Poglavlje 8

Granična distribucija

U ovom poglavlju definiramo graničnu distribuciju, pokazujemo njenu vezu sa stacionarnom distribucijom, te rješavamo pitanje egzistencije granične distribucije.

Definicija 8.1 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na skupu stanja S s prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i : i \in S)$ naziva se* graničnom distribucijom *Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako za sve $i, j \in S$, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \,.$$

Napomena 8.2 Uočimo da može vrijediti $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \rho_j$ za sve $i, j \in S$, ali $\rho = (\rho_i : i \in S)$ *nije* granična distribucija. Zaista, neka je X Markovljev lanac u kojem su sva stanja prolazna. Neka su $i, j \in S$. U Napomeni 6.5 (c), pokazali smo da za prolazno stanje j vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$. Specijalno, $\rho_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. Dakle, limes postoji, ali ne definira graničnu distribuciju.

U Propoziciji 7.5 pokazali smo za slučaj konačnog skupa stanja S da je granična distribucija ujedno i stacionarna. Sada taj rezultat poopćavamo na prebrojiv skup stanja.

Propozicija 8.3 *Neka je π granična distribucija Markovljevog lanca X. Tada je π i stacionarna distribucija.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $S = \{0, 1, 2, \ldots, \}$. Za svako stanje $j \in S$ i svaki $M \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k=0}^{M} \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k=0}^{M} \pi_k p_{kj} \,.$$

Pustimo $M \to \infty$ i dobivamo

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj} \,, \quad j \in S \,. \tag{8.1}$$

Pretpostavimo da za neko $j_0 \in S$ vrijedi stroga nejednakost

$$\pi_{j_0} > \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj_0} \tag{8.2}$$

Zbrojimo nejednakosti (8.1) po $j \in S$. Uzevši u obzir strogu nejednakost (8.2) dobivamo

$$\sum_{j\in S} \pi_j > \sum_{j\in S} \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj} = \sum_{k\in S} \pi_k \left(\sum_{j\in S} p_{kj} \right) = \sum_{k\in S} \pi_k = 1\,.$$

Kontradikcija! Dakle, u (8.1) vrijedi jednakost za sve $j \in S$ što znači da je π invarijantna distribucija. □

Sljedeći primjer pokazuje da granična distribucija ne mora postojati iako postoji (jedinstvena) stacionarna distribucija. Po Teoremu 7.14 sva stanja takvog lanca su (pozitivno) povratna (usporedite s Napomenom 8.2).

Primjer 8.4 Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac na dvočlanom skupu stanja $S = \{1, 2\}$, s prijelaznom matricom

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Budući da je lanac ireducibilan i povratan, postoji (jedinstvena) stacionarna distribucija. Lako se vidi da je to $\pi = (1/2, 1/2)$. S druge strane, budući da je $P^{2n} = I$ i $P^{2n+1} = P$, očito je da $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ ne postoji niti za jedan par $i, j \in S$. Dakle, granična distribucija ne postoji. U ovom primjeru ključnu ulogu ima činjenica da je $p_{ii}^{(n)} > 0$ samo za parne n, odnosno da svako stanje ima period 2.

Definicija 8.5 *Neka je X Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Za stanje $i \in S$, označimo sa $d(i)$ najveći zajednički djelitelj (nzd) skupa $\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$, gdje je $d(i) = 1$ ako je taj skup prazan. Kažemo da je stanje i* aperiodično*, ako je $d(i) = 1$. U suprotnom je i* periodičko *stanje, a $d(i)$ se zove* period *od i.*

Lema 8.6 *Stanje $i \in S$ je aperiodičko ako i samo ako postoji $n_0 = n_0(i)$ takav da je $p_{ii}^{(n)} > 0$ za sve $n \geq n_0$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je i aperiodičko stanje. Stavimo $\Lambda = \{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$. Tada vrijedi

(i) nzd $\Lambda = 1$ (po pretpostavci),

(ii) $m, n \in \Lambda \Rightarrow m + n \in \Lambda$ zbog $p_{ii}^{(m+n)} \geq p_{ii}^{(m)} p_{ii}^{(n)}$

Pokažimo prvo da Λ sadrži dva susjedna broja.

