Poglavlje 5

Dodaci

5.1 Produktna mjera i Fubinijev teorem

Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ dva prostora s mjerom. U ovom odjeljku pokazujemo kako se na prirodan način uvodi mjera na Kartezijevom produktu $X \times Y$ (odnosno, preciznije, na odgovarajućoj σ-algebri na $X \times Y$).

Proučimo prvo prirodnu izmjerivu strukturu na produktu. Za to je dovoljno pretpostaviti da su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ dva izmjeriva prostora. Podsjetimo se, izmjeriv prostor je uređen par koji se satoji od nepraznog skupa i σ-algebre na njemu. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{G}$. Skup $A \times B$ zvat ćemo *izmjerivim pravokutnikom* u $X \times Y$. Označimo sa $\mathcal{P}$ familiju svih izmjerivih pravokutnika:

$$\mathcal{P} := \{A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\} . \tag{5.1}$$

Sljedeća lema govori o strukturi familije $\mathcal{P}$.

Lema 5.1 *Familija $\mathcal{P}$ je poluprsten podskupova na $X \times Y$.*

Dokaz: Trebamo provjeriti tri svojstva.
(i) $\emptyset \in \mathcal{P}$ je očito;
(ii) Neka su $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{P}$. Tada je $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{P}$, jer su $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$ i $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{G}$. Dakle, presjek dva skupa iz $\mathcal{P}$ je ponovno u $\mathcal{P}$;
(iii) Neka su $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{P}$. Pokaže se da je $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$ disjunktna unija konačno mnogo prebrojivih pravokutnika. ∎

Uočite da je $X \times Y \in \mathcal{P}$. Zato će σ-prsten generiran poluprstenom $\mathcal{P}$ biti u stvari σ-algebra.

Definicija 5.2 *σ-algebra generirana familijom izmjerivih pravokutnika $\mathcal{P}$ naziva se* produktnom σ-algebrom *od $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Oznaka: $\mathcal{F} \times \mathcal{G} := \sigma(\mathcal{P})$.*

Neka su sada $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ prostori s mjerom. Želimo konstruirati mjeru na produktnoj σ-algebri $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ koja je na prirodan način produkt mjera μ i ν. Započinjemo konstrukcijom na izmjerivim pravokutnicima. Definiramo funkciju $\pi : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ na prirodan način:

$$\pi(A \times B) := \mu(A)\nu(B)\,. \tag{5.2}$$

Teorem 5.3 *(i) Funkcija π je σ-aditivna na poluprstenu $\mathcal{P}$.*
(ii) Postoji proširenje od π na produktnu σ-algebru $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ koje je σ-aditivno. Ako su mjere μ i ν σ-konačne, tada je to proširenje jedinstveno.

Dokaz: (i) Pretpostavimo da je $A \times B \in \mathcal{P}$, te da su $A_j \times B_j$, $j \in \mathbb{N}$, disjunktni skupovi iz $\mathcal{P}$ takvi da vrijedi $A \times B = \cup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j)$. Treba pokazati da je

$$\pi(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(A_j \times B_j)\,. \tag{5.3}$$

Zbog disjunktnosti skupova $A_j \times B_j$, za sve $(x, y) \in X \times Y$ vrijedi

$$1_A(x)1_B(y) = 1_{A\times B}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(x)1_{B_j}(y)\,. \tag{5.4}$$

Fiksirajmo $x \in X$: tada su funkcije

$$y \mapsto 1_A(x)1_B(y) \qquad \text{i} \qquad y \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(x)1_{B_j}(y)$$

$\mathcal{G}$-izmjerive (i očito nenegativne). Zato ih možemo integrirati po mjeri ν. Iz (5.4) i Lebesgue-vog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$1_A(x)\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_j}(x)\nu(B_j)\,. \tag{5.5}$$

