Poglavlje 7

Stacionarna distribucija i invarijantna mjera

Stacionarnost kod slučajnih procesa znači da se vjerojatnosna svojstva procesa ne mijenjaju kroz vrijeme. Preciznije, ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ stacionarni slučajni proces, tada je distribucija svih slučajnih elemenata X_n jednaka. Stacionarna distribucija Markovljevih lanaca (ako postoji) usko je vezana s graničnom distribucijom koju ćemo promatrati u jednom od sljedećih poglavlja.

Započnimo našu diskusiju o stacionarnosti jednostavnim primjerom. Radi se o Primjeru 1.7 iz prvog poglavlja.

Primjer 7.1 Promatramo Markovljev lanac sa samo dva stanja koja označavamo sa 1 i 2: dakle $S = \{1, 2\}$. Označimo sa a prijelaznu vjerojatnost iz 1 u 2, a sa b prijelaznu vjerojatnost iz 2 u 1, $0 \leq a, b \leq 1$. Tada je pripadajuća prijelazna matrica jednaka

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} .$$

Sljedeći način gledanja na Markovljeve lance ponekad je vrlo ilustrativan. Pretpostavimo da se u trenutku $n = 0$ u stanju 1 nalazi čestica mase 1. U trenutka $n = 1$ ta se čestica podijeli na dvije čestice s masama koje odgovaraju prvom retku prijelazne matrice, $p_{11} = 1 - a$ i $p_{12} = a$. Čestica mase $1 - a$ ostaje u stanju 1, dok čestica mase a odlazi u stanje 2. Uočite da je $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - a$ i $\mathbb{P}(X_1 = 2) = a$. U trenutku $n = 2$, obje čestice se simultano dijele proporcionalno vjerojatnostima u odgovarajućim recima prijelazne matrice, te ostaju u istom ili prelaze u drugo stanje. Preciznije, čestica u stanju 1 dijeli se na česticu mase $(1 - a)p_{11} = (1 - a)(1 - a)$ koja ostaje u stanju 1, i česticu mase $(1 - a)p_{12} = (1 - a)a$ koja odlazi u stanje 2. Čestica u stanju 2 se dijeli na česticu mase $ap_{21} = ab$ koja odlazi u stanje 1, i česticu mase $ap_{22} = a(1 - b)$ koja ostaje u stanju 2. Čestice u pojedinim stanjima sljepljuju se u jednu česticu. To znači da nakon trenutka $n = 2$ u stanju 1 imamo česticu mase $(1-a)(1-a)+ab$, a u stanju 2 česticu mase $(1-a)a+a(1-b)$. Izračunajte da vrijedi $\mathbb{P}(X_2 = 1) = (1 - a)(1 - a) + ab$, te $\mathbb{P}(X_2 = 2) = (1 - a)a + a(1 - b)$. Dakle, mase čestica u pojedinim stanjima nakon n koraka odgovaraju n-koračnim prijelaznim vjerojatnostima (barem za $n = 1$ i $n = 2$, ali se jednostavno vidi da to vrijedi i za sve $n \in \mathbb{N}$). Budući da smo u Primjeru 1.7 izračunali da je

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix},$$

to zaključujemo da je granična raspodjela masa u stanjima jednaka $b/(a+b)$ u stanju 1, odnosno $a/(a+b)$ u stanju 2.

Pretpostavimo sada da u trenutku $n = 0$ u stanju 1 imamo česticu mase $b/(a+b)$, a u stanju 2 česticu mase $a/(a+b)$. Podijelimo te čestice u skladu s prijelaznim vjerojatnostima, i podijeljenje čestice ostavimo u istom ili pošaljemo u drugo stanje. Kolike su mase čestica u stanjima 1, odnosno 2, u trenutku $n = 1$? U stanju 1 imamo masu $\frac{b}{a+b}(1-a) + \frac{a}{a+b}b = \frac{b}{a+b}$ (prvi sumand odgovara dijelu mase koji ostaje u stanju 1, a drugi dijelu mase koji dolazi iz stanja 2). Slično, masa u stanju 2 jednaka je $\frac{b}{a+b}a + \frac{a}{a+b}(1-b) = \frac{a}{a+b}$. Zaključujemo da su mase u stanjima 1 i 2 ostale iste. Naravno, nakon sljedećih dijeljenja te mase će ostati nepromijenjene. Možemo reći da je par masa $(b/(a+b), a/(a+b))$ stacionaran.

