# Poglavlje 5

# Itôv integral

U ovom poglavlju definirat ćemo Itôv integral i pokazati njegova svojstva. U financijama se taj integral koristi za modeliranje vrijednosti portfelja. Diferencijalni račun koji se koristi za računanje s takvim integralima temelji se na Itôvoj formuli, te se razlikuje od uobičajenog diferencijalnog računa. Razlika proizlazi iz činjenice da Brownovo gibanje ima ne-nul kvadratnu varijaciju. Nakon što razvijemo Itôv račun, primjenit ćemo ga na izvod Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe za cijenu opcije.

## 5.1 Itôv integral za jednostavne integrande

Fiksirajmo pozitivno vrijeme $T$. Želimo definirati integral tipa

$$\int_0^T \Delta(t)\, dW(t)\,. \tag{5.1}$$

Ovdje je $W = (W(t),\, t \geq 0)$ dano Brownovo gibanje zajedno s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$ (za to Brownovo gibanje). Integrand $\Delta(t)$ će biti adaptiran slučajni proces. U primjenama u financijama $\Delta(t)$ će imati interpretaciju pozicije u financijskoj imovini u trenutku $t$, koja u principu ovisi o informaciji dostupnoj do trenutka $t$. Odavde slijedi zahtjev na adaptiranost od $\Delta(t)$. Preciznije, $\Delta(t)$ je $\mathcal{F}(t)$-izmjerivo za sve $t$. S druge strane, budući prirasti Brownovog gibanja nezavisni su od $\mathcal{F}(t)$. To znači da je naša pozicija u trenutku $t$ nezavisna od buduće nesigurnosti na tržištu generirane Brownovim gibanjem $W$.

Osnovni problem u definiciji integrala tipa (5.1) je u tome da putovi Brownovog gibanja $t \mapsto W(t)(\omega)$ nisu diferencijabilne funkcije. Naime, za diferencijabilnu funkciju $g : [0,T] \to \mathbb{R}$, jednostavno možemo definirati

$$\int_0^T \Delta(t)\, dg(t) = \int_0^T \Delta(t) g'(t)\, dt\,.$$

To nažalost ne funkcionira za Brownovo gibanje.

Prvi korak u definiciji integrala (5.1) sastoji se u tome da se integriraju jednostavni procesi $\Delta(t)$.

**Definicija 5.1** *Adaptiran slučajni proces* $\Delta = (\Delta(t), 0 \le t \le T)$ *zove se* jednostavan proces *ako je*

$$\Delta(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta(t_j)\, 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

*za neku particiju* $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ *intervala* $[0,T]$, *i omeđene slučajne varijable* $\Delta(t_j)$, $j = 0,1,\dots,n-1$, *takve da je* $\Delta(t_j)$ $\mathcal{F}(t_j)$*-izmjeriva.*

Riječima, adaptiran slučajni proces $\Delta$ je jednostavan, ako postoji particija $\Pi$ takva da je $\Delta$ konstantan na svakom intervalu particije $[t_j, t_{j+1})$. Kada kažemo konstantan mislimo da je jednak jednoj slučajnoj varijabli koja se ne mijenja kroz taj interval. Omeđenost slučajnih varijabli $\Delta(t_j)$ znači da postoji $M \in \mathbb{R}$ tako da je $|\Delta(t_j)| \le M$ za sve $j$ (i sve $\omega \in \Omega$).

Razmišljajmo o vrijednosti Brownovom gibanja $W(t)$ kao o jediničnoj cijeni financijske imovine (npr. jedne dionice) u trenutku $t$. Budući da $W(t)$ može biti manje od nule, takav model je loš, ali to ćemo u ovom trenutku zanemariti. O vremenima $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ mislimo kao o trenucima trgovanja u toj imovini, a o $\Delta(t_0), \Delta(t_1), \dots, \Delta(t_{n-1})$ kao o pozicijama u imovini (broj dionica) unutar intervala oblika $[t_j, t_{j+1})$. Dobitak od takvog trgovanja u svakom trenutku $t$ dan je s

$$\begin{aligned}
I(t) &= \Delta(t_0)[W(t) - W(t_0)] = \Delta(0)W(t)\,, \quad 0 \le t \le t_1\,,\\
I(t) &= \Delta(0)W(t_1) + \Delta(t_1)[W(t) - W(t_1)]\,, \quad t_1 \le t \le t_2\,,\\
I(t) &= \Delta(0)W(t_1) + \Delta(t_1)[W(t_2) - W(t_1)] + \Delta(t_1)[W(t) - W(t_2)]\,, \quad t_1 \le t \le t_2\,,
\end{aligned}$$

i tako dalje. Općenito, ako je $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, tada je

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)]\,, \tag{5.2}$$

Uočite da je $I = (I(t),\, 0 \leq t \leq T)$ slučajni proces. Taj proces zovemo *Itôv integral* jednostavnog procesa $\Delta$, i označavamo ga kao

$$I(t) = \int_0^t \Delta(s)\, dW(s)\,.$$

Prvo važno svojstvo slučajnog procesa $I(t)$ je da od Brownovog gibanje $W(t)$ nasljeđuje svojstvo martingalnosti.

**Teorem 5.2** *Itôv integral $I = (I(t),\, 0 \leq t \leq T)$ definiran formulom (5.2) je martingal.*

**Dokaz:** Neka su $0 \leq s \leq t \leq T$ dana vremena. Pretpostavimo da se $s$ i $t$ nalaze u različitim intervalima particije $\Pi$. Slučaj kada su ta vremena u istom intervalu particije dokazuje se slično. Dakle, neka je $s \in [t_l, t_{l+1})$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ za $l < k$. Jednakost (5.2) možemo napisati kao

$$\begin{aligned} I(t) = {} & \sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \\ & + \sum_{j=l+1}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)]\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Uočimo prvo da je slučajna varijabla $I(t)$ $\mathcal{F}(t)$-izmjeriva. Nadalje, $I(t)$ je integrabilna kao linearna kombinacija omeđenih i integrabilnih slučajnih varijabli. Preostaje pokazati svojstvo martingalnosti, t.j., $\mathbb{E}[I(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] = I(s)$. Računamo uvjetno očekivanje svakog od četiri člana u formuli (5.3).

