Poglavlje 0

Uvod

0.1 Cilj kolegija

Osnovni cilj kolegija je uvesti razne modele financijskih tržišta i objasniti vjerojatnosne metode i tehnike potrebne za njihovo razumijevanje. Kolegij je prvenstveno namijenjen matematičarima zbog sljedećih razloga:

- pojavljuju se novi i zanimljivi matematički problemi;
- konkretna primjena na financije može biti dodatna motivacija za učenje relativno kompleksne matematičke teorije;
- teorija je primjenjiva u praksi, npr. u financijskim institucijama

Neki dijelovi kolegija mogu biti zanimljivi i ekonomistima, jer razumijevanje matematike u financijskom modeliranju postaje neophodno za uspješno upravljanje sofisticiranim oblicima financijske imovine.

Važnost kolegija i istraživanja: za fundamentalne znanstvene radove iz područja financijskog modeliranja, godine 1997. dodijeljena je Nobelova nagrada iz ekonomskih znanosti. Nagrada je dodijeljena P. C. Mertonu i M. S. Scholesu za "novu metodu određivanja cijena izvedenih vrijednosnica (engl. derivatives)" (B. Black, koji je također sudjelovao u tim fundamentalnim istraživanjima, umro je nekoliko godina ranije). U zadnjih 15-20 godina istraživanja i primjene tih istraživanja u financijskoj industriji su još više intenzivirana, i u njima zajednički sudjeluju ekonomisti i matematičari. Skoro svako važnije sveučilište u SAD, a u zadnjim godinama i u Evropi, danas nudi dodiplomski ili poslijediplomski interdisciplinarni program iz financija.

Obim istraživanja je vrlo velik. Monografije se pojavljuju kao gljive u rasponu od matematički vrlo sofisticiranih do potpuno primjenjivih.

Sljedeći popis literature relevantan je za kolegij:

Osnovna literatura:

1. W. A. Baxter, A. Rennie, *Financial Calculus*, Cambridge University Press, 1996.

2. D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapmann & Hall, 1996.

3. M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.

4. S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell Publishers, 1997.

Dodatna literatura:

1. N. H. Bingham, R. Kiesel, *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer, 1998. ↑

2. T. Bjork, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 1999.

3. J. C. Cox, M. Rubinstein, *Option Markets*, Prentice-Hall, 1985. **E**

4. J. Cvitanić, F. Zapatero, *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT Press, 2004.

5. D. Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd ed., Princeton University Press, 1996. **E**↑

6. R. Elliot, P. Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, Springer, 1999. ↑

7. H. Föllmer, A. Schied, *Stocahstic Finance: An Introduction in Discrete Time*, W. de Gruyter, 2002. ↑

8. G. Gemmill, *Option Pricing: An International Perspective*, McGraw Hill, 1993. **E**

9. J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1993. **E**

10. I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer, 1991. **M**$\uparrow$

11. I. Karatzas, S. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer, 1998, $\uparrow$

12. Y. K. Kwok, *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, 1998.

13. T. Mikosch, *Elementary Stochastic Calculus – With Finance in View*, World Scientific Publishing Co., 1998.

14. B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, 6th ed., Springer, 2003. **M**

15. P. Protter, *Stochastic Integration and Stochastic Differential Equations: A New Approach*, Springer, 1990. **M**$\uparrow$

16. D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1991. **M**$\uparrow$

17. S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, 2004.

18. A. N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific, 1999. $\uparrow$

19. M. Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer, 2000. $\uparrow$

Znanstveno-istraživački radovi pojavljuje se velikom brzinom, te se pokreću novi časopisi namjenjeni samo tom području. Radovi se objavljuju u matematičkim, ekonomskim i interdisciplinarnim časopisima. Najčešći časopisi su:

(i) ekonomski: J. Finance, J. Finan. Econom., J. Finan. Quant. Anal., Economic J., J. Econom. Th., Econometrica;

(ii) matematički: Ann. Prob., Ann. Appl. Prob., J. Appl. Prob., Math. Oper. Res., Stoch. Proc. Appl.;

(iii) interdisciplinarni: Math. Finance (1991), Finance and Stochastics (1997).

Kao što je vidljivo iz gornjih naslova, postoji značajna veza između financija i stohastike. O povijesti i razvoju te veze odlično govori sljedeći editorial iz prvog broja časopisa *Finance & Stochastics* (1997) (autori: A. N. Shiryaev, S. E. Shreve i D. Sondermann).

