 0.7 = 4.2$. Slijedi da je $\mathbb{E}\tilde{N}_1 = 4.2$.

(b) (b1) Neka je T_i, $i = 1, 2$ vrijeme potrebno za ispeći pizzu peći i. Tada je $T_1 \sim \mathcal{E}(1/10)$ i $T_2 \sim \mathcal{E}(1/8)$ (ako vrijeme mjerimo u minutama). Traži se distribucija od $T = \min\{T_1, T_2\}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t) = e^{-\frac{1}{10}t}e^{-\frac{1}{8}t} = e^{-(\frac{1}{10}+\frac{1}{8})t},$$

pa T ima eksponencijalu distribuciju s parametrom $\frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{9}{40}$.
Ako vrijeme mjerimo u satima, $T_1 \sim \mathcal{E}(6)$, $T_2 \sim \mathcal{E}(15/2)$, pa je $T_1 \wedge T_2 \sim \mathcal{E}(27/2)$.

(b2) Budući da gosti dolaze po Poissonovom procesu s očekivanjem 10 gostiju na sat, vremena između dolazaka gostiju su nezavisna i eksponencijalno distribuirana s očekivanjem 1/10 sata, odnosno 6 minuta. Zato je parametar eksponencijalne distribucije jednak $\lambda = 1/6$. Vrijeme potrebno za ispeći pizzu u drugoj peći je eksponencijalno s parametrom $\mu = 1/8$. Neka je E slučajna varijabla koja označava trajanje pečenja pizze u drugoj peći, $E \sim \mathcal{E}(\mu)$. Označimo niz dolazaka s $(T_n : n \geq 1)$. Ako je $(W_n : n \geq 1)$ niz vremena među dolascima, tada su $W_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$, nezavisne, i nezavisne s E. Nadalje, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Neka je N broj dolazaka za vrijeme pečenja pizze u drugoj peći. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(T_k < E < T_k + W_{k+1}) \\
&= \iiint\limits_{u<v<u+w} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, \mu e^{-\mu v}\, \lambda e^{-\lambda w}\, dw\, dv\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v}\, dv \int_{v-u}^\infty \lambda e^{-\lambda w}\, dw \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v} e^{-\lambda(v-u)}\, dv \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1}\, du \int_u^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)v}\, dv \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^\infty u^{k-1} e^{-(\lambda+\mu)u}\, du \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{(\lambda+\mu)^k}\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k .
\end{aligned}$$

Dakle, N ima geometrijsku razdiobu (na $\mathbb{Z}_+$) s parametrom

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{7}\,.$$