Budući da su sve slučajne varijable u prvom članu $\mathcal{F}(s)$-izmjerive, vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \,|\, \mathcal{F}(s)\right] = \sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]\,. \tag{5.4}$$

Za drugi član imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \,|\, \mathcal{F}(s)] &= \Delta(t_l)(\mathbb{E}[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \,|\, \mathcal{F}(s)]) \\ &= \Delta(t_l)[W(s) - W(t_l)]\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Zbrajanjem (5.4) i (5.5) dobivamo $I(s)$. Dakle, preostaje pokazati da su uvjetna očekivanja trećeg i četvrtog člana jednaka nuli. Da bismo to pokazali računamo za $j = l+1, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \,|\, \mathcal{F}(s)] \\
&\quad = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \,|\, \mathcal{F}(t_j)] \,|\, \mathcal{F}(s)] \\
&\quad = \mathbb{E}[\Delta(t_j)(\mathbb{E}[W(t_{j+1}) \,|\, \mathcal{F}(t_j)] - W(t_j)) \,|\, \mathcal{F}(s)] \\
&\quad = \mathbb{E}[\Delta(t_j)(W(t_j) - W(t_j)) \,|\, \mathcal{F}(s)] = 0\,,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem retku koristili svojstvo martingalnosti Brownovog gibanja. Zbog linearnosti uvjetnog očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=l+1}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \,|\, \mathcal{F}(s)\right] = 0\,.$$

Na isti način se pokaže i da je uvjetno očekivanje četvrtog člana jednako nuli. $\square$

Budući da je $I(0) = 0$, slijedi da je $\mathbb{E}I(t) = \mathbb{E}I(0) = 0$ za sve $0 \leq t \leq T$. Specijalno, $\mathrm{Var} I(t) = \mathbb{E}I^2(t)$. Očekivanje kvadrata Itôvog integrala izračunato je u sljedećem teoremu.

**Teorem 5.3** *(Itôva izometrija) Itôv integral definiran s (5.2) zadovoljava*

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E}\int_0^T \Delta^2(u)\, du\,. \tag{5.6}$$

**Dokaz:** Uvedimo zbog jednostavnosti sljedeće oznake: $D_j = W(t_{j+1}) - W(t_j)$ i $D_k = W(t) - W(t_k)$. Tada je $I(t) = \sum_{j=0}^{k} \Delta(t_j) D_j$, te vrijedi

$$I^2(t) = \sum_{j=0}^{k} \Delta^2(t_j) D_j^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq k} \Delta(t_i)\Delta(t_j) D_i D_j\,.$$

Prvo pokazujemo da je očekivanje članova u drugoj sumi jednako nula. Za $i < j$ je $\Delta(t_i)\Delta(t_j)D_i$ $\mathcal{F}(t_j)$-izmjerivo, dok je prirast $D_j$ nezavisan od $\mathcal{F}(t_j)$ i $\mathbb{E}D_j = 0$. Zato je

$$\mathbb{E}[\Delta(t_i)\Delta(t_j)D_iD_j] = \mathbb{E}[\Delta(t_i)\Delta(t_j)D_i]\mathbb{E}D_j = 0\,.$$

Pogledajmo sada član oblika $\Delta^2(t_j)D_j^2$. Slučajna varijabla $\Delta^2(t_j)$ je $\mathcal{F}(t_j)$-izmjeriva, dok je kvadrat prirasta $D_j^2$ nezavisan od $\mathcal{F}(t_j)$, te $\mathbb{E}D_j^2 = \mathbb{E}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = t_{j+1} - t_j$ za $j = 0, 1, \ldots, k-1$, i $\mathbb{E}D_k^2 = t - t_k$. Zato je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I^2(t) &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}[\Delta^2(t_j)D_j^2] = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}[\Delta^2(t_j)]\mathbb{E}[D_j^2] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\Delta^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) + \mathbb{E}\Delta^2(t_k)(t - t_k)\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Uočite da je $\Delta(u)$ konstantna na intervalu $[t_j, t_{j+1})$ i jednaka $\Delta(t_j)$. Preciznije, $\Delta(u)(\omega) = \Delta(t_j)(\omega)$ za sve $u \in [t_j, t_{j+1})$, za sve $\omega \in \Omega$. Zato je

$$\Delta^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta^2(u)\,du\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \quad \Delta^2(t_k)(t - t_k) = \int_{t_k}^{t} \Delta^2(u)\,du\,.$$

Uvrstimo li u (5.7) dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I^2(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta^2(u)\,du + \mathbb{E}\int_{t_k}^{t} \Delta^2(u)\,du \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta^2(u)\,du + \int_{t_k}^{t} \Delta^2(u)\,du\right] = \mathbb{E}\int_0^t \Delta^2(u)\,du\,. \end{aligned}$$

$\square$

Proučimo na kraju kvadratnu varijaciju Itôvog integral $I(t)$.

**Teorem 5.4** *Kvadratna varijacija do trentuka $t$ Itôvog integrala $I(t)$ definiranog formulom (5.2) jednaka je*

$$[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)\,du\,. \tag{5.8}$$

**Dokaz:** Izračunajmo prvo kvadratnu varijaciju Itôvog integrala na intervalu $[t_j, t_{j+1})$ na kojem je $\Delta(u)$ konstantan. Odaberimo particiju

$$t_j = s_0 < s_1 < \cdots s_m = t_{j+1}$$

i promotrimo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1}[I(s_{i+1})-I(s_i)]^2 &= \sum_{i=0}^{m-1}[\Delta(t_j)(W(s_{i+1})-W(s_i))]^2 \\ &= \Delta^2(t_j)\sum_{i=0}^{m-1}(W(s_{i+1})-W(s_i))^2\,. \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Kada $m \to \infty$ i korak $\max_{i=0,1,\dots,m}(s_{i+1}-s_i) \to 0$, član $\sum_{i=0}^{m-1}(W(s_{i+1}) - W(s_i))^2$ teži prema kvadratnoj varijaciji Brownovog gibanja na intervalu $[t_j, t_{j+1}]$, t.j., prema $t_{j+1}-t_j$. Prema tome, limes od (5.9) jednak je

$$\Delta^2(t_j)(t_{j+1}-t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta^2(u)\,du\,.$$

Zbrajanjem svih odgovarajućih dijelova dobivamo formulu (5.8). □

Uočimo da se varijanca i kvadratna varijacija Itôvog integrala razlikuju. Po Teoremu 5.3, $\mathrm{Var} I(t) = \mathbb{E}\int_0^t \Delta^2(u)\,du$ (što je nenegativan realan broj), dok je po Teoremu 5.4, $[I,I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)\,du$ (što je slučajna varijabla). Ponovimo da se kvadratna varijacija računa po putu, dok je varijanca usrednjenje po svim putovima.

