Poglavlje 1

Definicija i osnovna svojstva

Ovo poglavlje započinjemo formalnom definicijom slučajnog procesa, te odmah nastavljamo formalnom definicijom Markovljevog lanca na prebrojivom prostoru stanja.

Definicija 1.1 *Neka je S skup.* Slučajan proces *s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S. Dakle, za svaki $n \geq 0$, je $X_n : \Omega \to S$ slučajna varijabla.*

Definicija 1.2 *Neka je S prebrojiv skup. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je* Markovljev lanac *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{1.1}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo u relaciji (1.1) naziva se *Markovljevim svojstvom.* Pretpostavimo da se nalazimo u vremenskom trenutku n. Tada vrijeme $n+1$ predstavlja neposrednu budućnost, dok vremena $0, 1, \ldots, n-1$ predstavljaju prošlost. Markovljevo svojstvo nam govori da je ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na sadašnjost i prošlost, jednako ponašanju Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti, uvjetno na samo sadašnjost.

Drugi način na koji možemo iskazati Markovljevo svojstvo je sljedeće: (neposredna) budućnost i prošlost uvjetno su nezavisne uz danu sadašnjost. Zaista

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 \mid X_n = i) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)\, \mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \frac{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0 \mid X_n = i)\,.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Nas će zanimati samo *homogeni Markovljevi lanci*. To su oni za koje desna strana u relaciji (1.2) ne ovisi o vremenu $n \geq 1$. S tim u vezi uvodimo pojam stohastičke matrice.

Definicija 1.3 *Matrica $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ naziva se* stohastičkom matricom *ako je $p_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in S$, te*

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1\,, \quad \text{za sve } i \in S\,. \tag{1.3}$$

Ukoliko je broj stanja u S konačan, tada je P "prava" (konačna) matrica. S druge strane, ako je S beskonačan skup, tada će P biti beskonačna matrica.

Definicija 1.4 *Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ vjerojatnosna distribucija na S, te neka je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je* homogen Markovljev lanac *s* početnom distribucijom *λ i* prijelaznom matricom *P ako vrijedi*

(i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ *za sve $i \in S$, te*

(ii)
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij} \tag{1.4}$$
za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots i_{n-1}, i, j \in S$.

Budući da nećemo promatrati nehomogene Markovljeve lance, homogene Markovljeve lance ćemo od sada nadalje nazivati jednostavno Markovljevim lancima. Ponekad ćemo zbog kratkoće Markovljev lanac iz Definicije 1.4 nazivati (λ, P)-Markovljevim lancom. Uočite da iz Definicija 1.2 i 1.4 nije odmah jasno da svaki (λ, P)-Markovljev lanac ima Markovljevo svojstvo (1.1). Međutim, ta činjenica se lako dokazuje što ćemo uskoro vidjeti.

Jedno od osnovnih pitanja pri proučavanju slučajnih procesa je pitanje konačnodimenzionalnih distribucija. Jednostavnim riječima, želimo znati vjerojatnosti s kojima se slučajni proces u danim vremenskim trenucima nalazi u danim stanjima. Za Markovljeve lance je odgovor na to pitanje vrlo jednostavan.

Teorem 1.5 *Neka je X (λ, P)-Markovljev lanac. Tada za sve $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n}\,. \tag{1.5}$$

Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajni proces s konačnodimenzionalnim distribucijama danim formulom (1.5), gdje je λ neka vjerojatnosna distribucija na S, a P neka stohastička matrica na S. Tada je X (λ, P)-Markovljev lanac.

Dokaz: Prisjetimo se formule za uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)$. Direktno poopćenje je formula $P(A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(A_1 \mid A_0)\mathbb{P}(A_2 \mid A_0 \cap A_1) \ldots \mathbb{P}(A_n \mid A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})$. Iz te formule slijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i_n} \, , \end{aligned}$$

gdje je zadnji redak posljedica Definicije 1.4.