Neka su $m_0, m_0+k \in \Lambda$. Ako je $k=1$, tada smo već našli dva susjedna broja. Pretpostavimo, stoga, da je $k>1$. Tada zbog $d(i)=1$ postoji $m_1 \in \Lambda$ takav da k ne dijeli m_1 (u suprotnom bi k bio djelitelj od Λ, te $d(i) \geq k$). Napišimo $m_1 = lk+r$, $0<r<k$. Zbog (ii) slijedi $(l+1)(m_0+k) \in \Lambda$ i $(l+1)m_0 + m_1 \in \Lambda$. Razlika ta dva broja je jednaka $k(l+1) - m_1 = k-r < k$. Dakle, našli smo dva broja iz Λ čija je razlika $0 < k-r < k$. Ponavljanjem postupka najviše k puta, dolazimo do para susjednih brojeva $N, N+1 \in \Lambda$.

Sada možemo uzeti $n_0 = n_0(i) := N^2$. Ako je $n \geq N^2$, vrijedi $n - N^2 = kN + r$ za $0 \leq r < N$. Tada je

$$n = r + N^2 + kN = r(N+1) + (N-r+k)N \in \Lambda\,,$$

zbog (ii) i $N, N+1 \in \Lambda$. □

Pokažimo još da je periodičnost svojstvo klase komuniciranja.

Lema 8.7 *Za sva stanja $i,j \in S$ takva da $i \longleftrightarrow j$ vrijedi $d(i)=d(j)$.*

Dokaz: Zbog pretpostavke da $i \longleftrightarrow j$, te Propozicije 3.2, postoje $m,n \in \mathbb{N}$ takvi da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Slijedi da je za sve $k \geq 0$

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} = c p_{ii}^{(k)}\,.$$

Zbog $p_{ii}^{(0)} = 1$, slijedi $p_{jj}^{(m+n)} > 0$, pa $d(j)$ dijeli $m+n$. Napišimo, $m+n = k_1 d(j)$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Za svaki $k \geq 1$ takav da je $p_{ii}^{(k)} > 0$ vrijedi $p_{jj}^{(m+k+n)} \geq c p_{ii}^{(k)} > 0$, pa je $m+k+n = k_2 d(j)$. Tada je $k = (m+n+k) - (m+n) = k_2 d(j) - k_1 d(j) = (k_2 - k_1) d(j)$, odnosno $d(j)$ dijeli k. Slijedi da je $d(j)$ djelitelj skupa $\{k \geq 1 : p_{ii}^{(k)} > 0\}$. Budući da je $d(i)$ najveći zajednički djelitelj tog skupa, dobivamo $d(j) \leq d(i)$. Zbog simetrije, $d(i) \leq d(j)$, odnosno periodi su jednaki. □

Iz zadnje dvije leme odmah dobivamo sljedeći pomoćni rezultat.

Lema 8.8 *Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan i aperiodičan. Tada za sve $i,j \in S$ postoji $n_0 = n_0(i,j) \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ za sve $n \geq n_0$.*

Dokaz: Zbog $i \longrightarrow j$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(m)} > 0$. Po Lemi 8.6 postoji $n_0(j)$ takav da je $p_{jj}^{(n)} > 0$ za sve $n \geq n_0(j)$. Definiramo $n_0(i,j) := m + n_0(j)$. Tada za sve $n \geq n_0(i,j)$ vrijedi

$$p_{ij}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(n-m)} > 0\,.$$

□

Sljedeći teorem je osnovni rezultat o postojanju granične distribucije. Dokaz teorema je vjerojatnosni i zasniva se na metodi sparivanja.

Teorem 8.9 *Neka je λ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na skupu stanja S. Pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac koji je ireducibilan i aperiodičan, te ima stacionarnu distribuciju π. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j\,, \quad \text{za sve } j \in S\,. \tag{8.3}$$

Specijalno,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j\,, \quad \text{za sve } i, j \in S\,, \tag{8.4}$$

t.j., stacionarna distribucija ujedno je i granična.