Gledamo li lijevu i desnu stranu kao (proširene) funkcije od x, vidimo da su obje strane $\mathcal{F}$-izmjerive funkcije (i očito nenegativne). Integriranjem jednakosti (5.5) po mjeri μ uz ponovnu upotrebu Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

što je upravo jednakost (5.3).
(ii) Po osnovnom teoremu o proširenju, σ-aditivna funkcija na poluprstenu $\mathcal{P}$ može se proširiti do σ-aditivne funkcije na σ-prstenu generiranom poluprstenom $\mathcal{P}$. Ukoliko je π σ-konačna na $\mathcal{P}$, tada će to proširenje po Hahnovom teoremu biti jedinstveno. Uz pretpostavku da su μ i ν σ-konačne, slijedi da je π σ-konačna na $\mathcal{P}$. Zaista, $X = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < \infty$, $Y = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $\nu(B_j) < \infty$, pa je $X \times Y = \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} A_i \times B_j$, te $\pi(A_i \times B_j) = \mu(A_i)\nu(B_j) < \infty$. ∎

Označimo istim slovom π σ-aditivno proširenje sa $\mathcal{P}$ na $\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$.

Definicija 5.4 *Mjera π zove se* produktna mjera *(ili* produkt mjera *μ i ν), te se označava kao $\pi = \mu \times \nu$ (ili $\pi = \mu \otimes \nu$).*

U nastavku proučavamo integraciju s obzirom na produktnu mjeru π. Neka je $E \subset X \times Y$. Za $x \in X$, *x-prerez od E* je skup

$$E_x := \{y \in Y : (x,y) \in E\}.$$

Slično, za $y \in Y$, *y-prerez od E* je skup

$$E^y := \{x \in Y : (x,y) \in E\}.$$

Neka je $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ (gdje je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$). Za $x \in X$, *x-prerez od f* je proširena funkcija f_x na Y definirana s

$$f_x(y) := f(x,y).$$

Slično, za $y \in Y$, *y-prerez od f* je proširena funkcija f^y na X definirana s

$$f^y(x) := f(x,y).$$

Pretpostavimo da je $(E_n : n \geq 1)$ niz podskupova od $X \times Y$. Tada za $x \in X$ vrijedi

$$(\cup_n E_n)_x = \cup_n (E_n)_x ,$$

te ako su E_n disjunktni, tada su i $(E_n)_x$ disjunktni.

Lema 5.5 *(i) Ako je $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, tada je za sve $x \in X$, $E_x \in \mathcal{G}$, te za svaki $y \in Y$, $E^y \in \mathcal{F}$. Riječima, svaki prerez izmjerivog skupa je izmjeriv.*
(ii) Ako je $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$-izmjeriva, tada je za svaki $x \in X$, f_x $\mathcal{G}$-izmjeriva, te za svaki $y \in Y$, f^y $\mathcal{F}$-izmjeriva.

Dokaz: (i) Definirajmo familiju

$$\mathcal{E} := \{E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} : E_x \in \mathcal{G} \text{ za sve } x \in X\}.$$

Ako je $E = A \times B \in \mathcal{P}$, tada je

$$E_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A, \end{cases}$$

pa je $E \in \mathcal{E}$. Dakle, $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$. Jednostavno se provjeri da je familija $\mathcal{E}$ σ-algebra podskupova od $X \times Y$. Budući da sadrži $\mathcal{P}$, mora vrijediti $\mathcal{E} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.
(ii) Za $x \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\{y \in Y : f_x(y) > \alpha\} = \{y \in Y : f(x,y) > \alpha\} = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > \alpha\}_x .$$

Budući da je $\{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) > \alpha\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ (zbog f izmjeriva), iz dijela (i) slijedi da je x-prerez iz $\mathcal{G}$. Kako to vrijedi za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je f_x $\mathcal{G}$-izmjeriva. ∎