Da bismo dokazali obrat trebamo pokazati da vrijede (i) i (ii) iz Definicije 1.4. Uzimanjem $n = 0$ u (1.5) odmah slijedi da je λ početna distribucija. Sada dokazujemo formulu (1.4). Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$ (u suprotnom nemamo što dokazati). Tada je

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)} \\ &= \frac{\lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i}} \\ &= p_{ij} \, , \end{aligned}$$

gdje treći redak slijedi primjenom formule (1.5) dvaput. □

Pokažimo kako pomoću formule (1.5) možemo izračunati uvjetnu distribuciju od X_{n+1} uz dano X_n. Preciznije, računamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_n = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} \in S, \ldots, X_0 \in S)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in S, \ldots, X_0 \in S)} \\ &= \frac{\sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij} \, . \end{aligned}$$

Specijalno vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \, , \tag{1.6}$$

tj., (λ, P)-Markovljev lanac zaista ima Markovljevo svojstvo.

Često je slučaj da je početna distribucija Markovljevog lanca koncentrirana u jednom stanju. Fiksirajmo stanje $i \in S$. Neka je $\delta^i = (\delta^i_j : j \in S)$ vektor-redak definiran sa $\delta^i_j = \delta_{ij}$. Ako je λ početna distribucija Markovljevog lanca X takva da je $\lambda_i > 0$ (t.j., $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$), definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ formulom

$$\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A \mid X_0 = i) \, , \quad A \in \mathcal{F} \, .$$

Tvrdimo da je X (δ^i, P)-Markovljev lanac na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_i)$. Zaista, iz formule (1.5) slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n \,|\, X_0 = i) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\
&= \frac{\lambda_i p_{ii_1} \ldots p_{i_{n-1}i_n}}{\lambda_i} \\
&= p_{ii_1} \ldots p_{i_{n-1}i_n}\,.
\end{aligned}$$

Zajedno s očiglednom činjenicom da je $\mathbb{P}_i(X_0 = j, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = 0$ za $j \neq i$, slijedi

$$\mathbb{P}_i(X_0 = j, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \delta^i_j p_{ji_1} \ldots p_{i_{n-1}i_n}\,.$$

Iz obrata Teorema 1.5 slijedi da je X (δ^i, P)-Markovljev lanac. Specijalno, ponašanje Markovljevog lanca $X = (X_n : n \geq 0)$ uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ ne ovisi o početnoj distribuciji λ.

Na sličan način, upotrebom Teorema 1.5, može se dokazati sljedeća formula koja poopćuje Markovljevo svojstvo iz Definicije 1.2: za sve $n \geq 0$ i sve $i_0, \ldots, i_{m+n} \in S$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1} \,|\, X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= p_{i_m i_{m+1}} \ldots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \\
&= \mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1} \,|\, X_m = i_m)\,. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Ta formula predstavlja prvi korak u dokazu sljedećeg rezultata.

Teorem 1.6 *Neka je $X = (X_n : n \geq 0)$ (λ, P)-Markovljev lanac sa prostorom stanja S. Tada je uvjetno na $X_m = i$, slučajni proces $(X_{m+n} : n \geq 0)$ (δ^i, P)- Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_m$.*

Dokaz: Da bismo dokazali teorem dovoljno je pokazati da za svaki događaj A koji ovisi o $X_0, X_1, \ldots, X_m$ (t.j., za $A \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_m)$) vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m\} \cap A \,|\, X_m = i) \\
&= \delta^i_{i_m} p_{i_m i_{m+1}} \ldots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \mathbb{P}(A \,|\, X_m = i)\,, \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

za sve $n \geq 0$ i sve $i_m, i_{m+1}, \ldots, i_{m+n} \in S$. Zaista, uzimanjem $A = \Omega$ i korištenjem $\mathbb{P}(\Omega \,|\, X_m = i) = 1$, formula (1.8) daje

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m | \, X_m = i) = \delta^i_{i_m} p_{i_m i_{m+1}} \ldots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}}$$

što pomoću Teorema 1.5 pokazuje da je $(X_{m+n} : n \geq 0)$ (δ^i, P)-Markovljev lanac. Korištenjem gornje formule u (1.8), slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m\} \cap A \,|\, X_m = i) \\
&= \mathbb{P}(X_{m+n} = i_{m+n}, \ldots, X_{m+1} = i_{m+1}, X_m = i_m | \, X_m = i) \mathbb{P}(A \,|\, X_m = i)\,,
\end{aligned}$$

odnosno, $(X_{m+n} : n \geq 0)$ i $X_0, X_1, \ldots, X_m$ su uvjetno nezavisne uz dano $X_m = i$.