Prisjetimo se oznake (4.15) za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja $dW(t)dW(t) = dt$. Tu jednakost smo interpretirali kao tvrdnju da Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju brzinom jedan po jedinici vremena. Nadalje, to je bio samo drugi (neformalan) način zapisa $[W,W](t)$. Na sličan način, stohastički integral $I(t) = \int_0^z \Delta(u)\,dW(u)$ neformalno zapisujemo u obliku $dI(t) = \Delta(t)\,dW(t)$. To vodi do sljedeće oznake za $[I,I](t)$:

$$dI(t)dI(t) = \Delta^2(t)\,dW(t)dW(t) = \Delta^2(t)\,dt\,. \qquad (5.10)$$

**Napomena 5.5** *(o notaciji). Oznake*

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u)\,dW(u) \qquad (5.11)$$

*i*

$$dI(t) = \Delta(t)\,dW(t) \qquad (5.12)$$

*imaju skoro isto značenje. Jednakost (5.11) ima precizno značenje dano definicijom (5.2). Jednakost (5.12) ima neprecizno značenje da kada se pomaknemo unaprijed u vremenu za "vrlo malo", promjena Itôvog integrala $I$ je $\Delta(t)$ puta promjena Brwonovog gibanja u tom malom vremenskom pomaku. Ta jednakost ima i precizno značenje koje se dobije integranjem obiju strana. U tom slučaju moramo paziti na konstantu integriranja $I(0)$:*

$$I(t) = I(0) + \int_0^t \Delta(u)\, dW(u)\,.$$

*Kažemo da je (5.12) diferencijalni oblik od (5.11), dok je (5.11) integralni oblik od (5.12).*

## 5.2 Itôv integral za opće integrande

U ovom odjeljku govorit ćemo o Itôvom integralu za opće integrande. To su $\mathcal{F}(t)$-adaptirani slučajni procesi $\Delta = (\Delta(t)\,,\, 0 \le t \le T)$ koji zadovoljavaju sljedeći tehnički uvjet:

$$\mathbb{E}\int_0^T \Delta^2(t)\, dt < \infty\,. \tag{5.13}$$

Takav proces $\Delta(t)$ aproksimirat ćemo jednostavnim procesima. Na primjer, pretpostavimo da $(\Delta(t)\,,\, 0 \le t \le T)$ ima neprekidne putove ($t \mapsto \Delta(t)(\omega)$ su neprekidne funkcije na $[0,T]$ za g.s $\omega \in \Omega$). Odaberimo particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ intervala $[0,t]$ i definiramo jednostavan proces $\tilde{\Delta}$ tako da stavimo $\tilde{\Delta}(u) = \Delta(t_j)$ za sve $u \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Za takav jednostavan integrand znamo izračunati $\int_0^t \tilde{\Delta}(u)\, dW(u)$. Itôv integral biti će limes intgrala takvih jednostavnih integranada kada se profinjuje particija. Ključan korak za provedbu takvog programa je sljedeća lema.

**Lema 5.6** *Neka je $\Delta = (\Delta(t)\,,\, t \ge 0)$ adaptiran stohastički proces koji zadovoljava uvjet (5.13). Tada postoji niz $(\Delta_n(t)\,,\, n \ge 1)$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2\, dt = 0\,. \tag{5.14}$$

Neka je $(\Delta_n(t)\,,\, n \ge 1)$ niz aproksimirajućih jednostavnih integranada iz Leme 5.6, te označimo $I_n(t) = \int_0^t \Delta_n(u)\, dW(u)$. Iz relacije (5.14) jednostavno slijedi da vrijedi

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta_m(t)|^2 \, dt = 0 \, .$$

Međutim, zbog Itôve izometrije

$$\mathbb{E} \int_0^t |\Delta_n(t) - \Delta_m(t)|^2 \, dt = \mathbb{E}(I_n(t) - I_m(t))^2 \, ,$$

pa je i

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}(I_n(t) - I_m(t))^2 = 0 \, , \quad 0 \le t \le T \, .$$

To znači da je $(I_n(t) \, , \, n \ge 1)$ Cauchyjev niz u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, F, \mathbb{P})$, te zato ima limes. Taj limes zovemo $I(t) = \int_0^t \Delta(u) \, dW(u)$. Dakle,

$$\int_0^t \Delta(u) \, dW(u) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \Delta_n(u) \, dW(u) \, . \tag{5.15}$$

Tako definiran integral nasljeđuje svojstva Itôvog integrala jednostavnih integranada. Sljedeći teorem navodi ta svojstva.

