Poglavlje 11

Teorija potencijala Markovljevih lanaca

Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ Markovljev lanac sa skupom stanja S i prijelaznom matricom P. Podijelimo S na dva disjunktna podskupa, D i ∂D. Skup ∂D zovemo *granicom* od D. Dopušteno je $\partial D = \emptyset$ u kojem slučaju je $D = S$. Neka je $T = \min\{n \geq 0 : X_n \in \partial D\}$ prvo vrijeme pogađanja granice. Pretpostavimo, nadalje, da su nam dane funkcije $c : D \to \mathbb{R}$ i $f : \partial D \to \mathbb{R}$ koje ćemo označavati sa $(c_i : i \in D)$ i $(f_i : i \in \partial D)$. Pridruženi *potencijal* $\phi = (\phi_i : i \in S)$ definira se formulom

$$\phi_i = \mathbb{E}_i \left(\sum_{n<T} c(X_n) + f(X_T) 1_{(T<\infty)} \right) . \tag{11.1}$$

Pretpostavljamo da su funkcije c i f takve da je gornji izraz dobro definiran. To će, na primjer, biti tako ukoliko su c i f nenegativne. U tom slučaju c_i možemo interpretirati kao trošak u stanju $i \in D$, a f_i kao trošak u stanju $i \in \partial D$. Tada će ϕ_i biti očekivani ukupni trošak ukoliko lanac kreće iz stanja $i \in S$.

Teorem 11.1 *Pretpostavimo da su $(c_i : i \in D)$ i $(f_i : i \in \partial D)$ nenegativni, i stavimo*

$$\phi_i = \mathbb{E}_i \left(\sum_{n<T} c(X_n) + f(X_T) 1_{(T<\infty)} \right) .$$

Tada:

(a) Potencijal $(\phi_i : i \in S)$ zadovoljava

$$\begin{cases} \phi = P\phi + c & u\ D \\ \phi = f & u\ \partial D\,; \end{cases} \tag{11.2}$$

(b) Ako $\psi = (\psi_i : i \in S)$ zadovoljava

$$\begin{cases} \psi \geq P\psi + c & u\ D \\ \psi = f & u\ \partial D\,, \end{cases} \tag{11.3}$$

i $\psi_i \geq 0$ za sve $i \in S$, tada je $\psi_i \geq \phi_i$ za sve $i \in S$.

(c) Ako je $\mathbb{P}_i(T < \infty) = 1$ za sve $i \in S$, tada (11.2) ima najviše jedno ograničeno rješenje.

Napomena 11.2 Na vektore ϕ, ψ, c i f gledamo kao na vektor-stupce, tako da, npr., $P\phi$ ima smisla.

Dokaz: (a) Zbog $\mathbb{P}_i(T = 0) = 1$ za $i \in \partial D$, očito vrijedi $\phi = f$ na ∂D. Za $i \in D$, zbog Markovljevog svojstva je

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_i\left(\sum_{1 \leq n < T} c(X_n) + f(X_T) 1_{(T<\infty)} \,\middle|\, X_1 = j \right) \\ & = \ \mathbb{E}_j\left(\sum_{n<T} c(X_n) + f(X_T) 1_{(T<\infty)} \right) = \phi_j\,, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} \phi_i &= c_i + \sum_{j \in S} p_{ij}\, \mathbb{E}_i\left(\sum_{1 \leq n < T} c(X_n) + f(X_T) 1_{(T<\infty)} \,\middle|\, X_1 = j \right) \\ &= c_i + \sum_{j \in S} p_{ij} \phi_j\,. \end{aligned}$$

(b) Promatramo očekivani trošak do trenutka $n \geq 0$:

$$\phi_i^{(n)} = \mathbb{E}_i\left(\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k) 1_{(k<T)} + f(X_T) 1_{(T \leq n)} \right)\,.$$

Zbog teorema o monotonoj konvergenciji vrijedi $\uparrow \lim_{n\to\infty} \phi_i(n) = \phi_i$. Nadalje, $\phi_i^{(0)} = 0$ u D i $\phi_i^{(0)} = f$ u ∂D. Upotrebom argumenta kao u (a) slijedi

$$\begin{cases} \phi_i^{(n+1)} = c + \left(P\phi^{(n)}\right)_i & i \in D \\ \phi_i^{(n+1)} = f & i \in \partial D\,. \end{cases}$$

Pretpostavimo da ψ zadovoljava (11.3) i $\psi \geq 0$. Tada je $\psi \geq 0 = \phi^{(0)}$ u D i $\psi \geq f = \phi^{(0)}$ u ∂D. Nadalje, $\psi \geq P\psi + c \geq P\phi^{(0)} + c = \phi^{(1)}$ u D, te $\psi = f = \phi^{(1)}$ u ∂D. Dakle $\psi \geq \phi^{(1)}$ u S. Indukcijom dobivamo $\psi \geq \phi^{(n)}$ za sve n, te zato i $\psi \geq \phi$.

