Poglavlje 2

Primjeri Markovljevih lanaca

O ovoj točki navodimo razne primjere Markovljevih lanaca.

Primjer 2.1 Nezavisni pokusi. Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u skupu $S = \{1, 2, \ldots, m\}$, te neka je distribucija tih slučajnih varijabli dana s $\mathbb{P}(Y_1 = i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Tada je zbog nezavisnosti

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} \,|\, Y_n = i_n, \ldots, Y_0 = i_0) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1}) = p_{i_{n+1}} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} \,|\, Y_n = i_n)\,.$$

Slijedi da je Y Markovljev lanac s prijelaznom matricom

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo da je nezavisnost specijalan slučaj Markovljeve zavisnosti. Međutim, upravo zbog toga što slučajna varijabla Y_{n+1} ne zavisi niti od Y_n, kretanje Markovljevog lanaca Y je vrlo teško predvijedti.

Primjer 2.2 Slučajna šetnja. Neka je $(Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}$ s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = k) = p_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Definiramo *slučajnu šetnju* $X = (X_n : n \geq 0)$ sa

$$X_0 = 0\,, \quad X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_i\,,\, n \geq 1\,.$$

Uočite da za $n \geq 0$ vrijedi $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$. Nadalje,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} + i_n = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = p_{i_{n+1} - i_n} \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n)\,, \end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi zbog nezavisnosti slučajne varijable Y_{n+1} sa $X_0, X_1, \dots, X_n$. Dakle, slučajna šetnja X je Markovljev lanac.

Jedan od najzanimljivijih primjera slučajne šetnje je jednostavna slučajna šetnja kod koje su slučajne varijable Y_k Bernoullijeve na $\{-1, 1\}$. Preciznije, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = q = 1 - p$, $0 < p < 1$. Pripadajući Markovljev lanac X pomiče se samo za jedno mjesto ulijevo ili udesno. Prijelazne vjerojatnosti su $p_{i\,i-1} = q$, $p_{i\,i+1} = p$, $p_{ij} = 0$, $j \neq i-1, i+1$. Za jednostavnu slučajnu šetnju kažemo da je *simetrična* ako je $p = q = 1/2$.

Slučajne šetnje možemo promatrati i na d-dimenzionalnoj rešetci $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Sa $\mathbf{e}_i$ označimo vektor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0) \in \mathbb{Z}^d$ s jedinicom na i-tom mjestu. Pretpostavimo da je $Y = (Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih vektora s vrijednostima u skupu $\{\pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2, \dots, \pm \mathbf{e}_d\}$ s distribucijom $\mathbb{P}(Y_1 = \mathbf{e}_i) = \mathbb{P}(Y_1 = -\mathbf{e}_i) = 1/2d$. Definiramo $X_0 = 0$, te $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, za $n \geq 1$. Tada se $X = (X_n : n \geq 0)$ zove jednostavna, simetrična d-dimenzionalna slučajna šetnja. U svakom trenutku se X može pomaknuti na jedno od $2d$ susjednih mjesta na rešetci.

Primjer 2.3 Kockarev kraj. Kockar dolazi u kasino s iznosom od k novčanih jedinica gdje je k strogo pozitivan broj. Igra na sreću koju je odlučio igrati ima dva ishoda: dobitak ili gubitak jedne novčane jedinice. Kockar dobiva igru na sreću s vjerojatnosti $0 < p < 1$, a gubi s vjerojatnosti $q = 1 - p$, nezavisno od svih prethodnih igara. U trenutku kada kockar ostane bez novaca igra završava (kockar je bankrotirao, došao mu je kraj). Pitanje: kolika je vjerojatnost da će kockar prije ili kasnije bankrotirati?

