Poglavlje 13

Dodatak

13.1 Vjerojatnost i slučajne varijable

13.1.1 Prostor elementarnih događaja

Prostor elementarnih događaja je neprazan skup Ω. Elemente od Ω označavat ćemo s ω i zvati elementarnim događajima. *Događaji* su podskupovi od Ω koji pripadaju σ-algebri događaja $\mathcal{F}$. Podsjetimo se da se neprazna familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω zove σ-algebra ako vrijedi:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,

(iii) Ako je $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Riječima, σ-algebra je neprazna familija podskupova od Ω koja sadrži nemoguć događaj $\emptyset$, zatvorena je na komplemetiranje i prebrojivu uniju. Iz definicije se jednostavno dokazuju i sljedeća svojstva σ-algebre:

(iv) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(v) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, tada je $A \setminus B \in \mathcal{F}$,

(vi) Ako je $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se *izmjeriv prostor*.

13.1.2 Vjerojatnosni prostor

Vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je svaka funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća dva svojstva:

(P1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(P2) Za svaki niz $(A_n : n \in \mathbb{N})$, $A_n \in \mathcal{F}$, takav da je $A_n \cap A_m = \emptyset$ za $m \neq n$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

Svojstvo (P1) zove se normiranost i govori da je vjerojatnost sigurnog događaja Ω uvijek jednaka 1. Svojstvo (P2) zove se σ-aditivnost (ili prebrojiva aditivnost) vjerojatnosti $\mathbb{P}$. Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ naziva se *vjerojatnosni prostor*.

Navodimo neka fundamentalna svojstva vjerojatnosti:

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

(b) $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$,

(c) $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, i $A_1 \subset A_2 \subset \dots \Longrightarrow \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \uparrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (neprekidnost vjerojatnosti na rastući niz događaja),

(d) $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, i $A_1 \supset A_2 \supset \dots \Longrightarrow \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \downarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (neprekidnost vjerojatnosti na padajući niz događaja),

(e) $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-subaditivnost),

(f) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j \Longrightarrow \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ (konačna aditivnost),

(g) Neka je $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ konačno aditivna funkcija koja je neprekidna u nuli (t.j., $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ i $\cap_{n=1} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$). Tada je $\mathbb{P}$ vjerojatnost.

13.1.3 Nezavisnost

Za događaje $A, B \in \mathcal{F}$ kažemo da su *nezavisni* ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.$$

Za konačno mnogo događaja $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ kažemo da su nezavisni, ako za svaki $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ i svaki skup indeksa $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})\,.$$

Događaji $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ su *po parovima nezavisni* ako za sve $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, vrijedi $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$. Jednostavno se vidi da su nezavisni događaji po parovima nezavisni, dok obrat općenito ne vrijedi. Niz događaja $(A_n : n \in \mathbb{N})$, $A_n \in \mathcal{F}$, je nezavisan, ako su za svaki $n \in \mathbb{N}$ nezavisni događaji $A_1, A_2, \dots, A_n$.

13.1.4 Uvjetna vjerojatnost

Neka je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$. *Uvjetna vjerojatnost* od $B \in \mathcal{F}$ uz dano A definira se formulom

$$\mathbb{P}(B \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}\,.$$

Ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada se uvjetna vjerojatnost uz dano A ne definira. Uvodimo konvenciju da kadgod pišemo $\mathbb{P}(B \,|\, A)$ pretpostavljamo da je ta uvjetna vjerojatnost dobro definirana, t.j., da je $\mathbb{P}(A) > 0$.

Uočimo da vrijedi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \,|\, A)$. Ta formula se generalizira na konačno mnogo skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1)\mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \,|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\,.$$

Uvjetna vjerojatnost kao funkcija: Definiramo $\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \to [0, 1]$ formulom

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\,.$$

Tada je $\mathbb{P}_A$ vjerojatnost. Za događaje $B, C \in \mathcal{F}$ kažemo da su *uvjetno nezavisni uz dano* A, ako su nezavisni uz vjerojatnost $\mathbb{P}_A$, t.j., ako vrijedi $\mathbb{P}_A(B \cap C) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_A(C)$. To se može zapisati kao

$$\mathbb{P}(B \cap C \,|\, A) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\mathbb{P}(C \,|\, A)\,. \tag{13.1}$$

Po analogiji se definira uvjetna nezavisnost uz dano A za više događaja.