**Teorem 5.7** *Neka je $T > 0$, te neka je $\Delta = (\Delta(t) \, , \, 0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces koji zadovoljava (5.13). Tada $I(t) = \int_0^t \Delta(u) \, dW(u)$ definiran formulom (5.15) ima sljedeća svojstva:*

*(a) Funkcija $t \mapsto I(t)$ je neprekidna na $[0, T]$,*

*(b) Za svaki $t \in [0, T]$ je $I(t)$ $\mathcal{F}(t)$-izmjerivo,*

*(c) Ako je $I(t) = \int_0^t \Delta(u) \, dW(u)$, $J(t) = \int_0^t \Gamma(u) \, dW(u)$, te $a, b \in \mathbb{R}$, tada je*

$$aI(t) + bJ(t) = \int_0^t (a\Delta(u) + b\Gamma(u)) \, dW(u) \, , \quad \textit{(linearnost)},$$

*(d) $I(t)$ je martingal,*

*(e) $\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u) \, du$ (Itôva izometrija),*

*(f) $[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u) \, du$.*

Sada ćemo korštenjem definicije izračunati Itôv integral $\int_0^T W(t)\,dW(t)$.Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, aproksimiramo integrand $\Delta(t) = W(t)$ jednostavnim procesom

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} W(0) = 0 & 0 \le t < \frac{T}{n}\,, \\ W\left(\frac{T}{n}\right) & \frac{T}{n} \le t < \frac{2T}{n}\,, \\ \vdots & \\ W\left(\frac{(n-1)T}{n}\right) & \frac{(n-1)T}{n} \le t < T\,. \end{cases}$$

Može se provjeriti da vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2\,dt = 0$. Po definiciji vrijedi

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)\,dW(t) &= \lim_{n\to\infty} \Delta_n(t)\,dW(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right)\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W_j(W_{j+1} - W_j)\,, \end{aligned} \tag{5.16}$$

gdje smo zbog jednostavnijeg pisanja uveli oznaku $W_j = W(\frac{jT}{n})$. Sljedeći račun će nam trebati za limes u (5.16):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(W_{j+1} - W_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_{j+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} W_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\ &= \frac{1}{2}W_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} \\ &= \frac{1}{2}W_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} W_j(W_j - W_{j+1})\,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Uvrstimo u (5.16) i dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^T W(t)\,dW(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}W^2(T)-\frac{1}{2}\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right)-W\left(\frac{jT}{n}\right)\right]^2\right)\\ &= \frac{1}{2}W^2(T)-\frac{1}{2}[W,W](T)=\frac{1}{2}W^2(T)-\frac{1}{2}T\,. \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Uočimo razliku u odnosu na obični diferencijalni račun. Ako je $g$ diferencijabilna funkcija s $g(0)=0$, tada imamo

$$\int_0^T g(t)\,dg(t)=\int_0^T g(t)g'(t)\,dt=\frac{1}{2}g^2(T)\,.$$

Kod Itôvog integral pojavljuje se dodatni član $\frac{1}{2}T$ kao posljedica ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja.

Kao posljedicu formule (5.18) dobivamo da je $W^2(t)-t$ martingal. Zaista, taj slučajni proces je dva puta Itôv integral $\int_0^t W(u)\,dW(u)$. Međutim, Itôv integral je martingal po Teoremu 5.15 (d).

# 5.3 Itôva formula

## 5.3.1 Itôva formula za Brownovo gibanje

U običnom diferencijalnom računu vrijedi sljedeće pravilo za derivaciju kompozicije funkcija $f$ i $g$:

$$\frac{d}{dt}f(g(t))=f'(g(t))g'(t)\,,$$

što možemo pisati u obliku

$$df(g(t))=f'(g(t))g'(t)\,dt=f'(g(t))dg(t)\,.$$

Kako izgleda odgovarajuće pravilo za kompoziciju $f(W(t))$ funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i Brownovog gibanja? Zbog ne-nul kvadratne varijacije Brownovog gibanja ne možemo očekivati sličnu formulu, t.j., ne vrijedi da je $df(W(t))=f'(W(t))\,dW(t)$. Štoviše, za točnu formulu trebamo pretpostaviti postojanje druge derivacije funkcije $f$, te tada vrijedi

$$df(W(t))=f'(W(t))\,dW(t)+\frac{1}{2}f''(W(t))\,dt\,. \qquad (5.19)$$

Ta formula naziva se Itôva formula u diferencijalnom obliku. Integriranjem dobivamo Itôvu formulu u integralnom obliku

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \int_0^t f'(W(u))\, dW(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W(u))\, du\,. \qquad (5.20)$$

Matematički smisleni oblik ima formula (5.20), jer je dobro definiran Itôv integral $\int_0^t f'(W(u))\, dW(u)$ koji se u njoj pojavljuje. Integral $\int_0^t f''(W(u))\, du$ shvačamo kao običan (Lebesgueov ili Riemannov) integral. S druge strane, diferencijalni oblik (5.19) često je pogodniji za računanje.

U sljedećem teoremu dajemo precizne uvjete uz koje vrijedi, i točan oblik Itôve formule. Formula je općenitija od (5.20), jer dopušta funkciju $f$ dviju varijabli $t$ i $x$.

**Teorem 5.8** *(Itôva formula za Brownovo gibanje) Neka je $f(t,x)$ funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ i $f_{xx}(t,x)$, te neka je $W(t)$ Brownovo gibanje. Tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi*

$$\begin{aligned} f(T, W(T)) &= f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))\, dt \\ &+ \int_0^T f_x(t, W(t))\, dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))\, dt \end{aligned} \qquad (5.21)$$

**Skica dokaza:** Prvo pokazujemo da formula (5.21) vrijedi za funkciju jedne varijable $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. U tom slučaju je $f'(x) = x$ i $f''(x) = 1$. Neka su $x_j$ i $x_{j+1}$ realni brojevi. Po Taylorovoj formuli imamo

$$f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2}f''(x_j)(x_{j+1} - x_j)^2\,. \qquad (5.22)$$

U slučaju funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Taylorova formula je točna i nema ostatka, budući da su sve derivacije reda većeg ili jednakog tri jednake nuli.

Fiksirajmo $T \geq 0$ i neka je $\Pi = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = T\}$ particija od

$[0,T]$. Koristeći formulu (5.22) sa $x_j = W(t_j)$ dobivamo

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \sum_{j=0}^{n-1}[f(W(t_{j+1})) - f(W(t_j))] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f'(W(t_j))[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f''(W(t_j))[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \,. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Za funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, desna strana je jednaka

$$\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \,. \tag{5.24}$$

Pustimo $||\Pi|| \to 0$. Tada prvi član izraza (5.24) konvergira prema Itôvom integralu $\int_0^T W(t)\, dW(t)$, a drugi prema polovici kvadratne varijacije Brownovog gibanja na $[0,T]$, t.j., $\frac{1}{2}T$. Slijedi

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \int_0^T W(t)\, dW(t) + \frac{1}{2}T \\ &= \int_0^T f'(W(t))\, dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W(t))\, dt \,, \end{aligned}$$

što je Itôva formula (5.21) za funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

U slučaju opće funkcije $f(x)$ imali bismo u formuli (5.23) i član koji sadrži $[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^3$. Međutim, može se pokazati da je $\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |W(t_{j+1}) - W(t_j)|^3 = 0$. Stoga taj član ne bi utjecao na konačni limes.