Lema 5.6 *Neka su* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *prostori* σ*-konačne mjere, te neka je* $\pi = \mu \times \nu$. *Ako je* $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, *tada su funkcije*

$$f(x) := \nu(E_x) \qquad i \qquad g(y) := \mu(E^y) \tag{5.6}$$

izmjerive, te vrijedi

$$\int_X f\, d\mu = \pi(E) = \int_Y g\, d\nu\,. \tag{5.7}$$

Dokaz: Pretpostavimo prvo da su μ i ν konačne mjere, te označimo sa $\mathcal{M}$ familiju svih skupova $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ za koje su gronje tvrdnje istinite. Uočimo prvo da je $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$. Zaista, ako je $E = A \times B \in \mathcal{P}$, tada je $f(x) = \nu(B)1_A(x)$ i $g(y) = \mu(A)1_B(y)$, te su obje funckije izmjerive. Nadalje

$$\int_Y f\, d\mu = \mu(A)\nu(B) = \pi(A \times B) = \int_Y g\, d\nu\,.$$

Neka je $\mathcal{A}$ prsten generiran poluprstenom $\mathcal{P}$. Uočite da zbog $X \times Y \in \mathcal{P}$ vrijedi da je $\mathcal{A}$ u stvari algebra podskupova. Svaki skup iz $\mathcal{A}$ je disjunktna unija skupova iz $\mathcal{P}$, otkud odmah slijedi da tvrdnja leme vrijedi za skupove iz $\mathcal{A}$, odnosno da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

Pokažimo sada da je $\mathcal{M}$ monotona familija. Neka je (E_n) rastući niz skupova iz $\mathcal{M}$, te $E = \cup_n E_n$. Dakle, $f_n(x) := \nu((E_n)_x)$ i $g_n(y) := \mu((E_n)^y)$ su izmjerive i

$$\int_X f_n\, d\nu = \pi(E_n) = \int_Y g_n\, d\mu\,.$$

Zbog monotonosti niza (E_n) slijedi da su i nizovi funkcija (f_n) i (g_n) monotoni, te konvergiraju prema funkcijama f, odnosno g, definiranim sa $f(x) := \nu(E_x)$, odnosno $g(y) := \mu(E^y)$. Budući da je limes niza izmjerivih funckija opet izmjeriva funkcija, dobijemo da su f i g izmjerive funkcije. Nadalje, po Lebesguevom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da je $\lim_n \int_X f_n\, d\nu = \int_x f\, d\nu$, a iz neprekidnosti mjere dobivamo $\lim_n \int_X f_n\, d\nu = \lim_n \pi(E_n) = \pi(E)$. Dakle, $\int_x f\, d\nu = \pi(E)$, i slično $\int_Y g\, d\mu = \pi(E)$. Zaključujemo da je $E \in \mathcal{M}$.

Neka je sada (E_n) padajući niz skupova iz $\mathcal{M}$, te $E = \cap_n E_n$. Budući da su po pretpostavci μ i ν konačne mjere, slijedi da je i njihov produkt π konačna mjera ($\pi(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y) < \infty$). Upotrebom Lebesguevog torema o dominiranoj konvergenciji i neprekidnosti mjere na padajuće nizove (tu treba konačnost mjera!) na sličan način kao gore pokazuje se da je $E \in \mathcal{M}$.

Pokazali smo da je $\mathcal{M}$ monotona familija koja sadrži algebru $\mathcal{A}$. Po teoremu o monotonim familijama zaključujemo da $\mathcal{M} \supset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$. dakle, $\mathcal{M} = \mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

U slučaju da su μ i ν σ-konačne, napišemo $X \times Y = \cup_n (X_n \times Y_n)$ gdje su (X_n), odnosno (Y_n) neopadajući nizovi skupova konačne μ, odnosno ν, mjere, te primjenimo dokazano na $E \cap (X_n \times Y_n)$. Zaključak leme slijedi primjenom Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji. ∎

