Poglavlje 6

Ekvivalentna martingalna mjera

U ovom poglavlju cilj nam je odrediti cijene izvedenih vrijednosnica u Black-Scholes-Mertonovom modelu koristeći ekvivalentnu martingalnu mjeru (odnosno mjeru neutralnu na rizik).

6.1 Girsanovljev teorem

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je Z nenegativna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \to [0,1]$ formulom

$$\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[1_A Z]\,, \quad A \in \mathcal{F}\,. \tag{6.1}$$

Tada je $\mathbb{P}^*$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$. Štoviše, ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada je i $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Kažemo da je $\mathbb{P}^*$ apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}$ i pišemo $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$. Ako je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$, tada njeno očekivanje možemo računati s obzirom na originalnu vjerojatnost $\mathbb{P}$, a također s obzirom na novu vjerojatnost $\mathbb{P}^*$. Za ta dva očekivanje vrijedi formula

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[XZ]\,. \tag{6.2}$$

Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$. Ako je $0 = \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[1_A Z]$, tada zbog $Z > 0$ $\mathbb{P}$-g.s., slijedi da je i $\mathbb{P}(A) = 0$. Dakle, $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$, te kažemo da su vjerojatnosti $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne. U tom slučaju vrijede relacije

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \frac{1}{Z}\, d\mathbb{P}^*\,,$$

te

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}^* \left[\frac{X}{Z} \right] .$$

Kažemo da je Z *Radon-Nikodymova derivacija* od $\mathbb{P}^*$ s obzirom na $\mathbb{P}$ i pišemo

$$Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} .$$

Gore opisanu proceduru zovemo *zamjenom mjere*. Tom procedurom možemo promijeniti distribuciju slučajne varijable. Najvažniji primjer je onaj u kojem se pomiče očekivanje normalne slučajne varijable. Precizirajmo: neka je X standardna normalna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\theta \in \mathbb{R}$. Definiramo slučajnu varijablu Z formulom

$$Z = \exp\left\{ -\theta X - \frac{1}{2}\theta^2 \right\} ,$$

te vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ pomoću te slučajne varijable. Stavimo $Y = X + \theta$. Uz vjerojatnost $\mathbb{P}$ je $Y \sim N(\theta, 1)$. Tvrdimo da je uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$, Y standardna normalna slučajna varijabla. Zaista, za $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[e^{\lambda Y}] &= \mathbb{E}[e^{\lambda Y} Z] \\
&= \mathbb{E}[\exp\{\lambda(X+\theta) - \theta X - \frac{1}{2}\theta^2\}] \\
&= e^{\lambda\theta - \theta^2/2}\, \mathbb{E}[e^{(\lambda-\theta)X}] \\
&= e^{\lambda\theta - \theta^2/2}\, e^{(\lambda-\theta)^2/2} \\
&= e^{\lambda^2/2} .
\end{aligned}$$

Dakle, zamjenom mjere promijenili smo očekivanje slučajne varijable.

U ovom odjeljku ćemo napraviti sličnu zamjenu mjere čime ćemo promijeniti srednju vrijednost cijelog slučajnog procesa (a ne samo jedne slučajne varijable). Pretpostavimo da nam je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t) : 0 \le t \le T)$, gdje je $T > 0$ fiksno vrijeme. Neka je Z nenegativna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ i $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ formulom (6.1). *Proces Radon-Nikodymove derivacije* $Z = (Z(t) : 0 \le t \le T)$ definira se kao

$$Z(t) = \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}(t)] , \quad 0 \le t \le T . \tag{6.3}$$

Taj proces je martingal što se jednostavno vidi pomoću sljedećeg računa: za $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[Z(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}(t)] \,|\, \mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}(s)] = Z(s)\,.$$

Lema 6.1 *Neka je Y $\mathcal{F}(t)$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}[YZ(t)]\,. \tag{6.4}$$

Dokaz: To se vidi iz sljedećeg niza jednakosti:

$$\mathbb{E}^*[Y] = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[YZ \,|\, \mathcal{F}(t)]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}(t)]] = \mathbb{E}[YZ(t)]\,.$$

□

Lema 6.2 *Neka je $0 \leq s \leq t \leq T$, te neka je Y $\mathcal{F}(t)$-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}^*[Y \,|\, \mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\,\mathbb{E}[YZ(t) \,|\, \mathcal{F}(s)]\,. \tag{6.5}$$

Dokaz: Desna strana je očito $\mathcal{F}(s)$-izmjeriva slučajna varijabla. Stoga treba provjeriti da za sve $A \in \mathcal{F}(s)$ vrijedi definicijska jednakost

$$\int_A \frac{1}{Z(s)}\,\mathbb{E}[YZ(t) \,|\, \mathcal{F}(s)]\,d\mathbb{P}^* = \int_A Y\,d\mathbb{P}^*\,. \tag{6.6}$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{1}{Z(s)}\,\mathbb{E}[YZ(t) \,|\, \mathcal{F}(s)]\,d\mathbb{P}^* \\
&= \mathbb{E}^*\left[1_A \frac{1}{Z(s)}\,\mathbb{E}[YZ(t) \,|\, \mathcal{F}(s)]\right] \\
&= \mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[YZ(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] \quad \text{zbog Leme 6.1} \\
&= \mathbb{E}[1_A YZ(t)] \\
&= \mathbb{E}^*[1_A Y] = \int_A Y\,d\mathbb{P}^*\,.
\end{aligned}$$

□

Sljedeći rezultat nećemo u potpunosti dokazati, jer nismo uveli sve potrebne pojmove, ali ćemo dati intuitivnu skicu dokaza.

Teorem 6.3 *(Lévyjeva karakterizacija Brownovog gibanja) Neka je* $(M(t) : t \geq 0)$ *martingal u odnosu na filtraciju* $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$*. Pretpostavimo da je* $M(0) = 0$*,* $M(t)$ *ima neprekidne putove, te* $[M, M](t) = t$ *za sve* $t \geq 0$*. Tada je* $M(t)$ *Brownovo gibanje.*

Skica dokaza: Pojam koji do sada nismo definirali je kvadratna varijacija martingala. To se može napraviti na sličan način kao i za Brownovo gibanje (barem za martingale s neprekidnim putovima). Slično se može definirati i stohastički (Itôv) integral s obzirom na martingal, te dokazati Itôva formula. Vrijedi sljedeće: neka je $(M(t) : t \geq 0)$ martingal s neprekidnim putovima, te neka je $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Tada vrijedi:

$$df(t, M(t)) = f_t(t, M(t))\, dt + f_x(t, M(t))\, dM(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, M(t))\, d[M, M](t)\,. \tag{6.7}$$

U integralnom obliku imamo uz pretpostavku $[M, M](t) = t$

$$\begin{aligned} f(t, M(t)) &= f(0, M(0)) + \int_0^t (f_t(s, M(s)) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, M(s)))\, ds \\ &\quad + \int_0^t f_x(s, M(s))\, dM(s)\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Kao i u slučaju Brownovog gibanje pokazuje se da je član $\int_0^t f_x(s, M(s))\, dM(s)$ martingal. Uzimanjem očekivanja u (6.8) i korištenjem pretpostavke $M(0) = 0$ dobivamo

$$\mathbb{E}[f(t, M(t))] = f(0, 0) + \mathbb{E} \int_0^t (f_t(s, M(s)) + \frac{1}{2} f_{xx}(s, M(s)))\, ds\,. \tag{6.9}$$

Fiksirajmo $u \in \mathbb{R}$ i specificirajmo

$$f(t, x) = \exp\left\{ ux - \frac{1}{2} u^2 t \right\}\,.$$

Jednostavno se provjeri da je $f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x) = 0$. Uvrštavanjem u (6.9) slijedi

$$\mathbb{E} \exp\left\{ uM(t) - \frac{1}{2} u^2 t \right\} = f(0, 0) = 1\,,$$

što znači da je funkcija izvodnica od $M(t)$ jednaka

$$\mathbb{E} e^{uM(t)} = e^{\frac{1}{2} u^2 t}\,.$$

Dakle, $M(t)$ ima normalnu distribuciju s očekivanjem 0 i varijancom t. Na sličan način se može dokazati da su i prirasti normalno distribuirani i nezavisni. $\square$

Teorem 6.4 *(Girsanovljev teorem) Neka je $W = (W(t) : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Neka je $\Theta = (\Theta(t) : 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajni proces. Definiramo*

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Theta(u)\, dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)\, du\right\} \tag{6.10}$$

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)\, du\,, \tag{6.11}$$

te pretpostavimo da je

$$\mathbb{E}\int_0^T \Theta^2(u) Z^2(u)\, du < \infty\,. \tag{6.12}$$

Stavimo $Z = Z(T)$. Tada je $\mathbb{E}Z = 1$, te je uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ definiranu formulom (6.1), slučajni proces $W^* = (W^*(t) : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje.