Neka je sada $f(t,x)$ funkcija dviju varijabli. Tada je po Taylorovom razvoju

$$\begin{aligned} & f(t_{j+1}, x_{j+1}) - f(t_j, x_j) \\ &= f_t(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f_x(t_j, x_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(t_j, x_j)(x_{j+1} - x_j)^2 + f_{tx}(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{članovi višeg reda} \,. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Uvrstimo u gornju formulu $x_j = W(t_j)$ i $x_{j+1} = W(t_{j+1})$ i sumiramo. Slijedi:

$$
\begin{aligned}
& f(T, W(T)) - f(0, W(0)) \\
= & \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}, W(t_{j+1})) - f(t_j, W(t_j))] \\
= & \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j)(W(t_{j+1} - W(t_j)) \\
& + \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{članovi višeg reda}\,. \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

Pustimo $||\Pi|| \to 0$. Lijeva strana ostaje ista. Proučavamo što se događa s članovima na desnoj strani. Za prvi član imamo

$$\lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_t(t_j, W(t_j))(t_{j+1} - t_j) = \int_0^T f_t(t, W(t))\, dt\,,$$

gdje je na desnoj strani obični Lebesgueov (Riemannov) integral. Drugi član, $\sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j))$, konvergira prema Itôvom integralu $\int_0^T f_x(t, W(t))\, dW(t)$. Zaista, stavimo li $\Delta(t) = f_x(t, W(t))$, te $\Delta_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f_x(t_j, W(t_j))$, tada se pokazuje da $\mathbb{E} \int_0^T |\Delta(t) - \Delta_n(t)|^2\, dt \to 0$ kad $n \to \infty$, pa spomenuta konvergencija vrijedi zbog definicije Itôvog integrala. Za treći član, $\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(t_j, W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$, pokazuje se da konvergira prema običnom Lebesgueovom (Riemannovom) integralu $\frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W(t))\, dt$. To je posljedica činjenice da Brownovo gibanje ima ne-nul kvadratnu varijaciju. Ideja je da se $(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$ zamijeni s $t_{j+1} - t_j$, te tada prijeđe na limes. Takva supstiticija nije ispravna po pojedinom članu sume, ali je ispravna za cijelu sumu zbog usrednjenja (vidi Napomenu 4.13 iz Poglavlja 4). Na taj način smo dobili tri člana na desnoj strani formule (5.21). Pokazujemo da četvrti i peti član na desnoj strani od (5.26) teže prema nuli kada $\|\Pi\| \to 0$.

Za četvrti član imamo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{||\Pi||\to 0} |\sum_{j=0}^{n-1} f_{tx}(t_j, W(t_j))(t_{j+1}-t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))| \\
\leq\ & \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, W(t_j))|(t_{j+1}-t_j)|W(t_{j+1})-W(t_j)| \\
\leq\ & \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} |W(t_{k+1})-W(t_k)| \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tx}(t_j, W(t_j))|(t_{j+1}-t_j) \\
=\ & 0 \cdot \int_0^T |f_{tx}(t, W(t))\, dt = 0\,.
\end{aligned}
$$

Za peti član slično imamo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{||\Pi||\to 0} |\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} f_{tt}(t_j, W(t_j))(t_{j+1}-t_j)^2| \\
\leq\ & \lim_{||\Pi||\to 0} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, W(t_j))| \cdot (t_{j+1}-t_j)^2 \\
\leq\ & \frac{1}{2} \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} (t_{k+1}-t_k) \cdot \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(t_j, W(t_j))| \cdot (t_{j+1}-t_j) \\
=\ & \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_0^T |f_{tt}(t, W(t))|\, dt = 0\,.
\end{aligned}
$$

Sličnim argumentom kao na početku dokaza može se pokazati da svi članovi višeg reda teže u nulu. □

**Napomena 5.9** Činjenicu da četvrti i peti član desne strane formule (5.26) teže k nuli možemo neformalno zapisati kao $dt\, dW(t) = 0$, odnosno $dt\, dt = 0$. To olakšava pamćenje Itôve formule. Naime, prvo napišemo Taylorov oblik drugog diferencijala

$$
\begin{aligned}
&df(W(t) \\
=\ & f_t(t, W(t))\, dt + f_x(t, W(t))\, dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W(t))\, dW(t)\, dW(t) \\
& + f_{tx}(t, W(t))\, dt\, dW(t) + \frac{1}{2} f_{tt}(t, W(t))\, dt\, dt\,.
\end{aligned}
$$

Zatim koristimo formalni račun $dW(t)\,dW(t) = dt$, $dt\,dW(t) = 0$ i $dt\,dt = 0$, i dobivamo Itôvu formulu u diferencijalnom obliku

$$df(t, W(t)) = f_t(t, W(t))\,dt + f_x(t, W(t))\,dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W(t))\,dt\,. \quad (5.27)$$

### 5.3.2 Formula za Itôv proces

Cilj ovog odjeljka je proširiti Itôvu formulu na procese općenitije od Brownovog gibanja. To su Itôvi procesi za koje ćemo razviti stohastički račun.