(c) Pokazat ćemo da ako ψ zadovoljava (11.3), tada za sve $i \in S$ i sve $n \geq 0$,

$$\psi_i \geq \phi_i^{(n)} + \mathbb{E}_i(\psi(X_n)1_{(T>n)}) \tag{11.4}$$

i jednakost vrijedi ako i samo ako vrijedi jednakost u (11.3). Uočite da (11.4) daje alternativni dokaz za (b). Također, ako je ψ omeđeno rješenje od (11.2), $|\psi| \leq M$, te ako je $\mathbb{P}_i(T < \infty) = 1$ za sve $i \in S$, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{E}_i(\psi(X_n)1_{(T>n)})| \leq M \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(T > n) = 0\,.$$

Zajedno sa jednakosti u (11.4) dobivamo $\psi = \lim_n \phi^{(n)} = \phi$.

Dokazujemo (11.4). Za $i \in D$ imamo

$$\psi_i \geq c_i + \sum_{j\in\partial D} p_{ij} f_j + \sum_{j\in D} p_{ij}\psi_j\ ,$$

te ponavljanim supstitucijama za ψ na desnoj strani

$$\begin{aligned}
\psi_i \ \geq\ & c_i + \sum_{j\in\partial D} p_{ij} f_j + \sum_{j\in D} p_{ij} c_j \\
& + \cdots + \sum_{j_1\in D} \cdots \sum_{j_{n-1}\in D} p_{i\,j_1} \ldots p_{j_{n-2}\,j_{n-1}} c_{j_{n-1}} \\
& + \sum_{j_1\in D} \cdots \sum_{j_{n-1}\in D} \sum_{j_n\in\partial D} p_{i\,j_1} \ldots p_{j_{n-2}\,j_{n-1}} f_{j_n} \\
& + \sum_{j_1\in D} \cdots \sum_{j_n\in D} p_{i\,j_1} \ldots p_{j_{n-2}\,j_{n-1}} \psi_{j_n} \\
=\ & \mathbb{E}_i \big(c(X_0)1_{(T>0)} + f(X_1)1_{(T=1)} + c(X_1)1_{(T>1)} \\
& + \cdots + c(X_{n-1})1_{(T>n-1)} + f(X_n)1_{(T=n)} + \psi(X_n)1_{(T>n)} \big) \\
=\ & \phi_i^{(n)} + \mathbb{E}_i(\psi(X_n)1_{(T>n)})\,,
\end{aligned}$$

uz jednakost u prvom retku ako i samo ako u (11.3) vrijedi jednakost. □

Ponekad je zbog ekonomskih razloga potrebno promatrati diskontirane buduće troškove. Preciznije, za dan $\alpha \in (0, 1)$, trošak u trenutku $n \geq 0$ iznosi $\alpha^n c(X_n)$. To vodi na pojam *potencijala s diskontiranim troškom* ili *α-potencijala.*

Teorem 11.3 *Pretpostavimo da je $(c_i : i \in S)$ omeđena i stavimo*

$$\phi_i = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n c(X_n)\,.$$

Tada je $\phi = (\phi_i : i \in S)$ jedinstveno omeđeno rješenje od

$$\phi = \alpha P\phi + c\,.$$

Neka je sada $\partial D = \emptyset$, te proučimo strukuru skupa svih potencijala s nenegativnim troškom c. Preciznije, neka je $c : S \to [0, +\infty]$ funkcija troška i stavimo

$$\phi_i = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} c(X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i c(X_n)\,,$$

gdje druga jednakost slijedi iz Fubinijevog teorema. Računamo

$$\mathbb{E}_i c(X_n) = \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} c_j = (P^n c)_i\,.$$

Definirajmo *Greenovu funkciju* (ili Greenovu matricu) $G = (g_{ij} : i, j \in S)$ kao