Dokaz: Uočimo prvo da je slučajni proces $W^*(t)$ Itôv proces, te da je kvadratna varijacija $[W^*, W^*](t) = t$. Formalnim računom to se vidi iz

$$dW^*(t)\, dW^*(t) = dW(t)\, dW(t) + 2\Theta(t)\, dW(t)\, dt + \Theta^2(t)\, dt\, dt = dt\,.$$

Očito je $W^*(0) = 0$, te $W^*(t)$ ima neprekidne trajektorije.

Želimo pokazati da je $W^*(t)$ martingal s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$. Tada će iz Teorema 6.3 slijediti da je $W^*(t)$ u stvari Brownovo gibanje s obzirom na $\mathbb{P}^*$.

Pokažimo najprije da je $Z(t)$ martingal s obzirom na $\mathbb{P}$. Stavimo

$$X(t) = -\int_0^t \Theta(u)\, dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)\, du\,.$$

Tada je $Z(t) = f(X(t))$ uz $f(x) = e^x$, pa po Itôvoj formuli imamo

$$\begin{aligned} dZ(t) &= df(X(t)) \\ &= f'(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}\,f''(X(t))\,dX(t)\,dX(t) \\ &= e^{X(t)}\left(-\Theta(t)\,dW(t) - \frac{1}{2}\Theta^2(t)\,dt\right) + \frac{1}{2}\,e^{X(t)}\,\Theta^2(t)\,dt \\ &= -\Theta(t)Z(t)\,dW(t)\,. \end{aligned}$$

Integriramo obje strane jednakosti i dobivamo

$$Z(t) = Z(0) - \int_0^t \Theta(u)Z(u)\,dW(u)\,. \tag{6.13}$$

Budući da je Itôv integral uvijek martingal, slijedi da je i $Z(t)$ martingal (uz $\mathbb{P}$). Specijalno je $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}Z(T) = \mathbb{E}Z(0) = Z(0) = 1$.

Budući da je $Z(t)$ martingal, za sve $t \in [0, T]$ vrijedi

$$Z(t) = \mathbb{E}[Z(T) \,|\, \mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}[Z \,|\, \mathcal{F}(t)]\,.$$

To znači da je $Z(t)$ proces Radon-Nikodymove derivacije, pa možemo primijeniti Leme 6.1 i 6.2.

Sada pokazujemo da je $W^*(t)Z(t)$ martingal uz vjerojatnost $\mathbb{P}$. Za to koristimo Itôvu formulu za produkt:

$$\begin{aligned} d(W^*(t)Z(t)) &= W^*(t)\,dZ(t) + Z(t)\,dW^*(t) + dW^*(t)\,dZ(t) \\ &= -W^*(t)\Theta(t)Z(t)\,dW(t) + Z(t)\,dW(t) + Z(t)\Theta(t)\,dt \\ &\quad +(dW(t) + \Theta(t)\,dt)(-\Theta(t)Z(t)\,dW(t)) \\ &= (-W^*(t)\Theta(t) + 1)Z(t)\,dW(t)\,. \end{aligned}$$

Budući da u završnom izrazu nema član s dt, slijedi daje $W^*(t)Z(t)$ martingal uz vjerojatnost $\mathbb{P}$.

Neka je $0 \le s \le t \le T$. Iz dokazanog i iz Leme 6.2 slijedi

$$\mathbb{E}^*[W^*(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\,\mathbb{E}[W^*(t)Z(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\,W^*(s)Z(s) = W^*(s)\,.$$

Dakle, $W^*(t)$ je $\mathbb{P}^*$-martingal čime je dokaz gotov. □

Uočimo da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ što znači da su vjerojatnosti $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ ekvivalentne. Cijenu financijske imovine modelirat ćemo u odnosu na obje vjerojatnosti: $\mathbb{P}$ će biti aktualna (stvarna, objektivna) vjerojatnost, dok će $\mathbb{P}^*$ biti vjerojatnost neutralna na rizik. Činjenica da su te dvije vjerojatnosti ekvivalentne znači da se obje slažu u tome što je moguće, a što je nemoguće (tj., koji putovi kretanja cijena su mogući).

6.2 BSM-model i vjerojatnost neutralna na rizik

Neka je $(W(t) : 0 \le t \le T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $(\mathcal{F}(t) : 0 \le t \le T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. O vremenu T mislimo kao o fiksnom završnom vremenu. Promatramo dionicu čija je cijena u diferencijalnom obliku dana s

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW(t)\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{6.14}$$

Srednja stopa povrata $\alpha(t)$ i volatilnost $\sigma(t)$ su adaptirani slučajni procesi. Pretpostavljamo da je $\sigma(t)$ različito od nule. Dakle, cijenu dionice modeliramo generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem. Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (6.14) dano je formulom

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)\,dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\,ds\right\}\,. \tag{6.15}$$

Pretpostavimo, nadalje, da imamo adaptiran proces kamatnih stopa $R(t)$. To znači da 1 kuna uložena u trenutku 0 vrijedi $\exp\{\int_0^t R(s)\,ds\}$ kuna u trenutku t. Do sada smo uvijek imali pretpostavku da je kamatna stopa konstantna i jednaka r na intervalu $[0,t]$. Tu pretpostavku smo sada oslabili realnijom pretpostavkom da su kamatne stope slučajne. Definiramo *proces diskontiranja*

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)\,ds}\,. \tag{6.16}$$

Stavimo $I(t) = \int_0^t R(s)\,ds$. Tada je $dI(t) = R(t)\,dt$ i $dI(t)\,dI(t) = 0$. Uz funkciju $f(x) = e^{-x}$ Itôva formula daje

$$\begin{aligned} dD(t) &= df(I(t)) \\ &= f'(I(t))\,dt + \frac{1}{2}f''(I(t))\,dI(t)\,dI(t) \\ &= -f(I(t))\,dt \\ &= -R(t)D(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

tj., $D(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$dD(t) = -R(t)D(t)\,dt\,. \tag{6.17}$$

Uočimo da iako je $D(t)$ slučajan proces, kvadratna varijacija mu je nula, što znači da nije jako volatilan. Proces $D(t)$ imat će ulogu diskontnog faktora e^{-rt}.

Definiramo diskontirani proces cijena dionice sa

$$D(t)S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)\,dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\,ds\right\}. \tag{6.18}$$

U diferencijalnom obliku je

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t)\,dt + \sigma(t)D(t)S(t)\,dW(t) \\ &= \sigma(t)D(t)S(t)[\Theta(t)\,dt + dW(t)]\,. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Ovdje smo definirali proces

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)} \tag{6.20}$$

koji zovemo *tržišna cijena rizika* (ili *Sharpeov omjer*). Uočimo da je kod diskontirane cijene dionice srednja stopa povrata jednaka $\alpha(t) - R(t)$, tj., smanjenja je u odnosu na nediskontiranu cijenu za $R(t)$ - kamatnu stopu na tržištu novca. Primjetimo, nadalje, da je tržišna cijena rizika $\Theta(t)$ jednaka srednjoj stopi povrata na diskontiranu dionicu po stopi volatilnosti. Volatilnost diskontirane dionice jednaka je volatilnosti nediskontirane dionice.

