Poglavlje 9

Ergodski teorem

Ergodski teorem je rezultat o graničnom ponašanju srednjih vrijednosti (vezanih uz Markovljev lanac) kroz vrijeme. Tipičan primjer je srednje vrijeme koje lanac X provede u nekom stanju $i \in S$. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo sa

$$N_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{(X_k = i)}$$

vrijeme koje lanac provede u stanju i prije trenutka n. Što možemo reći o graničnoj vrijednosti srednjeg vremena $N_i(n)/n$ kad $n \to \infty$? Pretpostavimo da je lanac ireducibilan i pozitivno povratan, te da kreće iz i. Možemo razmišljati na sljedeći način: očekivano vrijeme povratka u stanje i je $\mathbb{E}_i(T_i)$ što je po Teoremu 7.14 jednako $1/\pi_i$ (gdje je π stacionarna distribucija). Dakle, prosječna duljina jednog izleta iz stanja i jednaka je $1/\pi_i$. U n koraka lanca X, imat ćemo, u prosjeku, $n/(1/\pi_i) = n\pi_i$ takvih izleta, što znači da će prosječno ukupno vrijeme koje lanac provede u stanju i biti reda $n\pi_i$. Malo preciznije, očekujemo da je $N_i(n) \sim n\pi_i$. Zato je srednje vrijeme $N_i(n)/n \sim \pi_i$ za velike n. Drugim riječima, rezultat kojem se možemo nadati je $\lim_{n\to\infty} N_i(n)/n = \pi_i$ (u nekom smislu).

Cilj ovog poglavlja je opravdati gornje heurističko razmatranje. Za to će nam trebati jaki zakon velikih brojeva koji navodimo bez dokaza.

Teorem 9.1 *(Jaki zakon velikih brojeva) Neka je* $(Y_n : n \geq 1)$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, takvih da je* $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$*, te stavimo* $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$*. Tada je*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \mu\right) = 1\,.$$

Napomena 9.2 U slučaju kada su Y_n nenegativne g.s., dopušteno je $\mu = \mathbb{E}Y_1 = +\infty$.

Pomoću zakona velikih brojeva možemo dokazati sljedeći rezultat.

Teorem 9.3 *(Ergodski teorem) Pretpostavimo da je Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i pozitivno povratan, te neka je π njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je f nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na S. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j\right) = 1\,. \tag{9.1}$$

Napomena 9.4 (a) Primjetimo prvo da je $\sum_{j\in S} f(j)\pi_j$ dobro definirano. To je očito u slučaju S konačan. Za S beskonačan, ako je $f \geq 0$, tada imamo red nenegativnih brojeva koji ili konvergira ili divergira u $+\infty$. Ako je $|f(j)| \leq K$ za sve $j \in S$, tada je $\sum_{j\in S} |f(j)|\pi_j \leq K\sum_{j\in S}\pi_j = K$, što znači da red apsolutno konvergira. Označimo, zbog jednostavnosti, $\pi(f) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j$.
(b) Interpretacija ergodskog teorema. O izrazu $(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ razmišljamo kao o vremenskom usrednjenju funkcije f po putu Markovljevog lanca. S druge strane, $\pi(f)$ je prostorno usrednjenje funkcije f po (stacionarnoj) distribuciji π. Ergodski teorem kaže da je za gotovo sve putove granično vremensko usrednjenje jednako prostornom usrednjenju.
(c) Upotrebom (7.6) i (7.7) limes u (9.1) možemo transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\pi(f) &= \sum_{j\in S} f(j)\pi_j \\
&= \sum_{j\in S} f(j)\frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}\mathbb{E}_i\sum_{k=0}^{T_i-1} 1_{(X_k=j)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}\,\mathbb{E}_i\sum_{j\in S}\sum_{k=0}^{T_i-1} f(j)1_{(X_k=j)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}\,\mathbb{E}_i\sum_{k=0}^{T_i-1}\left(\sum_{j\in S} f(j)1_{(X_k=j)}\right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}_i(T_i)}\,\mathbb{E}_i\sum_{k=0}^{T_i-1} f(X_k)
\end{aligned}$$

Dakle, srednja vrijednost funkcije f (po stacionarnoj distribuciji π) jednaka je i očekivanoj vrijednosti funkcije f po izletu Markovljevog lanca iz i podijeljenoj sa očekivanom duljinom izleta.