Dokaz: Metoda sparivanja sastoji se u tome da se uz dani lanac X promatra i s njim nezavisan (π, P)-Markovljev lanac $Y = (Y_n : n \geq 0)$. Uočite da je početna distribucija lanca Y upravo stacionarna distribucija π. Po Teoremu 7.4 vrijedi $\mathbb{P}(Y_n = j) = \pi_j$ za sve $n \geq 0$ i sve $j \in S$, pa (8.3) trivijalno vrijedi za Y. Promatramo oba lanca, X i Y, istovremeno i čekamo trenutak u kojem se oba nalaze u istom stanju (kažemo da su se sparili). Iz jakog Markovljevog svojstva intuitivno je jasno da je nakon sparivanja vjerojatnosno ponašanje oba lanca isto. Budući da (8.3) vrijedi za Y, očekujemo da će vrijediti i za X.

Provedimo sada detaljno gore opisan program. Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ (π, P)-Markovljev lanac nezavisan od X, definiran na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Fiksirajmo neko stanje $i_0 \in S$, te definiramo prvo vrijeme u kojem su oba lanca (istovremeno) u i_0:

$$T = \min\{n \geq 0 : X_n = Y_n = i_0\}\,. \tag{8.5}$$

Želimo pokazati da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Definiramo slučajni proces $W = (W_n : n \geq 0)$ s vrijednostima u $S \times S$ kao $W_n = (X_n, Y_n)$. Tada možemo pisati

$$T = \min\{n \geq 0 : W_n = (i_0, i_0)\}\,.$$

Tvrdimo da je W $(\mu, \widetilde{P})$-Markovljev lanac na $S \times S$, gdje je

$$\mu_{(i,k)} = \lambda_i \pi_k$$

početna distribucija, a

$$\widetilde{p}_{(i,k)(j,l)} = p_{ij} p_{kl}$$

elementi prijelazne matrice $\widetilde{P}$. To neposredno slijedi iz Markovljevog svojstva procesa X i Y, te njihove nezavisnosti. Također se jednostavno vidi da je

$$\widetilde{p}^{(n)}_{(i,k)(j,l)} = p_{ij}^{(n)} p_{kl}^{(n)}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Nadalje, iz gornje jednakosti i Leme 8.8 dobivamo da za $n \geq \max\{n_0(i,j), n_0(k,l)\}$ vrijedi $\widetilde{p}^{(n)}_{(i,k)(j,l)} > 0$. Po Propoziciji 3.2 slijedi da $(i,k) \longrightarrow (j,l)$. Kako to vrijedi za svaka dva para (i,k) i (j,l) zaključujemo da je Markovljev lanac W ireducibilan. Pokažimo da je $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\pi}_{(i,k)} : (i,k) \in S \times S)$ definirana s $\widetilde{\pi}_{(i,k)} := \pi_i \pi_k$ stacionarna distribucija za W. Zaista,

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,k)\in S\times S} \widetilde{\pi}_{(i,k)}\, \widetilde{p}_{(i,k)(j,l)} &= \sum_{i\in S,\, k\in S} \pi_i \pi_k p_{ij} p_{kl} \\
&= \left(\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}\right)\left(\sum_{k\in S} \pi_k p_{kl}\right) = \pi_j \pi_l = \widetilde{\pi}_{(j,l)}
\end{aligned}$$

Dakle, W je ireducibilan i ima stacionarnu distribuciju, pa je po Teoremu 7.14 pozitivno povratan, pa stoga i povratan. Po Teoremu 6.11 slijedi da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ kao što smo i htjeli. Dakle, s vjerojatnosti 1 lanci X i Y će se spariti (i to u stanju i_0).

Sada pokazujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $j \in S$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_n = j, T \le n) = \mathbb{P}(Y_n = j, T \le n)\,. \tag{8.6}$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = j, T \le n) &= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = j, T = m) \\
&= \sum_{k\in S}\sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(W_n = (j,k), T = m) \\
&= \sum_{k\in S}\sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(T = m)\widetilde{p}^{\,(n-m)}_{(i_0 i_0)(j,k)} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(T = m) p^{(n-m)}_{i_0 j} \sum_{k\in S} p^{(n-m)}_{i_0 k} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(T = m) p^{(n-m)}_{i_0 j}\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u trećem retku iskoristili Markovljevo svojstvo procesa W. Slični račun pokazuje da je i desna strana u (8.6) jednaka $\sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(T = m) p^{(n-m)}_{i_0 j}$.