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n\,,$$

i uočimo da je

$$g_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \mathbb{E}_i \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \frac{f_{ij}}{1-f_{jj}}\,.$$

Druga jednakost slijedi iz (6.5), a treća iz (6.8). Sada možemo pisati

$$\phi_i = \sum_{n=0}^{\infty} (P^n c)_i = (Gc)_i\,,$$

odnosno

$$\phi = Gc\,.$$

Dakle, potencijal za trošak c dobijemo primjenom Greenove matrice G na vektor c. Uočimo da je za fiksni $j \in S$, $(g_{ij} : i \in S)$ potencijal za funkciju troška $c = 1_{\{j\}}$. Otprije znamo da je $g_{ij} = \infty$ ako i samo ako $i \longrightarrow j$ i j je povratno. Greenova matrica G naziva se *fundamentalnom matricom* linearnog sustava (11.2). Pretpostavimo da je Markovljev lanac ireducibilan. Tada je u slučaju prolaznog lanca $g_{ij} < \infty$ za sve $i, j \in S$, te vrijedi

$$(I-P)\sum_{n=0}^{\infty} P^n = \sum_{n=0}^{\infty} P^n - \sum_{n=0}^{\infty} P^{n+1} = I\,,$$

što pokazuje da je

$$G = (I-P)^{-1}\,.$$

U slučaju povratnog lanca $g_{ij} = \infty$ za sve $i, j \in S$ što pokazuje da Greenova matrica nije naročito korisna za povratan lanac. Tada je puno korisnije promatrati

$$R_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P^n$$

za $\alpha \in (0,1)$. Budući da je $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n < \infty$, gornji red uvijek konvergira. Štoviše,

$$R_\alpha = (I - \alpha P)^{-1}.$$

Familija matrica $(R_\alpha : \alpha \in (0,1))$ naziva se *rezolventom* Markovljevog lanca X.

Od sada promatramo opći slučaj u kojem može vrijediti $\partial D \neq \emptyset$.

Definicija 11.4 *Funkcija $\phi : S \to \mathbb{R}$ je* harmonijska *u $D \subset S$ ako vrijedi*

$$\phi = P\phi \qquad u\ D.$$

Uvedemo li operator L na funkcijama $\phi : S \to \mathbb{R}$ formulom

$$L\phi = P\phi - \phi,$$

tada je ϕ harmonijska u D ako i samo ako je $L\phi = 0$ u D. Uočimo da u slučaju $D = S$ i prolaznog Markovljevog lanca X vrijedi $G = (-L)^{-1}$.

Cilj nam je proučiti strukturu svih nenegativnih ograničenih funkcija $\phi : S \to [0, +\infty]$ harmonijskih u D. Drugim riječima, želimo naći opće nenegativno ograničeno rješenje jednadžbe $\phi = P\phi$ u D.

Teorem 11.5 *Pretpostavimo da je $\mathbb{P}_i(T < \infty) = 1$ za sve $i \in D$, gdje je $T = \min\{n \geq 0 : X_n \in \partial D\}$. Svaka nenegativna omeđena funkcija $\phi : S \to [0, +\infty)$ koja je harmonijska u D je oblika*

$$\phi_i = \mathbb{E}_i(\phi(X_T)) = \sum_{j \in \partial D} \phi_j \mathbb{P}_i(X_T = j). \tag{11.5}$$

Dokaz: U Teoremu 11.1 stavimo $c \equiv 0$ u D, te neka je $f = \phi_{|\partial D}$ vrijednost od ϕ na granici ∂D. Definirajmo $\psi : S \to \mathbb{R}$ sa

$$\psi_i = \mathbb{E}_i(f(X_T)).$$

Po Teoremu 11.1 (a), ψ je rješenje jednadžbe

$$\begin{cases} \phi = P\phi & \text{u } D \\ \phi = f & \text{u } \partial D, \end{cases}$$

koje je ograničeno (zbog f ograničena). Nadalje, zbog Teorema 11.1 (c), ψ je jedinstveno ograničeno rješenje gornje jednadžbe. S druge strane, budući da je ϕ harmonijska u D vrijedi $\phi = P\phi$ u D, te po definiciji $\phi = f$ na ∂D. Zbog jedinstvenosti slijedi $\phi = \psi$ na S, čime je dokazana prva jednakost u (11.5). Druga jednakost je definicija očekivanja. $\square$

Propozicija 11.6 *Neka je X ireducibilan Markovljev lanac na konačnom skupu stanja S, te $\phi : S \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\phi = P\phi$ na cijelom S. Tada je ϕ konstanta.*

Dokaz: Postoji staje $i \in S$ u kojem ϕ postiže maksimum: $\phi_i \geq \phi_j$ za sve $j \in S$. Vrijedi

$$\phi_i = \sum_{j \in S} p_{ij}\phi_j \leq \sum_{j \in S} p_{ij}\phi_i = \phi_i \,.$$

Zato je $\phi_j = \phi_i$ za sve $j \in S$ za koje $p_{ij} > 0$.