Lema 13.1 *Događaji B i C uvjetno su nezavisno uz dano A ako i samo ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(B \,|\, C \cap A) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\,. \tag{13.2}$$

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi (13.1). Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \,|\, C \cap A) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C \cap A)}{\mathbb{P}(C \cap A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap C \,|\, A)}{\mathbb{P}(C \,|\, A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \,|\, A)\mathbb{P}(C \,|\, A)}{\mathbb{P}(C \,|\, A)} = \mathbb{P}(B \,|\, A)\,.\end{aligned}$$

Obrat se pokazuje slično. □

13.1.5 Diskretna slučajna varijabla

Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ naziva se *diskretna slučajna varijabla*, ako postoji prebrojiv skup $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ takav da je $X(\omega) \in \{a_1, a_2, \dots\}$ za svaki $\omega \in \Omega$, te vrijedi

$$\{X = a_j\} = \{\omega \in \Omega : \, X(\omega) = a_j\} \in \mathcal{F}\,, \quad \text{za svaki } j = 1, 2, \dots$$

Ako su X i Y diskretne slučajne varijable, te $c \in \mathbb{R}$, tada su i $X+Y$ i cX također diskretne slučajne varijable.

Neka je S proizvoljan prebrojiv skup. *Slučajni element* s vrijednostima u S je funkcija $X : \Omega \to S$ za koju vrijedi $\{X = i\} \in \mathcal{F}$ za sve $i \in S$. Uočite da je diskretna slučajna varijabla s vrijednostima $a_1, a_2, \dots$, slučajan element u $S = \{a_1, a_2, \dots\}$. Za $i \in S$ stavimo $p_i = \mathbb{P}(X = i)$ (ovdje upotrebljavamo nepreciznu oznaku za vjerojatnost događaja: precizno bi bilo $\mathbb{P}(\{X = i\})$). Tada vrijedi

$$\sum_{i \in S} p_i = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in S} \{X = i\}\right) = 1\,.$$

Familija $(p_i : i \in S)$ naziva se *distribucija* slučajnog elementa X.

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla s vrijednostima $a_1, a_2, \dots$. *Funkcija gustoće vjerojatnosti* od X (kraće, gustoća od X) je funkcija $f = f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definirana formulom

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p_i\,, & x = a_i \\ 0\,, & x \notin \{a_1, a_2, \dots\} \end{cases}$$

Funkcija distribucije od X je funkcija $F = F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x)\,.$$

Vrijedi: $F(x) = \sum_{y \le x} f(y) = \sum_{a_i \le x} p_i$.

13.1.6 Očekivanje i varijanca

Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u $\{a_1, a_2, \dots\}$, te neka je $p_i = \mathbb{P}(X = a_i)$ distribucija od X. Kažemo da X ima matematičko očekivanje, ako je $\sum_i |a_i| p_i < +\infty$. U tom slučaju definiramo *matematičko očekivanje* od X (ili, kraće, očekivanje od X) formulom

$$\mathbb{E}X = \sum_i a_i p_i\,.$$

Ako je $X \ge 0$, t.j., $a_i \ge 0$ za sve i, tada red $\sum_i a_i p_i$ ili konvergira ili divergira u $+\infty$. U slučaju divergencije (neprecizno) kažemo da je $\mathbb{E}X = +\infty$. Slučajna varijabla koja poprima konačno mnogo vrijednosti uvijek ima očekivanje.