Uzmemo li u Teoremu 9.3 $f = 1_{\{j\}}$ dobivamo

Korolar 9.5 *Za ireducibilan i pozitivno povratan Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom π vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{N_j(n)}{n} = \pi_j\right) = 1\,, \quad \textit{za sve } j \in S\,.$$

Dokaz teorema: Pretpostavimo da za svaki $i \in S$ vrijedi

$$\mathbb{P}_i\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j\right) = 1\,. \tag{9.2}$$

Budući da je $\mathbb{P} = \sum_{i\in S}\lambda_i\mathbb{P}_i$, gdje je λ početna distribucija od X uz $\mathbb{P}$, vidimo da tada vrijedi i (9.1).

Fiksirajmo, dakle, $i \in S$, te dokažimo (9.2). Pretpostavimo da je $f \geq 0$. Tada je dopušteno $\sum_{j\in S} f(j)\pi_j = +\infty$. Prisjetimo se da je $T_i^{(k)}$, $k \geq 1$, k-to vrijeme povratka u stanje i, te $T_i^{(0)} = 0$. Budući da je i povratno stanje, imamo $\mathbb{P}_i(T_i^{(k)} < \infty) = 1$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$B(n) = \max\{k \geq 0 : T_i^{(k)} \leq n\}\,.$$

Uočimo da je $B(n)$ broj izleta iz i koji u potpunosti stanu u (cjelobrojni) vremenski interval $[0, n]$, te primjetimo da vrijedi

$$T_i^{(B(n))} \leq n < T_i^{(B(n)+1)}\,, \quad n \geq 1\,. \tag{9.3}$$

Prvo želimo pokazati da je (uz oznaku $T_i = T_i^{(1)}$)

$$\mathbb{P}_i\left(\lim_{n\to\infty}\frac{B(n)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_i T_i}\right) = 1\,. \tag{9.4}$$

Za $n \geq 1$ stavimo $\alpha_n = T_i^{(n)} - T_i^{(n-1)}$. Tada je α_n duljina n-tog izleta iz i. Po Teoremu 5.5 je $(\alpha_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem $\mathbb{E}_i\alpha_1$. Po jakom zakonu velikih brojeva imamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_i^{(n)}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \mathbb{E}_i\alpha_1 = \mathbb{E}_i T_i\,, \quad \mathbb{P}_i \text{ g.s.} \tag{9.5}$$

Budući da $B(n) \to \infty$ za $n \to \infty$, iz (9.5) slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_i^{(B(n))}}{B(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{T_i^{(B(n)+1)}}{B(n)+1} = \mathbb{E}_i T_i\,, \quad \mathbb{P}_i \text{ g.s.}$$

Očito je $\lim_{n\to\infty}(B(n)+1)/B(n) = 1$. Podijelimo (9.3) s $B(n)$. Slijedi

$$\frac{T_i^{(B(n))}}{B(n)} \leq \frac{n}{B(n)} \leq \frac{T_i^{(B(n)+1)}}{B(n)+1}\,\frac{B(n)+1}{B(n)}\,.$$

Pustimo $n \to \infty$ u gornjoj nejednakosti. Iz svega dokazanog dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{B(n)} = \mathbb{E}_i T_i\,, \quad \mathbb{P}_i \text{ g.s.,}$$

odnosno vrijedi (9.4).