Kretanje novčanog iznosa kockara modeliramo slučajnim procesom $X = (X_n : n \geq 0)$. Označimo sa X_n novčani iznos koji kockar posjeduje u trenutku $n \geq 0$ (ako još nije bankrotirao; ako je bankrotirao prije trenutka n, tada stavljamo $X_n = 0$). Tada X_n prima vrijednosti u skupu $\mathbb{Z}_+$, te vrijedi $X_0 = k$. Prijelazne vjerojatnosti iz stanja $i > 0$ dane su sa $p_{i\,i-1} = q$, $p_{i\,i+1} = p$, te $p_{ij} = 0$ za $j \neq i$. Stanje 0 je apsorpcijsko: $p_{00} = 1$. Zaključujemo da je X Markovljev lanac. Uočite sličnost između ovog Markovljevog lanca i slučajne šetnje definirane u prethodnom primjeru. Na Markovljev lanac X iz ovog primjera možemo gledati kao na slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}_+$ s (apsorbirajućom) granicom u stanju 0.

Zamislimo situaciju da je kockar zadovoljan novčanim iznosom m, $m > k$, te odlazi sretan iz kasina čim dostigne taj iznos. Kolika je sada vjerojatnost da će kockar bankrotirati prije nego što dostigne zadovoljavajući iznos? Ovakvu igru modeliramo na sličan način kao malo prije, s tim da ukoliko je $X_n = m$ za neki $n \geq 0$, tada je $X_l = m$ za sve $l \geq n$. Prijelazne vjerojatnosti u stanjima $\{0, 1, \dots, m-1\}$ ostaju iste, dok je $p_{mm} = 1$. Dobiveni Markovljev lanac možemo interpretirati kao slučajnu šetnju na $\{0, 1, \dots, m-1, m\}$ s (apsorbirajućim) granicama u 0 i m.

Primjer 2.4 Proces rađanja i umiranja. Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa prostorom stanja $\mathbb{Z}_+$ i prijelaznim vjerojatnostima $p_{i\,i-1} = q_i$, $p_{i\,i+1} = p_i$, $0 < p_i < 1$, $p_i + q_i = 1$ za $i = 1, 2, \dots$, te $p_{00} = 1$. Ovakav lanac modelira veličinu neke populacije zabilježene u trenutku kada se mijenja. Tada je p_i vjerojatnost da će se populacija veličine i povećati (rođenje) prije nego se smanji (smrt). Markovljev lanac X zove se *lanac rađanja* *i umiranja.* Uočite da za slučaj $p_i = p$ za sve $i \geq 1$, dobivamo Markovljev lanac opisan u Primjeru 2.3.

Primjer 2.5 Niz uspjeha. Neka je $Y = (Y_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih Bernoullijevih varijabli u $\{0,1\}$, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$, te neka X_n, $n \geq 1$, označava niz uzastopnih uspjeha prije (i uključivo) trenutka n. Formalno možemo pisati

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} i\, 1_{\{Y_n=1, Y_{n-1}=1, \ldots, Y_{n-i+1}=1, Y_{n-i}=0\}}\,.$$

Uočimo da ako je $X_n = i$, tada je $X_{n+1} = i+1$ ako je $Y_{n+1} = 1$, ili je $X_{n+1} = 0$, ako je $Y_{n+1} = 0$. Očito je da vrijednost od X_{n+1} ovisi samo o X_n (a ne i o prethodnim vrijednostima procesa X), što znači da je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prostorom stanja $\mathbb{Z}_+$. Prijelazne vjerojatnosti su $p_{i\,i+1} = p$, $p_{i0} = q = 1-p$, te $p_{ij} = 0$ za $j \neq 0, i+1$, pa je prijelazna matrica

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.6 Deterministički monoton Markovljev lanac. Promatramo česticu koja se kreće po $\mathbb{Z}_+$ i to tako da se u svakom trenutku pomakne jedan korak udesno. Označimo sa X_n poziciju čestice u trenutku n. Pretpostavimo da čestica kreće iz stanja 0, t.j., $X_0 = 0$. Tada je $X_n = n$. Niz $X = (X_n : n \geq 0)$ je Markovljev lanac s prijelaznim vjerojatnostima $p_{i\,i+1} = 1$, te $p_{ij} = 0$ za $j \neq i+1$, $i \geq 0$. Budući da kretanje tog lanca ne uključuje nikakvu slučajnost, lanac se naziva *determinističkim monotonim Markovljevim lancom (na desno)* na $\mathbb{Z}_+$.