Neka je $j \in S$ proizvoljan. Zbog ireducibilnosti postoje $i_1, \dots, i_k \in S$ takvi da je $p_{ii_1} > 0, p_{i_1 i_2} > 0, \dots, p_{i_k j} > 0$. Iz dokazanog vrijedi $\phi_i = \phi_{i_1} = \cdots = \phi_{i_k} = \phi_j$. □

Za $j \in \partial D$ definirajmo $f^j : \partial D \to \mathbb{R}$ kao $f^j = 1_{\{j\}}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}_i(X_T = j) = \mathbb{E}_i(f^j(X_T)) \,,$$

što pokazuje da je $\phi^j(i) := \mathbb{P}_i(X_T = j)$, $i \in S$, harmonijska funkcija u D. Iz formule (11.5) vidimo da je svaka nenegativna ograničena funkcija $\phi : S \to [0, \infty)$ koja je harmonijska u D linearna kombinacija harmonijskih funkcija ϕ^j, $j \in \partial D$. Shvatimo li D kao pravi skup stanja Markovljevog lanca X, a ∂D kao granicu tog skupa, funkcije ϕ^j, $j \in \partial D$, opisuje sve načine kako lanac X može izaći iz skupa stanja D. Naime, izlaskom iz D, lanac će pogoditi jedno i samo jedno stanje $j \in \partial D$. Nenegativne harmonijske funkcije su tada linearne kombinacije harmonijskih funkcija koje opisuju kako lanac izlazi iz D. Uočite da su gornja razmatranja provedena uz pretpostavku da je $T = \min\{n \geq 0 : X_n \in \partial D\}$ konačno. Sljedeći primjer ilustrira da se i u slučaju $T = +\infty$ nenegativne harmonijske funkcije mogu napisati kao linearne kombinacije harmonijskih funkcija koje opisuju kako lanac napušta prostor stanja.

Primjer 11.7 Promatrajmo Markovljev lanac X na $\mathbb{Z}$ sa sljedećim prijelaznim vjerojatnostima:

$$\begin{aligned}
&p_{01} = p_{0\,-1} = 1/2 \\
&p_{i\,i+1} = p, \quad p_{i\,i-1} = 1 - p\,, \quad i \geq 1\,, \\
&p_{i\,i-1} = p, \quad p_{i\,i+1} = 1 - p,\,, \quad i \leq -1\,,
\end{aligned}$$

te stavimo $q = 1 - p$. Riječima, lanac se pomiče prema ishodištu s vjerojatnosti q, a od ishodišta s vjerojatnosti p. Pretpostavimo da je $p > 1/2$ tako da odgovarajući lanac bude prolazan. Može se pokazati da vrijedi

$$\mathbb{P}_0(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty) = \mathbb{P}_0(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty) = \frac{1}{2}\,.$$

Nađimo sve nenegativne funkcije ϕ pripadajućeg lanca. Mora vrijediti:

$$\begin{aligned}
\phi_i &= q\phi_{i-1} + p\phi_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, \\
\phi_0 &= \frac{1}{2}\phi_{-1} + \frac{1}{2}\phi_1\,, \\
\phi_i &= q\phi_{i+1} + p\phi_{i-1} \quad i = -1, -2, \dots.
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Opće rješenje prve jednadžbe je

$$\phi_i = A + B(1 - (q/p)^i)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

i bit će nenegativno za $A + B \geq 0$. Slično, opće rješenje treće jednadžbe je

$$\phi_i = A' + B'(1 - (q/p)^{-i})\,, \quad i = 0, -1, -2, \ldots,$$

i bit će nenegativno za $A' + B' \geq 0$. U oba rješenja ϕ_0 mora biti isti, t.j., $A = \phi_0 = A'$, te mora zadovoljavati i drugu jednadžbu $\phi_0 = (\phi_{-1} + \phi_1)/2$, što povlači $B + B' = 0$. Slijedi da sve nenegativne harmonijske funkcije imaju oblik

$$\phi = f^- h^- + f^+ h^+\,,$$

gdje su $f^-, f^+ \geq 0$, a $h_i^- = h_{-i}^+$ uz

$$h_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - (q/p)^i) & i = 0, 1, 2, \ldots, \\ \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - (q/p)^{-i}) & i = -1, -2, \ldots. \end{cases}$$