**Definicija 5.10** *Neka je $(W(t) : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ pridružena filtracija.* Itôv proces *je slučajni proces $(X(t) : t \geq 0)$ oblika*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)\,dW(u) + \int_0^t \Theta(u)\,du\,, \quad (5.28)$$

*gdje je $X(0) \in \mathbb{R}$ neslučajan, a $\Delta(u)$ i $\Theta(u)$ su adaptirani procesi koji zadovoljavaju sljedeće tehničke uvjete: $\mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u)\,du < \infty$ i $\int_0^t |\Theta(u)|\,du < \infty$ za sve $t \geq 0$.*

**Lema 5.11** *Kvadratna varijacija Itôvog procesa (5.28) jednaka je*

$$[X, X](t) = \int_0^t \Delta^2(u)\,du\,. \quad (5.29)$$

Diferencijalni oblik formule (5.28) je

$$dX(t) = \Delta(t)\,dW(t) + \Theta(t)\,dt\,. \quad (5.30)$$

Koristeći formalna pravila $dW(t)\,dW(t) = dt$, $dW(t)\,dt = dt\,dt = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} dX(t)\,dX(t) &= \Delta^2(t)\,dW(t)\,dW(t) + 2\Delta(t)\Theta(t)\,dW(t)\,dt + \Theta^2(t)\,dt\,dt \\ &= \Delta^2(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

što odgovara formuli za kvadratnu varijaciju iz Leme 5.11. Kvadratna varijacija Itôvog procesa $X(t)$ u potpunosti dolazi od člana $I(t) = \int_0^t \Delta(u)\,dW(u)$. Običan integral $R(t) = \int_0^t \Theta(u)\,du$ ne doprinosi ništa kvadratnoj varijaciji od $X(t)$, i on sam ima kvadratnu varijaciju nula: $[R, R](t) = 0$. Međutim, to ne znači da je $R(t)$ deterministički, nego samo da je manje volatilan od $I(t)$. Za male vrijednosti $h > 0$,

$$R(t+h) \approx R(t) + \Theta(t)h\,,$$

što daje dobru procjenu za $R(t+h)$. Primjetite da su u trenutku $t$ vrijednosti $R(t)$ i $\Theta(t)$ poznate. S druge strane,

$$I(t+h) \approx I(t) + \Delta(t)(W(t+h) - W(t))\,,$$

što ne možemo dobro predvidjeti zbog nepoznavanja prirasta $W(t+h)-W(t)$.

Sada želimo definirati stohastički integral u odnosu na Itôv proces $X(t)$.

**Definicija 5.12** *Neka je $(X(t) : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (5.28), te neka je $(\Gamma(t) : t \geq 0)$ adaptiran proces koji zadovoljava sljedeće tehničke uvjete: $\mathbb{E}\int_0^t \Gamma^2(u)\Delta^2(u)\,du < \infty$ i $\int_0^t |\Gamma(u)\Theta(u)|\,du < \infty$ za sve $t \geq 0$. Stohastički integral od $\Gamma(t)$ s obzirom na Itôv proces $X(t)$ definiran je formulom*

$$\int_0^t \Gamma(u)\,dX(u) = \int_0^t \Gamma(u)\Delta(u)\,dW(u) + \int_0^t \Gamma(u)\Theta(u)\,du\,. \tag{5.31}$$

Na sličan način na koji je dokazana Itôva formula za Brownovo gibanje (Teorem 5.8) može se dokazati i Itôva formula za Itôv proces.

**Teorem 5.13** *(Itôva formula za Itôv proces) Neka je $(X(t) : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (5.28) i neka je $f(t,x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ i $f_{xx}(t,x)$. Tada za svaki $T \geq 0$,*

$$\begin{aligned} & f(T, X(T)) \\ &= f(0,X(0)) + \int_0^T f_t(t,X(t))\,dt + \int_0^T f_x(t,X(t))\,dX(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X(t))\,d[X,X](t) \\ &= f(0,X(0)) + \int_0^T f_t(t,X(t))\,dt + \int_0^T f_x(t,X(t))\Delta(t)\,dW(t) \\ &\quad + \int_0^T f_x(t,X(t))\Theta(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X(t))\Delta^2(t)\,dt\,. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Itôva formula jednostavnije se pamti u diferencijalnom obliku:

$$df(t,X(t)) = f_t(t,X(t))\,dt + f_x(t,X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t,X(t))\,dX(t)\,dX(t)\,. \tag{5.33}$$

Uočite da je to ista formula kao i (5.27), samo je $W(t)$ zamijenjeno s $X(t)$. Upotrebom formalnog računa s diferencijalima, $dX(t) = \Delta(t)\,dW(t) + \Theta(t)\,dt$, $dW(t)\,dW(t) = dt$, $dW(t)\,dt = dt\,dt = 0$, iz gornje formule dobivamo diferencijalni oblik druge formule u (5.32):

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) &= f_t(t,X(t))\,dt + f_x(t,X(t))\Delta(t)\,dt \\ &+ f_x(t,X(t))\Theta(t)\,dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t,X(t))\Delta^2(t)\,dt\,. \end{aligned} \tag{5.34}$$

### 5.3.3 Primjeri

**Primjer 5.14** *(Generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje)* Neka je $(W(t) : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, neka je $(\mathcal{F}(t) : t \geq 0)$ pridružena filtracija, te neka su $\alpha(t)$ i $\sigma(t)$ adaptirani procesi. Definiramo Itôv proces

$$X(t) = \int_0^t \sigma(s)\,dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\,ds\,, \tag{5.35}$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$dX(t) = \sigma(t)\,dW(t) + \left(\alpha(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)\,dt\,.$$

Vrijedi

$$dX(t)\,dX(t) = \sigma^2(t)\,dW(t)\,dW(t) = \sigma^2(t)\,dt\,.$$

Neka je proces kretanja cijena financijske imovine dan formulom

$$S(t) = S(0)e^{X(t)} = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)\,dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)\,ds\right\}\,, \tag{5.36}$$

gdje je $S(0) \in (0,\infty)$ (neslučajan i pozitivan). Slučajni proces $S(t)$ shvaćamo kao funkciju procesa $X(t)$: $S(t) = f(X(t))$ gdje je $f(x) = S(0)e^x$, te stoga

$f'(x) = f''(x) = S(0)e^x$. Iz Itôve formule dobivamo

$$\begin{aligned} dS(t) &= df(X(t)) \\ &= f'(X(t))\, dX(t) + \frac{1}{2}\, f''(X(t))\, dX(t)\, dX(t) \\ &= S(0)e^{X(t)}\, dX(t) + \frac{1}{2}\, S(0)e^{X(t)}\, dX(t)\, dX(t) \\ &= S(t)\, dX(t) + \frac{1}{2}\, S(t)\, dX(t)\, dX(t) \\ &= \alpha(t)S(t)\, dt + \frac{1}{2}\, \sigma(t)S(t)\, dW(t)\,. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Iz posljednjeg retka vidimo da cijena imovine $S(t)$ ima trenutnu srednju stopu povrata $\alpha(t)$ i volatlnost $\sigma(t)$. I trenutna srednja stopa povrata i volatilnost mogu se mijenjati kroz vrijeme.