Skoro prije sto godina Louis Bachelier objavio je svoju disertaciju Théorie da la spéculation*, Ann. sci. École Norm. Sup.* **3** *(1900), u kojoj je otkrio Brownovo gibanje kao sredstvo za analizu financijskih tržišta. A. N. Kolmogorov, u svojem fundamentalnom radu* Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Ann.* **104** *(1931), daje zasluge Bachelieru za prvo sustavno proučavanje stohastičkih procesa u neprekidnom vremenu. Dodatno, Bachelierova disertacija označuje početak teorije određivanja cijena opcija, danas integralnog dijela modernih financija. Tako se godina 1900. može smatrati godinom rođenja i financija i stohastike.*

Prvih sedam desetljeća nakon Bacheliera, financije i stohastika razvijali su se manje-više nezavisno. Teorija stohastičkih procesa rasla je brzo, i inkorporirajući klasični diferencijalni račun postala jaki matematički alat zvan stohastički račun. Financije su bile uspavane sve do sredine dvadesetog stoljeća, kada su bile oživljene kao posljedica opće teorije ravnoteže u ekonomiji. Radovima Blacka, Mertona, Samuelsona i Scholesa u kasnim '60 i ranim '70 u kojima su cijene dionica modelirane pomoću geometrijskog Brownovog gibanja i taj model korišten za studiranje ravnoteže i određivanje cijena arbitražom, dvije discipline (financije i stohastika) opet su ujedinjene. Uskoro je otkriveno kako je stohastički račun sa svojom bogatom matematičkom strukturom - teorija martingala, Itôv račun, stohastička integracija i parcijalne diferencijalne jednadžbe - izvrsno prilagođen strogoj analizi suvremenih financija, što bi navelo na misao (pogrešnu) da je sav taj aparat izmišljen za primjene u financijama. Od tada suradnja između te dvije discipline postaje sve veće područje istraživanja s velikim utjecajem i na teoriju i na praksu financijskih tržišta.

0.2 Financijsko tržište i opcije

Financijsko tržište može biti, i u pravilu jeste, vrlo kompleksno. Za sada nećemo ulaziti u definiciju i elemente financijskog tržišta. Naš model će biti vrlo jednostavan i u osnovi zahtijeva dvije vrste financijskih imovina - rizičnu i nerizičnu.

Kao rizičnu imovinu uzet ćemo dionicu. Zašto rizična? Zato što cijena dionice neprestano fluktuira, uglavnom na nepredvidiv način. Stoga ulaganje u dionice u sebi nosi rizik.

Pod nerizičnom imovinom smatrat ćemo financijski instrument koji donosi siguran, predvidiv povrat. To je najjednostavnije modelirati novcem u banci (npr. na štednoj knjižici) uloženim uz fiksnu kamatnu stopu.

Zašto investitori ulažu u rizičnu imovinu? Zato što očekuju veći povrat nego kod nerizične imovine, te su stoga spremni preuzeti rizik.

Osim dionica i novca u banci, promatrat ćemo i opcije, odnosno izvedene vrijednosne papire (izvedenice, engl. derivative securities, derivatives). Otkud ime izvedeni vrijednosni papiri? Zato što je njihova vrijednost, odn. cijena, izvedena iz vrijednosnice na koju su napisani. Na primjer, vrijednost opcije na dionicu izvedena je iz vrijednosti dionice (što ne znači da ne ovisi i o drugim faktorima).

Što je u stvari opcija?

Definicija 0.1 Opcija *je ugovor koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti ili prodati neku imovinu do određenog datuma (ili na određeni datum) po unaprijed dogovorenoj cijeni.*

Osnovno svojstvo opcije je da vlasnik opcije **ne** mora kupiti (odn. prodati) imovinu. U ugovoru sudjeluju dvije strane - prodavatelj (pisac) opcije, t.j. osoba koja izdaje opciju, te kupac opcije, t.j. osoba koja postaje vlasnik opcije.

Uobičajeniji ugovor između dvije strane je tzv. *forward* ugovor. Po tom ugovoru se jedna od strana obavezuje prodati (ili kupiti) od druge strane neku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni. U ovom slučaju stranka je obavezna na prodaju (ili kupnju) i ne može odustati od ugovora. Dakle, za razliku od opcije, kod forwarda ne postoji opcija odustajanja.

