Poglavlje 5

Jako Markovljevo svojstvo

Markovljevo svojstvo kaže da je (1) uvjetno na $X_m = i$ buduće ponašanje Markovljevog lanca $(X_{m+n} : n \geq 0)$ jednako (po distribuciji) ponašanju Markovljevog lanca $(X_n : n \geq 0)$ koji kreće iz stanja i, te (2) uvjetno na $X_m = i$ budućnost $(X_{m+n} : n \geq 0)$ je nezavisna od prošlosti $(X_n : n = 0, \dots, m-1)$. Riječima, lanac je zaboravio prošlost do vremena m, zna samo da se u trenutku m nalazi u stanju i, te počinje ispočetka. Postavlja se pitanje da li takvo svojstvo Markovljevog lanca vrijedi i za neka slučajna vremena T, na primjer za T_i, prvo vrijeme pogađanja stanja i. Pokazat ćemo da Markovljevo svojstvo vrijedi i za tzv. vremena zaustavljanja.

Definicija 5.1 *Slučajna varijabla* $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ *zove se* vrijeme zaustavljanja *ako je za sve* $n \geq 0$

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)\,,$$

t.j., događaj $\{T \leq n\}$ *ovisi samo o* $X_0, X_1, \dots, X_n$.

Intuitivno, T je vrijeme zaustavljanja ako promatrajući Markovljev lanac do determinističkog vremena $n \geq 0$ možete reći da li se slučajno vrijeme T dogodilo do trenutka n ili ne.

Propozicija 5.2 *Slučajno vrijeme T je vrijeme zaustavljanja ako i samo ako za sve $n \geq 0$ vrijedi*

$$\{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)\,.$$

Dokaz: Jedan smjer slijedi iz jednakosti $\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$, a drugi iz $\{T \leq n\} = \cup_{k=0}^{n} \{T = k\}$. □

Primjer 5.3 (i) Determinističko vrijeme $T = m$, $m \geq 0$, je vrijeme zaustavljanja. Očito, $\{T = n\} = \Omega$ ili $\emptyset$, te se nalazi u svakoj σ-algebri.

(ii) Za $B \subset S$, prvo vrijeme pogađanja $T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}$ je vrijeme zaustavljanja. Zaista,

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n)\,.$$

Specijalno, T_j je vrijeme zaustavljanja. S druge strane, $T_j - 1$, t.j., vrijeme neposredno prije prvog posjeta stanju j, nije vrijeme zaustavljanja. Naime, ako je $T_j - 1 = n$, tada je $T_j = n + 1$, a na osnovu ponašanja lance do trenutka n ne možemo, općenito, reći da li će u trenutku $n + 1$ biti po prvi put u stanju j.

(iii) *Vrijeme zadnjeg izlaska* iz skupa $B \subset S$, definirano sa

$$L_B = \max\{n \geq 0 :\ X_n \in B\}\,, \quad \max \emptyset = 0\,,$$

nije vrijeme zaustavljanja. Očigledno, događaj $\{L_B = n\}$ ovisi o cijeloj budućnosti $(X_{n+m} :\ m \geq 0)$ Markovljevog lanca X.

Za dano vrijeme zaustavljanja $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ definiramo slučajnu varijablu X_T formulom

$$X_T(\omega) = X_n(\omega)\,, \quad \text{ako je } T(\omega) = n\,.$$

Primjetimo da je X_T definirana samo na skupu $\{T < \infty\}$. Iz jednakosti

$$\{X_T = i\} = \cup_{n=0}^{\infty} \{X_n = i, T = n\}\,,$$

vidi se da je X_T zaista slučajna varijabla.

Teorem 5.4 *Neka je $X = (X_n :\ n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac sa prostorom stanja S, te neka je T vrijeme zaustavljanja. Tada je uvjetno na $X_T = i$, slučajni proces $(X_{T+n} :\ n \geq 0)$ (δ^i, P)- Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots, X_T$.*

Dokaz: Neka je A događaj koji ovisi o slučajnim varijablama $X_0, X_1, \dots, X_T$. Trebamo pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_{T+n} = j_n, \dots, X_{T+1} = j_1, X_T = j_0\} \cap A \,|\, T < \infty, X_T = i) \\ = \;& \delta^i_{j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{n-1} j_n} \mathbb{P}(A \,|\, T < \infty, X_T = i)\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

za sve $n \geq 1$ i sve $j_0, j_1, \dots, j_n \in S$. Budući da A ovisi o $X_0, X_1, \dots, X_T$, to $A \cap \{T = m\}$ ovisi o $X_0, X_1, \dots, X_m$. Zbog Markovljevog svojstva u vremenu m vrijedi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_{T+n} = j_n, \dots, X_{T+1} = j_1, X_T = j_0\} \cap A \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\}) \\ = \;& \mathbb{P}(\{X_{T+n} = j_n, \dots, X_{T+1} = j_1, X_T = j_0\} \cap A \cap \{T = m\} \,|\, X_m = i) \mathbb{P}(X_m = i) \\ = \;& \mathbb{P}(\{X_{m+n} = j_n, \dots, X_{m+1} = j_1, X_m = j_0\} \cap A \cap \{T = m\} \,|\, X_m = i) \mathbb{P}(X_m = i) \\ = \;& \delta^i_{j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{n-1} j_n} \mathbb{P}(A \cap \{T = m\} \,|\, X_m = i) \mathbb{P}(X_m = i) \\ = \;& \delta^i_{j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{n-1} j_n} \mathbb{P}(A \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ovdje smo u trećoj jednakosti iskoristili (1.8) za $A \cap \{T = m\}$. Sumiramo li gornju jednakost po svim $m \geq 0$, te podijelimo sa $\mathbb{P}(T < \infty, X_T = i)$ dobit ćemo traženu jednakost (5.1). □