Primjetimo da zbog $\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n = j, T \le n) + \mathbb{P}(X_n = j, T > n)$, analogne relacije za Y, te jednakosti (8.6) vrijedi

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(X_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| &= |\mathbb{P}(X_n = j, T > n) - \mathbb{P}(Y_n = j, T > n)| \\
&= |\mathbb{E}(1_{(X_n=j)}1_{(T>n)} - 1_{(Y_n=j)}1_{(T>n)})| \\
&\le \mathbb{E}(|1_{(X_n=j)} - 1_{(Y_n=j)}|\, 1_{(T>n)}) \\
&\le \mathbb{E}1_{(T>n)} = \mathbb{P}(T > n)\,.
\end{aligned}$$

Budući da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$. Zbog $\mathbb{P}(Y_n = j) = \pi_j$, dobivamo $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j$ za svaki $j \in S$ što je (8.3). Uzmemo li $\lambda = \delta^i$ slijedi (8.4).
□

Za potpuno razumijevanje uloge aperiodičnosti u gornjem dokazu instruktivno je vidjeti gdje taj dokaz ne prolazi u slučaju periodičnog lanca. Vratimo se na Primjer 8.4, te pretpostavimo da lanac X počinje iz stanja 1, t.j., X je (δ^1, P)-Markovljev lanac. Neka je, kao u dokazu, Y (π, P)-Markovljev lanac. Neka je T vrijeme sparivanja za, na primjer, stanje $i_0 = 1$ (isti argument vrijedi i za $i_0 = 2$). Uočimo da u slučaju $Y_0 = 1$ vrijedi $T = 0$, dok za $Y_0 = 2$ imamo $T = +\infty$, t.j., do sparivanja uopće neće doći (kad je X u 1, Y je u 2, i obratno). Budući da je $\mathbb{P}(Y_0 = 1) = \pi_1 = 1/2$, slijedi $\mathbb{P}(T < \infty) = 1/2 \neq 1$. Druga posljedica aperiodičnosti u dokazu teorema bile je tvrdnja da je $W = (X, Y)$ ireducibilan. U primjeru koji promatramo lako se vidi da zbog periodičnosti skup stanja $S \times S$ lanca W ima dvije klase komuniciranja: $\{(1,1),(2,2)\}$ i $\{(1,2),(2,1)\}$.

Napomena 8.10 U dokazu Teorema 8.9 je stacionarna distribucija π bila početna distribucija lanca Y. Pretpostavimo sada da su X i Y nezavisni Markovljevi lanci s istom prijelaznom matricom P, te neka je λ početna distribucija od X, a μ početna distribucija od Y. Ne pretpostavljamo da X ima stacionarnu distribuciju. Umjesto toga ćemo pretpostaviti da je produktni lanac $W = (X, Y)$ povratan. Definiramo li vrijeme zaustavljanja T kao prvo vrijeme pogađanja stanja $(i_0, i_0) \in S \times S$, iz pretpostavke o povratnosti lanca W slijedi da je $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Sada na isti način kao u dokazu teorema zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{P}(X_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| = 0\,, \quad \text{za svaki } j \in S\,.$$

Proučimo sada što možemo reći o graničnom ponašanju prijelaznih vjerojatnosti u slučaju periodičkog, pozitivno povratnog lanca.

Propozicija 8.11 *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s periodom d. Neka je $i \in S$, te za svaki $j \in S$ definiramo*

$$K_j = \{n \geq 1 : p_{ij}^{(n)} > 0\}\,.$$

(a) Postoji $r_j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ takav da za $n \in K_j$ vrijedi $n = r_j \pmod d$.

(b) Za $0 \leq r < d$ definiramo $C_r = \{j : r_j = r\}$. Ako je $j_1 \in C_{r_1}$, $j_2 \in C_{r_2}$ i $p_{j_1 j_2}^{(n)} > 0$, tada je $n = r_2 - r_1 \pmod d$.

(c) $C_0, C_1, \dots, C_{d-1}$ su ireducibilne klase za prijelaznu matricu P^d i sva stanja imaju period 1.