Primjer 0.2 Cijena jedne dionice Plive PLVA-R-A na dan 30.9.2004. iznosi $S_0 = 460.00$ Kn.
Call opcija (*opcija poziva*) s *danom dospijeća* 30.12.2004. (engl. *maturity*) i *cijenom izvršenja* $K = 470.00$ Kn (engl. *strike price, exercise price*) je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na kupnju (od pisca opcije) jedne dionice PLVA-R-A na dan 30.12.2004. po cijeni od $K = 470.00$ Kn.
Put opcija (*opcija ponude*) s *danom dospijeća* 30.12.2004. i *cijenom izvršenja* $K = 470.00$ Kn je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na prodaju (piscu opcije) jedne dionice PLVA-R-A na dan 30.12.2004. po cijeni od $K = 470.00$ Kn.

Neka je S_T cijena jedne dionice Plive PLVA-R-A na dan dospijeća 30.12.2004. Pozicija kupca (odn. vlasnika) call opcije na dan dospijeća 30.12.2004.

- ako je cijena $S_T > K = 470.00$, na primjer, $S_T = 500.00$ Kn, vlasnik opcije će iskorisitit svoje pravo i kupiti (od pisca) jednu dionicu Plive za 470.00 Kn, te je istog trenutka prodati na tržištu za tržišnu cijenu od $S_T = 500.00$ Kn. Na taj način će kupac ostvariti profit od $S_T - K = 500.00 - 470.00 = 30.00$ Kn.

- akoje cijena $S_T \leq K = 470.00$ Kn, na primjer, $S_T = 450.00$ Kn, vlasnik opcije ne koristi svoje pravo, jer na tržištu dionicu može kupiti jeftinije od cijene dospijeća.

- vrijednost opcije na dan dospijeća jednaka je $\max(S_T - K, 0) = \max(30, 0)$.

Pozicija pisca call opcije na dan dospijeća 30.12.2004. je suprotna od kupčeve:

- ako je cijena $S_T > K = 470.00$, na primjer, $S_T = 500.00$ Kn, pisac opcije mora prodati dionicu Plive za $K = 470.00$ kn, dok je tržišna vrijednost $S_T = 500.00$ Kn, te prema tome gubi 30.00 Kn.

- akoje cijena $S_T \leq K = 470.00$ Kn, kupac ne koristi ugovor, te pisac ne gubi ništa.

- vrijednost opcije na dan dospijeća jednaka je $-\max(S_T - K, 0) = -\max(30, 0)$.

Zaključak: budući da vlasnik opcije može samo dobiti ugovorom, a pisac opcije samo izgubiti, jasno je da pisac mora od kupca tražiti premiju za pravo koje opcija daje. Ta premija je cijena opcije koju kupac mora platiti piscu na dan izdavanja opcije.
Osnovno pitanje: kolika je pravedna (racionalna) cijena opcije?

0.3 Osnovne ideje određivanja cijene opcija

Sada ćemo na vrlo jednostavnom modelu objasniti osnovnu ideju određivanja pravedne cijene opcija. Da bismo to mogli učiniti, uvodimo sljedeće pretpostavke o financijskom tržištu (tzv. tržište *bez trenja*):

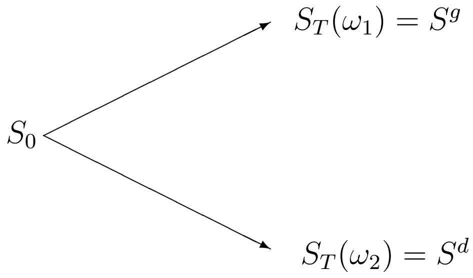
- sve stranke imaju isti pristup relevantnim informacijama,

- ne postoje troškovi transakcija (trgovanje je besplatno),
- sva financijska imovina je beskonačno dijeljiva i likvidna,
- kamatna stopa jednaka je za posuđivanje i ulaganje.

Vratimo se na Primjer 0.2: $S_0 = 460.00$, $K = 470.00$, $T = 3$ mjeseca. Pretpostavimo da je kamatna stopa za 3 mjeseca fiksna i iznosi 5%. To znači da jedna kuna uložena danas za tri mjeseca daje 1.05 Kn. Stavimo $r = 0.05$. Da bismo mogli odrediti cijenu call opcije, moramo na neki način modelirati slučajno kretanje cijene dionice Plive. Predlažemo najjednostavniji mogući model, za koji je jasno da nije realan. Bez obzira na to, model je ilustrativan i poučan, a pokazat ćemo tokom kolegija da se može poopćiti tako da zadrži jednostavno svojstvo, ali postaje puno realniji.