Definicija 7.2 *Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se* stacionaran *ako za sve $k \geq 0$ i sve $n \geq 0$, slučajni vektori $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ i $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k})$ imaju istu distribuciju (u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}$).*

Specijalno, ako X poprima vrijednosti u prebrojivom skupu stanju S, tada uzimajući $k = 0$ slijedi $\mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$ za sve $i \in S$ i sva vremena $n \geq 1$. Dakle, kao specijalan slučaj dobivamo da se jednodimenzionalne distribucije ne mijenjaju kroz vrijeme.

Definicija 7.3 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Vjerojatnosna distribucija $\pi = (\pi_i : i \in S)$ na S je* stacionarna distribucija *(ili* invarijantna distribucija*) Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\pi = \pi P, \tag{7.1}$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}, \quad \text{za sve } j \in S. \tag{7.2}$$

Teorem 7.4 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ (π, P)-Markovljev lanac gdje je π stacionarna distribucija za P. Tada je X stacionaran proces. Preciznije, X je stacionaran uz vjerojatnost $\mathbb{P}_\pi = \sum_{i\in S} \pi_i \mathbb{P}_i$. Nadalje, za svaki $m \geq 0$ je $(X_{m+n} : n \geq 0)$ ponovno (π, P)-Markovljev lanac.*

Dokaz: Uočimo prvo da iz $\pi = \pi P$ slijedi $\pi = (\pi P)P = \pi P^2$, te indukcijom $\pi = \pi P^n$ za sve $n \geq 1$. Po komponentama,

$$\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}^{(n)}. \tag{7.3}$$

Neka je sada $k \geq 0$, $n \geq 0$, te neka su $i_0, i_1, \ldots, i_k \in S$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\pi(X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k) &= \sum_{i \in S} \pi_i p_{i\, i_0}^{(n)} p_{i_0\, i_1} \ldots p_{i_{k-1}\, i_k} \\ &= \pi_{i_0} p_{i_0\, i_1} \ldots p_{i_{k-1}\, i_k} = \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k)\,,\end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi zbog (7.3).

Nadalje, otprije znamo da je $(X_{m+n} : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Početna distribucija tog lanca jednaka je $(\mathbb{P}_\pi(X_m = i) : i \in S)$. Budući da je $\mathbb{P}_\pi(X_m = i) = \pi_i$, tvrdnja slijedi. □

Dokažimo sada za slučaj konačnog skupa stanja rezultat koji povezuje stacionarnu i graničnu distribuciju Markovljevog lanca.

Propozicija 7.5 *Neka je S konačan skup stanja, te pretpostavimo da za neki $i \in S$,*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \text{za sve } j \in S\,.$$

Tada je $\pi = (\pi_j : j \in S)$ stacionarna distribucija.

Dokaz: Vrijedi

$$\sum_{j\in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1\,,$$

pa je π vjerojatnosna distribucija. Zamjena limesa i sume je opravdana zbog S konačan. Nadalje,

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}\,.$$

Dakle, π je stacionarna distribucija. □

Promotrimo sada jednostavnu *simetričnu* slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$, te pokušajmo naći stacionarnu distribuciju. Zamislimo da u svakoj točki od $\mathbb{Z}$ imamo česticu mase 1. Svaka od tih čestica podijeli se u skladu s prijelaznim vjerojatnostima i pomakne na odgovarajuće mjesto. Konkretnije, čestica u stanju i podijeli se na dvije čestice, svaka mase $1/2$ od kojih se jedna pomakne u $i-1$, a druga u $i+1$. S druge strane, u stanje i dolaze dvije čestice, svaka mase $1/2$, jedna iz $i-1$ a druga iz $i+1$. Nakon simultane podjele svih čestica, odgovarajućih pomaka i sljepljivanja, očito je da u svakom stanju i imamo opet česticu mase 1. Preciznije, neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in \mathbb{Z})$ definirano s $\lambda_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Tada se gornji postupak kratko može zapisati kao

