Poglavlje 6

Povratnost i prolaznost

U ovom poglavlju klasificiramo stanja Markovljevog lanca ovisno o tome da li se lanac beskonačno mnogo puta vraća u stanje ili ne. U prvom slučaju stanje ćemo zvati povratno (rekurentno), a inače prolazno (tranzijentno).

Prisjetimo se definicije prvog vremena povratka Markovljevog lanca u dano stanje. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Za stanje $i \in S$ stavimo

$$T_i = T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\}\,,$$

uz konvenciju da je $\min \emptyset = +\infty$.

Definicija 6.1 *Stanje* $i \in S$ *je* povratno *ako vrijedi* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$. *Stanje* $i \in S$ *je* prolazno *ako vrijedi* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$.

Uvedimo $\mathbb{P}_j$-distribuciju vremena T_i:

$$f_{ji}^{(n)} = \mathbb{P}_j(T_i = n)\,, \quad n \geq 1\,, \quad i, j \in S\,,$$

te $f_{ji}^{(0)} = 0$. Stavimo

$$f_{ji} := \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} = \sum_{n=}^{\infty} \mathbb{P}_j(T_i = n) = \mathbb{P}_j(T_i < \infty)\,.$$

Tada je za $j = i$, $f_{ii} = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$ vjerojatnost povratka u stanje i, dok je za $j \neq i$, f_{ji} vjerojatnost dolaska u stanje i uz početno stanje j. Dakle, $i \in S$ je povratno ako i samo ako je $f_{ii} = 1$. Uvedimo, nadalje, funkcije izvodnice nizova $(f_{ji}^{(n)} : n \geq 0)$ i $(p_{ji}^{(n)} : n \geq 0)$:

$$F_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(n)} s^n\,, \quad 0 < s < 1\,, \tag{6.1}$$

$$P_{ji}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} s^n\,, \quad 0 < s < 1\,. \tag{6.2}$$

Propozicija 6.2 *(Dekompozicija u prvom vremenu posjeta)*
(a) Za $i \in S$ vrijedi

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}\,, \quad n \geq 1\,,$$

te za $0 < s < 1$,

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}\,. \tag{6.3}$$

(b) Za $j \neq i$ vrijedi

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ji}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}\,, \quad n \geq 1\,,$$

te za $0 < s < 1$,

$$P_{ji}(s) = F_{ji}(s) P_{ii}(s)\,.$$

Dokaz: (a) Ako je $X_n = i$, tada je $T_i = k$ za neko $k \leq n$. Zato vrijedi

$$p_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_n = i, T_i = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_i = k, X_{T_i+n-k} = i)\,.$$

Po Teoremu 5.4, $(X_{T_i+l} : l \geq 0)$ je uvjetno na $X_{T_i} = i$, (δ^i, P)-Markovljev lanac nezavisan od $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i}$. Budući da je $X_{T_i} = i$ na $T_i = k \leq n$, slijedi da uvjet ima vjerojatnost 1, što znači da je $(X_{T_i+l} : l \geq 0)$, (δ^i, P)-Markovljev lanac nezavisan od $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i}$. Zato je

$$\mathbb{P}_i(T_i = k, X_{T_i+n-k} = i) = \mathbb{P}_i(T_i = k)\mathbb{P}_i(X_{n-k} = i) = f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}\,,$$

što dokazuje prvu tvrdnju (po definiciji je $f_{ii}^{(0)} = 0$). Za drugi dio tvrdnje računamo

$$\begin{aligned}
P_{ii}(s) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} s^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} s^{n-k} \right) f_{ii}^{(k)} s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}(s) f_{ii}^{(k)} s^k = P_{ii}(s) F_{ii}(s)\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku iskoristili $f_{ii}^{(0)} = 0$, a treći redak slijedi zamjenom poretka sumacije. Time je dio (a) dokazan. Tvrdnja (b) se dokazuje analogno. □

Vratimo se na definiciju funkcija izvodnica F_{ii} i P_{ii}, te pogledajmo što se događa kada pustimo $s \to 1$. Po Propoziciji 13.5 slijedi da je

$$\lim_{s\to 1} F_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}\,, \quad \lim_{s\to 1} P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\,,$$

s tim da u drugoj jednakosti obje strane mogu biti jednake $+\infty$. Ako pustimo $s \to 1$ u (6.3) i iskoristimo gornje jednakosti dobit ćemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)}} = \frac{1}{1-f_{ii}}\,, \tag{6.4}$$

s tim da obje strane mogu biti beskonačne.