Ako su X i Y diskretne slučajne varijable koje imaju matematičko očekivanjem, tada i $X + Y$, te cX, $c \in \mathbb{R}$, imaju matematičko očekivanje i vrijedi

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y\,, \quad \mathbb{E}(cX) = c\,\mathbb{E}X\,.$$

Varijanca slučajne varijable X definira se sa

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]\,,$$

što je zbog nenegativnosti od $(X-\mathbb{E}X)^2$ uvijek dobro definirano: $\mathrm{Var}(X) \in [0,+\infty]$. Kažemo da X ima konačnu varijancu, ako je $\mathrm{Var}(X) < +\infty$.

Konačno, ako je $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ funkcija, tada vrijedi formula za očekivanje funkcije slučajne varijable

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_i f(a_i)p_i \,.$$

13.1.7 Nezavisnost slučajnih varijabli

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diskretne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *nezavisne*, ako za sve $a^{(i)}$ iz slike od X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 = a^{(1)}, X_2 = a^{(2)}, \ldots, X_n = a^{(n)}) = \mathbb{P}(X_1 = a^{(1)})\mathbb{P}(X_2 = a^{(2)}) \cdots \mathbb{P}(X_n = a^{(n)}) \,.$$

Ta relacija ekvivalentna je sa

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_2 \in A_2) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n) \,,$$

za sve $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$. Za slučajne varijable $(X_j : j \geq 1)$ kažemo da su nezavisne, ako su za svaki $n \in \mathbb{N}$ nezavisne slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Neka je $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$, te neka je $\mathbb{P}_A$ uvjetna vjerojatnost uz dano A. Slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ su *uvjetno nezavisne* uz dano A, ako za sve $a^{(i)}$ iz slike od X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, vrijedi

$$\mathbb{P}_A(X_1 = a^{(1)}, X_2 = a^{(2)}, \ldots, X_n = a^{(n)}) = \mathbb{P}_A(X_1 = a^{(1)})\mathbb{P}_A(X_2 = a^{(2)}) \cdots \mathbb{P}_A(X_n = a^{(n)}) \,,$$

odnosno

$$\mathbb{P}(X_1 = a^{(1)}, \ldots, X_n = a^{(n)} \mid A) = \mathbb{P}(X_1 = a^{(1)} \mid A) \cdots \mathbb{P}(X_n = a^{(n)} \mid A) \,.$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable s konačnim očekivanjem, tada vrijedi

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \,.$$

Za diskretne slučajne varijable X i Y s konačnim varijancama definira se *kovarijanca* $\mathrm{Cov}(X,Y)$ formulom

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \,.$$

Kažemo da su X i Y *nekorelirane*, ako je $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (što implicitno podrazumijeva da je kovarijanca dobro definirana, t.j., X i Y imaju konačne varijance). Ako su X i Y nezavisne, tada su one i nekorelirane. Obrat, općenito, ne vrijedi. Očito vrijedi formula $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$.

Za slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vrijedi sljedeća važna formula:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \,.$$

Specijalno, ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, zbog $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ za $i \neq j$ dobivamo

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)\,.$$

13.2 Konvolucija

Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable definirane na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. U ovoj točki važno je da slučajne varijable primaju nenegativne cjelobrojne vrijednosti. Distribucije od X i Y dane su s

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k\,, \quad \mathbb{P}(Y = k) = q_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Činjenicu da je distribucija slučajne varijable X dana nizom $(p_k : k \geq 0)$ pisat ćemo kao $X \sim (p_k)$.

Želimo izračunati distribuciju slučajne varijable $X + Y$. Općenito, bez pretpostavke o nezavisnosti, samo iz distribucija slučajnih varijabli X i Y ne možemo ništa reći o distribuciji od $X + Y$. Dakle, nezavisnost ima presudnu ulogu u sljedećem računu. Primjetimo prvo da za $n \geq 0$ vrijedi

$$\{X + Y = n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X = i, Y = n - i\}\,.$$

Zato je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} \{X = i, Y = n - i\}\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = n - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = n - i) = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}\,, \end{aligned}$$

gdje drugi redak slijedi zbog nezavisnosti. To je motivacija sljedeće definicije.

