Poglavlje 3

Dekompozicija prostora stanja: klase

Za razumijevanje evolucije Markovljevog lanca važno je znati koji su putevi kroz prostor stanja mogući. Kao najjednostavnije postavlja se pitanje koja stanja lanac uopće može posjetiti krenuvši iz nekog zadanog stanja. Kao rezultat analize u ovoj točki pokazat će se da se Markovljev lanac može razbiti u manje dijelove koje je (ponekad) lakše razumijeti.

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i prijelaznom matricom P. Za $B \subset S$ definiramo *prvo vrijeme pogađanja* tog skupa kao

$$T_B = \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}\,, \tag{3.1}$$

uz konvenciju da je $\min \emptyset = +\infty$. U slučaju $B = \{j\}$ za $j \in S$ zbog jednostavnosti pišemo T_j umjesto preciznijeg $T_{\{j\}}$.

Definicija 3.1 *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j* dostižno *iz i, u oznaci $i \longrightarrow j$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0\,.$$

Primjetite da se skup $\{T_j < \infty\}$ može zapisati kao $\cup_{n=0}^{\infty}\{X_n = j\} = \{X_n = j \text{ za neko } n \geq 0\}$, što i dokazuje da je to događaj.

Riječima, stanje j dostižno je iz stanja i ako lanac s pozitivnom vjerojatnosti posjeti j krenuvši iz i. Uočite da vrijedi $i \longrightarrow i$.

Propozicija 3.2 *(Kriterij dostižnosti) Sljedeća svojstva su ekvivalentna:*

(i) $i \longrightarrow j$,

(ii) $p_{ij}^{(n)} > 0$ *za neko* $n \geq 0$,

(iii) $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\dots p_{i_{n-1}j} > 0$ *za neka stanja* $i_1, \dots, i_{n-1}$.

Dokaz: Budući da je $\{X_n = j\} \subset \cup_{k=0}^{\infty}\{X_k = j\} = \{T_j < \infty\}$, slijedi

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j) \leq \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i(\cup_{k=0}^{\infty}\{X_k = j\}) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}_i(X_k = j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)}\,.$$

To dokazuje ekvivalenciju (i) i (ii). Ekvivalencija tvrdnji (ii) i (iii) slijedi iz formule

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} \, .$$

□

Sada jednostavno možemo pokazati da ako $i \longrightarrow j$, te $j \longrightarrow k$, tada $i \longrightarrow k$. Zaista, neka je $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{jk}^{(m)} > 0$. Tada je zbog Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(k)} > 0 \, .$$

Definicija 3.3 *Stanja $i, j \in S$* komuniciraju*, u oznaci $i \longleftrightarrow j$, ako vrijedi $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$.*

Relacija komuniciranja je relacija ekvivalencije na $S \times S$, te stoga inducira particiju prostora stanja S na klase. Označimo te klase sa $C_1, C_2, \dots$ (konačno ili beskonačno klasa). Dakle, $C_k \cap C_l = \emptyset$ za $k \neq l$, te $\cup_l C_l = S$. Sva stanja iz jedne klase međusobno komuniciraju.

Primjer 3.4 (1) Deterministički monoton Markovljev lanac na $\mathbb{Z}_+$. Trivijalno se vidi da $i \longrightarrow j$ ako i samo ako je $j \geq i$. Slijedi da $i \longleftrightarrow j$ ako i samo ako je $j = i$. Zaključujemo da su klase jednočlane, te da ih ima prebrojivo mnogo: $C_i = \{i\}$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

(2) Kockarev kraj na $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Budući da su stanja 0 i 3 apsorbirajuća, to svako od njih čini klasu. Preostala dva stanja 1 i 2 međusobno komuniciraju, te čine klasu. Dakle, klase komuniciranja ovog lanca su $\{0\}, \{1, 2\}$ i $\{3\}$.

(3) Markovljev lanac na prostoru stanja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i prijelaznom matricom

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} .$$

Iz grafa Markovljevog lanca vidimo da postoje dvije klase: $\{1, 3\}$ i $\{2, 4\}$.

Definicija 3.5 *Markovljev lanac X je* ireducibilan *ako se prostor stanja S sastoji samo od jedne klase komuniciranja, t.j., za sve $i, j \in S$ vrijedi $i \longleftrightarrow j$.*

Niti jedan od Markovljevih lanaca u gornjem primjeru nije ireducibilan.

Za podskup $C \subset S$ skupa stanja kažemo da je *zatvoren* ako za svako stanje $i \in C$ vrijedi

$$\mathbb{P}_i(T_{S \setminus C} = \infty) = 1 \, .$$

Riječima, skup C je zatvoren ako lanac ne može izaći iz C. S druge strane, u zatvoren skup se može ući. U Primjeru 3.4 (2), klase $\{0\}$ i $\{3\}$ su zatvorene, dok klasa $\{1, 2\}$ nije zatvorena.

Za stanje $j \in S$ kažemo da je *apsorbirajuće* ako je $\{j\}$ zatvoren skup. To znači da nakon što lanac uđe u stanje j tamo ostane zauvijek.