Propozicija 6.3 *Stanje $i \in S$ je povratno ako i samo ako vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.*

Dokaz: Ako je $i \in S$ povratno tada je $f_{ii} = 1$, pa iz (6.4) slijedi $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$. Na isti način se vidi i obrat. □

Uočite da je neposredna posljedica gornje propozicije sljedeći kriterij prolaznosti: stanje $i \in S$ je prolazno ako i samo ako je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

Proučimo sada na koji način broj posjeta pojedinom stanju ovisi o tome da li je to stanje povratno ili prolazno. Označimo sa N_i broj posjeta stanju $i \in S$. Preciznije,

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\,.$$

Očekivani broj posjeta Markovljevog lanca stanju i, uz početno stanje $j \in S$, možemo izračunati na sljedeći način:

$$\mathbb{E}_j N_i = \mathbb{E}_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_j 1_{\{X_n=i\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(X_n = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)}\,. \tag{6.5}$$

Druga jednakost slijedi iz teorema o monotonoj konvergenciji. Specijalno, u slučaju $j = i$ slijedi da je stanje i povratno ako i samo ako je $\mathbb{E}_i N_i = +\infty$, odnosno očekivani broj posjeta stanju i je beskonačan. Alternativno, stanje i je prolazno ako i samo ako je $\mathbb{E}_i N_i < \infty$. U tom slučaju je $N_i < \infty$, $\mathbb{P}_i$-g.s. Pokazat ćemo i jaču tvrdnju, naime da je $i \in S$ prolazno ako i samo ako je $N_i < \infty$, $\mathbb{P}_i$-g.s. (što povlači da je i povratno ako i samo ako je $N_i = \infty$, $\mathbb{P}_i$-g.s.).

Sjetimo se definicije vremena $T_i = T_i^{(1)} = \min\{k > 0 : X_k = i\}$. Induktivno definiramo n-to vrijeme posjeta stanju $i \in S$ kao

$$T_i^{(n)} = \begin{cases} \min\{k > T_i^{(n-1)} : X_k = i\}\,, & T_i^{(n-1)} < \infty\,, \\ +\infty\,, & \text{inače} \end{cases} \qquad n \geq 2\,.$$

Želimo izračunati $\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty)$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty) &= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty, T_i^{(n)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty)\, \mathbb{P}(T_i^{(n)} < \infty \,|\, T_i^{(n-1)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_j(T_i^{(n-1)} < \infty)\, \mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty)\,. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo jako Markovljevo svojstvo. Zaista, po Teoremu 5.4, uvjetno na $X_{T_i^{(n-1)}} = i$ je $(X_{T_i^{(n-1)}+m} : m \geq 0)$ (δ^i, P)-Markovljev lanac nezavisan od $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i^{(n-1)}}$. Iz (6.6) indukcijom slijedi

$$\mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1}\,, \quad n \geq 1\,. \qquad (6.7)$$

Za $n = 1$ tvrdnja je istinita po definiciji. Pretpostavimo da (6.7) vrijedi za $n \geq 1$. Tada je zbog (6.6) $\mathbb{P}_j(T_i^{(n+1)} < \infty) = \mathbb{P}_j(T_i^{(n)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(1)} < \infty) = f_{ji} f_{ii}^{n-1} f_{ii} = f_{ji} f_{ii}^n$.

Teorem 6.4 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $i \in S$ *je povratno;*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$*;*

(iii) $\mathbb{E}_i N_i = \infty$*;*

(iv) $\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = 1$*.*

Dokaz: Već smo dokazali da su tvrdnje (i), (ii) i (iii) ekvivalentne. Očito je da iz (iv) slijedi (iii). Pretpostavimo da je $i \in S$ povratno, t.j., $f_{ii} = 1$. Uočimo da vrijedi $\{T_i^{(n)} < \infty\} = \{N_i \geq n+1\}$ $\mathbb{P}_i$-g.s. (zbog definicije slučajne varijable N_i slijedi $\mathbb{P}_i(N_i \geq 1) = 1$). Iz (6.7) slijedi da je $\mathbb{P}_i(N_i \geq n+1) = f_{ii}^n = 1$, te je

$$\mathbb{P}_i(N_i = \infty) = \mathbb{P}_i(\cap_{n=1}^{\infty}\{N_i \geq n\}) = \downarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(N_i \geq n) = 1\,.$$