Uvedimo sada vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ kao u Girsanovljevom teoremu 6.4 uz proces $\Theta(t)$ koji je tržišna cijena rizika. Pomoću procesa $W^*(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(s)\,ds$, formulu (6.19) možemo zapisati kao

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t)\,dW^*(t)\,. \tag{6.21}$$

Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ zovemo *vjerojatnost neutralna na rizik* ili *ekvivalentna martingalna mjera*. Drugi naziv opravdan je činjenicom da je s obzirom na $\mathbb{P}^*$, proces diskontiranih cijena dionica martingal. To se vidi iz formule (6.21) integriranjem:

$$D(t)S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma(s)D(s)S(s)\,dW^*(s)$$

i činjenice da je W^* Brownovo gibanje uz $\mathbb{P}^*$.

Uvrstimo $dW(t) = -\Theta(t)\,dt + dW^*(t)$ u (6.14). Slijedi:

$$dS(t) = R(t)S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW^*(t)\,, \tag{6.22}$$

tj., srednja stopa povrata na nediskontiranu dionicu, uz vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ neutralnu na rizik, jednaka je $R(t)$. Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (6.22) dano je s

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)\,dW^*(s) + \int_0^t \left(R(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds\right\}. \tag{6.23}$$

Primjetimo još jednom da zamjena aktualne vjerojatnosti $\mathbb{P}$ s vjerojatnosti neutralnom na rizik $\mathbb{P}^*$ mijenja srednju stopu povrata dionice. Međutim, volatilnost dionice ostaje nepromijenjena. Volatilnost nam govori koji putovi su mogući: to su samo oni za koje log cijena dionice akumulira kvadratnu varijaciju po stopi $\sigma^2(t)$ po jedinici vremena! Nakon zamjene vjerojatnosti promatramo i nadalje isti skup mogućih putova, ali uz pomaknutu vjerojatnost. Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ stavlja više težine na putove sa nižim povratom tako da smanjuje srednju stopu povrata sa $\alpha(t)$ na stopu povrata na tržištu novca $R(t)$.

Promotrimo sada agenta koji kreće s početnim kapitalom $X(0)$, u svakom trenutku $t \in [0,T]$ drži $\Delta(t)$ dionica, i ulaže ili posuđuje na tržištu novca uz promjenljivu kamatnu stopu $R(t)$. Diferencijal vrijednosti $X(t)$ agentovog portfelja izvodi se slično formuli (5.45) s time što su $\alpha(t)$, $\sigma(t)$ i $R(t)$ sada slučajni. Dobivamo

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)\,dS(t) + R(t)(X(t) - \Delta(t)S(t))\,dt \\ &= \Delta(t)(\alpha(t)S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW(t)) + R(t)(X(t) - \Delta(t)S(t))\,dt \\ &= R(t)X(t)\,dt + \Delta(t)(\alpha(t) - R(t))S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma(t)S(t)\,dW(t) \\ &= R(t)X(t)\,dt + \Delta(t)\sigma(t)S(t)[\Theta(t)\,dt + dW(t)]\,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Itôva formula za produkt, (6.17) i (6.19) povlače da je

$$\begin{aligned} d(D(t)X(t)) &= \Delta(t)\sigma(t)D(t)S(t)[\Theta(t)\,dt + dW(t)] \\ &= \Delta(t)\,d(D(t)S(t))\,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Vidimo da su promjene diskontirane vrijednsoti protfelja u potpunosti posljedica promjena diskontiranih cijena dionice. Pomoću (6.21) gornju formulu možemo zapisati kao

$$d(D(t)X(t)) = \Delta(t)\sigma(t)D(t)S(t)\,dW^*(t)\,. \tag{6.26}$$

Odavde vidimo da je diskontirana vrijednost portfelja martingal s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Drugim riječima se to može izreći i ovako: agent može investirati na dva načina. Prvo, u tržište novca sa stopom povrata $R(t)$, i drugo, u dionice čija je srednja stopa povrata (uz $\mathbb{P}^*$) također $R(t)$. Dakle, bez obzira kako agent investira, srednja stopa povrata biti će $R(t)$ uz $\mathbb{P}^*$. Diskontiranjem pomoću $D(t)$ ta srednja stopa povrata pada na nulu, odnosno $D(t)X(t)$ je martingal s obzirom na $\mathbb{P}^*$.

Sada ćemo vidjeti kako se računaju cijene slučajnih zahtjeva pomoću ekvivalentne martingalne mjere. *Slučajni zahtjev* je $\mathcal{F}(T)$-izmjeriva slučajna varijabla $V(T)$ o kojoj mislimo kao isplati u trenutku T neke izvedene vrijednosnice. Tipični primjeri su call, odnosno put, opcija kod kojih je $V(T) = (S(T)-K)^+$, odnosno $V(T) = (K - S(T))^+$. U ovim primjerima je $V(T)$ funkcija završne cijene dionice $S(T)$, ali općenito, $V(T)$ može ovisiti o putu cijene dionice na cijelom intervalu $[0,T]$. Kao i do sada, problem određivanja cijene slučajnog zahtjeva riješit ćemo pomoću replicirajućeg portfelja: tražimo portfelj $(X(t) : 0 \le t \le T)$ takav da je

$$X(T) = V(T) \quad \text{g.s.}, \tag{6.27}$$

to jest, X replicira slučajni zahtjve $V(T)$. Agent želi odabrati početni kapital $X(0)$ i strategiju ulaganja $(\Delta(t) : 0 \le t \le T)$ tako da vrijedi (6.27). U sljedećem odjeljku pokazat ćemo da je to moguće, tj., da za slučajni zahtjev $V(T)$ postoji replicirajući portfelj $X(t)$ (ili drugim riječima, da je Black-Scholes-Mertonov model potpun). Zbog nepostojanja arbitraže na tržištu, jasno je da vrijednost $V(t)$ slučajnog zahtjeva u trenutku t mora biti jednaka vrijednosti replicirajućeg portfelja u trenutku t, dakle $X(t)$. Znamo da je $D(t)X(t)$ martingal s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Zato je

$$D(t)V(t) = D(t)X(t) = \mathbb{E}^*[D(T)X(T) \,|\, \mathcal{F}(t)] = \mathbb{E}^*[D(T)V(T) \,|\, \mathcal{F}(t)]$$

otkud slijedi korištenjem definicije (6.16) od $D(t)$ da je

$$V(t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-\int_t^T R(s)\,ds} V(T) \,|\, \mathcal{F}(t)\right], \quad 0 \le t \le T. \tag{6.28}$$

Sada ćemo pomoću formule (6.28) izvesti formulu za cijenu call-opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu s konstantnom volatilnošću σ i konstantnom kamatnom stopom r. Desna strana u (6.28) je tada jednaka

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right].$$

Budući da je proces cijena dionice $S(t)$ Markovljev proces, vrijedi

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \,\middle|\, S(t)\right]. \quad (6.29)$$

Zbog (6.23) i pretpostavki modela vrijedi

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma W^*(t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\},$$

te zato možemo pisati

$$\begin{aligned} S(T) &= S(t)\exp\left\{\sigma(W^*(T) - W^*(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} \\ &= S(t)\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\}, \end{aligned}$$

gdje je

$$Y := -\frac{W^*(T) - W^*(t)}{\sqrt{T-t}}$$

standardna normalna slučajna varijabla, a $\tau := T - t$. Vidimo da je $S(T)$ produkt $\mathcal{F}(t)$-izmjerive slučajne varijable $S(t)$ i slučajne varijable

$$\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\}$$

nezavisne od $\mathcal{F}(t)$. Definirajmo

$$c(t,x) := \mathbb{E}^*\left[e^{-r\tau}\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)^+\right]. \quad (6.30)$$

Po Lemi 4.17 slijedi da je

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r\tau}\left(S(t)\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}\,Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)^+ \,\middle|\, S(t)\right] = c(t, S(t).$$