Pretpostavke: nakon tri mjeseca, $T = 3$, cijena jedne dionice Plive PLVA-R-A može porasti i iznosit će $S^g = 500.00$ Kn, ili može pasti i iznosit će $S^d = 450.00$ Kn. Reći ćemo da se dogodio elementarni događaj ω_1 ako je cijena jednaka S^g, odnosno da se dogodio ω_2 ako je cijena jednaka S^d. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Cijena dionice nakon tri mjeseca S_T je slučajna i vrijedi

$$
\begin{aligned}
S_T(\omega_1) &= S^g = 500.00\,,\\
S_T(\omega_2) &= S^d = 450.00\,.
\end{aligned}
$$



Dakle, $S_T : \Omega \to \mathbb{R}_+$ je slučajna varijabla. Naravno, u trenutku $t = 0$ (t.j. sada), ne znamo da li se će se dogoditi ω_1 ili ω_2 (odnosno koje je pravo stanje svijeta).

Izračunajmo vrijednost C_T call opcije u trenutku T. Uočimo da ta vrijednost ovisi o tome da li se dogodio ω_1 ili ω_2. Dakle, $C_T : \Omega \to \mathbb{R}_+$ je slučajna varijabla i vrijedi:

$$\begin{aligned} &C_T(\omega_1) = S_T(\omega_1) - K = S^g - K = 500.00 - 470.00 = 30.00\,, \\ &C_T(\omega_2) = 0\,. \end{aligned}$$

Uočimo da možemo pisati $C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Također, C_T koji smo gore izračunali je vrijednost opcije u kunama nakon tri mjeseca. Zbog vremenske vrijednosti novca, sadašnja vrijednost opcije nakon tri mjeseca je $(1+r)^{-1}C_T$. Tu vrijednost zvat ćemo diskontirana vrijednost. Dakle

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+r}C_T(\omega_1) = \frac{1}{1+0.05} \times 30 = 28.57\,, \\ &\frac{1}{1+r}C_T(\omega_2) = 0\,. \end{aligned}$$

Jedna od mogućih ideja određivanja cijene opcija je izračunati očekivanje njezine diskontirane vrijednosti. Za računanje očekivanja potrebno je odrediti vjerojatnosti elementarnih događaja. Postoje dva načina kako se to može učiniti. Jedan je statistički, po kojem se vjerojatnosti procjenjuju iz povijesnih podataka. Takvu vjerojatnost možemo zvati objektivnom. Drugi način određivanja vjerojatnosti je subjektivan, po kojem investitori procjenjuju vjerojatnosti na subjektivan način (korištenjem informacija unutar i izvan tržišta). Na primjer, na tržištu na kojem se očekuje pad cijena dionica (bear market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0.2 \qquad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0.8\,.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+r}C_T\right] = 0.2 \times \frac{1}{1.05} \times 30 + 0.8 \times \frac{1}{1.05} \times 0 = \frac{6}{1.05} = 5.71\,.$$

Dakle, investitoru koji predviđa pad tržišta (uz subjektivnu procjenu vjerojatnosti kao gore), opcija vrijedi 5.71 Kn (odnosno, toliko je spreman platiti za nju). Na tržištu na kojem se očekuje rast cijena dionica (bull market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0.8 \qquad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 0.2\,.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+r}C_T\right] = 0.8 \times \frac{1}{1.05} \times 30 + 0.8 \times \frac{1}{1.05} \times 0 = \frac{24}{1.05} = 22.86\,,$$

odnosno četiri puta više. Jasno je da će se na takav način dvije strane u ugovoru koje imaju suprotna očekivanja o tržištu teško dogovoriti o cijeni opcije. Međutim, za izgradnju pouzdanog modela financijskog tržišta, mora biti zagarantirana jedinstvenost cijene izvedenih vrijednosnica. To se može postići primjenom replicirajućeg portfelja.