Gornji primjer najopćenitiji je model kretanja cijena financijske imovine koje je neprekidno, pozitivno, i ima jedan izvor nesigurnosti (Brownovo gibanje $W(t)$). Usprkos tome što model pokreće Brownovo gibanje, distribucija od $S(t)$ ne mora biti log-normalna. To je zato što se $\alpha(t)$ i $\sigma(t)$ mogu mijenjati kroz vrijeme. U slučaju konstantih $\alpha$ i $\sigma$ gornji model svodi se na geometrijsko Brownovo gibanje.

Pretpostavimo da su $\alpha$ i $\sigma$ konstantni. Tada se formula (5.36) svodi na

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma W(t) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\, \sigma^2\right) t\right\}\,, \tag{5.38}$$

a diferencijalni oblik (5.37) na

$$dS(t) = \alpha S(t)\, dt + \sigma(t)S(t)\, dW(t)\,.$$

Pretpostavimo na trenutak da je $\alpha = 0$. Tada $S(t)$ zadovoljava $dS(t) = \sigma(t)S(t)\, dW(t)$. Iz desne strane vidi se da je u tom slučaju

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\, \sigma^2 t\right\}$$

martingal. U općem slučaju konstantnog $\alpha$, iz (5.38) imamo

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\, \sigma^2 t\right\} e^{\alpha t}\,.$$

Budući da je zbog martingalnosti $\mathbb{E}\exp\{\sigma S(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\} = 1$, dobivamo da je $\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}S(0)e^{\alpha t}$. To znači da je srednja stopa povrata od $S(t)$ jednaka $\alpha$.

Za nekonstantnu volatilnost $\sigma(t)$ na isti način zaključujemo da je

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\,ds\right\} \tag{5.39}$$

martingal.

**Teorem 5.15** *(Itôv integral za deterministički integrand) Neka je $(W(t) : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, te neka je $(\Delta(t) : t \geq 0)$ neslučajna funkcija vremena. Definiramo $I(t) = \int_0^t \Delta(s)\,dW(s)$. Tada je za svaki $t \geq 0$ slučajna varijabla $I(t)$ normalno distribuirana s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t \Delta^2(s)\,ds$.*

**Dokaz:** Budući da je $I(t)$ martingal za koji je $I(0) = 0$, odmah slijedi da je $\mathbb{E}I(t) = \mathbb{E}I(0) = 0$. Varijanca od $I(t)$ izračunata je u Teoremu 5.7 (e):

$$\mathrm{Var} I(t) = \mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E}\int_0^t \Delta^2(s)\,ds = \int_0^t \Delta^2(s)\,ds\,,$$

jer je $\Delta(s)$ neslučajna funkcija.

Preostaje dokazati da je $I(t)$ normalno distribuirana. To ćemo pokazati računanjem funkcije izvodnice momenata od $I(t)$, $\mathbb{E}e^{uI(t)}$, $u \in \mathbb{R}$. Stavimo u formulu (5.39) $\sigma(s) = u\Delta(s)$ i $S(0) = 1$. Slijedi da je proces

$$\exp\left\{\int_0^t u\Delta(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t (u\Delta(s))^2\,ds\right\}$$

martingal koji je u trenutku $t = 0$ jednak 1. Slijedi

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^t u\Delta(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t (u\Delta(s))^2\,ds\right\}\right] = 1\,. \tag{5.40}$$

Gornju formulu možemo napisati u obliku

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{uI(t) - \frac{1}{2}u^2\int_0^t \Delta^2(s)\,ds\right\}\right] = 1\,,$$

odnosno,

$$\mathbb{E}e^{uI(t)} = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}u^2\int_0^t \Delta^2(s)\,ds\right\}\right]\,, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

Na desnoj strani je funkcija izvodnica momenata normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom $\int_0^t \Delta^2(s)\,ds$. □

**Primjer 5.16** *(Vasicekov model kamatnih stopa)* Neka je $(W(t) : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Vasicekov model procesa kamatnih stopa $(R(t) : t \geq 0)$ dan je jednadžbom

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dt + \sigma dW(t)\,, \tag{5.41}$$

gdje su $\alpha, \beta, \sigma > 0$. Gornja jednadžba naziva se *stohastičkom diferencijalnom jednažbom*. Isto kao u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi, potrebno je pokazati da stohastička diferencijalna jednadžba ima rješenje. To se pokazuje bilo pozivanjem na opću teoriju, bilo neposrednim rješavanjem jednadžbe. Mi ćemo napisati formulu za proces $R(t)$, te provjeriti da zadovoljava gornju jednadžbu.

Stavimo

$$R(t) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)\,. \tag{5.42}$$

Pomoću Itôve formule računamo $f(t, X(t))$ za $X(t) = \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$ i

$$f(t, x) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} x\,.$$

Uočimo da je tada $R(t) = f(t, X(t))$. Potrebne su nam sljedeće parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} f_t(t,x) &= -\beta e^{-\beta t} R(0) + \alpha e^{-\beta t} - \sigma\beta e^{-\beta t} x = \alpha - \beta f(t,x)\,, \\ f_x(t,x) &= \sigma e^{-\beta t}\,, \\ f_{xx}(t,x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Nadalje, diferencijal $dX(t) = e^{\beta t}\, dW(t)$. Po Itôvoj formuli imamo

$$\begin{aligned} & df(t, X(t)) \\ &= f_t(t, X(t))\, dt + f_x(t, X(t))\, dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t))\, dX(t)\, dX(t) \\ &= (\alpha - \beta f(t, X(t)))\ dt + \sigma\, dW(t)\,. \end{aligned}$$

Gornji račun pokazuje da $f(t, X(t))$ zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu (5.41). Nadalje, $f(0, X(0)) = R(0)$. Zbog jedinstvenosti rješenja stohastičke diferencijalne jednažbe (5.41), slijedi da je $f(t, X(t)) = R(t)$ za sve $t \geq 0$.