$$\lambda = \lambda P\,,$$

gdje je P prijelazna matrica jednostavne simetrične slučajne šetnje. Drugim riječima, λ je skoro stacionarna distribucija. Razlog zašto to nije je taj da λ nije vjerojatnosna distribucija (suma komponenti nije jednaka 1). Štoviše, $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i = +\infty$, što znači da se λ ne može normirati tako da postane stacionarnom distribucijom. Intuitivno je jasno da bi stacionarna distribucija π trebala imati svojstvo da je $\pi_i = \pi_j$ za sve $i, j \in \mathbb{Z}$, t.j., da je konstantna. Međutim, takva vjerojatnost na $\mathbb{Z}$ ne postoji. Zaključujemo da jednostavna simetrična slučajna šetnja nema stacionarnu distribuciju (to ćemo strogo dokazati poslije). Međutim, λ ima dobro svojstvo $\lambda = \lambda P$. To motivira sljedeću definiciju.

Definicija 7.6 *Niz $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ naziva se* mjera *ako je $\lambda_i \in [0, \infty)$ za sve $i \in S$. Mjera λ je netrivijalna ako postoji $i \in S$ takav da je $\lambda_i > 0$. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Netrivijalna mjera λ na S je* invarijantna mjera *Markovljevog lanca X (odnosno prijelazne matrice P) ako vrijedi*

$$\lambda = \lambda P\,, \tag{7.4}$$

odnosno po komponentama

$$\lambda_j = \sum_{k \in S} \lambda_k p_{kj}\,, \quad \textit{za sve } j \in S\,. \tag{7.5}$$

Osnovno pitanje u vezi invarijantne mjere je pitanje egzistencije i jedinstvenosti. Pokazat ćemo da ireducibilan i povratan Markovljev lanac ima esencijalno jedinstvenu invarijantnu mjeru. Dokaz koji ćemo dati je vjerojatnosan, te ima vjerojatnosnu interpretaciju. Uočite da je za slučaj konačnog skupa stanja S pitanje egzistencije invarijantne mjere ekvivalentno pitanju egzistencije svojstvenog vektora transponirane prijelazne matrice P^T za svojstvenu vrijednost 1. Zaista, $\lambda = \lambda P$ je isto što i $P^T \lambda^T = \lambda^T$. Taj problem se relativno jednostavno može riješiti metodama linearne algebre.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Prisjetimo se definicije prvog vremena povratka u stanje $i \in S$:

$$T_i = \min\{n > 0 : X_n = i\}\,.$$

Definicija 7.7 *Stanje $i \in S$ je* pozitivno povratno *ako je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$.*

Uočite da iz $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ slijedi $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, što znači da je pozitivno povratno stanje uvijek povratno. Povratno stanje koje nije pozitivno povratno naziva se *nul-povratnim.*

Sljedeća propozicija je ključna za egzistenciju invarijantne mjere.

Propozicija 7.8 *Neka je $i \in S$ povratno stanje. Za $j \in S$ definiramo*

$$\nu_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1_{(X_n = j)}\,. \tag{7.6}$$

Tada je ν invarijantna mjera. Ako je stanje i pozitivno povratno, tada je

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{\mathbb{E}_i(T_i)}\,, \quad j \in S\,, \tag{7.7}$$

stacionarna distribucija.

Napomena 7.9 (a) Primjetimo da je zbog pretpostavke o povratnosti stanja i, $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, te uz $\mathbb{P}_i$ vrijedi $X_0 = X_{T_i} = i$. (b) ν_j definiran u (7.6) je očekivani broj posjeta stanju j prije prvog povratka Markovljevog lanca u stanje i (lanac starta iz i). Slično, π_j je očekivani broj posjeta stanju j normiran očekivanom duljinom izleta iz i, $\mathbb{E}_i(T_i)$. (c) Vrijedi sljedeća ekvivalentna reprezentacija za ν_j:

$$\begin{aligned}\nu_j &= \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i-1} 1_{(X_n=j)} = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(X_n=j,\, n<T_i)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i 1_{(X_n=j,\, n<T_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, n < T_i)\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Slično,

$$\nu_j = \mathbb{E}_i \sum_{n=1}^{T_i} 1_{(X_n=j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, n \le T_i)\,. \tag{7.9}$$