Dokaz nastavljamo definicijom slučajnih varijabli

$$\eta_k = \sum_{m=T_i^{(k-1)}}^{T_i^{(k)}-1} f(X_m)\,, \quad k \geq 1\,. \tag{9.6}$$

Uočimo da suma ide po k-tom izletu iz stanja i (odnosno po k-tom regenerativnom ciklusu). Po Teoremu 5.5 vrijedi da su regenerativni ciklusi

$$\xi_k := (X_{T_i^{(k-1)}}, X_{T_i^{(k-1)}+1}, \ldots, X_{T_i^{(k)}-1})\,, k \geq 1\,,$$

nezavisni i jednako distribuirani elementi s vrijednostima u skupu $E := \cup_{l=1}^{\infty} S^l$. Definiramo funkciju $F : E \to [0, +\infty]$ sa

$$F(\xi) = \sum_{j=1}^{l} f(s_j)\,, \quad s = (s_1, \ldots, s_l) \in S^l\,.$$

Tada je $\eta_k = F(\xi_k)$, $k \geq 1$. Dakle, slučajna varijabla η_k je funkcija k-tog regenerativnog ciklusa ξ_k, i ista funkcija F se primjenjuje na svaki regenerativni ciklus. To implicira da je $\eta = (\eta_k : k \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih, nenegativnih slučajnih varijabli. Iz zakona velikih brojeva dobivamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \eta_j = \mathbb{E}_i \eta_1 = \mathbb{E}_i \sum_{m=0}^{T_i-1} f(X_m)\,, \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.}, \tag{9.7}$$

Zbog pretpostavke $f \geq 0$, nejednakosti (9.3) i jednakosti (9.6) vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{B(n)} \eta_k = \sum_{k=1}^{B(n)} \sum_{m=T_i^{(k-1)}}^{T_i^{(k)}-1} f(X_m) &= \sum_{m=0}^{T_i^{(B(n))}-1} f(X_m) \\
&\leq \sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) \\
&\leq \sum_{m=0}^{T_i^{(B(n)+1)}-1} f(X_m) = \sum_{k=1}^{B(n)+1} \sum_{m=T_i^{(k-1)}}^{T_i^{(k)}-1} f(X_m) = \sum_{k=1}^{B(n)+1} \eta_k\,.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Nadalje, zbog (9.4) i (9.7) vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{B(n)} \eta_k = \lim_{n\to\infty} \frac{B(n)}{n} \frac{\sum_{k=1}^{B(n)} \eta_k}{B(n)} = \frac{1}{\mathbb{E}_i T_i}\, \mathbb{E}_i \sum_{m=0}^{T_1-1} f(X_m)\,, \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.}$$

Na isti način se vidi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{B(n)+1} \eta_k = \frac{1}{\mathbb{E}_i T_i} \mathbb{E}_i \sum_{m=0}^{T_1-1} f(X_m)\,, \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.}$$

Iz gornje dvije relacije i nejednakosti (9.8) slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f(X_m) = \frac{1}{\mathbb{E}_i T_i} \mathbb{E}_i \sum_{m=0}^{T_1-1} f(X_m)\,, \quad \mathbb{P}_i\text{-g.s.},$$

što je zbog Napomene 9.4 (c) isto što i (9.2). Time je dokaz završen u slučaju $f \geq 0$.

Neka je sada f proizvoljna ograničena funkcija. Tada je $\pi(f) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j$ dobro definirano. Rastavimo f na pozitivni i negativni dio: $f = f^+ - f^-$. Budući da je teorem dokazan za f^+ i f^-, iz jednakosti $\pi(f) = \sum_{j\in S} f(j)\pi_j = \pi(f^+) - \pi(f^-)$ odmah slijedi da teorem vrijedi i za f. □

Korolar 9.6 *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Tada za svaku početnu distribuciju lanca X vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(f(X_k)) = \pi(f)\,. \tag{9.9}$$

Specijalno, za $f = 1_{\{j\}}$, te početno stanje i dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} = \pi_j\,. \tag{9.10}$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $|f(i)| \leq K$ za sve $i \in S$. Primjetimo da je

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(f(X_k)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\right)\,,$$

te $|(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)| \leq K$. Sada (9.9) slijedi iz Teorema 9.3 upotrebom teorema o dominiranoj konvergenciji. Specijalan slučaj slijedi zbog $\mathbb{E}_i 1_{\{j\}}(X_k) = \mathbb{P}_i(X_k = j) = p_{ij}^{(k)}$. □