Dokaz: (a) Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ji}^{(m)} > 0$. Ako je $n \in K_j$, tada je $p_{ii}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$, pa d dijeli $n+m$ i možemo pisati $n+m = ld$, $l \in \mathbb{Z}$. Definiramo $r_j = d - m \pmod d$. To znači da je $d-m = kd + r_j$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Sada je $n - r_j = (ld-m)-(d-m-kd) = (l-1+k)d$.
(b) Neka je $p_{j_1 j_2}^{(n)} > 0$ i odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij_1}^{(m)} > 0$. Tada je $p_{ij_2}^{(m+n)} > 0$, pa je zbog (a) $m+n = r_2 \pmod d$. Nadalje, zbog $m = r_1 \pmod d$ slijedi $r_2 - r_1 = n \pmod d$.
(c) Neka su $j, k \in C_r$. Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{jk}^{(n)} > 0$. Zbog (b) imamo $n = r - r = 0 \pmod d$, odnosno $n = ld$ za neki $l \in \mathbb{N}$. To znači da je $(P^d)_{jk}^{(l)} > 0$, što povlači da je C_r

ireducibilna za P^d. Konačno, označimo sa $\tilde{d}$ period od j za P^d, t.j., $\tilde{d} = \mathrm{nzd}\{n : (P^d)_{jj}^{(n)} > 0\}$. Zbog $d = \mathrm{nzd}\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}$, slijedi $\tilde{d} = 1$. □

Particija $C_0, C_1, \dots, C_{d-1}$ skupa stanja S naziva se *cikličkom dekompozicijom*. Ta particija je jedinstvena do na numeraciju, t.j., do na izbor prvog skupa C_0 koji ovisi o odabranom stanju $i \in S$.

Teorem 8.12 *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s periodom d i stacionarnom distribucijom π, te neka je $C_0, C_1, \dots, C_{d-1}$ ciklička dekompozicija iz Propozicije 8.11. Tada za $j \in C_r$ imamo*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d\pi_j \,.$$

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je $j \in C_0$. Definiramo Markovljev lanac $Y = (Y_n : n \geq 0)$ sa $Y_n = X_{nd}$, $n \geq 0$, te neka je δ^i početna distribucija tog lanca. Prijelazna matrica lanca Y je P^d, a skup stanja je C_0 (vidi Propoziciju 8.11). Nadalje, Y je ireducibilan, aperiodički, te pozitvno povratan (to slijedi iz pozitivne povratnosti originalnog lanca X). Po Teoremu 7.14 Y ima stacionarnu distribuciju. Sada iz Teorema 8.9 slijedi da postoji

$$\lim_{n\to\infty} (P^d)_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} \,. \tag{8.7}$$

Limes ćemo identificirati upotrebom formule (9.10) po kojoj je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} = \pi_j \,.$$

Budući da je $p_{ij}^{(k)} = 0$ osim za $k = ld$, $l \in \mathbb{N}$, gornji limes možemo pisati kao

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{md} \sum_{l=0}^{m-1} p_{ij}^{(ld)} = \pi_j \,,$$

odnosno

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} p_{ij}^{(ld)} = d\pi_j \,. \tag{8.8}$$

Sada iz egzistenicije limesa (8.7) i gornje jednakosti (8.8) slijedi [1]

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = d\pi_j \,.$$

[1]Ako niz $(a_n : n \geq 0)$ konvergira, tada konvergira i niz $(b_n : n \geq 1)$ definiran s $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ i limesi su im jednaki.

Neka je sada $j \in C_r$, $1 \le r < d$. Tada je $p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k \in C_r} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(nd)}$. Zbog $j, k \in C_r$, iz već dokazanog zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} p_{kj}^{(nd)} = d\pi_j$. Slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k \in C_r} p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(nd)} \\ &= \sum_{k \in C_r} p_{ik}^{(r)}\, d\pi_j = d\pi_j\,, \end{aligned}$$

gdje se zamjena limesa i sume opravdava s $p_{kj}^{(nd)} \le 1$, $\sum_{k \in C_r} p_{ik}^{(r)} = 1$ i teoremom o dominiranoj konvergenciji. □

Teoremi 8.9 i 8.12 rješavaju pitanje konvergencije za pozitivno povratan slučaj. Otprije znamo da u slučaju prolaznog lanca vrijedi $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. Jedini preostali slučaj je nul-povratan koji je malo teži od ostalih.