Teorem 5.7 *(Tonelli, Fubini) Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ prostori σ-konačne mjere, π produktna mjera, i $F : X \times Y \to [0, +\infty]$ (proširena) nenegativna izmjeriva funkcija. Tada su (proširene) funkcije definirane na X i Y formulama*

$$f(x) := \int_Y F_x \, d\nu \,, \qquad g(y) := \int_X F^y \, d\mu \tag{5.8}$$

izmjerive i vrijedi

$$\int_X f \, d\mu = \int_{X\times Y} F \, d\pi = \int_Y g \, d\nu \,. \tag{5.9}$$

Napomena 5.8 Uočite da funkcije f i g iz (5.8) možemo pisati u obliku

$$f(x) = \int_Y F(x,y) \, d\nu(y) \,, \qquad g(y) = \int_X F(x,y) \, d\mu(x) \,,$$

a jednakosti (5.9) kao

$$\int_X \left(\int_Y F(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} F(x,y) \, d\pi(x,y) = \int_Y \left(\int_X F(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{5.10}$$

Drugim riječima, integracija po produktnoj mjeri jednaka je sukcesivnoj integraciji po faktorima (u bilo kojem redoslijedu).

Dokaz: Ako je $F = 1_E$ gdje je $E \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, tada je tvrdnja teorema upravo Lema 5.6. Zbog linaernosti integrala, tvrdnja vrijedi i za jednostavne $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-izmjerive funkcije. Neka je sada F proizvoljna (proširena) nenegativna izmjeriva funkcija na $X \times Y$. Tada postoji neopadajući niz (F_n) jednostavnih funkcija na $X \times Y$ takav da $F_n \to F$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo funkcije f_n i g_n formulama

$$f_n(x) := \int_Y (F_n)_x \, d\nu \,, \qquad g_n(y) := \int_X (F_n)^y \, d\mu \,. \tag{5.11}$$

Tada je $(f_n : n \geq 1)$ neopadajući niz $\mathcal{F}$-izmjerivih funkcija, a $(g_n : n \geq 1)$ neopadajući niz $\mathcal{G}$-izmjerivih funkcija. Po Lebesguevom teoremu o monotnoj konvergenciji vrijedi da je $f = \lim_n f_n$ i $g = \lim_n g_n$. Ovdje smo koristili da je $\lim_n (F_n)_x = F_x$ te $\lim_n (F_n)^y = F^y$. Ponovnom upotrebom Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int_X f \, d\mu = \lim_n \int_X f_n \, d\mu = \lim_n \int_{X\times Y} F_n \, d\pi = \lim_n \int_Y g_n \, d\nu = \int_Y g \, d\nu \,,$$

te

$$\int_{X\times Y} f \, d\pi = \lim_n \int_{X\times Y} F_n \, d\pi \,.$$

Zadnje dvije formule dokazuju teorem. ∎

Pretpostavimo sada da je $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija. Kako možemo provjeriti da li je F integrabilna s obzirom na mjeru π, odnosno da li je $F \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \pi)$? Prisjetimo se da je F integrabilna (s obzirom na π) ako i samo ako je $\int_{X\times Y} |F|\, d\pi < \infty$. Po Teoremu 5.7, to će biti ispunjeno ako i samo ako je

$$\int_X \left(\int_Y |F|\, d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X |F|\, d\mu \right) d\nu < \infty\,.$$

Neka je $F \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \pi)$. Želimo ispitati kako se računa $\int F\, d\pi$. Neka je F^+, odnosno F^-, pozitivni, odnosno negativni, dio funckije F: $F = F^+ - F^-$. Po pretpostavci vrijedi

$$\int_{X\times Y} F^+\, d\pi < \infty \qquad \text{i} \qquad \int_{X\times Y} F^-\, d\pi < \infty\,.$$

Definiramo sljedeće funkcije jedne varijable:

