MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

SLUČAJNI PROCESI

1. popravna pisana provjera znanja - 4. rujna 2020.
(Knjige, bilježnice, dodatni papiri i kalkulatori **nisu** dozvoljeni!)

1.

(a1) (5 bodova) Neka je X nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je $\mathbb{E}[X] < \infty$, te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Definirajte $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{G}]$.

(a2) (7 bodova) Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s geometrijskom distribucijom na $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $p \in (0,1)$: $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X_2 = k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$, te neka je $Y = X_1 + X_2$. Izračunajte $\mathbb{E}[X_1|Y]$ i $\mathbb{P}(X_1 \le 4|Y)$.

(b1) (5 bodova) Definirajte pojam submartingala i iskažite teorem o Doobovoj dekompoziciji submartingala.

(b2) (8 bodova) Dokažite teorem o Doobovoj dekompoziciji submartingala (uključivo i jedinstvenost).

Rješenje:

(a1) *Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$* je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to [0, \infty]$ takva da vrijedi

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A X\big] \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{G}\,.$$

(a2) Zbog simetrije vrijedi $\mathbb{E}[X_1|Y] = \mathbb{E}[X_2|Y]$ otkud $Y = \mathbb{E}[Y|Y] = \mathbb{E}[X_1 + X_2|] = 2\mathbb{E}[X_1|Y]$. Dakle, $\mathbb{E}[X_1|Y] = Y/2$. Za drugi dio zadatka, za $k \in \mathbb{Z}_+$ i $0 \le j \le k$ računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (1-p)^{i-1} p \; (1-p)^{k-i} p = (k+1)p^2(1-p)^k,\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = j|Y = k) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, Y = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k - j)}{\mathbb{P}(Y = k)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k - j)}{\mathbb{P}(Y = k)} = \frac{(1-p)^j p \, (1-p)^{k-j} p}{(k+1)(1-p)^k p^2} \\ &= \frac{1}{k+1}\,.\end{aligned}$$

Slijedi da je $\mathbb{P}(X_1 \leq 4|Y = k) = 1$ ako je $0 \leq k \leq 4$, te

$$\mathbb{P}(X_1 \leq 4|Y = k) = \sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}(X_1 = j|Y = k) = \frac{5}{k+1}$$

ako je $k \geq 5$. To možemo pisati kao $P(X_1 \leq 4|Y = k) = \frac{5}{k+1} \wedge 1$, otkud dobivamo $P(X_1 \leq 2|Y) = \frac{5}{Y+1} \wedge 1$.

(b1) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ filtracija na njemu. Slučajni proces $X = (X_n)_{n\geq 0}$ je submartingal ako je X adaptiran s obzirom na $\mathbb{F}$, vrijedi $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ za sve $n \geq 0$, i $\mathbb{E}[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] \geq X_n$ g.s. za sve $n \geq 0$.

Doobova dekompozicija: neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-submartingal. Tada postoje martingal $M = (M_n)_{n\geq 0}$ i neopadajući predvidiv slučajni proces $A = (A_n)_{n\geq 0}$, $A_0 = 0$, (t.j. $0 = A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ g.s., A_n je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv za sve $n \geq 1$), tako da vrijedi $X = M + A$. Nadalje, dekompozicija s gornjim svojstvima je jedinstvena.

(b2) Definiramo $A_0 = 0$, te $M_0 = X_0$, tako da vrijedi $X_0 = M_0 + A_0$. Induktivno definiramo

$$A_n := A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \quad \text{i} \quad M_n := X_n - A_n\,.$$

Zbog $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1}$ vrijedi $A_n \geq A_{n-1}$ g.s. Nadalje, budući da je po pretpostavci indukcije A_{n-1} $\mathcal{F}_{n-2} \subset \mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv, a $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}$ je $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv, slijedi da je A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-izmjeriv. Nadalje imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_n - A_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - A_n = (X_{n-1} + A_n - A_{n-1}) - A_n \\
&= X_{n-1} - A_{n-1} = M_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Jedinstvenost: pretpostavimo da je $X = N+B$ neka druga takva dekompozicija, t.j. $N = (N_n)_{n\geq 0}$ je martingal, a $B = (B_n)_{n\geq 0}$ neopadajući predvidiv proces, $B_0 = 0$. Induktivno pokazujemo da je $N_n = M_n$ i $B_n = A_n$ za sve $n \geq 0$. Za $n = 0$ je $B_0 = 0 = A_0$, otkud $N_0 = X_0 = M_0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \geq 0$ i dokažimo da vrijedi i za $n + 1$. Znamo da je $N_{n+1} + B_{n+1} = X_{n+1} = M_{n+1} + A_{n+1}$ otkud slijedi

$$M_{n+1} - N_{n+1} = B_{n+1} - A_{n+1}\,. \tag{1}$$

Uzimanjem uvjetnog očekivanja i korištenjem činjenice da su N i M martingali, a B i A predvidivi, dobivamo

$$M_n - N_n = \mathbb{E}[M_{n+1} - N_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = B_{n+1} - A_{n+1}\,.$$

Po pretpostavci indukcije lijeva strana je jednaka 0, pa slijedi $A_{n+1} = B_{n+1}$. Iz (1) dobivamo $M_{n+1} = N_{n+1}$.