Definicija 13.2 Konvolucija *nizova* $p = (p_n : n \geq 0)$ *i* $q = (q_n : n \geq 0)$ *je niz* $r = (r_n : n \geq 0)$ *definiran formulom*

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}\,, \quad n \geq 0\,.$$

Pišemo $r = p * q$ *ili* $(r_n) = (p_n) * (q_n)$.

Račun prije definicije pokazuje da je $(\mathbb{P}(X + Y) = n) = (P(X = n)) * (\mathbb{P}(Y = n))$, t.j., distribucija slučajne varijable $X + Y$ je konvolucija distribucija slučajnih varijabli X i Y. To pokazuje da je konvolucija vjerojatnosnih distribucija ponovno vjerojatnosna distribucija: $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y = n) = 1$.

Nadalje, budući da su $X+Y$ i $Y+X$ očigledno jednako distribuirane slučajne varijable (budući da su jednake kao funkcije), slijedi da su i njihove distribucije jednake. Kako je distribucija od $X+Y$ jednaka $p*q$, a distribucija od $Y+X$ jednaka $q*p$, dobivamo da je $p*q=q*p$. Dakle, konvolucija je komutativna operacija na nizovima (naš dokaz pokazuje komutativnost na nizovima koji su vjerojatnosne distribucije, ali tvrdnja vrijedi i općenito što se lako vidi jednostavnim analitičkim dokazom). Na sličan vjerojatnosni način se pokazuje da je konvolucija asocijativna operacija. To direktno slijedi iz asocijativnosti zbrajanja slučajnih varijabli.

Pretpostavimo da su X_1 i X_2 nezavisne, jednako distribuirane diskretne slučajne varijable s distribucijom $\mathbb{P}(X_1=n)=p_n$, $n=0,1,2,\ldots$. Tada X_1+X_2 ima distribuciju $p*p$ što ćemo označavati as p^{2*}, ili $(p_n)^{2*}$.

Neka su sada $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nezavisne, jednako distribuirane diskretne slučajne varijable s distribucijom $\mathbb{P}(X_1=n)=p_n$, $n=0,1,2,\ldots$. Indukcijom se pokazuje (koristeći asocijativnost konvolucije) da slučajna varijabla $X_1+X_2+\cdots+X_k$ ima distribuciju $p*p*\cdots*p$ (k puta), što označavamo kao p^{k*} ili $(p_n)^{k*}$, i zovemo k-ta konvolucijska potencija.

13.3 Funkcije izvodnice

Definicija 13.3 Funkcija izvodnica *niza realnih brojeva* $(a_n : n \geq 0)$ *je red potencija definiran formulom*

$$A(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n\,, \quad |s| < s_0\,, \tag{13.3}$$

gdje je $s_0 \geq 0$ *radijus konvergencije gornjeg reda.*

Neka je X nenegativna cjelobrojna (proširena) slučajna varijabla s vjerojatnosnom distribucijom $(p_n : n \geq 0)$. *Funkcija izvodnica* od X definira se kao funkcija izvodnica niza $(p_n : n \geq 0)$:

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n\,.$$

Budući da je $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \leq 1$, radijus konvergencije reda je barem 1, što znači da je funkcija P definirana za sve $s \in [0,1]$. Vrijedi da je $P(1)=1$ ako i samo ako je $\mathbb{P}(X<\infty)=1$. Po formuli za očekivanje funkcije slučajne varijable slijedi

$$P(s) = \mathbb{E}(s^X)\,.$$

Naziv funkcija izvodnica proizlazi iz činjenice da se iz poznavanja funkcije izvodnice nenegativne cjelobrojne slučajne varijable može deriviranjem izvesti vjerojatnosna distribucija te slučajne varijable. Da bismo to pokazali, definirajmo za $X \in \mathbb{Z}_+$ s vjerojatnosnom distribucijom $(p_n : n \geq 0)$ red potencija kompleksne varijable