Mala modifikacija gornje situacije sastoji se u tome da prostor stanja promijenimo u $\mathbb{Z}$, i zadamo neku početnu distribuciju λ na $\mathbb{Z}$. Prijelazne vjerojatnosti ostaju iste: za $i \in \mathbb{Z}$, $p_{i\,i+1} = 1$.

Oba Markovljeva lanca, iako trivijalna, važna su kao primjeri.

Primjer 2.7 Proces grananja. Proces grananja opisuje populaciju koja započinje s jednom jedinkom u trenutku $n = 0$. U trenutku $n = 1$ ta jedinka daje slučajan broj potomaka s nekom distribucijom na $\{0, 1, 2, \ldots\}$, a sama nestaje iz populacije. U trenutku $n = 2$, svaka od jedinki u populaciji daje slučajan broj potomaka, s istom distribucijom, nezavisno jedna od druge. Postupak se nastavlja sve dok u populaciji postoje jedinke. Označimo sa X_n broj jedinki u populaciji u trenutku $n \geq 0$. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zove se *proces grananja* (ili *Galton-Watsonov proces*).

Definirajmo formalno proces X. Neka je $\{Z_{n,j} : n \geq 1, j \geq 1\}$ familija nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$, te neka je $\mathbb{P}(Z_{n,j} = k) = p_k$, $k \geq 0$. Stavimo $X_0 = 1$, te za $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} Z_{n,j} = Z_{n,1} + \cdots + Z_{n,X_{n-1}}\,,$$

uz konvenciju da je $X_n = 0$ ukoliko je $X_{n-1} = 0$. Interpretacija gornje definicije je sljedeća: u trenutku $n-1$ broj jedinki u populaciji je X_{n-1}. Jedinka j daje $Z_{n,j}$ potomaka (a sama nestaje iz populacije). Broj jedinki u populaciji u trenutku n jednak je zbroju svih potomaka jedinki $n-1$-ve generacije, t.j., gornjoj sumi. Broj pribrojnika u toj sumi jednak je slučajnom broju jedinki u $n-1$-voj generaciji.

Pokazujemo da proces X ima Markovljevo svojstvo: za $n \geq 1$ je

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{i_{n-1}} Z_{n,j} = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{i_{n-1}} Z_{n,j} = i_n\right). \end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti koristili smo da su slučajne varijable $Z_{n,1}, \dots, Z_{n,i_{n-1}}$ nezavisne od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ (jer su te varijable funkcije familije $\{Z_{l,j} : 1 \leq l \leq n-1, j \geq 1\}$). Isti račun pokazuje da je i $\mathbb{P}(X_n = i_n \,|\, X_{n-1} = i_{n-1})$ jednak desnoj strani u gornjoj formuli, što znači da je X Markovljev lanac. Prijelazne vjerojatnosti dane su sa

$$p_{ij} = (X_n = j \,|\, X_{n-1} = i) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{i} Z_{n,k} = j\right) = p_j^{*i},$$

gdje na desnoj strani stoji vrijednost u j i-te konvolucije vjerojatnosne distribucije $(p_k : k \geq 0)$. Osnovno pitanje za proces grananja je vjerojatnost izumiranja populacije $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}\{X_n = 0\})$.

Primjetimo da su neki od gornjih primjera sljedećeg tipa: dan je niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli $Y = (Y_n : n \geq 1)$, te početna pozicija X_0 Markovljevog lanca. Vrijednost lanca X_{n+1} ovisi o X_n i slučajnoj varijabli Y_{n+1}. Drugim riječima, na prirodan način vrijedi da je X_{n+1} funkcija od X_n i Y_{n+1}, recimo $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$. U Primjeru 2.1, $f(i,j) = j$, u Primjeru 2.2, $f(i,j) = i + j$, a u Primjeru 2.6 je $f(i,j) = i + 1$ (tu u stvari nije dan niz Y, ali se možemo pretvarati da jeste). U sljedeća dva teorema pokazujemo uz koje uvjete takva metoda generira Markovljev lanac.

Teorem 2.8 *Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih elemenata u nekom prostoru E (npr., $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^d$, $E = \mathbb{R}^\infty$...), $f : S \times E \to S$ funkcija, te neka je X_0 slučajna varijabla u S nezavisna od niza Y. Za $n \geq 1$ definiramo*

$$X_n = f(X_{n-1}, Y_n). \tag{2.1}$$

Tada je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac.