Iz gornjeg izraza i iz (6.29) slijedi da je

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}(t)\right] = c(t, S(t)).$$

Dakle, preostaje izračunati funkciju $c(t,x)$ definiranu formulom (6.30). U prvom koraku koristimo distribuciju od Y uz $\mathbb{P}^*$, te dobivamo

$$c(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \left(x \exp\left\{ -\sigma\sqrt{\tau}\, y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ e^{-y^2/2}\, dy\,.$$

Uočimo da je integrand

$$\left(x \exp\left\{ -\sigma\sqrt{\tau}\, y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+$$

pozitivan ako i samo ako je

$$y < d_-(\tau,x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log\frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right]. \tag{6.31}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
& c(t,x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau} \left(x \exp\left\{ -\sigma\sqrt{\tau}\, y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right) e^{-y^2/2}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} x \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau} y - \frac{\sigma^2\tau}{2} \right\} dy \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau} K e^{-y^2/2}\, dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(y+\sigma\sqrt{\tau})^2 \right\} dy - e^{-r\tau} K N(d_-(\tau,x)) \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)+\sigma\sqrt{\tau}} \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz - e^{-r\tau} K N(d_-(\tau,x)) \\
&= x N(d_+(\tau,x)) - e^{-r\tau} K N(d_-(\tau,x))\,,
\end{aligned}$$

gdje smo stavili

$$d_+(\tau,x) := d_-(\tau,x) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right]. \tag{6.32}$$

6.3 Teorem o reprezentaciji martingala

Uočimo da je formula (6.28) za vrijednost izvedenice (slučajnog zahtjeva) dobivena uz pretpostavku postojanja replicirajućeg portfelja $(\Delta(t):\, 0 \leq t \leq T)$. Uz tu pretpostavku odredili smo pomoću ekvivalentne martingalne mjere početni kapital

$$V(0) = \mathbb{E}^*[D(T)V(T)]$$

potreban za repliciranje slučajnog zahtjeva $V(T)$, te vrijednost replicirajućeg (hedging) portfelja $V(t)$ u svakom trenutku $0 \leq t \leq T$. U ovom odjeljku navodimo rezultate koji garantiraju postojanje replicirajućeg portfelja.

Teorem 6.5 *(Teorem o reprezentaciji martingala) Neka je $(W(t):\, 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnostnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i neka je $(\mathcal{F}(t):\, 0 \leq t \leq T)$ filtracija generirana tim Brownovim gibanjem. Pretpostavimo da je $(M(t):\, 0 \leq t \leq T)$ martingal s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}(t):\, 0 \leq t \leq T)$ i vjerojatnost $\mathbb{P}$. Tada postoji adaptiran slučajni proces $(\Gamma(u):\, 0 \leq u \leq T)$. takav da je*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u)\, dW(u)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{6.33}$$

Teorem o reprezentaciji martingala tvrdi da ukoliko je filtracija generirana Brownovim gibanjem, tada je svaki martingal u odnosu na tu filtraciju Itôv integral s obzirom na to Brownovo gibanje. Drugim riječima, ako je jedini izvor nesigurnosti na financijskom tržištu Brownovo gibanje, tada se od te nesigurnosti možemo zaštiti.

Uočimo nadalje da je pretpostavka o filtraciji u gornjem teoremu restriktivnija nego u Girsanovljevom teoremu (u kojem filtracija može biti veća od filtracije generirane Brownovim gibanjem). Ukoliko u Girsanovljev teorem uključimo tu dodatnu restrikciju na filtraciju dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 6.6 *Neka je $(W(t):\, 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnostnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i neka je $(\mathcal{F}(t):\, 0 \leq t \leq T)$ filtracija generirana tim Brownovim gibanjem. Neka je nadalje $(\Theta(t):\, 0 \leq t \leq T)$ adaptiran proces, definirajmo*

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp\left\{ -\int_0^t \Theta(u)\, dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)\, du \right\}, \\ W^*(t) &= W(t) + \int_0^t \Theta(u)\, du\,, \end{aligned}$$

i pretpostavimo da je $\mathbb{E}\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)\,du < \infty$. *Stavimo* $Z = Z(T)$. *Tada je* $\mathbb{E}Z = 1$, *te je uz vjerojatnost* $\mathbb{P}^*$ *definiranu s (6.1), proces* $(W^*(t) : 0 \leq t \leq T)$ *Brownovo gibanje.*

Neka je nadalje $(M^*(t) : 0 \leq t \leq T)$ *martingal s obzirom na* $\mathbb{P}^*$. *Tada postoji adaptirani proces* $(\Gamma^*(u) : 0 \leq u \leq T)$, *takav da je*

$$M^*(t) = M^*(0) + \int_0^t \Gamma^*(u)\,dW^*(u)\,. \tag{6.34}$$

Gornji korolar nije trivijalna posljedica teorema o reprezentaciji martingala, jer je filtracija u korolaru generirana $\mathbb{P}$-Brownovim gibanjem $(W(t) : 0 \leq t \leq T)$, a ne $\mathbb{P}^*$-Brownovim gibanjem $(W^*(t) : 0 \leq t \leq T)$.

Vratimo se sada na problem zaštite (odnosno replicirajućeg portfelja). Model je isti kao i odjeljku 6.2, t.j., cijena dionice je modelirana s (6.14), kamatna stopa $R(t)$ je promjenljiva, a proces diskontiranja dan je s (6.16). I dalje vrijedi pretpostavka da je volatilnost $\sigma(t)$ različita od nule. Dodatna pretpostavka je da je filtracija $(\mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T)$ generirana Brownovim gibanjem $(W(t) : 0 \leq t \leq T)$.

Neka je $V(T)$ $\mathcal{F}(T)$-izmjeriva slučajna varijabla. te neka je $V(t)$ dano formulom (6.28). Tada je

$$D(t)V(t) = \mathbb{E}^*[D(T)V(T) \,|\, \mathcal{F}(t)]$$

što je $\mathbb{P}^*$-martingal. Po korolaru (6.6), $D(t)V(t)$ ima reprezentaciju

$$D(t)V(t) = V(0) + \int_0^t \Gamma^*(u)\,dW^*(u)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{6.35}$$

S druge strane, za svaki portfelj $(\Delta(t) : 0 \leq t \leq T)$ diferencijal diskontiranje vrijednosti tog portfelja dan je formulom (6.26), te je zato

$$D(t)X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)\sigma(u)S(u)\,dW^*(u)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{6.36}$$

Da bismo imali $X(t) = V(t)$ za sve t, mora vrijediti $X(0) = V(0)$, i $\Delta(t)$ odabran tako da je

$$\Delta(t)\sigma(t)D(t)S(t) = \Gamma^*(t)\,, \quad 0 \leq t \leq T\,, \tag{6.37}$$

odnosno,

$$\Delta(t) = \frac{\Gamma^*(t)}{\sigma(t)D(t)S(t)}\,, \quad 0 \leq t \leq T\,. \tag{6.38}$$

Hedging portfelj $(\Delta(t) : 0 \leq t \leq T)$ dan je gornjom formulom. Najveća nepoznanica u toj formuli je proces $\Gamma^*(t)$. Teorem o reprezentaciji martingala daje egzistenciju tog procesa, ali ne daje formulu kojom se taj proces može izračunati.

Pretpostavke uz koje postoji hedging portfelj su da je volatilnost različita od nule, te da je filtracija generairana Brownovim gibanjem. Uz te pretpsotavke pokazali smo da za svaki slučajni zahtjev postoji replicirajući portfelj, odnosno, drugim riječima, da je svaki slučajni zahtjev dostižan. To znači da je model financijskog tržišta *potpun*.

6.4 Dionice s dividendama

Vidjeli smo da su diskontirane cijene dionica martingali uz vjerojatnost neutralnu na rizik. Osnovno svojstvo mjere neutralne na rizik je da je u odnosu na nju vrijednost diskontiranog portfelja martingal, te da osigurava da ne postoji arbitraža. Da bi diskontirana vrijednost portfelja koji investira u dionice koje isplaćuju dividende bila martingal, diskontirana vrijednost dionice *s reinvestiranim divedendama* mora biti martingal. Međutim, sama diskontirana vrijednost dionice nije martingal.