Stavimo $\phi_i^+ = \mathbb{P}_i(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty)$. Tada se jednostavno vidi (analiza prvog koraka) da ϕ^+ zadovoljava jednadžbe (11.6), te očito vrijedi $\phi_0^+ = 1/2$ i $\lim_{i\to\infty} \phi_i^+ = 1$. Zaključujemo da je $h_i^+ = \phi_i^+ = \mathbb{P}_i(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty)$. Slično, $h_i^- = \mathbb{P}_i(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty)$. Prema tome, svaka nenegativna harmonijska funkcija je linearna kombinacija funkcija h^- i h^+ koje opisuju kako lanac napušta prostor stanja.

Vratimo se sada na Primjer 10.4 iz prethodnog poglavlja, te ga interpretirajmo u kontekstu električnih mreža. Pretpostavljamo da su vrhovi grafa $G = (V, E)$ povezani žicama, te da svaka žica sadrži otpornik. Provodljivost $c_{ij} = c_{ji} \geq 0$ žice koja povezuje vrhove i i j obrnuto je proporcionalna otporu. Ako vrhovi i i j nisu povezani žicom, stavljamo $c_{ij} = c_{ji} = 0$. Definiramo kao i prije kapacitet vrha i sa $c_i = \sum_{j\in V} c_{ij}$. Svaki vrh i sadrži određen *naboj* χ_i koji definira potencijal ϕ_i pomoću

$$\chi_i = \phi_i c_i\,.$$

Struja ili *tok naboja* je antisimetrična matrica $(\gamma_{ij} : i, j \in V)$, $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}$. Fizikalna je činjenica da struja γ_{ij} iz i u j zadovoljava *Ohmov zakon*

$$\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j)\,. \tag{11.7}$$

Dakle, struja teče iz vrha s višim potencijalom u vrh s nižim potencijalom. Za vrh $i \in S$ neka je $\gamma_i := \sum_{j\in V} \gamma_{ij}$ ukupan tok struje u vrhu i.

Podijelimo sada vrhove iz V na dva disjunktna skupa, D – unutarnji vrhovi, i ∂D – vanjski vrhovi. Vrhovi iz ∂D spojeni su na bateriju (vanjski spoj). Na taj način je zadan (i fiksiran) potencijal f_i vrhova iz ∂D. Prvi problem vezan uz električnu mrežu je odrediti ravnotežni tok i potencijale uz dane vanjske uvjete (t.j., dane potencijale f_i, $i \in \partial D$). Za to će nam trebati *Kirchhoffov zakon* koji kaže da je tok struje u svakom unutarnjem vrhu jednak nuli:

$$\gamma_i = \sum_{j \in V} \gamma_{ij} = 0\,, \quad i \in D\,. \tag{11.8}$$

Zajedno s Ohmovim zakonom (11.7) dobivamo za sve $i \in D$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in V} c_{ij}(\phi_i - \phi_j) = \phi_i \sum_{j \in V} c_{ij} - c_i \sum_{j \in V} p_{ij}\phi_j \\ &= c_i(\phi_i - \sum_{j \in V} p_{ij}\phi_j)\,, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{cases} \phi = P\phi & \text{u } D \\ \phi = f & \text{u } \partial D\,. \end{cases}$$

Dakle, ravnotežni potencijal ϕ je harmonijska funkcija u D s rubnim uvjetom f u ∂D. Pretpostavimo, zbog jednostavnosti, da je skup vrhova konačan. Tada je prvo vrijeme pogađanja granice ∂D konačno i f je omeđena funkcija. Po Teoremu 11.1 (c), ϕ je jedinstveno rješenje gornje jednadžbe.

Od sada pretpostavljamo da je $\partial D = \{A, B\}$.