Dokaz: Računamo,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(X_n, Y_{n+1}) = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(i, Y_{n+1}) = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(i, Y_{n+1}) = j), \end{aligned}$$

gdje zadnji redak slijedi iz nezavisnosti slučajnog elementa Y_{n+1} i familije $X_0, X_1, \ldots, X_n$ (te slučajne varijable su funkcije slučajnih elemenata $Y_1, \ldots, Y_n$ koji su po pretpostavci nezavisni sa Y_{n+1}). Na isti način pokaže se da je $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = \mathbb{P}(f(i, Y_{n+1}) = j)$. Slijedi da je X Markovljev lanac s prijelaznim vjerojatnostima $p_{ij} = \mathbb{P}(f(i, Y_1) = j)$. $\square$

Uz malo truda može se pokazati da se i Primjeri 2.3, 2.5, i 2.7 mogu na prirodan način svesti pod shemu opisanu u Teoremu 2.8. S druge strane, lanac iz Primjera 2.4 ne može se na prirodan način opisati u gornjem obliku. Mala modifikacija Teorema 2.8 proširuje klasu homogenih Markovljevih lanaca koji se mogu opisati formulom (2.1).

Teorem 2.9 *Neka je $Y = (Y_n : n \geq 0)$ niz slučajnih elemenata u nekom prostoru E, X_0 slučajna varijabla s vrijednostima u S i $f : S \times E \to S$ funkcija. Za $n \geq 1$ definiramo X_n formulom (2.1). Pretpostavimo da je za sve $n \geq 1$ Y_{n+1} uvjetno nezavisna od $Y_n, \ldots, Y_1, X_{n-1}, \ldots, X_0$ uz dano X_n, t.j., da za sve $k, k_1, \ldots, k_n \in E$ i sve $i_1, \ldots, i_{n-1}, i \in S$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0, Y_n = k_n, \ldots, Y_1 = k_1) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \,|\, X_n = i)\,,$$

gdje je desna strana ne zavisi od n. Tada je $X = (X_n : n \geq 0)$ homogen Markovljev lanac.

Dokaz je praktički jednak dokazu Teorema 2.8. Jedina promjena je prijelaz sa trećeg na četvrti redak gdje se koristi pretpostavljena uvjetna nezavisnost. Postoje homogeni Markovljevi lanci koji se ne mogu prikazati niti na način opisan u posljednjem teoremu.

Sljedeći rezultat nam govori da za danu stohastičku matricu P na skupu S postoji Markovljev lanac $X = (X_n : n \geq 0)$ s tom prijelaznom matricom i reprezentacijom kao u Teoremu 2.8. Ta reprezentacija nije prirodna, ali je vrlo korisno za simulaciju Markovljevog lanca.

Teorem 2.10 *Neka je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica na S, te neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, funkcija $f : S \times [0,1] \to S$, niz $(U_n : n \geq 0)$ nezavisnih slučajnih varijabli definiranih na Ω s uniformnom distribucijom na $[0,1]$, te slučajna varijabla X_0 definirana na Ω s vrijednostima u S takvi da ako je*

$$X_n = f(X_{n-1}, U_n)\,, \quad n \geq 1\,,$$

tada je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac.

Dokaz: Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bilo koji vjerojatnosni prostor na kojem postoji niz $(U_n : n \geq 0)$ nezavisnih slučajnih varijabli, uniformno distribuiranih na $[0,1]$ (npr., beskonačni produkt $([0,1], \mathcal{B}([0,1], \mathrm{Leb})^{\infty}$ je takav vjerojatnosni prostor). Pretpostavimo, nadalje, da je prostor stanja S beskonačan, te bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je jednak $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$. Slučaj konačnog prostora stanja rješava se na potpuno analogan način.