Objasnimo detaljno što je to replicirajući portfelj. Pretpostavimo da investitor može trgovati sa dvije financijske imovine - dionicama Plive i novcem u banci (t.j., može uložiti novac u banku ili ga posuditi iz banke). Označimo sa ϕ^1 broj dionica Plive koje investitor posjeduje (ili kupi) u trenutku $t = 0$ (zbog pretpostavke o beskonačnoj djeljivosti ϕ^1 može biti proizvoljan realan broj). Neka je ϕ^0 iznos novca koji investitor u trenutku $t = 0$ ima u banci (ϕ^0 može biti negativan - novac posuđen iz banke). Uređen par $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathbb{R}^2$ zovemo portfelj u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost $V_0(\phi)$ takvog portfelja ϕ? Očito je

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = \phi^0 + 460\phi^1 .$$

Kolika je vrijednost $V_T(\phi)$ portfelja ϕ u trenutku $t = T$? Budući da je cijena dionice Plive slučajna, to će i vrijednost portfelja biti slučajna varijabla, $V_T(\phi) : \Omega \to \mathbb{R}$. Vrijedi:

$$V_T(\phi) = \phi^0(1 + r) + \phi^1 S_T .$$

Preciznije

$$\begin{aligned} V_T(\phi)(\omega_1) &= \phi^0(1 + r) + \phi^1 S_T(\omega_1) = 1.05\phi^0 + 500.00\phi^1 , \\ V_T(\phi)(\omega_2) &= \phi^0(1 + r) + \phi^1 S_T(\omega_2) = 1.05\phi^0 + 450.00\phi^1 . \end{aligned}$$

Kažemo da portfelj ϕ replicira call opciju ako vrijedi $V_T(\phi) = C_T$, t.j., vrijednost portfelja jednaka je vrijednosti call opcije.

Pitanje: da li postoji replicirajući portfelj? Odgovor je pozitivan što se lako i vidi. Zaista, replicirajući portfelj ϕ mora zadovoljavati sljedeće dvije jednakosti: $V_T(\phi)(\omega_1) = C_T(\omega_1)$ i $V_T(\phi)(\omega_2) = C_T(\omega_2)$. To možemo napisati kao

$$\begin{aligned} 1.05\phi^0 + 500.00\phi^1 &= 30.00 , \\ 1.05\phi^0 + 450.00\phi^1 &= 0 . \end{aligned}$$

To je sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, ϕ^0 i ϕ^1. Rješavanjem slijedi:

$$\phi^0 = -257.143 , \qquad \phi^1 = \frac{3}{5} = 0.6 .$$

Dakle, portfelj $\phi = (-257.143, 0.6)$ replicira call opciju, odnosno portfelj ϕ i call opcija imaju jednaku vrijednost u trenutku $t = T$. Prema tome, portfelj ϕ i call opcija moraju imati jednaku vrijednost i u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$? Računamo:

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = -257.143 + 460 \times 0.6 = 18.857\,.$$

Međutim, to znači da je i vrijednost call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka upravo $C_0 = 18.857$.

Pogledajmo malo detaljnije princip na kojem se zasniva određivanja cijene opcije pomoću replicirajućeg portfelja.

Pretpostavimo da je pisac uspio prodati razmatranu opciju za iznos $C_0 > 18.857$, na primjer, za $C_0 = 21.00$ Kn. Za 18.857 Kn odmah kupi portfelj $\phi = (-257.143, 0.6)$, t.j., iz banke posudi 257.143 Kn, i kupi 0.6 dionica Plive po cijeni od 470.00 Kn (uočite da mu za to treba $0.6 \times 460.00 = 276.00$ Kn. Međutim, 276.00=257.143+18.857). Razliku od 21.00-18.857=2.143 Kn stavi u banku uz kamatu 5% (ili u džep). U vremenu T vrijednost portfelja $V_T(\phi) = C_T$, te je pisac u stanju točno pokriti obavezu iz ugovora. U međuvremenu, 2.143 Kn u banci naraslo je na $2.143 \times 1.05 = 2.25$ Kn. Na taj način je pisac opcije ostvario nerizičan profit od 2.25 Kn.

Obratno, pretpostavimo da je kupac uspio kupiti opciju za iznos $C_0 < 18.857$, na primjer, za $C_0 = 16.00$ Kn. Istog trenutka kupac prodaje portfelj $\phi = (-257.143, 0.6)$ za 18.857 Kn (to znači da posudi 0.6 dionica Plive ("short sell"), odmah ih proda za 276.00 Kn, a 257.143 Kn uloži u banku). Razliku od 18.857-16.00=2.857 Kn uloži u banku uz kamatu od 5% (ili stavi u džep). U trenutku T, vrijednost opcije koju posjeduje C_T jednaka je vrijednosti portfelja $V_T(\phi)$ kojeg je prodao. Stoga ima dovoljan iznos da otkupi natrag portfelj ϕ (to znači da izvadi novce iz banke, kupi 0.6 dionica Plive bilo po cijeni na koju ima pravo po ugovoru, bilo po tržišnoj cijeni, te vrati 0.6 dionica Plive). Time je na nuli, osim 2.857 Kn u banci koje su narasle na $2.857 \times 1.05 = 3.00$ Kn, što je nerizičan profit.