Neka je $A = \{X_0 = i_0, \ldots, X_{m-1} = i_{m-1}, X_m = i_m\}$. Tada se jednakost (1.8) dokazuje pomoću jednakosti (1.7) na isti način kao što smo (1.2) dokazali iz (1.1). Proizvoljni događaj A koji ovisi o $X_0, \ldots, X_m$ može se zapisati u obliku $A = \cup_k A_k$ gdje su A_k gornjeg oblika i disjunktni. Jednakost (1.8) sada slijedi iz σ-aditivnosti vjerojatnosti $\mathbb{P}$. □

Množenje beskonačnih stohastičkih matrica definira se po analogiji s množenjem konačnih matrica. Ako su $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ i $Q = (q_{ij} : i, j \in S)$ matrice (konačne ili beskonačne), definiramo matricu $PQ = (r_{ij} : i, j \in S)$ sa

$$r_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} q_{kj} .$$

Specijalno, n-ta potencija matrice P dana je s $P^n = (p_{ij}^{(n)} : i, j \in S)$, gdje je

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-2} i_{n-1}} p_{i_{n-1} j} . \tag{1.9}$$

Konačno, definiramo nultu potenciju matrice P kao $P^0 = I = (\delta_{ij})$ gdje je $\delta_{ii} = 1$, a $\delta_{ij} = 0$ za $j \neq i$.

Iz formule za konačnodimenzionalne distribucije jednostavno možemo izračunati jednodimenzionalne distribucije. Zaista, koristeći gornju formulu imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i_0 \in S} \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1} j} \\ &= \sum_{i_0 \in S} \lambda_{i_0} \, p_{i_0 j}^{(n)} = (\lambda P^n)_j . \qquad (1.10) \end{aligned}$$

U zadnjem retku smo sa λP^n označili produkt vektor-retka λ i matrice P, dok $(\lambda P^n)_j$ označava j-ti element rezultirajućeg vektor-retka. Iz formule (1.10) odmah slijedi da je za sve $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)} .$$

Ta formula nam govori da ako Markovljev lanac kreće iz stanja i, tada je vjerojatnost da nakon n koraka bude u stanju j jednaka ij-tom elementu n-te potencije prijelazne matrice P. Vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)}$ zovu se n-koračne prijelazne vjerojatnosti. U sljedeća dva primjera pokazujemo kako se takve vjerojatnosti mogu računati.

Primjer 1.7 Promatramo Markovljev lanac sa samo dva stanja koja označavamo sa 1 i 2: dakle $S = \{1, 2\}$. Označimo sa a prijelaznu vjerojatnost iz 1 u 2, a sa b prijelaznu vjerojatnost iz 2 u 1, $0 \leq a, b \leq 1$. Tada je pripadajuća prijelazna matrica jednaka

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} .$$

Uočite da je to najopćenitija situacija u slučaju Markovljevog lanca sa dva stanja. Želimo izračunati P^n za $n \geq 1$. To možemo na više načina. Jedna od mogućnosti je upotreba programa tipa Mathematica© koji će nam bez većih problema izračunati P^n. Druga mogućnost je računanje na prste prvih nekoliko potencija iz kojih će biti moguće naslutiti opći oblik matrice P^n, te indukcijom dokazati da je to stvarno tako. Treća mogućnost koristi rekurzivne relacije za $p_{ij}^{(n)}$. Konkretno, iz $P^{n+1} = P^n P$ slijedi

$$p_{11}^{(n+1)} = p_{11}^{(n)}(1-a) + p_{12}^{(n)} b\,.$$

Budući da je $p_{11}^{(n)} + p_{12}^{(n)} = 1$, uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo sljedeću rekurzivnu relaciju za $p_{11}^{(n)}$:

$$p_{11}^{(n+1)} = (1-a-b)p_{11}^{(n)} + b\,, \quad p_{11}^{(0)} = 1\,.$$

Rješenje je dano s

$$p_{11}^{(n)} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}(1-a-b)^n\,.$$