□

Napomena 6.5 (a) Iz gornjeg teorema odmah slijedi da je ekvivalentno: (i) $i \in S$ je prolazno; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$; (iii) $\mathbb{E}_i N_i < \infty$; (iv) $\mathbb{P}_i(N_i < \infty) = 1$.
(b) Zbog $\mathbb{P}_i(N_i \geq n+1) = \mathbb{P}_i(T_i^{(n)} < \infty) = f_{ii}^n$, slijedi da je

$$\mathbb{P}_i(N_i = n) = \mathbb{P}_i(N_i \geq n) - \mathbb{P}_i(N_i \geq n+1) = f_{ii}^{n-1} - f_{ii}^n = (1 - f_{ii}) f_{ii}^{n-1}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Dakle, ako je $i \in S$ prolazno stanje, tada broj posjeta stanju i ima (uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$) geometrijsku distribuciju (na $\mathbb{N}$) s parametrom $1 - f_{ii}$.

(c) Izračunajmo još i $\mathbb{E}_j N_i$ za $j \neq i$. Vrijedi

$$\mathbb{E}_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(N_i > n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji} f_{ii}^n = \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}} . \tag{6.8}$$

Usporedimo li s (6.5) dobivamo

$$\mathbb{E}_j N_i = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} = \frac{f_{ji}}{1 - f_{ii}} . \tag{6.9}$$

Specijalno, ako je stanje $i \in S$ prolazno, tada je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ji}^{(n)} < \infty$.

Sada ćemo pokazati da su povratnost i prolaznost svojstva klase.

Propozicija 6.6 *Neka je $i \in S$ povratno stanje, te neka $i \longleftrightarrow j$. Tada je $j \in S$ povratno stanje.*

Napomena 6.7 Iz propozicije neposredno slijedi da ako je $i \in S$ prolazno, te $i \longleftrightarrow j$, tada je $j \in S$ prolazno. Zaista, kada bi j bilo povratno, onda bi iz propozicije zaključili da je $i \in S$ povratno. Propozicija nam kaže da ako je jedno stanje u nekoj klasi komunikacije povratno (odnosno prolazno), tada su sva stanja u toj klasi povratna (odnosno prolazna).

Dokaz: U dokazu koristimo karakterizaciju (ii) iz Teorema 6.4, te kriterij dostižnosti (ii) iz Propozicije 3.2. Po tom kriteriju slijedi da postoje $n \geq 1$ i $m \geq 1$ takvi da je $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$. Zato je za sve $k \geq 0$,

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} ,$$

otkud slijedi

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_{jj}^{(l)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} = p_{ji}^{(m)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \right) p_{ij}^{(n)} = +\infty .$$

Dakle, $j \in S$ je povratno. □

Propozicija 6.8 *Svaka povratna klasa je zatvorena.*

Dokaz: Neka je C neka povratna klasa. Pretpostavimo da C nije zatvorena. To po definiciji znači da postoji $i \in C$ takav da vrijedi $\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} < \infty) > 0$. Slijedi da postoje $j \notin C$ i $m \geq 1$ takvi da je

$$\mathbb{P}_i(X_m = j) > 0 .$$

Nadalje imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n\}) \\
&= \mathbb{P}_i(X_m = j)\mathbb{P}_i(\{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n\} \mid X_m = j) \\
&= \mathbb{P}_i(X_m = j)\mathbb{P}_j(\{X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n\}) = 0\,,
\end{aligned}$$

jer je $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) = 0$ (u suprotnom bi i i j komunicirali). Budući da je stanje i povratno vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ za najviše konačno mnogo } n\}) \\
&\leq \mathbb{P}_i(\{X_n = i \text{ za najviše konačno mnogo } n\}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem gornjih dviju jednakosti slijedi da je $\mathbb{P}_i(X_m = j) = 0$. Kontradikcija. □

Napomena 6.9 Dokaz gornje propozicije pokazuje i sljedeću tvrdnju: ako je $i \in S$ povratno stanje, te ako $i \longrightarrow j$, tada $j \longrightarrow i$. Zaista, zbog $i \longrightarrow j$ postoji $m > 0$ takav da je $\mathbb{P}_i(X_m = j) > 0$. Pretpostavimo li da i i j ne komuniciraju, dokaz Propozicije 6.8 daje kontradikiciju.