Promatramo dionicu modeliranu pomoću generaliziranog geometrijskog Brownovog gibanja koja isplaćuje dividende neprekidno kroz vrijeme po stopi $A(t)$ po jedinici vremena. Ovdje je $(A(t) : 0 \leq t \leq T)$ nenegativan adaptiran proces. Neprekidno plaćanje dividendi može biti dobar model za fondove s raznim dionicama (mutual fund), gdje se dividenda isplaćuje u raznim trenucima na razne dionice. U slučaju samo jedne dionice bolji model je periodično isplaćivanje dividende. To ćemo promatrati kasnije.

Isplaćena dividenda smanjuje vrijednost dionice. Stoga će naš model kretanja cijena dionice biti

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW(t) - A(t)S(t)\,dt\,. \tag{6.39}$$

Kada dionica ne bi isplaćivala dividendu, srednja stopa povrata bila bi $\alpha(t)$. Ekvivalentno, ako agent koji ima dionicu odmah reinvestira dividendu u tu dionicu, srednja stopa povrata je također $\alpha(t)$. Pretpostavljamo da su srednja stopa povrata $\alpha(t)$, volatilnost $\sigma(t)$ i kamatna stopa $R(t)$ (koju uvodimo dolje) adaptirani procesi.

Agent koji drži dionicu ima kapitalni dobitak ili gubitak koji je posljedica kretanja cijene dionice i isplaćenih dividendi. Ako je $\Delta(t)$ broj dionica koje agent ima u trenutku t, tada vrijednost portfelja $X(t)$ zadovoljava

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)\,dS(t) + \Delta(t)A(t)S(t)\,dt + R(t)[X(t) - \Delta(t)S(t)]\,dt \\ &= R(t)X(t)\,dt + (\alpha(t) - R(t))\Delta(t)S(t)\,dt + \sigma(t)\Delta(t)S(t)\,dW(t) \\ &= R(t)X(t)\,dt + \Delta(t)S(t)\sigma(t)[\Theta(t)\,dt + dW(t)]\,, \end{aligned} \tag{6.40}$$

gdje je

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)} \tag{6.41}$$

već uvedena tržišna cijena rizika.

Uvedimo

$$W^*(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)\,du \tag{6.42}$$

i pomoću Girsanovljevog teorema definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ u odnosu na koju je W^* Brownovo gibanje. Tada (6.40) možemo napisati kao

$$dX(t) = R(t)X(t)\,dt + \Delta(t)S(t)\sigma(t)\,dW^*(t)\,.$$

Stavimo $D(t) = \exp\{-\int_0^t R(u)\,du\}$. Diskontirana vrijednost portfelja zadovoljava

$$d[D(t)X(t)] = \Delta(t)D(t)S(t)\sigma(t)\,dW^*(t)\,.$$

Specijalno, uz vjerojatnost neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$ je diskontirana vrijednost portfelja martingal.

Neka je $V(T)$ slučajni zahtjev. Taj slučajni zahtjev želimo replicirati, pa biramo početni kapital $X(0)$ i portfelj $(\Delta(t) : 0 \le t \le T)$ takav da je $X(T) = V(T)$. Budući da je $D(t)X(t)$ $\mathbb{P}^*$-martingal, imamo

$$D(t)X(t) = \mathbb{E}^*[D(T)V(T)\,|\,\mathcal{F}(t)] \quad 0 \le t \le T\,.$$

Vrijednost replicirajućeg portfelja $X(t)$ jednaka je vrijednosti slučajnog zahtjeva $V(t)$, te stoga imamo

$$D(t)V(t) = \mathbb{E}^*[D(T)V(T)\,|\,\mathcal{F}(t)] \quad 0 \le t \le T\,. \tag{6.43}$$

Dobili smo istu formulu kao i u slučaju bez dividendi, i to uz iste uvjete. Razlika između slučaja sa i bez dividendi je u evoluciji cijene dionica uz mjeru neutralnu na rizik. Iz (6.39) i definicije od W^* dobivamo

$$dS(t) = [R(t) - A(t)]S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW^*(t)\,. \tag{6.44}$$

Uz vjerojatnost neutralnu na rizik, dionica nema srednju stopu povrata jednaku $R(t)$, te zbog toga diskontirana cijena dionice nije $\mathbb{P}^*$-martingal. Vrijedi

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(u)\,dW^*(u) + \int_0^t \left[R(u) - A(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)\right] du\right\}. \tag{6.45}$$

Proces

$$e^{\int_0^t A(u)\,du} D(t)S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(u)\,dW^*(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u)\,du\right\}$$

je P^*-martingal. To je diskontirana vrijednost portfelja koji se sastoji od jedne dionice i neprekidno reinvestira dividende u dionicu.

Promotrimo sada model u kojem su volatilnost σ, kamatna stopa r i stopa dividendi a konstantni. Tada je cijena dionice u trenutku t, dana formulom (6.45), jednaka

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma W^*(t) + \left(r - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}. \tag{6.46}$$

Za $0 \le t \le T$ imamo

$$S(T) = S(t)\exp\left\{\sigma(W^*(T) - W^*(t)) + \left(r - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}.$$

Po formuli (6.28), cijena u trenutku t europske call-opcije s datumom dospijeća T i cijenom izvršenja K (na dionicu koja isplaćuje dividende) jednaka je

$$V(t) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+ \mid \mathcal{F}(t)]. \tag{6.47}$$

Da bismo to izračunali postupamo slično kao u odjeljku 6.2. Definiramo

$$\begin{aligned} c(t,x) & \\ &= \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}\left(x\exp\left\{\sigma(W^*(T)-W^*(t)) + \left(r-a-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\} - K\right)^+\right] \\ &= \mathbb{E}^*\left[e^{-r\tau}\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r-a-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)^+\right], \end{aligned} \tag{6.48}$$

gdje je $\tau = T - t$ i

$$Y = -\frac{W^*(T) - W^*(t)}{\sqrt{T-t}}.$$

Kao i prije, Y ima $N(0,1)$ distribuciju s obzirom na $\mathbb{P}^*$. Definiramo

$$d_\pm(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r - a \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]. \tag{6.49}$$

Uočimo da je slučajna varijabla u (6.48) (čije očekivanje računamo) strogo pozitivna ako i samo ako je $Y < d_-(\tau, x)$. Zato je

$$\begin{aligned}
&c(t,x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau}\left(x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} x\exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}y - \left(a + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau - \frac{1}{2}y^2\right\}dy\\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau}Ke^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} xe^{-a\tau}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2\right\}dy - e^{-r\tau}KN(d_-(\tau,x)).
\end{aligned}$$

Zamjenom varijabli $z = y + \sigma\sqrt{\tau}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
c(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_+(\tau,x)} xe^{-a\tau}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - e^{-r\tau}KN(d_-(\tau,x))\\
&= xe^{-a\tau}N(d_+(\tau.x)) - e^{-r\tau}KN(d_-(\tau,x)).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Na isti način kao u odjeljku 6.2 zaključujemo da je $V(t) = c(t, S(t))$.