Dokaz: Dokažimo prvo da vrijedi $\nu = \nu P$ gdje dopuštamo mogućnost $\nu_j = +\infty$ (u tom slučaju koristimo konvenciju $\infty \cdot 0 = 0$). Prvo uočimo da je $\nu_i = 1$. Nadalje, za $n \ge 1$ događaj $\{n \le T_i\} = \{T_i < n\}^c$ ovisi samo o $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$, te upotrebom Markovljevog svojstva u trenutku $n-1$ dobivamo

$$\mathbb{P}_i(X_{n-1} = k, X_n = j, n \le T_i) = \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k, n \le T_i) p_{kj}\,, \quad j, k \in S\,. \tag{7.10}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}\nu_j &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, n \le T_i) \\ &= \sum_{k\in S} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, X_{n-1} = k, n \le T_i) \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_{n-1} = k, n \le T_i) \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_m = k, m \le T_i - 1) \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj}\, \mathbb{E}_i \sum_{m=0}^{T_i-1} 1_{(X_m=k)} \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \nu_k\,. \end{aligned}$$

Jednakost u prvom retku slijedi iz (7.9), u drugom po formuli potpune vjerojatnosti, u trećem zbog (7.10), u četvrtom zamjenom indeksa sumacije, u petom po (7.8) i u šestom po definiciji za ν_k.

Pokažimo sada da je $\nu_j < \infty$ za sve $j \in S$. Ukoliko $i \nrightarrow j$, za svaki $n \geq 0$ vrijedi $0 = \mathbb{P}_i(X_n = j) \geq \mathbb{P}_i(X_n = j, n \leq T_i)$, pa je stoga $\nu_j = 0$. Ako $i \longrightarrow j$, tada iz Napomene 6.9 slijedi $j \longrightarrow i$, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ji}^{(m)} > 0$. Iz $\nu = \nu P$ dobivamo da vrijedi i $\nu = \nu P^m$, pa imamo

$$1 = \nu_i = \sum_{k \in S} \nu_k p_{ki}^{(m)} \geq \nu_j p_{ji}^{(m)} .$$

Dakle, $\nu_j < \infty$. Budući da ν nije trivijalna ($\nu_i = 1$), slijedi da je ν invarijantna mjera.

Konačno, pretpostavimo da je i pozitivno povratno. Računamo,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} \nu_j &= \sum_{j \in S} \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1_{(X_n = j)} = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} \sum_{j \in S} 1_{(X_n = j)} \\ &= \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{T_i - 1} 1 = \mathbb{E}_i(T_i) . \end{aligned} \tag{7.11}$$

Dakle, za π_j definiran u (7.7) vrijedi

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{\sum_{k \in S} \nu_k} ,$$

što znači da je π vjerojatnosna distribucija i očito je stacionarna. □

Propozicija 7.10 *Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan, te neka je λ invarijantna mjera od X takva da je $\lambda_i = 1$. Tada je $\lambda_j \geq \nu_j$ za sve $j \in S$.*

Dokaz: Za svaki $j \in S$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{i_0 \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 j} = p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} \lambda_{i_0} p_{i_0 j} \\
&= p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} \left(\sum_{i_1 \in S} \lambda_{i_1} p_{i_1 i_0} \right) p_{i_0 j} \\
&= p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} \left(p_{i i_0} + \sum_{i_1 \neq i} \lambda_{i_1} p_{i_1 i_0} \right) p_{i_0 j} \\
&= \left(p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} p_{i\, i_0} p_{i_0 j} \right) + \sum_{i_0, i_1 \neq i} \lambda_{i_1} p_{i_1 i_0} p_{i_0 j} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= \left(p_{ij} + \sum_{i_0 \neq i} p_{i\, i_0} p_{i_0 j} + \cdots + \sum_{i_0, \ldots, i_{n-1} \neq i} p_{i\, i_{n-1}} \ldots p_{i_1 i_0} p_{i_0\, j} \right) \\
&\quad + \sum_{i_0, \ldots, i_n \neq i} \lambda_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \ldots p_{i_0 j} \\
&\geq \mathbb{P}_i(X_1 = j, T_i \geq 1) + \mathbb{P}_i(X_2 = j, T_i \geq 2) + \cdots + \mathbb{P}_i(X_n = j, T_i \geq n) \\
&\to \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j, n \leq T_i) = \nu_j \,, \quad \text{kada } n \to \infty \,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorem 7.11 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ ireducibilan i povratan Markovljev lanac. Tada je $\nu = (\nu_j : j \in S)$ invarijantna mjera takva da vrijedi $\nu_j > 0$ za sve $j \in S$. Ako je $\lambda = (\lambda_j : j \in S)$ neka druga invarijantna mjera za X tada postoji $c > 0$ takav da je $\lambda = c\nu$.*