Teorem 8.13 *Neka je $X = (X_n : n \ge 0)$ ireducibilan, nul-povratan Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Tada za sve $i, j \in S$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0\,. \tag{8.9}$$

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je lanac X aperiodičan, te neka je λ početna distribucija od X. Kao i u dokazu Teorema 8.9, neka je Y (μ, P)-Markovljev lanac nezavisan od X, gdje je μ neka vjerojatnosna distribucija na S. Stavimo $W = (X, Y)$. Tada je W ireducibilan i aperiodički, ali ne mora biti povratan. U slučaju da je W prolazan, za prijelazne vjerojatnosti iz (i,i) u (j,j) vrijedi $p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(n)} = \widetilde{p}_{(i,i)(j,j)}^{(n)} \to 0$ za $n \to \infty$. Stoga je i $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ za sve $i, j \in S$.

Pretpostavimo sada da je produktni lanac W povratan. Po Napomeni 8.10 vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{P}(X_n = j) - \mathbb{P}(Y_n = j)| = 0\,, \quad \text{za svaki } j \in S\,. \tag{8.10}$$

Pretpostavimo da (8.9) ne vrijedi. Tada postoje $i, j \in S$, podniz $(n_s : s \ge 1)$ prirodnih brojeva koji teži u beskonačnnost, i $\alpha > 0$ takvi da je

$$\lim_{s\to\infty} p_{ij}^{(n_s)} = \alpha\,.$$

Uvedimo oznaku $p_i^{(n_s)} = (p_{ik}^{(n_s)} : k \in S)$, $s \ge 1$. Tada je $(p_i^{(n_s)} : s \ge 1)$ niz u produktnom prostoru $[0,1]^S$. Po Tihonovljevom teoremu (o kompaktnosti produktnog prostora), zaključujemo da postoji strogo rastući podniz $(n_{s_r} : r \ge 1)$, te $x = (x_k : k \in S)$ takvi da vrijedi

$$\lim_{r\to\infty} p_{ik}^{(n_{s_r})} = x_k\,, \quad \text{za sve } k \in S\,.$$

Zbog $x_j = \alpha > 0$ slijedi da $x = (x_k : k \in S)$ nije trivijalan. Budući da je $\sum_{k\in S} p_{ik}^{(n_{s_r})} = 1$, po Fatouovoj lemi imamo

$$\sum_{k\in S} x_k = \sum_{k\in S} \lim_{r\to\infty} p_{ik}^{(n_{s_r})} \leq \lim_{r\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n_{s_r})} = 1\,.$$

Odaberimo sada u (8.10) $\lambda = \delta^i$, te $\mu = (p_{ik} : k \in S)$ (t.j., μ je distribucija od X_1 uz početnu distribuciju δ^i). Tada (8.10) kaže da vrijedi $\lim_{n\to\infty} |p_{ik}^{(n)} - p_{ik}^{(n+1)}| = 0$, i specijalno

$$\lim_{r\to\infty} |p_{ik}^{(n_{s_r})} - p_{ik}^{(n_{s_r}+1)}| = 0\,. \tag{8.11}$$

Budući da je $p_{ik}^{(n_{s_r}+1)} = \sum_{l\in S} p_{il}^{(n_{s_r})} p_{lk}$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$x_k = \lim_{r\to\infty} p_{ik}^{(n_{s_r}+1)} = \lim_{r\to\infty} \sum_{l\in S} p_{il}^{(n_{s_r})} p_{lk} = \sum_{l\in S} \lim_{r\to\infty} p_{il}^{(n_{s_r})} p_{lk} = \sum_{l\in S} x_l p_{lk}\,.$$

Dakle, $x = (x_k : k \in S)$ je invarijantna mjera konačne mase ($\sum_{k\in S} x_k \leq 1$), pa postoji stacionarna distribucija. Međutim, to po Teoremu 7.14 povlači da je Markovljev lanac X pozitivno povratan suprotno pretpostavci.

Konačno, ako X ima period $d > 1$, tvrdnja slijedi iz gore dokazanog promatranjem restrikcije od P^d na proizvoljnu cikličku klasu, uz napomenu da je tako dobiveni lanac opet nul-povratan. □