Prvo definiramo slučajnu varijablu X_0. Neka je $g : [0,1] \to S$ funkcija definirana s

$$g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, 1_{(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j]}(u)\,, \quad u \in [0,1]\,,$$

uz konvenciju da je $\sum_{j=1}^{0} = 0$. Riječima, $g(u) = k$ ako i samo ako je $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j < u \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$. Stavimo $X_0 = g(U_0)$ te izračunajmo distribuciju od X_0. Uočimo da je $X_0 = k$ ako i samo ako je $U_0 \in (\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j]$. Dakle,

$$\mathbb{P}(X_0 = k) = \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j < U_0 \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j = \lambda_k \, ,$$

što znači da X_0 ima traženu distribuciju.

Sada prelazimo na definiciju slučajnih varijabli X_n, $n \geq 1$. Prvo definiramo funkciju $f : S \times [0,1] \to S$ formulom

$$f(i,u) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, 1_{(\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij}, \sum_{j=1}^{k} p_{ij}]}(u) \, , \quad i \in S, u \in [0,1] \, .$$

Vrijedi da je $f(i,u) = k$ ako i samo ako je $\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} < u \leq \sum_{j=1}^{k} p_{ij}$. Sada stavimo

$$X_n = f(X_{n-1}, U_n) \, , \quad n \geq 1 \, .$$

Uočimo da ako je $X_{n-1} = i$, tada je $X_n = k$ ako i samo ako je $U_n \in (\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij}, \sum_{j=1}^{k} p_{ij}]$. Zato je za $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k \,|\, X_{n-1} = i) &= \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} < U_n \leq \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \,|\, X_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} < U_n \leq \sum_{j=1}^{k} p_{ij}) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} - \sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} \\
&= p_{ik} \, ,
\end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi iz nezavisnosti slučajnih varijabli X_{n-1} i U_n (uočite da je X_{n-1} funkcija slučajnih varijabli $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}$ koje su nezavisne od U_n). Na taj način je pokazano da je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac. □

Iz prethodnog teorema odmah proizlazi jednostavna metoda simuliranja (λ, P)-Markovljevog lanca. Početno stanje Markovljevog lanca simuliramo na sljedeći način: odaberemo pseudoslučajan broj u_0. Ako je $\sum_{j=1}^{i_0-1} \lambda_j < u_0 \leq \sum_{j=1}^{i_0} \lambda_j$, stavimo $X_0 = i_0$. Zatim odaberemo novi pseudoslučajni broj u_1, te ako je $\sum_{j=1}^{i_1-1} p_{i_0 j} < u_1 \leq \sum_{j=1}^{i_1} p_{i_0 j}$ stavimo $X_1 = i_1$. Odaberemo novi pseudoslučajni broj u_2, te ako je $\sum_{j=1}^{i_2-1} p_{i_1 j} < u_2 \leq \sum_{j=1}^{i_2} p_{i_1 j}$ stavimo $X_2 = i_2$, itd. Dobiveni niz stanja $i_0, i_1, i_2, \ldots$ jedna je simulacija puta (λ, P)-Markovljevog lanca.

Nastavljamo sa malo složenijim primjerima Markovljevih lanaca.

Primjer 2.11 Model zaliha. Označimo sa $I(t)$ količinu zaliha nekog proizvoda u skladištu u trenutku $t \geq 0$. Pretpostavljamo da se zalihe u skladištu smanjuju neprekidno u vremenu, ali se provjeravaju u fiksnim (diskretnim) vremenskim trenucima $T_0, T_1, T_2, \ldots$. Opaženu količinu zaliha tog prozvoda u trenutku T_n označit ćemo sa X_n, $X_n = I(T_n)$. Zalihe se nadopunjavaju na sljedeći način: postoje dva kritična nivoa zaliha, s i S, $0 \leq s < S$. Ako je $X_n = I(T_n) \leq s$, zalihe se istog trenutka nadopunjuju do nivoa S. Ako je $X_n \in (s, S]$, zalihe se ne nadopunjavaju. Označimo sa D_n ukupnu potražnju za tim proizvodom tokom vremenskog intervala $[T_{n-1}, T_n)$, $n \geq 1$, te pretpostavimo da je $(D_n : n \geq 1)$ niz nezavisnih, jednakodistribuiranih slučajnih varijabli, nezavisan od početne količine zaliha $X_0 \leq S$. Tada je za $n \geq 1$,

$$X_n = \begin{cases} (X_{n-1} - D_n)_+ \,, & s < X_{n-1} \leq S \,, \\ (S - D_n)_+ \,, & X_{n-1} < s \,, \end{cases}$$

gdje je $x_+ = \max\{x, 0\}$. Uočite da je $X_n = f(X_{n-1}, D_n)$ za funkcije $f(x,d) = (x - d)_+ 1_{(s,S]}(x) + (S-d)_+ 1_{[0,s]}(x)$. Po Teoremu 2.8 slijedi da je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac.