Dokaz: U Propoziciji 7.8 pokazano je da je ν invarijantna mjera. Zbog ireducibilnosti postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(m)} > 0$. Zbog $\nu = \nu P^m$ vrijedi

$$
\nu_j = \sum_{k \in S} \nu_k p_{kj}^{(m)} \geq \nu_i p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m)} > 0 \,.
$$

Neka je λ invarijantna mjera za X. Tada postoji $k \in S$ takav da je $\lambda_k > 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda_i > 0$. Definiramo novu invarijantnu mjeru $\tilde{\lambda}$ sa $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j / \lambda_i$. Tada je $\tilde{\lambda}_i = 1$, pa po Propoziciji 7.10 slijedi $\tilde{\lambda} \geq \nu$. Definiramo $\mu = \tilde{\lambda} - \nu$. Tada μ zadovoljava $\mu = \mu P$, $\mu_j \geq 0$ za sve $j \in S$, te $\mu_i = 0$. Neka je $p_{ji}^{(m)} > 0$. Slijedi

$$
0 = \mu_i = \sum_{k \in S} \mu_k p_{ki}^{(m)} \geq \mu_j p_{ji}^{(m)}
$$

otkud $\mu_j = 0$. Dakle, $\tilde{\lambda}_j = \nu_j$, odnosno $\lambda_j = c\nu_j$ za $c = \lambda_i$. $\square$

Napomena 7.12 Uočite da iz teorema slijedi da ako je λ invarijantna mjera ireducibilnog i povratnog lanca X takva da je $\lambda_i = 1$, tada je $\lambda = \nu$.

Primjer 7.13 Promotrimo ponovno jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$. Već smo pokazali da je $\lambda = (\lambda_j : j \in \mathbb{Z})$ definirano s $\lambda_j = 1$ za sve $j \in \mathbb{Z}$ invarijantna mjera. Iz gornjeg teorema slijedi da je ta mjera jedinstvena do na pozitivnu multiplikativnu konstantu. Specijalno, ne postoji stacionarna distribucija.

Nadalje, neka je ν invarijantna mjera definirana s (7.6) gdje smo uzeli $i = 0$. Tada je $\nu_0 = 1$. Zbog $\lambda_0 = 1$, iz Napomene 7.12 slijedi $\nu = \lambda$. Specijalno, dokazali smo sljedeći rezultat:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{n=0}^{T_0-1} 1_{(X_n=j)} = 1\,, \quad \text{za sve } j \in \mathbb{Z}\,,$$

odnosno očekivani broj posjeta stanju j prije prvog povratka u stanje 0 jednak je jedan, neovisno o $j \in \mathbb{Z}$.

Teorem 7.14 *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s prijelaznom matricom P. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) svako stanje je pozitivno povratno;

(b) postoji pozitivno povratno stanje $i \in S$;

(c) X ima stacionarnu distribuciju π.

Nadalje, ako vrijedi (c), tada je $\mathbb{E}_j(T_j) = 1/\pi_j$ za sve $j \in S$.

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ (b) je očito. Tvrdnja (b) $\Rightarrow$ (c) dokazana je u Propoziciji 7.8. Dokažimo da (c) $\Rightarrow$ (a). Prvo pokazujemo da je lanac povratan. Pretpostavimo suprotno, t.j., da su sva stanja prolazna. Tada za sve $j, k \in S$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = 0$$

(vidi Napomenu 6.5 (c)). Za proizvoljan $k \in S$ imamo $\pi_k = \sum_{j\in S} \pi_j p_{jk}^{(n)}$, pa slijedi

$$\pi_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} \pi_j p_{jk}^{(n)} = \sum_{j\in S} \pi_j \left(\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)}\right) = 0\,,$$

gdje se zamjena limesa i sume opravdava teorem o dominiranoj konvergenciji ($p_{jk}^{(n)} \leq 1$). Međutim, to je u kontradikciji s činjenicom da je $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$. Dakle, lanac je povratan. Specijalno, možemo definirati invarijantnu mjeru ν formulom (7.6) (za stanje $i \in S$).

