Poglavlje 4

Apsorpcijske vjerojatnosti

U ovoj točki pokazujemo: (1) kako se računaju vjerojatnosti da Markovljev lanac bude apsorbiran u nekom danom stanju ili podskupu skupa stanja, odnosno vjerojatnosti da Markovljev lanac prije dođe u jedno od dva zadana stanja, te (2) očekivano vrijeme apsorpcije. Oba računa zasnivaju se na analizi prvog koraka lanca, što je općenito vrlo važna metoda proučavanja Markovljevih lanaca. Da bismo bolje ilustrirali metodu započinjemo jednostavnim primjerom.

Primjer 4.1 Markovljev lanac X na prostoru stanja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadan je prijelaznom matricom

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočite da su stanja 1 i 5 apsorpcijska. Neka su T_1 i T_5 vremena pogađanja stanja 1, odnosno 5, te neka je $T = T_1 \wedge T_5$ manje od ta dva vremena. U trenutku T lanac je apsorbiran bilo u stanju 1, bilo u stanju 5. Pretpostavimo da X kreće iz stanja 3. Zanima nas vjerojatnost da bude apsorbiran u stanju 5, t.j. $\mathbb{P}_3(T_5 < T_1)$, te očekivano vrijeme do apsorpcije, $\mathbb{E}_3(T)$.

Uvedimo sljedeće oznake: $h_i = \mathbb{P}_i(T_5 < T_1)$, $i \in S$. Tada je očito $h_1 = 0$ i $h_5 = 1$. Za $i = 2, 3, 4$ promatramo gdje se lanac nalazi nakon prvog koraka. Dobivamo:

$$\begin{aligned} h_i &= \mathbb{P}_i(T_5 < T_1) = \mathbb{P}_i(T_5 < T_1, X_1 = i-1) + \mathbb{P}_i(T_5 < T_1, X_1 = i+1) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 = i-1)\mathbb{P}_{i-1}(T_5 < T_1) + \mathbb{P}_i(X_1 = i+1)\mathbb{P}_{i+1}(T_5 < T_1) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 = i-1)h_{i-1} + \mathbb{P}_i(X_1 = i+1)h_{i+1}\,, \end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi iz Markovljevog svojstva. Uz poznato $h_1 = 0$ i $h_5 = 1$ to nam daje sljedeći sustav jednadžbi za h_2, h_3, h_4:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2}h_3 \\ h_3 &= \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_4 \\ h_4 &= \frac{3}{4}h_3 + \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $h_2 = 1/6$, $h_3 = 1/3$ i $h_4 = 1/2$.

Izračunajmo sada traženo očekivanje $\mathbb{E}_3(T)$ istom metodom. Stavimo $g_i = \mathbb{E}_i(T)$. Očito je $g_1 = g_5 = 0$. Nadalje, za $i = 2, 3, 4$ vrijedi

$$\begin{aligned} g_i &= \mathbb{E}_i(T) = \mathbb{E}_i(T; X_1 = i-1) + \mathbb{E}_i(T; X_1 = i+1) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 = i-1)\mathbb{E}_{i-1}(T+1) + \mathbb{P}_i(X_1 = i+1)\mathbb{E}_{i+1}(T+1) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 = i-1)\mathbb{E}_{i-1}(T) + \mathbb{P}_i(X_1 = i+1)\mathbb{E}_{i+1}(T) + 1 \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 = i-1)g_{i-1} + \mathbb{P}_{i+1}(X_1 = i+1)g_{i+1} + 1\,. \end{aligned}$$

Opet, koristeći rubne uvjete $g_1 = g_5 = 0$ dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{1}{2}g_3 + 1 \\ g_3 &= \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{2}g_4 + 1 \\ g_4 &= \frac{3}{4}g_3 + 1\,. \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $g_1 = 11/3$, $g_3 = 16/3$ i $g_4 = 5$.

Sada ćemo riješiti malom općenitiji problem u generalnom obliku. Neka je $B \subset S$ podskup skupa stanja, te neka je T_B vrijeme pogađanja skupa B. Definiramo vjerojatnosti pogađanja (u konačnom vremenu) sa

$$h_i^B = \mathbb{P}_i(T_B < \infty)\,.$$

Ako je B zatvoren podskup od S, tada su h_i^B apsorpcijske vjerojatnosti. Uočite da se prethodni primjer može svesti u ovaj kontekst: ako je $A \subset S$ neki drugi zatvoren skup stanja disjunktan sa B, tada je $\mathbb{P}_i(T_B < \infty) = \mathbb{P}_i(T_B < T_A)$.

Teorem 4.2 *Vektor vjerojatnosti pogađanja $h^B = (h_i^B : i \in S)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} h_i^B = 1 & \text{za } i \in B\,, \\ h_i^B = \sum_{j\in S} p_{ij}h_j^B & \text{za } i \notin B\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Minimalnost znači da ako je $x = (x_i : i \in S)$ neko drugo nenegativno rješenje gornjeg sustava, tada vrijedi $x_i \geq h_i^B$ za sve $i \in S$. Rješenje sustava (4.1) općenito ne mora biti jedinstveno, te ima smisla govoriti o minimalnom rješenju. Kao primjer promatrajte lanac sa tri stanja, 1, 2 i 3, gdje su 1 i 2 apsorpcijska stanja, a iz stanja 3 se s vjerojatnosti 1/2 prelazi u jedno od preostala dva stanja. Uvjerite se da tada sustav (4.1) ima beskonačno mnogo nenegativnih rješenja oblika $h_1 = 1$, $h_2 = 2h_3 - 1$, h_3 proizvoljan realan broj veći ili jednak 1/2. Minimalno rješenje je $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ i $h_3 = 1/2$.