Propozicija 6.10 *Pretpostavimo da je S konačan prostor stanja. Tada S sadrži barem jedno povratno stanje.*

Dokaz: Pretpostavimo da su sva stanja prolazna. Tada za $j \in S$ i sve $i \in S$ vrijedi $\mathbb{E}_j N_i < \infty$ (vidi Napomenu 6.5 (c)). Zbog pretpostavke da je S konačan slijedi da je i

$$\mathbb{E}_j \sum_{i \in S} N_i = \sum_{i \in S} \mathbb{E}_j N_i < \infty\,.$$

S druge strane je očigledno $\sum_{i \in S} N_i = +\infty$, te je stoga $\mathbb{E}_j \sum_{i \in S} N_i = +\infty$. Kontradikcija. Znači da S sadrži barem jedno povratno stanje. □

Teorem 6.11 *Pretpostavimo da je Markovljev lanac X ireducibilan i povratan. Tada za sve $i \in S$ vrijedi $\mathbb{P}(T_i < \infty) = 1$.*

Dokaz: Budući da je $\mathbb{P}(T_i < \infty) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_0 = j)\mathbb{P}_j(T_i < \infty)$, dovoljno je pokazati da vrijedi $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) = 1$ za sve $i, j \in S$. Odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(m)} > 0$. Po Teoremu 6.4 (iv) imamo

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ za beskonačno mnogo } n) = \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ za neki } n \geq m+1) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_n = i \text{ za neki } n \geq m+1 \mid X_m = k)\mathbb{P}_i(X_m = k) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_k(T_i < \infty) p_{ik}^{(m)}
\end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi iz Markovljevog svojstva. Kada bi bilo $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) < 1$, imali bismo zbog $p_{ij}^{(m)} > 0$,

$$\sum_{k\in S} \mathbb{P}_k(T_i < \infty) p_{ik}^{(m)} < \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} = 1\,.$$

Kontradikcija! Dakle, $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) = 1$. □

Napomena 6.12 Alternativni dokaz da je $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) = 1$. Pretpostavimo suprotno, t.j., $\mathbb{P}_j(T_i < \infty) < 1$. Neka je $K = \min\{k \geq 1 : p_{ij}^{(k)} > 0\}$. Tada postoji niz $j_1, j_2, \ldots, j_{K-1}$ takav da je

$$p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{K-1} j} > 0\,.$$

Budući da je K minimalan, vrijedi $j_k \neq j$ za sve $1 \leq k \leq K-1$. Po pretpostavci $\mathbb{P}_j(T_i = \infty) > 0$. Iz jakog Markovljevog svojstva u T_j slijedi

$$\mathbb{P}_i(T_i = \infty) \geq p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{K-1} j}\, \mathbb{P}_j(T_i = \infty) > 0\,,$$

što je kontradikcija s i povratno.

Ovo poglavlje završit ćemo klasičnim primjerom jednostavne slučajne šetnje u $\mathbb{Z}^d$. Za analizu će nam važna biti sljedeća Stirlingova formula:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\; e^{-n} n^n} = 1\,. \tag{6.10}$$

Za nizove $(a_n : n \geq)$ i $(b_n : n \geq 1)$ uvodimo oznaku $a_n \sim b_n$ ako vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Uz ovaku uvedenu oznaku, Stirlingovu fromulu možemo pisati

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\; e^{-n} n^n\,.$$

Primjer 6.13 (a) Jednostavna slučajna šetnja u $\mathbb{Z}$. Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = +1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1-p$, $0 < p < 1$. Jednostavna slučajna šetnja $X = (X_n : n \geq 0)$ definirana je s $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Izračunajmo m-koračne prijelazne vjerojatnosti $p_{00}^{(m)}$. Ukoliko je $m = 2n+1$ neparan, tada je $p_{00}^{(m)} = 0$ (u početno stanje šetnja se može vratiti samo u parnom broju koraka). Za $m = 2n$ vrijedi

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \sim \frac{\sqrt{2\pi\, 2n}\, e^{-2n}(2n)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n)^2}\,(pq)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4pq)^n\,. \tag{6.11}$$