Lema 11.8 *Neka je γ tok struje takav da je $\gamma_A = \gamma_B = 0$. Tada je $\gamma \equiv 0$.*

Dokaz: Označimo sa ϕ pripadajući potencijal: $\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j)$ (ϕ je definiran do na aditivnu konstantu). Vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_A = \sum_{j \in V} \gamma_{Aj} = \sum_{j \in V} c_{Aj}(\phi_A - \phi_j) \\ &= c_A \sum_{j \in V} p_{Aj}(\phi_A - \phi_j) = c_A(\phi_A - \sum_{j \in V} p_{Aj}\phi_j)\,, \end{aligned}$$

odnosno $\phi_A = \sum_{j \in V} p_{Aj}\phi_j$. Na isti način dobijemo $\phi_B = \sum_{j \in V} p_{Bj}\phi_j$. Zajedno sa $\phi_i = \sum_{j \in V} p_{ij}\phi_j$ za sve $i \in D$, dobivamo $\phi = P\phi$ na cijelom V. Tvrdnja sada slijedi iz Propozicije 11.6. □

Definiramo vremena zaustavljanja $T_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ i $T_A^+ := \min\{n \geq 1 : X_n = A\}$.

Lema 11.9 *Neka je ϕ potencijal s rubnim uvjetima $f_A = 1$, $f_B = 0$. Tada za sve $i \in V$ vrijedi $\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Nadalje,*

$$\mathbb{P}_A(T_B < T_A^+) = \frac{\gamma_A}{c_A}\,.$$

Dokaz: Pokazali smo općenito da je ravnotežni potencijal ϕ jedinstvena harmonijska funkcija u $V \setminus \{A, B\}$ uz rubni uvjet $\phi_A = 1$, $\phi_B = 0$. Budući da je $i \mapsto \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$ također harmonijska s istim rubnim uvjetima, slijedi prva tvrdnja. Za drugu tvrdnju računamo

$$\begin{aligned}\gamma_A &= \sum_{j\in V} \gamma_{Aj} = \sum_{j\in V} c_{Aj}(\phi_A - \phi_j) = \sum_{j\in V} c_{Aj}\left(1 - \mathbb{P}_j(T_A < T_B)\right) \\ &= \sum_{j\in V} c_A p_{Aj} \mathbb{P}_j(T_B < T_A) = c_A \sum_{j\in V} p_{Aj}\mathbb{P}_j(T_B < T_A) = c_A \mathbb{P}_A(T_B < T_A^+)\,.\end{aligned}$$

□

Teorem 11.10 *Promatrajmo konačnu električnu mrežu s vanjskim spojem u vrhovima A i B, te neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ pripadajući Markovljev lanac. Stavimo $T_A = \min\{n \geq 0 : X_n = A\}$ i $T_B = \min\{n \geq 0 : X_n = B\}$.*

(a) Jedinstveni ravnotežni potencijal ϕ koji zadovoljava $\phi_A = 1$ i $\phi_B = 0$ dan je sa

$$\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)\,.$$

(b) Jedinstveni ravnotežni tok (struja) γ koji zadovoljava $\gamma_A = 1$ i $\gamma_B = -1$ dan je sa

$$\gamma_{ij} = \mathbb{E}_A(\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji})$$

gdje je Γ_{ij} broj koliko puta X prelazi iz i u j prije pogađanja vrha B.

(c) Naboj χ pridružen struji γ koji zadovoljava $\chi_B = 0$ dan je sa

$$\chi_i = \mathbb{E}_A \sum_{n=0}^{T_B - 1} 1_{(X_n = i)}\,.$$

Dokaz: (a) To je pokazano u prethodnoj lemi.
(b) Neka je $X_0 = A$. Tada vrijedi

$$\sum_{j\neq i}(\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = A \\ 0 & \text{ako } i \notin \{A, B\} \\ -1 & \text{ako je } i = B\,. \end{cases}$$

Zaista, $\sum_{j\neq i}\Gamma_{ij}$ je broj koliko puta lanac prijeđe u neko stanje iz stanja i, dok je $\sum_{j\neq i}\Gamma_{ji}$ broj koliko puta lanac prijeđe u stanje i iz nekog stanja. Za $i \neq A, B$ ta dva broja su očito jednaka, dok se za $i = A$ (odnosno za $i = B$) razlikuju za 1 (odnosno -1). Stavimo

$$\gamma_{ij} = \mathbb{E}_A(\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji})\,.$$