Alternativni dokaz jedinstvenosti: iz $X_n = M_n + A_n$ i $A_0 = 0$ slijedi za $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[M_k - M_{k-1} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[A_k - A_{k-1} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k + A_k) - (M_{k-1} + A_{k-1}) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k - X_{k-1} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}]\,.
\end{aligned}$$

To pokazuje da je slučajni proces $A = (A_n)_{n\geq 0}$ u potpunosti određen submartingalom X, pa je stoga jedinstven.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

2.

(a1) (5 bodova) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ omeđen supermartingal ($|X_n(\omega)| \leq K$ za sve $n \geq 0$ i sve $\omega \in \Omega$), te neka je T vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Dokažite da je tada X_T integrabilna slučajna varijabla i da vrijedi $\mathbb{E}X_0 \geq \mathbb{E}X_T$.

(a2) (8 bodova) Pretpostavimo da je $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $1 < p < \infty$, i definiramo $X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$, $n \geq 0$, gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ filtracija. Stavimo $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n)$. Dokažite da tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \text{ g.s. i u } \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

(b) Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(Y_i = +1) = p$, $\mathbb{P}(Y_i = -1) = q = 1 - p$. Definiramo $S_0 = 0$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, te $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(b1) (4 boda) Neka je $X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Dokažite da je $X = (X_n : n \geq 0)$ pozitivan martingal s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$.

(b2) (5 bodova) Pomoću Doobove maksimalne nejednakosti dokažite da je

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k\right) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k,$$

(b3) (3 boda) Ispitajte da li martingal X konvergira g.s. Obrazložite!

Rješenje:

(a) (a1) Koristimo da je $(X_{T\wedge n} : n \geq 0)$ supermartingal (Propozicija 1.68), te $\mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0$ za sve $n \geq 0$. Budući da je X omeđen s K, vrijedi $|X_{T\wedge n}| \leq K$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zato možemo koristiti teorem o dominiranoj konvergenciji. Zajedno s $\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n} = X_T$, prvo zaljučujemo da je X_T integrabilna, a zatim da je

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} \leq \mathbb{E}X_0.$$

(a2) Vidi dokaz Korolara 1.90.

(b1) Za $n \geq 1$ računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \Big| \mathcal{F}_{n-1}\right] &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{Y_n}\right] \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left(\frac{q}{p}\,p + \frac{p}{q}\,q\right) \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}}.
\end{aligned}$$

(b2) Vrijedi

$$\left\{\sup_{1\le m\le n} S_m \ge k\right\} = \left\{\sup_{1\le m\le n} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_m} \ge \left(\frac{q}{p}\right)^k\right\} = \left\{\sup_{1\le m\le n} X_m \ge \left(\frac{q}{p}\right)^k\right\}.$$

Po Doobovoj maksimalnoj nejednakosti je

$$\left(\frac{q}{p}\right)^k \mathbb{P}\left(\sup_{1\le m\le n} X_m \ge \left(\frac{q}{p}\right)^k\right) \le \mathbb{E}[X_n] = 1\,.$$

Pustimo $n\to\infty$. Tada $\sup_{1\le m\le n} X_m \nearrow \sup_{1\le m} X_m$, pa je

$$\{\sup_{n\ge 1} S_n \ge k\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\max_{1\le m\le n} S_m \ge k\}$$

gdje je unija rastuća. Zbog neprekidnosti vjerojatnosti slijedi

$$\mathbb{P}(\sup_{n\ge 1} S_n \ge k) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\ge 1} X_n \ge \left(\frac{q}{p}\right)^k\right) \le \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

(b3) Budući da je X nenegativan martingal, to po teoremu o g.s. konvergenciji nenegativnog (super)martingala konvergira g.s.