U modelu zaliha od interesa su sljedeća pitanja:

(i) Kolika je srednja vrijednost zaliha kroz dugi vremenski period? Matematički, zanima nas

$$\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} X_j \,,$$

za velike N. Zakon velikih brojeva za Markovljeve lance govori o graničnoj vrijednosti gornjeg izraza za $N \to \infty$.

(ii) Kolika je ukupna nezadovoljena potražnja za proizvodom kroz dugi vremenski period? Neka je U_n, $n \geq 1$, nezadovoljena potražnja u intervalu $[T_{n-1}, T_n)$. Vrijedi

$$U_n = \begin{cases} (D_n - X_{n-1}) \wedge 0 \,, & s < X_{n-1} \leq S \,, \\ (D_n - S) \wedge 0 \,, & X_{n-1} \leq s \,. \end{cases}$$

Zanima nas $\sum_{j=1}^{N} U_j$ za velike N.

(iii) Kolika je srednja vrijednost broja perioda u kojima potražnja nije zadovoljena? Matematički, tražimo

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} 1_{\{U_j < 0\}} \,,$$

za velike N, odnosno graničnu vrijednost kada $N \to \infty$.

Primjer 2.12 Diskretni model čekanja. Postoje dva tipa modela koje ćemo označiti sa sa $M/G/1$ odnosno $G/M/1$. Oba modela opisuju sljedeću situaciju: stranke (kupci, bolesnici, ...) dolaze u neki servis za posluživanje (banka, frizerski salon, ambulanta, ...) i čekaju da budu posluženi po principu tko prije dođe prije je na redu. Pretpostavimo da postoji jedan poslužitelj (to je 1 u $M/G/1$ odnosno $G/M/1$). Neka je $X(t)$ broj stranaka u trenutku $t \geq 0$ koje čekaju na uslugu.

Kod modela čekanja tipa $M/G/1$ pretpostavljamo da se usluge završavaju u trenucima $T_0, T_1, \ldots$, odnosno da su to vremena odlaska iz servisa. Stavimo $X_n = X(T_n+) =$ broj stranaka u servisu neposredno nakon trenutka T_n. Označimo sa A_{n+1} slučajan broj stranaka koji ulaze u servis za vrijeme dok traje posluživanje stranke koja će izaći iz servisa u trentuku T_{n+1}. Tada slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ zadovoljava

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + A_{n+1}$$

(uz oznaku $x_+ = \min(x, 0)$). Pretpotavimo da su $(A_n : n \geq 1)$ nezavisne i jednako distribuirane, te nezavisne od X_0. Tada je po Teoremu 2.8 $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac. Ako je $p_k = \mathbb{P}(A_1 = k)$, $k \geq 0$, distribucija od A_1, tada je prijelazna matrica lanca X dana s

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_1 & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Promotrimo sada tip $G/M/1$. Pretpostavimo da stranke dolaze u servis u trenucima $\tau_0, \tau_1, \ldots$. Označim osa $X_n = X(\tau_n-)$ broj stranaka u servisu neposredno prije n-tog dolaska, te neka je $S_{n+1} \geq 0$ broj usluženih stranaka u intervalu $[\tau_n, \tau_{n+1})$. Tada je

$$X_{n+1} = (X_n - S_{n+1} + 1)_+ \, .$$

Pretpotavimo da su $(S_n : n \geq 1)$ nezavisne i jednako distribuirane, s distribucijom $p_k = \mathbb{P}(S_1 = k)$, $k \geq 0$, i nezavisne od X_0. Tada je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom

$$P = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} p_k & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sum_{k=2}^{\infty} p_k & p_1 & p_0 & 0 & \cdots \\ \sum_{k=3}^{\infty} p_k & p_2 & p_1 & p_0 & \cdots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$