Tada je za sve $i \notin \{A,B\}$, $\sum_j \gamma_{ij} = 0$, dok je $\gamma_A = \sum_j \gamma_{Aj} = 1$ i $\gamma_B = \sum_j \gamma_{Bj} = -1$. Dakle, ovako definiran $(\gamma_{ij} : i,j \in V)$ je jedinični tok struje iz A u B. Jedinstvenost slijedi iz Leme 11.8.
(c) Uočimo da možemo pisati

$$\Gamma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{(X_n=i,\, X_{n+1}=j,\, n<T_B)}\,.$$

Iz Markovljevog svojstva slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_A\Gamma_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_A(X_n = i, X_{n+1} = j, n < T_B) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_A(X_n = i, n < T_B) p_{ij} \\
&= p_{ij}\, \mathbb{E}_A \sum_{n=0}^{T_B-1} 1_{(X_n=i)} \\
&=: \frac{c_{ij}}{c_i}\, \chi_i\,.
\end{aligned}$$

Definiramo $\psi = (\psi_i : i \in V)$ sa $\psi_i = \chi_i/c_i$. Tada vrijedi $\mathbb{E}_A\Gamma_{ij} = c_{ij}\psi_i$, $i \in V$, pa je

$$\gamma_{ij} = \mathbb{E}_A\Gamma_{ij} - \mathbb{E}_A\Gamma_{ji} = c_{ij}\psi_i - c_{ji}\psi_j = c_{ij}(\psi_i - \psi_j)\,.$$

Dakle, ψ je potencijal pridružen struji γ. Budući da je po definiciji $\chi_i = c_i\psi_i$, χ je naboj koji definira potencijal ψ, te je stoga pridružen struji γ. Očito vrijedi $\chi_B = 0$. □

Efektivni otpor između vrhova A i B, u oznaci R_{AB}, definira se kao

$$R_{AB} := \frac{1}{\gamma_A}\,,$$

a *efektivna provodljivost* između A i B kao

$$C_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \gamma_A\,.$$

Ukoliko je $\phi_A = 1$ i $\phi_B = 0$, tada je $R_{AB} = \frac{\phi_A - \phi_B}{\gamma_A}$. Uočite da iz drugog dijela Leme 11.9 slijedi

$$\mathbb{P}_A(T_B < T_A^+) = \frac{1}{c_A R_{AB}}\,.$$

Uvedimo sada pojam *energije* pridružen potencijalu $\psi = (\psi_i : i \in V)$, odnosno toku $\gamma = (\gamma_{ij} : i,j \in V)$ na sljedeći način:

$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in V} (\psi_i - \psi_j)^2 c_{ij} \tag{11.9}$$

$$\mathcal{I}(\gamma) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in V} \gamma_{ij}^2 c_{ij}^{-1}\,. \tag{11.10}$$

Po Ohmovom zakonu je $(\psi_i - \psi_j)c_{ij} = \gamma_{ij}$, otkud slijedi $(\psi_i - \psi_j)^2 c_{ij} = (\psi_i - \psi_j)\gamma_{ij} = c_{ij}^{-1}\gamma_{ij}^2$. Zato vrijedi

$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in V}(\psi_i - \psi_j)\gamma_{ij} = \mathcal{I}(\gamma)\,.$$

Uočimo, nadalje, da je

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(\psi_i - \psi_j)\gamma_{ij} &= \sum_{i\in V}\psi_i\sum_{j\in V}\gamma_{ij} + \sum_{j\in V}\psi_j\sum_{i\in V}\gamma_{ji} \\ &= \sum_{i\in V}\psi_i\gamma_i + \sum_{j\in V}\psi_j\gamma_j = 2\sum_{i\in V}\psi_i\gamma_i \end{aligned} \tag{11.11}$$

Sljedeći rezultat pokazuje da su ravnotežni potencijal (odnosno tok) rješenja problema minimizacije energije.

Teorem 11.11 *(a) Ravnotežni potencijal $\phi = (\phi_i : i \in V)$ s graničnim vrijednostima $\phi_i = f_i$, $i \in \partial D$ (bez izvora struje u D), je jedinstveno rješenje problema*

$$\min \mathcal{E}(\psi)\,, \quad \psi_i = f_i \text{ za } i \in \partial D\,.$$

(b) Ravnotežni tok $\gamma = (\gamma_{ij}, i, j \in V)$ s izvorima toka $\gamma_i = g_i$ za $i \in D$ i graničnim potencijalom jednakim nula je jedinstveno rješenje problema

$$\min \mathcal{I}(\widetilde{\gamma})\,, \quad \widetilde{\gamma}_i = g_i \text{ za } i \in D\,.$$