Gornja asimptotska jednakost povlači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4pq)^n \leq p_{00}^{(2n)} \leq 2\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4pq)^n\,.$$

Pretpostavimo $p = q = 1/2$, odnosno X je jednostavna simetrična slučajna šetnja. Tada je $4pq = 1$, pa je

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \geq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty\,.$$

Po Teoremu 6.4 slijedi da je X povratan. Ako je $p \neq 1$, tada je $4pq < 1$, pa imamo

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} p_{00}^{(2n)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(4pq)^n < +\infty\,.$$

Iz Napomene 6.5 slijedi da je X prolazan.
(b) Jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^2$. Neka je $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, te neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih vektora s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = \mathbf{e}_1) = \mathbb{P}(Y_1 = -\mathbf{e}_1) = \mathbb{P}(Y_1 = \mathbf{e}_2) = \mathbb{P}(Y_1 = -\mathbf{e}_2) = 1/4$. Jednostavna simetrična slučajna šetnja $X = (X_n : n \geq 0)$ u $\mathbb{Z}^2$ definirana je s $X_0 = 0$ i $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \geq 1$. Isto kao gore zaključujemo da je $p_{00}^{(m)} = 0$ u slučaju neparnog m. Za $m = 2n$, vjerojatnost svake trajektorije šetnje X koja je nakon $2n$ koraka ponovno u ishodištu jednaka je $(1/4)^{2n}$. Broj takvih trajektorija koje imaju k horizontalnih koraka jednak je

$$\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\,.$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned}
p_{00}^{(2n)} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right]^2,
\end{aligned}$$

gdje je u zadnjoj jednakosti korišten kombinatorni idenitet $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Iz (6.11) uz $p = q = 1/2$ slijedi

$$p_{00}^{(2n)} \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n}\,.$$

Na isti način kao u dijelu (a) zaključujemo da je $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = +\infty$, t.j., jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^2$ je povratna.
(c) Jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^3$. Neka je $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ i $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ te neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih slučajnih vektora s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = \pm\mathbf{e}_i) = 1/6$, $i = 1,2,3$. Jednostavna simetrična slučajna šetnja $X = (X_n : n \geq 0)$ u

$\mathbb{Z}^3$ definirana je s $X_0 = 0$ i $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \geq 1$. Isto kao gore zaključeujemo da je $p_{00}^{(m)} = 0$ u slučaju neparnog m. Za $m = 2n$ slično kao u dijelu (b) zaključujemo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
p_{00}^{(2n)} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{j,k=0}^{n} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j,k=0}^{n} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \max_{j,k} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right) \sum_{j,k=0}^{n} \frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \max_{j,k} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)
\end{aligned}
$$

gdje smo iskoritili činjenicu da je suma u predzadnjem retku jednaka 1 (to je vjerojatnost sigurnog događaja u polinomijalnoj shemi s tri ishoda, svaki vjerojatnosti 1/3).

Ako je $n = 3l$ za $l \in \mathbb{N}$, tada se jednostavno vidi da je

$$
\frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \leq \frac{1}{3^n} \frac{n!}{l!l!l!} .
$$

Također, $p_{00}^{(6l-2)} \leq 6^2 p_{00}^{(6l)}$ i $p_{00}^{(6l-4)} \leq 6^4 p_{00}^{(6l)}$. Slijedi da je

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} &\leq \sum_{l=0}^{\infty} p_{00}^{(6l)} + \sum_{l=1}^{\infty} p_{00}^{(6l-2)} + \sum_{l=1}^{\infty} p_{00}^{(6l-4)} \\
&\leq 3 \cdot 6^4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{6l}} \binom{6l}{3l} \frac{1}{3^{3l}} \frac{(3l)!}{l!l!l!}
\end{aligned}
$$

Upotrebom Stirlingove formule slijedi da je

$$
\frac{1}{2^{6l}} \binom{6l}{3l} \frac{1}{3^{3l}} \frac{(3l)!}{l!l!l!} \sim \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{l^{3/2}} .
$$

Budući da je $\sum_{l=1}^{\infty} l^{-3/2} < \infty$, na isti način kao u (a) zaključujemo da vrijedi

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty ,
$$

pa je po Napomeni 6.5, jednostavna simetrična slučajna šetnja u $\mathbb{Z}^3$ prolazna.