Sličnim postupkom možemo izračunati i ostale elemente matrice P^n i dobiti da je

$$P^n = \frac{1}{a+b}\left(\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}\right).$$

Budući da je $|1-a-b| < 1$, puštanjem $n \to \infty$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.8 Markovljev lanac na prostoru $S = \{1,2,3\}$ ima prijelaznu matricu

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

n-koračnu prijelaznu matricu P^n računamo tako da dijagonaliziramo P. Prvo izračunamo svojstvene vrijednosti od P rješavanjem karakteristične jednadžbe

$$0 = \det(\lambda I - P) = \frac{1}{4}(\lambda - 1)(4\lambda^2 + 1)\,.$$

Svojstvene vrijednosti su $1, i/2, -i/2$, te je

$$P = U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \end{bmatrix} U^{-1}$$

za neku ortogonalnu matricu U (koju ne želimo računati). Slijedi da je

$$P^n = U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (i/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i/2)^n \end{bmatrix} U^{-1}$$

Pretpostavimo da nas zanima $p_{11}^{(n)}$. Iz gornje formule slijedi da je $p_{11}^{(n)} = a + b(i/2)^n + c(-i/2)^n$ za neke konstante a, b, c koje ovise samo o matrici U. Budući da je

$$\left(\pm\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{2} \pm \sin\frac{n\pi}{2}\right),$$

možemo pisati

$$p_{11}^{(n)} = \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\beta\cos\frac{n\pi}{2} + \gamma\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Prve tri vjerojatnosti $p_{11}^{(0)}, p_{11}^{(1)}, p_{11}^{(2)}$ izračunamo na prste i dobijemo

$$\begin{aligned} 1 &= p_{11}^{(0)} = \alpha + \beta \\ 0 &= p_{11}^{(1)} = \alpha + \gamma/2 \\ 0 &= p_{11}^{(2)} = \alpha - \beta/4 . \end{aligned}$$

Rješavanjem slijedi $\alpha = 1/5$, $\beta = 4/5$ i $\gamma = -2/5$. Konačno,

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{5}\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Metoda iz prethodnog primjera može se, u principu, koristiti za računanje višekoračnih prijelaznih vjerojatnosti Markovljevoh lanca sa konačno stanja. Pretpostavimo da prostor stanja ima m elemenata i želimo izračunati $p_{ij}^{(n)}$.

(i) Izračunamo svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ prijelazne matrice P rješavanjem jednadžbe $\det(\lambda I - P) = 0$;

(ii) Ako su svojstvene vrijednosti različite, tražimo $p_{ij}^{(n)}$ u obliku

$$p_{ij}^{(n)} = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \cdots + a_m\lambda_m^n ,$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ (te ovise o i, j, ali ne ovise o n). Ako se neka svojstvena vrijednost, recimo λ_1, ponavlja, recimo k puta, tada koeficijent uz λ_1^n postaje $a_{1,0} + a_{1,1}n + \cdots a_{1,k-1}n^{k-1}$;

(iii) Kompleksni korijeni karakteristične jednadžbe dolaze u konjugiranim parovima koje je pogodnije pisati pomoću sinusa i kosinusa (kao u Primjeru 1.8).

Na kraju, spomenimo rezultat poznat pod nazivom *Chapman-Kolmogorovljeve jednakosti*: za sve $m, n \geq 0$ i sva stanja $i, j \in S$

$$\mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} . \tag{1.11}$$

Dokaz te formule je trivijalan i slijedi direktno iz očigledne činjenice $P^{n+m} = P^n P^m$. Skica alternativnog dokaza (ili interpretacije formule) ide ovako: lanac koji kreće iz stanja i, te se u trenutku $n + m$ nalazi u stanju j mora u trenutku n biti u nekom stanju $k \in S$, te iz tog stanja k u preostalih m koraka treba doći u stanje j.