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Budući da je radijus konvergencije tog reda veći ili jednak jednak 1, zaključujemo da red konvergira apsolutno na otvorenom krugu $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, te na tom krugu definira analitičku funkciju. U tom slučaju vrijedi

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^{n-1}$$

i red konvergira apsolutno na $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (vidi, npr., H. Kraljević, S. Kurepa: Matematička analiza IV, Teorem 14, str. 52). Specijalno je

$$P'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}, \quad 0 \le s < 1$$

(uočite da iako red koji definira P konvergira u točki $s = 1$, red koji definira P' ne mora konvergirati u $s = 1$). Induktivno slijedi

$$P^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n} P(s) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) p_k s^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} p_k s^{k-n}.$$

Uvrštavanjem $s = 0$ dobivamo

$$P^{(n)}(0) = n! p_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

odnosno

$$p_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dakle, niz $(p_n : n \ge 0)$ se može rekonstruirati (izvesti) iz funkcije izvodnice. Preciznije, funkcija izvodnica jedinstveno određuje svoj niz.

Propozicija 13.4 *Neka su* $(p_n : n \ge 0)$ *i* $(\tilde{p}_n : n \ge 0)$ *dvije vjerojatnosne distribucije s funkcijama izvodnicama*

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \quad \tilde{P}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n s^n, \quad 0 \le s < 1.$$

Ako vrijedi $P(s) = \tilde{P}(s)$ *za sve* $s \in [0, 1)$, *tada je* $p_n = \tilde{p}_n$ *za sve* $n \ge 0$.

Sljedeći rezultat je često koristan.

Propozicija 13.5 *(Abel) Neka je* $(a_n : n \ge 0)$ *niz nenegativnih realnih brojeva s funkcijom izvodnicom* $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$, *te neka je* $s_0 = 1$ *radijus konvergencije reda. Tada vrijedi*

$$\lim_{s \uparrow 1} A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

gdje obje strane mogu biti jednake $+\infty$. *Specijalno, ako je* $\lim_{s\uparrow 1} A(s) < \infty$, *tada se funkcija* $A(s)$ *može po neprekidnosti proširiti sa intervala* $[0, 1)$ *na segment* $[0, 1]$ *formulom* $A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Iz funkcije izvodnice nenegativne cjelobrojne slučajne varijable X mogu se izračunati i momenti te slučajne varijable. Prvi korak prema tom cilju je sljedeća propozicija:

Propozicija 13.6 *Neka je $(p_n : n \geq 0)$ vjerojatnosna distribucija nenegativne cjelobrojne slučajne varijable X, te neka je $P(s) = \mathbb{E}(s^X)$ funkcija izvodnica od X. Definiramo*

$$q_n = \mathbb{P}(X > n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

i funkciju izvodnicu

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$$

niza $(q_n : n \geq 0)$. Tada vrijedi

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}\,, \quad 0 \leq s < 1\,. \tag{13.4}$$

Napomena 13.7 *Budući da je $(q_n : n \geq 0)$ padajući, pa dakle i omeđen niz, red $\sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$ konvergira za svaki $s \in [0, 1)$, t.j., Q je dobro definirana na $[0, 1)$.*

Dokaz: Vrijedi $q_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i$, pa je

$$\begin{aligned} Q(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i \right) s^n = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{i-1} s^n \right) p_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - s^i}{1 - s}\, p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 - s^i}{1 - s}\, p_i \\ &= (1 - s)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i - \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i \right) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}\,. \end{aligned}$$

□

Pustimo $s \uparrow 1$ u (13.4). Po Propoziciji 13.5 slijedi

$$\lim_{s \uparrow 1} Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{E}X\,.$$

S druge strane,

$$\lim_{s \uparrow 1} Q(s) = \lim_{s \uparrow 1} \frac{P(s) - 1}{s - 1} = \lim_{s \uparrow 1} \frac{P(s) - P(1)}{s - 1} = P'(1)\,,$$

gdje $P'(1)$ označava lijevu derivaciju od P u $s = 1$.