Promotrimo sada situaciju u kojoj se dividenda isplaćuje na određene dane, t.j., u obrocima. To znači da postoje vremena $0 < t_1 < t_1 < \cdots < t_n < T$, i u svakom trenutku t_j isplati se dividenda u iznosu $a_jS(t_j-)$, gdje $S(t_j-)$ označava cijenu dionice neposredno prije isplate dividende. Cijena dionice nakon isplate dividende jednaka je cijeni prije isplate umanjena za isplaćenu dividendu:

$$S(t_j) = S(t_j-) - a_jS(t_j-) = (1 - a_j)S(t_j-). \tag{6.51}$$

Pretpostavljamo da je svaki a_j $\mathcal{F}(t_j)$ izmjeriva slučajna varijabla koja prima vrijednosti u $[0,1]$. Ako je $a_j = 0$, dividenda se ne isplaćuje u trenutku t_j. Ako je $a_j = 1$, isplaćuje se cjelokupna vrijednost dionice, nakon čega je vrijednost dionice jednaka nuli. Zbog jednostavnosti uvodimo oznake $t_0 = 0$ i $t_{n+1} = T$, ali treba imati na umu da t_0 i t_{n+1} *nisu* trenuci kada se isplaćuje dividenda. Nadalje pretpostavljamo da između trenutak isplate dividendi, cijena dionice slijedi generalizirano Brownovo gibanje:

$$dS(t) = \alpha(t)S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW(t)\,, \quad t_j \le t < t_{j+1}, j = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{6.52}$$

Jednadžbe (6.51) i (6.52) u potpunosti određuju evolucija cijene dionice. Uočimo da putovi procesa $(S(t):\ 0 \le t \le T)$ imaju prekide.

Promotrimo portfelj koji u trenutku $t \in [0,T]$ ima $\Delta(t)$ dionica. Diferencijal vrijednosti portfelja $X(t)$ između trenutak isplate dividendi jednak je

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)\,dS(t) + R(t)[X(t) - \Delta(t)S(t)]\,dt \\ &= R(t)X(t)\,dt + (\alpha(t) - R(t))\Delta(t)S(t)\,dt + \sigma(t)\Delta(t)S(t)\,dW(t) \\ &= R(t)X(t)\,dt + \Delta(t)\sigma(t)S(t)[\Theta(t)\,dt + dW(t)]\,, \end{aligned}$$

gdje je $\Theta(t)$ tržišna cijena rizika opet definirana pomoću (6.41). U danima isplate dividendi, cijena dijela portfelja u dionicama gubi na vrijednosti isplaćenih dividendi $a_j\Delta(t_j)S(t_j-)$, ali kako se taj dio odmah reinvestira u portfelj, vrijednost portfelja se ne mijenja. Slijedi da je evolucija vrijednosti portfelja opisana jednadžbom

$$dX(t) = R(t)X(t)\,dt + \Delta(t)\sigma(t)S(t)[\Theta(t)\,dt + dW(t)] \tag{6.53}$$

u svim trenucima t. Opet definiramo W^* formulom (6.42), prijeđemo na vjerojatnost neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$, i dobijemo formulu određivanja cijene (6.43).

Sada želimo odrediti cijenu call opcije uz pretpostavku da su σ, r i svaki a_j konstantni. Iz (6.52) i definicije od W^* slijedi

$$dS(t) = rS(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW^*(t)\,, \quad t_j \le t < t_{j+1}, j = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Zato je

$$S(t_{j+1}-) = S(t_j)\exp\left\{\sigma(W^*(t_{j+1}) - W^*(t_j)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{j+1} - t_j)\right\}. \tag{6.54}$$

Iz (6.51) slijedi

$$\begin{aligned} &S(t_{j+1}) \\ &= (1 - a_{j+1})S(t_j)\exp\left\{\sigma(W^*(t_{j+1}) - W^*(t_j)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{j+1} - t_j)\right\}. \end{aligned}$$

To je ekvivalentno sa

$$\frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} = (1 - a_{j+1}) \exp\left\{\sigma(W^*(t_{j+1}) - W^*(t_j)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{j+1} - t_j)\right\}$$

za $j = 0, 1, \ldots, n$. Odavde slijedi da je

$$\begin{aligned} \frac{S(T)}{S(0)} &= \frac{S(t_{n+1})}{S(t_0)} \\ &= \prod_{j=0}^{n} \frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} \\ &= \prod_{j=0}^{n}(1 - a_{j+1}) \cdot \exp\left\{\sigma W^*(T) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right\}. \end{aligned}$$

To znači da vrijedi

$$S(T) = S(0)\prod_{j=0}^{n}(1 - a_{j+1}) \cdot \exp\left\{\sigma W^*(T) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right\}. \tag{6.55}$$

To je ista formula koju bismo dobili za dionicu koja ne isplaćuje dividendu uz početnu cijenu jednaku $S(0)\prod_{j=0}^{n}(1 - a_{j+1})$. Odavde slijedi da je cijena call opcije s danom dospijeća T i cijenom izvršenja K na dionicu koja isplaćuje dividendu i početna cijena joj je $S(0)$ jednaka cijeni call opcije i istim danom dospijeća i istom cijenom izvršenja na dionicu koja ne isplaćuje dividendu, ali joj je početna cijena jednaka $S(0)\prod_{j=0}^{n}(1 - a_{j+1})$. Pomoću Black-Scholes-Mertonove formule, slijedi da je cijena call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka

$$S(0)\prod_{j=0}^{n}(1 - a_{j+1})N(d_+) - e^{-rT}KN(d_-),$$

gdje su

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\log\frac{S(0)}{K} + \sum_{j=0}^{n-1}\log(1 - a_j) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right].$$

Slična formula se dobiva i za vrijednost call opcije u trenutku t, $0 \le t \le T$, s tim da se tada trebaju uključiti samo čalnovi $(1 - a_j)$ koji odgovaraju dividendama između vremena t i T.

6.5 Forwards i futures

U ovom odjeljku pretpostavljamo da postoji jedinstvena vjerojatnost neutralna na rizik $\mathbb{P}^*$, te da se sve cijene financijskih imovina računaju pomoću formule neutralne na rizik.

Neka je $(S(t) : 0 \le t \le \overline{T})$, cijena neke financijske imovine (npr. dionice), te neka je $(R(t) : 0 \le t \le \overline{T})$ proces kamatnih stopa. Ovdje je $\overline{T}$ neko veliko vrijeme i sve izvedenice i obveznice istječu prije vremena $\overline{T}$. Proces diskontiranja definiramo na uobičajen način: $D(t) = e^{-\int_0^t R(u)\, du}$. Promotrimo obveznicu bez kupona s danom dospijeća $T \le \overline{T}$. To znači da je vrijednost obveznice u trenutku T jednaka 1. Po formuli vrednovanja uz vjerojatnost neutralnu na rizik, vrijednost te obveznice u trentuku t jednaka je

$$B(t,T) = \frac{1}{D(t)}\, \mathbb{E}^*[D(T) \,|\, \mathcal{F}(t)]\,, \quad 0 \le t \le T \le \overline{T}\,. \tag{6.56}$$

Ta formula garantira da na tržištu takvih obveznica nema arbitraže, budući da su diskontirane vrijednosti obveznica $\mathbb{P}^*$-martingali.

Definicija 6.7 Forward ugovor *je pristanak platiti specificiranu* cijenu izvršenja K *na* dan dospijeća T, $0 \le T \le \overline{T}$, *za imovinu čija je cijena u trenutku* t *jednaka* $S(t)$. T-forward cijena $\mathrm{For}_S(t,T)$ *te imovine u trenutku* t, $0 \le t \le T \le \overline{T}$, *je vrijednost* K *uz koju je cijena forward ugovora jednaka nulu u trenutku* t.