Napomena: Za $p>1$ **ne** vrijedi $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p]<\infty$, pa se ne može iskoristiti teorem o $\mathcal{L}^p$ konvergenciji. U stvari, jednostavno se vidi da je za $p\ne q$, $\lim_n X_n = 0$ g.s. Zaista, za $p>q$ vrijedi $\lim_n S_n = +\infty$ g.s., pa kako je $q/p<1$ vrijedi $(q/p)^{S_n}\to 0$ g.s. Ako je $p<q$, tada $S_n\to-\infty$ g.s., a $q/p>1$, pa opet $(q/p)^{S_n}\to 0$ g.s. Za $p=q$ imamo $X_n=1$, pa i $X_n\to 1$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

3.

(a) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Markovljev lanac s neprekidnim vremenom, prebrojivim skupom stanja S, prijelaznom funkcijom $P_{ij}(t)$, $i, j \in S$, $t \geq 0$, i generatorskom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$, te neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ pripadajući lanac skokova od X.

(a1) (3 boda) Označimo sa $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in S)$ prijelaznu matricu lanca skokova Y. Napišite izraz za π_{ij} pomoću elemenata matrice Q.

(a2) (3 boda) Definirajte prolaznost stanja $i \in S$.

(a3) (7 boda) Neka je X regularan. Dokažite jednakost

$$\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \frac{1}{q(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ii}^{(n)},$$

gdje je $q(i) = -q_{ii}$, a $\pi_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}_i(Y_n = i)$.

(b) Fabijanov restoran ima vrtnu terasu pa promet u restoranu jako ovisi o vremenskim uvjetima. Fabijan dane kategorizira u oblačne (O), sunčane (S) i kišne (K). Dugogodišnjim opažanjem Fabijan je zaključio da se vremenski uvjeti mijenjaju po neprekidno-vremenskom Markovljevom lancu $X = (X_t : t \geq 0)$ s generatorskom matricom (stanja su redom O, S, K)

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(b1) (4 boda) Nađite stacionarnu distribuciju od X.

(b2) (4 boda) Upravo smo ušli u kišno razdoblje. Izračunajte očekivani broj dana do ponovnog ulaska u kišno razdoblje.

(b3) (4 boda) Dnevna zarada u restoranu ovisi o vremenu. Za kišnog dana zarada je 1000 Kn, za oblačnog 3000 Kn, a za sunčanog 10000 Kn. Izračunajte Fabijanovu asimptotsku prosječnu zaradu po danu.

Rješenje:

(a) (a1) Vrijedi

$$\pi_{ii} = 0\,, \qquad \pi_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}\, j \neq i,\ .$$

(a2) Stanje $i \in S$ je *prolazno* ako vrijedi

$$\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X_t = i\} \text{ je neomeđen}) = 0\,.$$

(a3) Neka je $(W_n : n \geq 0)$ niz vremena čekanja $(W_{n+1} = \frac{E_{n+1}}{q(Z_n)})$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P_{ii}(t)\,dt = \int_0^\infty \mathbb{E}_i(\mathbf{1}_{\{X_t=i\}})\,dt = \mathbb{E}_i \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=i\}}\,dt \\ = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^\infty W_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=i\}} = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i\big(W_{n+1}\mathbf{1}_{\{Y_n=i\}}\big) \\ = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_i(W_{n+1}\,|\,Y_n=i)\mathbb{P}_i(Y_n=i) = \frac{1}{q(i)}\sum_{n=0}^\infty \pi_{ii}^{(n)}\,.\end{aligned}$$

U drugoj jednakosti koristili smo Fubinijev teorem, a u četvrtoj Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji.

(b) Označimo, zbog jednostavnosti zapisa, stanja na sljedeći način: $1 = O$, $2 = S$ i $3 = K$.

(b1) Odmah se vidi da je lanac ireducibilan. Budući da ima konačno mnogo stanja, slijedi da je povratan, a po Propoziciji 2.19 slijedi da je regularan. Stacionarna distribucija $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ je rješenje sustava $\mu Q = 0$, $\mu_1 + \mu_1 + \mu_3 = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{10}\mu_1 + \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{3}{8}\mu_3 \\ 0 &= \frac{2}{30}\mu_1 - \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{1}{8}\mu_3 \\ 0 &= \frac{1}{30}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_3 \\ 1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $\mu = \left(\frac{30}{41}, \frac{9}{41}, \frac{2}{41}\right)$.