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \int_Y (F^+)_x\, d\nu\,, \qquad & f^-(x) &:= \int_Y (F^-)_x\, d\nu\,, \\ g^+(y) &:= \int_X (F^+)^y\, d\mu\,, \qquad & g^-(y) &:= \int_X (F^-)^y\, d\mu\,. \end{aligned}$$

Budući da su F^+ i F^- nenegativne funkcije, iz Teorema 5.7 slijedi da je

$$\int_X f^+\, d\mu = \int_{X\times Y} F^+ d\pi = \int_Y g^+\, d\nu < \infty\,, \tag{5.12}$$

$$\int_X f^-\, d\mu = \int_{X\times Y} F^- d\pi = \int_Y g^-\, d\nu < \infty\,. \tag{5.13}$$

Slijedi da su sve gornje funkcije konačne skoro svuda, odnosno preciznije: $f^+ < \infty$ μ-s.s., $f^- < \infty$ μ-s.s., $g^+ < \infty$ ν-s.s. i $g^- < \infty$ ν-s.s. Neka je $N := \{x \in X : f^+(x) < \infty, f^-(x) < \infty\}$. Pokazali smo da je $\mu(N) = 0$. Definirajmo funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \begin{cases} f^+(x) - f^-(x)\,, & x \in X \setminus N\,, \\ 0\,, & x \in N\,. \end{cases}$$

Tada je f $\mathcal{F}$-izmjeriva i za $x \in X \setminus N$ vrijedi

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) = \int_Y (F^+)_x\, d\nu - \int_Y (F^-)_x\, d\nu = \int_Y F_x\, d\nu = \int_Y F(x,y)\, d\nu(y)\,. \tag{5.14}$$

Dakle, $f(x) = \int_Y F_x\, d\nu$ μ-s.s. Nadalje, zbog $\mu(N) = 0$, te zbog Teorema 5.7,

$$\begin{aligned} \int_X f\, d\mu &= \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu = \int_X \left(\int_Y (F^+)_x\, d\nu \right) d\mu - \int_X \left(\int_Y (F^-)_x\, d\nu \right) d\mu \\ &= \int_{X\times Y} F^+\, d\pi - \int_{X\times Y} F^-\, d\pi = \int_{X\times Y} F\, d\pi\,. \end{aligned}$$

Zajedno s (5.14), gornja jednakost daje

$$\int_{X\times Y} F(x,y)\,d\pi(x,y) = \int_X \left(\int_Y F(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x)\,. \tag{5.15}$$

Na sličan način se pokaže da je sa $g(y) = g^+(y) - g^-(y)$ ν-s.s. definirana funkcija za koju vrijedi $g(x) = \int_X F^y\,d\mu$ ν-s.s, te da je

$$\int_{X\times Y} F(x,y)\,d\pi(x,y) = \int_Y \left(\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y)\,. \tag{5.16}$$

Na taj način smo dokazali osnovni teorem o integraciji s obzirom na produktnu mjeru.

Teorem 5.9 *(Fubini) Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ prostori σ-konačne mjere i π produktna mjera na $(X\times Y, \mathcal{F}\times\mathcal{G})$. Ako je $F : X\times Y \to \mathbb{R}$ integrabilna u odnosu na mjeru π, tada su funkcije*

$$f(x) = \int_Y F_x\,d\nu\,, \qquad \textit{odnosno} \qquad g(y) = \int_X F^y\,d\mu \tag{5.17}$$

definirane za μ-s.s. $x \in X$, odnosno ν-s.s. $y \in Y$. Nadalje f i g su integrabilne i vrijedi

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\times Y} F\,d\pi = \int_Y g\,d\nu\,. \tag{5.18}$$

t.j.,

$$\int_X \left(\int_Y F(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x) = \int_{X\times Y} F(x,y)\,d\pi(x,y) = \int_Y \left(\int_X F(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y)\,. \tag{5.19}$$