Teorem 6.8 *Vrijedi*

$$\mathrm{For}_S(t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)}\,, \quad 0 \le t \le T \le \overline{T}\,. \tag{6.57}$$

Dokaz: Računamo vrijednost forward ugovora u trenutku t pomoću vjerojatnosti neutralne na rizik:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D(t)}\, \mathbb{E}^*[D(T)(S(T)-K) \,|\, \mathcal{F}(t)] \\
&= \frac{1}{D(t)}\, \mathbb{E}^*[D(T)S(T) \,|\, \mathcal{F}(t)] - \frac{K}{D(t)}\, \mathbb{E}^*[D(T) \,|\, \mathcal{F}(t)] \\
&= S(t) - KB(t,T)\,.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem s nulom slijedi formula (6.57). □

Napomena 6.9 *Pretpostavimo da na tržištu postoje obveznice svih datuma dospijeća. Tada se formula (6.57) može izvesti iz pretpostavke da na tržištu ne postoji arbitraža (ne koristeći pretpostavku o postojanju vjerojatnosti neutralne na rizik).*

Promotrimo interval $[0, T]$ i particiju tog intervala $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. O podintervalu $[t_k, t_{k+1})$ mislimo kao o danu. Pretpostavimo da je kamatna stopa konstantna unutar jednog dana. Tada je proces diskontiranja dan sa $D(0) = 1$, te za $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$D(t_{k+1}) = \exp\left\{-\int_0^{t_{k+1}} R(u)\, du\right\} = \exp\left\{-\sum_{j=0}^{k} R(t_j)(t_{j+1} - t_j)\right\}.$$

Uočimo da je $D(t_{k+1})$ $\mathcal{F}(t_k)$-izmjerivo. Po formuli vrednovanja neutralnoj na rizik je t_k cijena obveznice (bez kupona) koja plaća 1 na dan T jednaka

$$B(t_k, T) = \frac{1}{D(t_k)}\, \mathbb{E}^*[D(T) \,|\, \mathcal{F}(t_k)]\,.$$

Imovina čija je cijena u trenutku t jednaka $S(t)$ ima t_k-forward cijenu

$$\mathrm{For}_S(t_k, T) = \frac{S(t_k)}{B(t_k, T)}\,, \tag{6.58}$$

što je $\mathcal{F}(t_k)$-izmjerivo. Pretpostavimo da držimo dugu poziciju u forward ugovoru u trenutku t_k (t.j., pristajemo dobiti $S(T)$ u trenutku T za cijenu $\mathrm{For}_S(t_k, T)$). Vrijednost te pozicije u trenutku $t_j \geq t_k$ jednaka je

$$\begin{aligned}
V_{k,j} &= \frac{1}{D(t_j)}\, \mathbb{E}^*\left[D(T)\left(S(T) - \frac{S(t_k)}{B(t_k, T)}\right) \,|\, \mathcal{F}(t_j)\right] \\
&= \frac{1}{D(t_j)}\, \mathbb{E}^*[D(T)S(T) \,|\, \mathcal{F}(t_j)] - \frac{S(t_k)}{B(t_k, T)} \cdot \frac{1}{D(t_j)}\, \mathbb{E}^*[D(T) \,|\, \mathcal{F}(t_j)] \\
&= S(t_j) - S(t_k) \cdot \frac{B(t_j, T)}{B(t_k, T)}\,.
\end{aligned}$$

Za $t_j = t_k$ taj izraz je jednak nuli (kao što i treba biti). Međutim, za $t_j > t_k$, općenito je različit od nule. Na primjer, ako je kamatna stopa konstanta r tako da je $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$, imamo

$$V_{k,j} = S(t_j) - e^{r(t_j - t_k)} S(t_k)\,.$$

Ako cijena imovine raste brže od kamatne stope, forward ugovor postaje pozitivan. U suprotnom postaje negativan. U svakom slučaju jedna strana u ugovoru može postati zabrinuta zbog mogućeg odustajanja druge strane.

Da bi se ublažio problem rizika odustajanja, stranke u forward ugovoru mogu pristati na izravnanje računa nakon svakog dana. Kupac forward ugovora može tada pokušati kupiti novi forward ugovor dan nakon početne kupnje. Ponavljajući tu proceduru, kupac dobiva tok novca

$$\begin{aligned}
V_{0,1} &= S(t_1) - S(t_0) \cdot \frac{B(t_1, T)}{B(t_0, T)} = S(t_1) - S(0) \cdot \frac{B(t_1, T)}{B(t_0, T)}, \\
V_{1,2} &= S(t_2) - S(t_1) \cdot \frac{B(t_2, T)}{B(t_1, T)}, \\
&\vdots \\
V_{n-1,n} &= S(t_n) - S(t_{n-1}) \cdot \frac{B(t_n, T)}{B(t_{n-1}, T)} = S(T) - \frac{S(t_{n-1})}{B(t_{n-1}, T)}.
\end{aligned}$$

Postoje dva problema s gornjim postupkom. Prvi je da je kupac forward ugovora ušao u dugu poziciju s idejom da se zaštiti protiv rasta cijene imovine. Nije jasno do koje mjere gornji postupak pruža takvu zaštitu. Drugi problem je da za takav postupak mora postojati likvidno tržište forward ugovora.

Bolja ideja je formirati tzv. *futures cijenu* $\mathrm{Fut}_S(t, T)$ i upotrijebiti je na sljedeći način. Ako agent ima dugu futures poziciju između vremena t_k i t_{k+1}, tada u trenutku t_{k+1} dobiva isplatu

$$\mathrm{Fut}_S(t_{k+1}, T) - \mathrm{Fut}_S(t_k, T)$$

(koja može biti i negativna). Taj postupak zove se *marking to margin.* Slučajni proces $(\mathrm{Fut}_S(t, T) : 0 \le t \le T)$ konstruiran je tako da je $\mathrm{Fut}_S(t, T)$ $\mathcal{F}(t)$-izmjeriva za svaki t, te da je

$$\mathrm{Fut}_S(T, T) = S(T).$$

Stoga je zbroj isplata koje dobiva agent koji kupi futures ugovor u trenutku nula i drži ga do dana dospijeća T jednak

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Fut}_S(t_1, T) - \mathrm{Fut}_S(t_0, T)) + (\mathrm{Fut}_S(t_2, T) - \mathrm{Fut}_S(t_1, T)) + \cdots \\
&\cdots + (\mathrm{Fut}_S(t_n, T) - \mathrm{Fut}_S(t_{n-1}, T)) \\
&= \mathrm{Fut}_S(T, T) - \mathrm{Fut}_S(0, T) = S(T) - \mathrm{Fut}_S(0.T).
\end{aligned}$$

Ako agent odluči kupiti imovinu na dan T po cijeni $S(T)$, njegov ukupni dobitak koji dolazi iz futures ugovora i kupnje imovine jednak je $-\mathrm{Fut}_S(0,T)$. Zanemarivši vremensku vrijednost novca, agent je u stvarnosti kupio imovinu po cijeni $\mathrm{Fut}_S(0,T)$, t.j., po cijeni koja je bila poznata u trenutku $t=0$.

Za razliku od forward ugovora, isplata u slučaju duge futures pozicije raspodijeljena je kroz vrijeme trajanja ugovora. Mehanizam kojim se te isplate ostvaruju naziva se *margin account*. To je račun koji vlasnik futures ugovora mora otvoriti u trenutku kupnje ugovora. Na taj račun kupac mora uplaćivati ili podizati novac, ovisno o kretanju futures cijena.

Futures cijene su odabrane tako da u svakom trenutku t_k vrijednost isplate u trenutku t_{k+1}, te također u svim budućim trenucima $t_j > t_k$, bude jednaka nuli. To znači da vlasnik futures ugovora može u svakom trenutku zatvoriti poziciju u ugovoru bez dodatnih troškova (osim već napravljenih uplata). Uvjet da je u trenutku t_k vrijednost isplate u trenutku t_{k+1} jednaka nuli može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{D(t_k)}\,\mathbb{E}^*[D(t_{k+1})(\mathrm{Fut}_S(t_{k+1},T)-\mathrm{Fut}_S(t_k,T))\,|\,\mathcal{F}(t_k)] \\ &= \frac{D(t_{k+1})}{D(t_k)}\left\{\mathbb{E}^*[\mathrm{Fut}_S(t_{k+1},T)\,|\,\mathcal{F}(t_k)]-\mathrm{Fut}_S(t_k,T)\right\}\,. \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\mathbb{E}^*[\mathrm{Fut}_S(t_{k+1},T)\,|\,\mathcal{F}(t_k)] = \mathrm{Fut}_S(t_k,T)\,,\quad k=0,1,\ldots,n-1\,. \tag{6.59}$$