Dokaz: (a) Neka je ϕ ravnotežni potencijal uz rubni uvjet $\phi_i = f_i$, $i \in \partial D$ s pripadajućim tokom γ. Tada se svaki drugi potencijal ψ s rubnim uvjetom $\phi_i = f_i$, $i \in \partial D$, može zapisati u obliku $\psi = \phi + \epsilon$ gdje $\epsilon = (\epsilon_i : i \in V)$ zadovoljava $\epsilon_i = 0$, $i \in \partial D$. Nadalje,

$$\sum_{i,j\in V}(\epsilon_i - \epsilon_j)(\phi_i - \phi_j)c_{ij} = \sum_{i,j\in V}(\epsilon_i - \epsilon_j)\gamma_{ij} = 2\sum_{i\in V}\epsilon_i\gamma_i = 0\,,$$

gdje druga jednakost slijedi iz (11.11), a zadnja zbog $\gamma_i = 0$, $i \in D$, te $\epsilon_i = 0$, $i \in \partial D$. Zato je

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\psi) &= \mathcal{E}(\phi + \epsilon) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in V}(\phi_i + \epsilon_i - \phi_j - \epsilon_j)^2 c_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in V}(\phi_i - \phi_j)^2 c_{ij} + \sum_{i,j\in V}(\epsilon_i - \epsilon_j)(\phi_i - \phi_j)c_{ij} + \sum_{i,j\in V}(\epsilon_i - \epsilon_j)^2 c_{ij} \\ &= \mathcal{E}(\phi) + \mathcal{E}(\epsilon) \geq \mathcal{E}(\phi)\end{aligned}$$

uz jednakost ako i samo ako je $\epsilon = 0$ (odnosno $\psi = \phi$).

(b) Neka su ϕ i γ ravnotežni potencijal, odnosno tok. Vrijedi $\phi_i = 0$ za sve $i \in \partial D$. Svaki tok $\widetilde{\gamma}$ u minimizacijskom problemu može se zapisati u obliku $\gamma + \delta$ gdje je $\delta = (\delta_{ij} : i, j \in V)$ tok koji zadovoljava $\delta_i = 0$ za sve $i \in D$. Tada je

$$\sum_{i,j \in V} \gamma_{ij} \delta_{ij} c_{ij}^{-1} = \sum_{i,j \in V} (\phi_i - \phi_j) \delta_{ij} = 2 \sum_{i \in V} \phi_i \delta_i = 0\,,$$

otkud

$$\mathcal{I}(\gamma + \delta) = \mathcal{I}(\gamma) + \mathcal{I}(\delta) \geq \mathcal{I}(\gamma)$$

uz jednakost ako i samo ako je $\delta = 0$. □

Sljedeća reformulacija dijela (a) prethodnog teorema pokazuje da harmonijske funkcije minimiziraju energiju.

Korolar 11.12 *Pretpostavimo da $\phi = (\phi_i : i \in V)$ zadovoljava*

$$\begin{cases} L\phi = 0 & u\ D \\ \phi = f & u\ \partial D\,. \end{cases}$$

Tada je ϕ jedinstveno rješenje problema

$$\min \mathcal{E}(\psi)\,, \quad \psi = f \ u\ \partial D\,.$$

Korolar 11.13 *Efektivni otpor između vrhova A i B dan je formulom*

$$R_{AB}^{-1} = \min\{\mathcal{E}(\psi) \ : \ \psi_A = 1, \psi_B = 0\}\,.$$

Dokaz: Po prethodnom korolaru, rješenje minimizacijskog problema $\min \mathcal{E}(\psi)$ uz rubne uvjete $\psi_A = 1$, $\psi_B = 0$ je ravnotežni potencijal ϕ. Neka je γ pripadajući tok struje. Tada vrijedi

$$\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{I}(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in V} (\phi_i - \phi_j) \gamma_{ij} = \sum_{i \in V} \phi_i \gamma_i = \phi_A \gamma_A - \phi_B \gamma_B = \gamma_A\,,$$

gdje smo iskoristili (11.11), Kirchoffov zakon $\gamma_i = 0$ za sve $i \notin \{A, B\}$, te $\phi_B = 0$. Tvrdnja sada slijedi iz definicije efektivnog otpora $R_{AB} = \gamma_A^{-1}$. □