Fiksirajmo stanje $i \in S$. Promatramo vremena u kojima se Markovljev lanac X vraća u stanje i. Definiramo
$$T_i^{(1)} = \min\{n > 0 : X_n = i\}\,,$$
te indukcijom za $m \geq 1$
$$T_j^{(m+1)} = \begin{cases} \min\{n > T_i^{(m)} : X_n = i\}\,, & T_i^{(m)} < \infty\,, \\ \infty\,, & T_i^{(m)} = \infty\,. \end{cases}$$
Vrijeme $T_i^{(m)}$ zove se *vrijeme m-tog povratka* u stanje i. Uočite da je definicija vremena $T_i^{(1)}$ malo drugačija od definicije vremena pogađanja iz Primjera 5.3 (2). Budući da vrijedi
$$\{T_i^{(m)} = n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k = i\}} = m, X_n = i \right\}\,,$$
vidimo da je $T_i^{(m)}$ zaista vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je $T_i^{(m)} < \infty$. Po jakom Markovljevom svojstvu, predproces $X_0, X_1, \ldots, X_{T_i^{(m)}}$ i postproces $(X_{T_i^{(m)}+n} : n \geq 0)$ su nezavisni, i postproces je Markovljev lanac s istom prijelaznom matricom kao i originalni lanac X (uočite da zbog $\{X_{T_i^{(m)}} = i\} = \Omega$, uvjetna nezavisnost postaje nezavisnost). Dio puta Markovljevog lanca $(X_{T_i^{(m)}}, X_{T_i^{(m)}+1}, \ldots, X_{T_i^{(m+1)}-1})$ između dva posjeta stanju i naziva se *izlet* iz stanja i, ili *regenerativni ciklus*. Gornje razmatranje pokazuje da vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 5.5 *Neka je X (δ^i, P)-Markovljev lanac. Stavimo $T_i^{(0)} = 0$ i pretpostavimo da je $T_i^{(m)} < \infty$ za sve $m \geq 1$. Tada su regenerativni ciklusi*
$$(X_{T_i^{(m)}}, X_{T_i^{(m)}+1}, \ldots, X_{T_i^{(m+1)}-1})\,, m \geq 0\,,$$
nezavisni i jednako distribuirani. Specijalno, $(T_i^{(m)} - T_i^{(m-1)} : m \geq 1)$ je niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

Primjer 5.6 Neka je X Markovljev lanac na prostoru stanja S s prijelaznom matricom P. Pretpostavimo da lanac možemo opažati samo ako se nalazi u podskupu $B \subset S$, te da ne znamo što se događa izvan B. Neka su $Y_0, Y_1, \ldots$ naša opažanja Markovljevog lanca u B. Da li $(Y_m : m \geq 0)$ ima Markovljevo svojstvo?

Formalna definicija slučajnog procesa Y je sljedeća: definiramo vremena posjeta skupu B kao
$$T_0 = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}\,,$$
te za $m \geq 0$
$$T_{m+1} = \min\{n > T_m : X_n \in B\}\,.$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(T_m < \infty) = 1$ za sve $m \geq 0$. Sada možemo definirati $Y_m = X_{T_m}$. Uočite da je T_m vrijeme zaustavljanja, te stoga u trenutku T_m možemo primijeniti jako Markovljevo svojstvo. Za $i_0, \ldots, i_{m+1} \in B$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_{m+1} = i_{m+1} \,|\, Y_0 = i_0, \ldots, Y_m = i_m) \\ = \;& \mathbb{P}(X_{T_{m+1}} = i_{m+1} \,|\, X_{T_m} = i_m, \ldots, X_{T_0} = i_0) \\ = \;& \mathbb{P}_{i_m}(X_{T_1} = i_{m+1}) = q_{i_m i_{m+1}} \,, \end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi zbog jakog Markovljevog svojstva u trenutku T_m. Dakle, Y je Markovljev lanac na prostoru stanja B s prijelaznom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in B)$ gdje je

$$q_{ij} = \mathbb{P}_i(X_{T_1} = j) \,.$$

Preostaje izračunati prijelazne vjerojatnosti q_{ij}. Slično kao u dokazu Teorema 4.2 koristit ćemo analizu prvog koraka. Za $i \in S$ definiramo vjerojatnosti pogađanja $h_i^j = \mathbb{P}_i(X_{T_1} = j)$ i uočimo da za $i \in B$ vrijedi $q_{ij} = h_i^j$. Upotrebom Markovljevog svojstva u trećem retku slijedi

$$\begin{aligned} h_i^j &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_{T_1} = j, X_1 = k) \\ &= p_{ij} + \sum_{k \notin B} \mathbb{P}_i(X_{T_1} = j, X_1 = k) \\ &= p_{ij} + \sum_{k \notin B} \mathbb{P}_i(X_1 = k)\mathbb{P}_k(X_{T_1} = k) \\ &= p_{ij} + \sum_{k \notin B} p_{ik} h_k^j \,. \end{aligned}$$

Dakle, $h^j = (h_i^j : i \in S)$ je rješenje gornjeg sustava, i može se pokazati da je to minimalno nenegativno rješenje.

Zaključujemo da je $Y = (Y_m : m \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ gdje je $q_{ij} = h_i^j$.