Iz gornjeg razmatranja se vidi da jedina cijena opcije koja niti piscu niti kupcu ne omogućava nerizičan profit mora biti jednaka 18.857 Kn. Portfelj koji donosi nerizičan profit naziva se arbitraža (ili mogućnost arbitraže). Ekonomski je opravdano pretpostaviti da na tržištu ne postoje mogućnosti arbitraže. Slijedi da je nepostojanje arbitraže na financijskom tržištu ekonomski princip pomoću kojeg smo odredili cijenu opcije. Što onda vjerojatnost radi u ovoj priči? Uloga vjerojatnosti ima tehnički karakter. Objasnimo to malo detaljnije.

Pokušajmo naći vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathbb{P}^*(\{\omega_1\}) = p^*$, $\mathbb{P}^*(\{\omega_2\}) = 1 - p^*$, takvu da je očekivana (uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$) diskontirana vrijednost dionice u trenutku T jednaka sadašnjoj vrijednosti S_0. Dakle, zahtijevamo

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{1}{1+r} S_T \right] = S_0 \, ,$$

t.j.,

$$p^* \frac{1}{1.05} \times 500.00 + (1-p^*) \frac{1}{1.05} \times 450.00 = 460.00 \, .$$

Rješavanjem slijedi $p^* = 0.66$. Uočimo da je $\mathbb{E}^*[S_T] = (1+r)S_0$, t.j., upravo onoliko koliko bismo imali u trenutku T da smo novac uložili u nerizičnu imovinu (dakle u banku). Stoga vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ zovemo vjerojatnost neutralna na rizik - očekivani (uz $\mathbb{P}^*$) povrat na dionicu jednak je nerizičnom povratu od 5%.

Kakve to veze ima sa cijenom opcije? Izračunajmo očekivanu (uz $\mathbb{P}^*$) diskontiranu vrijednost opcije u trenutku $t = T$:

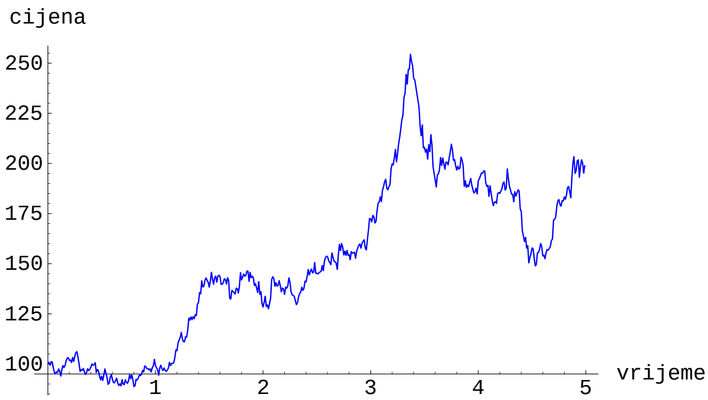
$$\mathbb{E}^* \left[\frac{1}{1+r} C_T \right] = p^* \frac{1}{1.05} \times 30 + (1-p^*) \frac{1}{1.05} \times 0 = 18.857 \, .$$

Međutim, to je upravo cijena opcije C_0 koju smo gore dobili konstrukcijom replicirajućeg portfelja. U kolegiju ćemo pokazati da to nije slučajno, te zašto računanje očekivanja (uz vjerojatnost neutralnu na rizik) diskontirane vrijednosti opcije daje cijenu opcije u trenutku $t = 0$. Uočite da je drugi postupak brži i jednostavniji.

0.4 Neprekidni modeli kretanja cijena dionica

Tipični graf kretanja cijena dionica (ili indeksa) kroz dulje vremensko razdoblje može izgledati kao na Slici 1. Takvi grafovi obično uključuju zaključne cijene trgovanja. Iako su cijene dane za diskretne vremenske trenutke (dani), zbog velikog broja dana, graf izgleda kao neprekidna krivulja. Za praktične svrhe korisno je kretanje cijena dionica smatrati neprekidnim.