Nadalje, budući da je $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$, postoji $k \in S$ takav da je $\pi_k > 0$. Zbog ireducibilnosti, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ki}^{(n)} > 0$. Zato je $\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ji}^{(n)} \geq \pi_k p_{ki}^{(n)} > 0$, te možemo definirati $\lambda_j = \pi_j/\pi_i$. Tada je $\lambda = (\lambda_j : j \in S)$ invarijantna mjera takva daje $\lambda_i = 1$. Po Teoremu 7.11 vrijedi $\lambda = \nu$. Zajedno sa (7.11) to daje

$$\mathbb{E}_i(T_i) = \sum_{j \in S} \nu_j = \sum_{j \in S} \frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{1}{\pi_i} < \infty$$

što dokazuje da je i pozitivno povratno.

U gornjem dokazu stanje $i \in S$ bilo je upravo ono za koje je definirana invarijantna mjera ν. Budući da je lanac X ireducibilan i povratan, stanje i možemo zamijeniti bilo kojim drugim stanjem j, te definirati novu invarijantnu mjeru ν^j. Ponavljanjem gornjeg dokaza za stanje $j \in S$ slijedi da je j pozitivno povratno, te vrijedi $\mathbb{E}_j(T_j) = 1/\pi_j$. □

Primjer 7.15 (a) U Propoziciji 7.8 pokazano je da je postojanje barem jednog povratnog stanja dovoljno za egzistenciju invarijantne mjere. Pokazujemo da ako su sva stanja prolazna, tada invarijantna mjera ne mora, ali može postojati. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ determinističko gibanje na desno na $\mathbb{Z}_+$. Interpretacija invarijantne mjere kao raspodjele mase po stanjima odmah pokazuje da X nema invarijantnu mjeru (nakon prvog koraka sva masa iz stanja 0 ode u stanje 1, te više nema mase u stanju 0). Formalni dokaz činjenice da invarijantna mjera ne postoji je također lagan, te ga ostavljamo čitatelju. S druge strane, ako je $X = (X_n : n \geq 0)$ determinističko gibanje na desno na $\mathbb{Z}$, tada X ima invarijantnu mjeru. Zaista, stavimo li $\lambda_i = 1$ za sve $i \in \mathbb{Z}$, tada imamo

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda_j p_{ji} = \lambda_{i-1} p_{i-1\,i} = 1 = \lambda_i\,.$$

Drugi primjer prolaznog Markovljevog lanca koji ima invarijantnu mjeru je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^3$. I u ovom slučaju se jednostavno provjeri da je s $\lambda_i = 1$, $i \in \mathbb{Z}^3$, dana jedna invarijantna mjera.

(b) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i prijelaznom matricom

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Za $\alpha \in [0, 1]$ definiramo $\pi_\alpha = \big(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}(1-\alpha), \frac{1}{2}(1-\alpha)\big)$. Budući da je $\pi_\alpha = \pi_\alpha P$, slijedi da je π_α stacionarna distribucija za svaki $\alpha \in [0, 1]$. Uočite da su sva stanja povratna, ali lanac nije ireducibilan. Usporedite s Teoremom 7.11.

(c) Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ s prijelaznim vjerojatnostima $p_{i\,i-1} = q$, $p_{i\,i+1} = p$ za sve $i \in \mathbb{Z}$ gdje su $p, q \geq 0$, $p + q = 1$. Pretpostavimo da je $p \neq q$, t.j., da šetnja nije simetrična. Dobiveni lanac X je tada prolazan (vidi Primjer 6.13 (a)) i ireducibilan. Tražimo invarijantnu mjeru za X. Stavimo $\lambda_i = 1$ za sve $i \in \mathbb{Z}$. Budući da vrijedi $\lambda_{i-1} p_{i-1\,i} + \lambda_{i+1} p_{i+1\,i} = p + q = 1 = \lambda_i$, vidimo da je λ invarijantna mjera za X.

Međutim, uz λ postoji još jedna invarijantna mjera. Zaista, definiramo $\widetilde{\lambda}$ sa $\widetilde{\lambda}_i = (p/q)^i$, $i \in \mathbb{Z}$. Računamo

$$\widetilde{\lambda}_{i-1}\, p_{i-1\,i} + \widetilde{\lambda}_{i+1}\, p_{i+1\,i} = \left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} p + \left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} q = \left(\frac{p}{q}\right)^{i} (q+p) = \widetilde{\lambda}_i \,.$$