To pokazuje da je $\mathrm{Fut}_S(t_k,T)$ diskretno-vremenski martingal s obzirom na $\mathbb{P}^*$. Međutim, također zahtijevamo da je $\mathrm{Fut}_S(T,T)=S(T)$, odakle slijedi da su futures cijene dane formulom

$$\mathrm{Fut}_S(t_k,T) = \mathbb{E}^*[S(T)\,|\,\mathcal{F}(t_k)]\,,\quad k=0,1,\ldots,n\,. \tag{6.60}$$

Primjetimo da je uz futures cijene dane formulom (6.60), vrijednost isplate u trenutku t_j jednaka nuli za sve $j \geq k+1$. Zaista,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D(t_k)}\,\mathbb{E}^*[D(t_j)(\mathrm{Fut}_S(t_j,T)-\mathrm{Fut}_S(t_{j-1},T))\,|\,\mathcal{F}(t_k)] \\ &= \frac{1}{D(t_k)}\,\mathbb{E}^*[[\mathbb{E}^*[D(t_j)(\mathrm{Fut}_S(t_j,T)-\mathrm{Fut}(t_{j-1},T))\,|\,\mathcal{F}(t_{j-1})]\,|\,\mathcal{F}(t_k)] \\ &= \frac{1}{D(t_k)}\,\mathbb{E}^*\left[D(t_j)\mathbb{E}^*[\mathrm{Fut}_S(t_j,T)\,|\,\mathcal{F}(t_{j-1})]-D(t_j)\mathrm{Fut}_S(t_{j-1},T)\,|\,\mathcal{F}(t_k)\right] \\ &= \frac{1}{D(t_k)}\,\mathbb{E}^*\left[D(t_j)\mathrm{Fut}_S(t_{j-1},T)-D(t_j)\mathrm{Fut}(t_{j-1},T)\,|\,\mathcal{F}(t_k)\right]=0\,. \end{aligned}$$

Gornja razmatranja vode do sljedeće definicije u slučaju općenitog procesa kamatnih stopa $R(t)$ (t.j., ne nužno konstantnog na intervalima oblika $[t_k, t_{k+1})$).

Definicija 6.10 Futures cijena *neke imovine čija je vrijednost u trenutku T jednaka $S(T)$ dana je formulom*

$$\mathrm{Fut}_S(t,T) = \mathbb{E}^*[S(T)\,|\,\mathcal{F}(t)]\,, \quad 0 \le t \le T\,. \tag{6.61}$$

Duga pozicija u futures ugovoru *je pristanak da se kao tok novca dobiju promjene u futures cijenama (koje mogu biti i pozitivne i negativne) za vrijeme držanja pozicije. Kratka pozicija u futures ugovoru dobiva suprotan tok novca.*

Teorem 6.11 *Futures cijena je martingal s obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$, zadovoljava $\mathrm{Fut}_S(T,T) = S(T)$, i vrijednost duge (ili kratke) futures pozicije kroz svaki vremenski interval jednaka je nuli.*

Dokaz: Prve dvije tvrdnje su očigledne. Za treću tvrdnju pretpostavimo da je filtracija $(\mathcal{F}(t) : 0 \le t \le T)$ generirana Brownovim gibanjem $(W(t) : 0 \le t \le T)$. Po Korolaru 6.6 teorema o reprezentaciji martingala slijedi da je

$$\mathrm{Fut}_S(t,T) = \mathrm{Fut}_S(0,T) + \int_0^t \Gamma^*(u)\,dW^*(u)\,, \quad 0 \le t \le T\,,$$

za neki adaptiran proces $(\Gamma^*(t) : 0 \le t \le T)$. Neka su dana vremena $0 \le t_0 < t_1 \le T$. Promotrimo agenta koji u trentuku $t \in [t_0, t_1]$ drži $\Delta(t)$ futures ugovora. Mijenjanje pozicije u futures ugovoru ne košta ništa. Međutim, budući da futures ugovor proizvodi tok novca, agent može imati novac za investiranje ili novac mora posuditi. Kamatna stopa za ulaganje i/ili posuđivanje jednaka je $R(t)$. Agentov profit $X(t)$ iz te strategije jednak je

$$dX(t) = \Delta(t)\,d\mathrm{Fut}_S(t.T) + R(t)X(t)\,dt = \Delta(t)\Gamma^*(t)\,dW^*(t) + R(t)X(t)\,dt\,.$$

Zato je

$$d(D(t)X(t)) = D(t)\Delta(t)\Gamma^*(t)\,dW^*(t)\,.$$

Pretpostavimo da je u trenutku t_0 agentov profit jednak $X(t_0) = 0$. U trenutku t_1 agentov profit $X(t_1)$ zadovoljava

$$D(t_1)X(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} D(u)\Delta(u)\Gamma^*(u)\,dW^*(u)\,. \tag{6.62}$$

Budući da su Itôvi integrali martingali, imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^*[(D(t_1)X(t_1)\,|\mathcal{F}(t_0)]\\
&= \mathbb{E}^*\left[\int_0^{t_1} D(u)\Delta(u)\Gamma^*(u)\,dW^*(u) - \int_0^{t_0} D(u)\Delta(u)\Gamma^*(u)\,dW^*(u)\,|\,\mathcal{F}(t_0)\right]\\
&= \mathbb{E}^*\left[\int_0^{t_1} D(u)\Delta(u)\Gamma^*(u)\,dW^*(u)\,|\,\mathcal{F}(t_0)\right] - \int_0^{t_0} D(u)\Delta(u)\Gamma^*(u)\,dW^*(u)\\
&= 0\,. \qquad (6.63)
\end{aligned}$$

Po formuli određivanja cijene neutralnoj na rizik, vrijednost u trenutku t_0 isplate od $X(t_1)$ u trenutku t_1 jednaka je $\frac{1}{D(t_0)}\,\mathbb{E}^*[D(t_1)X(t_1)\,|\,\mathcal{F}(t_0)]$. Gore smo pokazali da je to jednako nuli. □

Na kraju ćemo usporediti forward i futures cijene i odrediti njihov raspon (engl. spread). Forward i futures cijene definirali smo sa

$$\begin{aligned}
\mathrm{For}_S(t,T) &= \frac{S(t)}{B(t,T)}\,,\\
\mathrm{Fut}_S(t,T) &= \mathbb{E}^*[S(T)\,|\,\mathcal{F}(t)]\,.
\end{aligned}$$

Ako je kamatna stopa konstanta r, tada je $B(t,T)=e^{-r(T-t)}$, te je

$$\begin{aligned}
\mathrm{For}_S(t,T) &= e^{-r(T-t)}S(t)\,,\\
\mathrm{Fut}_S(t,T) &= e^{-rT}\mathbb{E}^*[e^{rt}S(T)\,|\,\mathcal{F}(t)] = e^{-rT}e^{rt}S(t) = e^{-r(T-t)}S(t)\,.
\end{aligned}$$

Vidimo da su u ovom slučaju te cijene jednake.

Uspoređujemo $\mathrm{For}_S(0,T)$ i $\mathrm{Fut}_S(0,T)$ uz slučajnu kamatnu stopu. Tada je $B(0,T)=\mathbb{E}^*D(T)$, te je tzv. *forward-futures raspon* jednak

$$\begin{aligned}
\mathrm{For}_S(0,T)-\mathrm{Fut}_S(0,T) &= \frac{S(0)}{\mathbb{E}^*D(T)} - \mathbb{E}^*S(T)\\
&= \frac{1}{\mathbb{E}^*D(T)}\{\mathbb{E}^*[D(T)S(T)] - \mathbb{E}^*D(T)\cdot\mathbb{E}^*S(T)\}\\
&= \frac{1}{B(0,T)}\,\mathrm{Cov}^*(D(T),S(T))\,, \qquad (6.64)
\end{aligned}$$

gdje $\mathrm{Cov}^*(D(T),S(T))$ označava kovarijancu između $D(T)$ i $S(T)$ izračunatu uz vjerojatnost neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$. Ako je kamatna stopa neslučajna, ta kovarijanca je jednaka nuli, te su futures cijene jednake forward cijenama.