Označimo sa S_t cijenu neke dionice (recimo PLVA-R-A) u trenutku t ($t = 0$ može označavati neki početni trenutak, recimo 1.1.2000., $t = 1$ vrijeme nakon jedne godine, $t = 1/265$ vrijeme nakon jednog dana uz pretpostavku da



Slika 1:

u godini ima 265 radnih dana). Pretpostavimo da je očekivani godišnji povrat na tu dionicu jednak $\mu > 0$ (na primjer, $\mu = 0.15$ znači povrat od 15%). To znači da cijena dionice ima rastući trend. Kako izgleda promjena cijene dionice u malom vremenskom periodu, recimo Δt? Neka je $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$ ta promjena. Relativna promjena cijene je tada $\Delta S_t / S_t$. Pretpostavit ćemo da je relativna promjena proporcionalna povratu μ, i dopušta slučajnu smetnju "intenziteta" $\sigma > 0$. Preciznije, neka je

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t \,, \tag{1}$$

gdje je ΔW_t centrirana slučajna varijabla (to znači $\mathbb{E}(\Delta W_t) = 0$), konačne varijance $\mathrm{Var}(\Delta W_t) = \Delta t$. Ta slučajna varijabla opisuje slučajno odstupanje relativne promjene cijene dionice od lineranog trenda μt, a σ je intenzitet tog odstupanja. Daljnja pretpostavka je da su ta slučajna odstupanja nezavisna za različite vremenske trenutke. Za ΔW_t često se dodatno pretpostavlja da ima normalnu distribuciju, $\Delta W_t \sim N(0, \Delta t)$. Primjetimo da vrijedi:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Delta S_t}{S_t}\right] = \mu \Delta t \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}\left[\frac{\Delta S_t}{S_t}\right] = \sigma^2 \Delta t \,.$$

Jednakost (1) može se zapisati u obliku

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t \,. \tag{2}$$

Diferencijalni oblik gornje jednakosti je

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t\,. \tag{3}$$

Jedan od ciljeva u drugom semestru biti će dati smisao gornjoj jednakosti. Prvi korak je definiranje slučajnog procesa $W = (W_t \,:\, t \geq 0)$ koji ima ulogu slučajne šetnje. Za W ćemo uzeti Brownovo gibanje - slučajni proces sa nezavisnim prirastima koji imaju normalnu distribuciju. Nakon toga ćemo definirati Itôv integral u odnosu na Brownovo gibanje - $\int_0^t X_s\, dW_s$. Integrand $X = (X_t \,:\, t \geq 0)$ će također biti slučajni proces. Uočimo da je proces W integrator. Zatim ćemo stohastičku diferencijalnu jednadžbu (3) interpretirati kao integralnu jednadžbu

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s\, ds + \sigma \int_0^t S_s\, dW_s\,.$$

Pokazat ćemo da je rješenje gornje jednadžbe slučajni proces

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right\}\,.$$

Taj proces se naziva geometrijsko Brownovo gibanje i u financije ga je uveo Samuelson kao model neprekidnog kretanja cijena dionica. Pokazuje se da slučajna varijabla S_t - cijena dionice u trenutku t, ima lognormalnu distribuciju.

Gornji model kretanja cijena dionica preuzeli su Black i Scholes, te unutar tog modela odredili cijenu call opcije na dionicu. Preciznije, neka je S_0 cijena dionice u trenutku $t = 0$ (sada), neka je T vrijeme dospijeća opcije i K cijena izvršenja. Nadalje, neka je r kamatna stopa (za neprekidno ukamaćivanje) fiksna za vrijeme trajanja opcije (1 Kn $\rightarrow e^{rt}$ Kn). Slavna Black-Scholesova formula za cijenu opcije u trenutku $t = 0$ dana je sa

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)\,, \tag{4}$$

gdje je

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

funkcija distribucije normalne slučajne varijable, a

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T\right)\,, \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T\right)\,. \end{aligned}$$

Jedan od glavnih ciljeva u drugom semestru biti će izvod i objašnjenje Black-Scholesove formule. Za sada ćemo samo najaviti da je formula izvedena iz principa nepostojanja arbitraže na tržištu, odnosno ekvivalentno, računanjem očekivanja diskontirane vrijednosti opcije u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik. Uočimo da se iz formule (4) vidi da cijena opcije ne ovisi o očekivanom povratu na dionicu μ.