(b3) Neka je $S_3 = \inf\{t \geq J_1 : X_t = 3\}$ prvo vrijeme povratka u stanje 3 (ovdje je J_1 vrijeme prvog skoka). Po Propoziciji 2.46 vrijedi (uz oznaku $q_3 = -q_{33} = 1/2$)

$$\mathbb{E}_3 S_3 = \frac{1}{\mu_3 q_3} = \frac{1}{\frac{2}{41}\frac{1}{2}} = 41\,.$$

(b3) Definiramo $f(1) = 3000$, $f(2) = 10000$ i $f(3) = 1000$. Traži se $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X_t)\,dt$. Po ergodskom teoremu (Teorem 2.54) to je g.s. jednako

$$\sum_j f(j)\mu_j = 3000\frac{30}{41} + 10000\frac{9}{41} + 1000\frac{2}{41} = \frac{182000}{41} \approx 4439.02$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

4.

(a) (5 bodova) Neka je $(S_n)_{n\geq 0}$ čisti proces obnavljanja. Definirajte pripadajući brojeći proces i funkciju obnavljanja.

(b) (5 bodova) Iskažite elementarni teorem obnavljanja.

(c) (7 bodova) Dokažite elementarni teorem obnavljanja.

(d) Fabijanova pizzerija ima dvije peći u svakoj od kojih se može peći samo jedna pizza. Vrijeme za ispeći pizzu u prvoj peći je eksponencijalno s očekivanjem 10 minuta, a u drugoj peći eksponencijalno s očekivanjem 8 minuta (vremena su nezavisna). Gosti dolaze u pizzeriju po Poissonovom procesu s intenzitetom od 10 gostiju na sat.

(d1) (4 boda) Pizze su istovremeno stavljene u peći. Nađite distribuciju vremena čekanja da prva pizza bude pečena (ne pizza u prvoj peći).

(d2) (4 boda) Odredite distribuciju broja gostiju koji uđu u restoran za vrijeme pečenja jedne pizze u *drugoj* peći.

Rješenje:

(a) Brojeći proces $(N_t)_{t\geq 0}$ definiran je sa $N_t := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$. Funkcija obnavljanja je funkcija $U : [0,\infty) \to [0,\infty]$ definirana sa $U(t) := \mathbb{E}N_t$.

(b) Neka je $\mu := \mathbb{E}Y_1 \leq \infty$. Tada vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

(uz konvenciju $1/\infty = 0$).

(c)

(d1) Neka je T_i, $i = 1, 2$ vrijeme potrebno za ispeći pizzu u peći i. Tada je $T_1 \sim \mathcal{E}(1/10)$ i $T_2 \sim \mathcal{E}(1/8)$ (ako vrijeme mjerimo u minutama). Traži se distribucija od $T = \min\{T_1, T_2\}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t) = e^{-\frac{1}{10}t}e^{-\frac{1}{8}t} = e^{-(\frac{1}{10}+\frac{1}{8})t},$$

pa T ima eksponencijalu distribuciju s parametrom $\frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{9}{40}$.

Ako vrijeme mjerimo u satima, $T_1 \sim \mathcal{E}(6)$, $T_2 \sim \mathcal{E}(15/2)$, pa je $T_1 \wedge T_2 \sim \mathcal{E}(27/2)$.

(d2) Budući da gosti dolaze po Poissonovom procesu s očekivanjem 10 gostiju na sat, vremena između dolazaka gostiju su nezavisna i eksponencijalno distribuirana s očekivanjem 1/10 sata, odnosno 6 minuta. Zato je parametar eksponencijalne distribucije jednak $\lambda = 1/6$. Vrijeme potrebno za ispeći pizzu u drugoj peći je eksponencijalno s parametrom $\mu =$

1/8. Neka je E slučajna varijabla koja označava trajanje pečenja pizze u drugoj peći, $E \sim \mathcal{E}(\mu)$. Označimo niz dolazaka s $(T_n : n \geq 1)$. Ako je $(W_n : n \geq 1)$ niz vremena među dolascima, tada su $W_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$, nezavisne, i nezavisne s E. Nadalje, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Neka je N broj dolazaka za vrijeme pečenja pizze u drugoj peći. Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(T_k < E < T_k + W_{k+1}) \\
&= \iiint\limits_{u<v<u+w} \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, \mu e^{-\mu v}\, \lambda e^{-\lambda w}\, dw\, dv\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v}\, dv \int_{v-u}^\infty \lambda e^{-\lambda w}\, dw \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}\, du \int_u^\infty \mu e^{-\mu v} e^{-\lambda(v-u)}\, dv \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k u^{k-1}\, du \int_u^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)v}\, dv \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{\mu}{\lambda+\mu} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-(\lambda+\mu)u}\, du \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{(\lambda+\mu)^k} \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k .
\end{aligned}
$$

Dakle, N ima geometrijsku razdiobu (na $\mathbb{Z}_+$) s parametrom

$$
\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{7} .
$$