Dokaz: Prvo pokazujemo da $h^B = (h_i^B : i \in S)$ zadovoljava sustav (4.1). Za $i \in B$ je očigledno $h_i^B = \mathbb{P}_i(T_B < \infty) = 1$. Za $i \notin B$ je $T_B \geq 1$, pa zbog Markovljevog svojstva vrijedi $\mathbb{P}_i(T_B < \infty \,|\, X_1 = j) = \mathbb{P}_j(T_B < \infty)$. Zato je

$$h_i^B = \sum_{j \in S} \mathbb{P}_i(T_B < \infty, X_1 = j) = \sum_{j \in S} \mathbb{P}_i(X_1 = j)\mathbb{P}_i(T_B < \infty \,|\, X_1 = j) = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^B \,.$$

Minimalnost: pretpostavimo da je $x = (x_i : i \in S)$ neko drugo nenegativno rješenje sustava (4.1). Tada je $x_i = 1 = h_i^B$ za sve $i \in B$. Za $i \notin B$ vrijedi

$$x_i = \sum_{j \in S} p_{ij} x_j = \sum_{j \in B} p_{ij} + \sum_{j \notin B} p_{ij} x_j \,.$$

Uvrstimo $x_j = \sum_{k \in B} p_{jk} + \sum_{k \notin B} p_{jk} x_k$ u gornju formulu i dobivamo

$$x_i = \sum_{j \in B} p_{ij} + \sum_{j \notin B} p_{ij} \left(\sum_{k \in B} p_{jk} + \sum_{k \notin B} p_{jk} x_k \right) .$$

Zbog $\sum_{j \in B} p_{ij} = \mathbb{P}_i(X_1 \in B)$, te $\sum_{j \notin B} \sum_{k \in B} p_{ij} p_{jk} = \mathbb{P}_i(X_1 \notin B, X_2 \in B)$, gornju jednakost možemo zapisati kao

$$x_i = \mathbb{P}_i(X_1 \in B) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin B, X_2 \in B) + \sum_{j \notin B} \sum_{k \notin B} p_{ij} p_{jk} x_k \,.$$

Iteriranjem ove jednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned} x_i &= \mathbb{P}_i(X_1 \in B) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin B, X_2 \in B) + \cdots + \mathbb{P}_i(X_1 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B) \\ &+ \sum_{j_1 \notin B} \cdots \sum_{j_n \notin B} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n} \,, \end{aligned}$$

za sve $n \geq 1$. Budući da su komponente vektora x nennegativne, to isto vrijedi za n-struku sumu na desnoj strani. Nadalje, $\mathbb{P}_i(X_1 \in B) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin B, X_2 \in B) + \cdots + \mathbb{P}_i(X_1 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B) = \mathbb{P}_i(T_B \leq n)$. Zato za sve $n \geq 1$ vrijedi $x_i \geq \mathbb{P}_i(T_B \leq n)$. Puštanjem $n \to \infty$ dobivamo

$$x_i \geq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(T_B \leq n) = \mathbb{P}_i(T_B < \infty) = h_i^B \,.$$

□

Sada dokazujemo opći rezultat za očekivanje vremena pogađanja skupa B. Stavimo $g_i = \mathbb{E}_i(T_B)$, $i \in S$.

Teorem 4.3 *Vektor očekivanja vremena pogađanja $g^B = (g_i^B : i \in S)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} g_i^B = 0 & \text{za } i \in B\,, \\ g_i^B = 1 + \sum_{j\in S} p_{ij} g_j^B & \text{za } i \notin B\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dokaz: Pokazujemo da $g^B = (h_i^B : i \in S)$ zadovoljava sustav (4.2). Za $i \in B$ je $\mathbb{P}_i(T_B = 0) = 1$, pa je $g_i^B = \mathbb{E}_i(T_B) = 0$. Za $i \notin B$ je $T_B \geq 1$, pa zbog Markovljevog svojstva vrijedi $\mathbb{E}_i(T_B \,|\, X_1 = j) = 1 + \mathbb{E}_j(T_B)$. Zato je

$$g_i^B = \sum_{j\in S} \mathbb{E}_i(T_B; X_1 = j) = \sum_{j\in S} \mathbb{P}_i(X_1 = j)\mathbb{E}_i(T_B \,|\, X_1 = j) = 1 + \sum_{j\in S} p_{ij} g_j^B\,.$$

Pretpostavimo sada da je $y = (y_i : i \in S)$ bilo koje rješenje sustava (4.2). Tada je $g_i^B = y_i = 0$ ako je $i \in B$. Za $i \notin B$ vrijedi

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + \sum_{j\notin B} p_{ij} y_j \\ &= 1 + \sum_{j\notin B} p_{ij} \left(1 + \sum_{k\notin B} p_{jk} y_k \right) \\ &= \mathbb{P}_i(T_B \geq 1) + \mathbb{P}_i(T_B \geq 2) + \sum_{j\notin B}\sum_{k\notin B} p_{ij} p_{jk} y_k\,. \end{aligned}$$

Indukcijom slijedi da za svaki $n \geq 2$ vrijedi

$$y_i = \mathbb{P}_i(T_B \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_i(T_B \geq n) + \sum_{j_1\notin B} \cdots \sum_{j_n\notin B} p_{i\,j_1} p_{j_1\,j_2} \ldots p_{j_{n-1}\,j_n} y_{j_n}\,.$$

Budući da su svi $y \geq 0$ slijedi $y_i \geq \mathbb{P}_i(T_B \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_i(T_B \geq n)$, te puštanjem $n \to \infty$,

$$y_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_B \geq n) = \mathbb{E}_i(T_B) = g_i^B\,.$$

□