Iz Teorema 5.15 slijedi da je $\int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$ normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem nula i varijancom

$$\int_0^t e^{2\beta s}\, ds = \frac{1}{2\beta}\left(e^{2\beta t} - 1\right).$$

Slijedi da je i $R(t)$ normalno distribuirana slučajna varijabla, te vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R(t) &= e^{-\beta t}R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}), \\ \mathrm{Var}R(t) &= \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right). \end{aligned}$$

Odavde vidimo da bez obzira kako odabrali parametre modela $\alpha$, $\beta$ i $\sigma$, s pozitivnom vjerojatnošću $R(t)$ može biti manji od nule. To je loše svojstvo predloženog modela. Dobro svojstvo modela je da se kamatne stope vraćaju prema srednjem (*mean-reverting property*). U slučaju $R(t) = \frac{\alpha}{\beta}$, član uz $dt$ u (5.41) (tzv. drift), jednak je nuli. U slučaju $R(t) > \frac{\alpha}{\beta}$, član uz $dt$ je negativan, te gura $R(t)$ natrag prema $\frac{\alpha}{\beta}$. U slučaju $R(t) > \frac{\alpha}{\beta}$, član uz $dt$ je pozitivan, te opet gura $R(t)$ natrag prema $\frac{\alpha}{\beta}$. Uočimo još da ako je $R(0) = \frac{\alpha}{\beta}$, tada je $\mathbb{E}R(t) = \frac{\alpha}{\beta}$ za sve $t \geq 0$. Ako je $R(0) \neq \frac{\alpha}{\beta}$, tada je $\lim_{\to\infty} = \frac{\alpha}{\beta}$.

**Primjer 5.17** *(Cox-Ingersoll-Ross-ov (CIR) model kamatnih stopa)* Neka je $(W(t) : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $\alpha, \beta, \sigma$ pozitivni brojevi. Cox-Ingersoll-Rossov model procesa kamatnih stopa $R(t)$ zadan je stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dr + \sigma\sqrt{R(t)}\, dW(t)\,. \tag{5.43}$$

Nedostatak CIR modela je da se rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (5.43) ne može zapisati u zatvorenoj formi.

Prednost CIR modela u odnosu na Vasicekov je taj da $R(t)$ nikad nije negativan. Heurističko objašnjenje te činjenice je da kada se $R(t)$ približava nuli, član uz $dW(t)$ postaje mali (volatilnost teži prema nuli), dok se član uz $dt$ približava $\alpha > 0$. U takvoj situaciji dominantan je pozitivan drift koji $R(t)$ gura dalje od nule. Slično kao i Vasicekov model, CIR model ima svojstvo vrćanja prema srednjem.

U CIR modelu eksplicitno se mogu izračunati očekivanje i varijanca. Formule su:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}R(t) &= e^{-\beta t}R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \,, \\ \mathrm{Var}R(t) &= \frac{\sigma^2}{\beta} R(0)(e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) + \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2}(1 - 2e^{-\beta t} + e^{-2\beta t}) \,.\end{aligned}$$

# 5.4 Black-Scholes-Mertonova jednadžba

## 5.4.1 Black-Scholes-Mertonov model

Promotimo financijsko tržište na kojem postoje dva financijska instrumenta. Prvi instrument je novac koji se ukamaćuje po (neprekidnoj) kamatnoj stopi $r$ (jednakoj za posuđivanje i ulaganje). To znači da 1 Kuna uložena u trenutku 0 vrijedi $e^{rt}$ Kuna u trenutku $t$. Drugi financijski instrument je dionica čiju cijenu $S$ modeliramo pomoću geometrijskog Brownovog gibanja:

$$dS(t) = \alpha S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dW(t) \,. \tag{5.44}$$

Podsjetimo se da je $\alpha$ srednja stopa povrata, a $\sigma$ volatilnost dionice.

Pretpostavimo da u trenutku $t$ investitor ima portfelj čija je vrijednost $X(t)$. Nadalje pretpostavimo da investitor u trenutku $t$ drži $\Delta(t)$ dionica. Pozicija $\Delta(t)$ (t.j., broj dionica $\Delta(t)$) može biti slučajna, ali mora biti adaptirana na filtraciju Brownovog gibanja $W(t)$. Ostatak vrijednosti portfelja, $X(t) - \Delta(t)S(t)$, uložen je u tržište novca.

Pogledajmo promjenu vrijednosti portfelja $dX(t)$ od trenutka $t$ do trenutka $t + dt$. Promjena vrijednosti portfelja posljedica je promjene vrijednosti dionice, koja doprinosi $\Delta(t)\, dS(t)$, te zarađenoj kamati na $X(t) - \Delta(t)S(t)$ koja je jednaka $r(X(t) - \Delta(t)S(t))\, dt$. To možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}dX(t) &= \Delta(t)\, dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))\, dt \\ &= \Delta(t)(\alpha S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dW(t)) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))\, dt \\ &= rX(t)\, dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)\, dt + \Delta(t)\sigma S(t)\, dW(t) \,. \qquad (5.45)\end{aligned}$$

Članove koji se pojavljuju u (5.45) interpretiramo na sljedeći način:

(i) srednja stopa povrata $r$ na portfelj, koja se vidi iz člana $rX(t)\, dt$,

(ii) premija za rizik $\alpha - r$ za investiranje u (rizičnu) dionicu, koja se vidi iz člana $\Delta(t)(\alpha - r)S(t)\,dt$, i

(iii) volatilan član proporcionalan veličini investicije u dionicu, $\Delta(t)\sigma S(t)\,dW(t)$.

Često ćemo promatrati diskontiranu vrijednost dionice $e^{-rt}S(t)$ i diskoniranu vrijednost portfelja $e^{-rt}X(t)$. Svođenje na sadašnju vrijednost provodi se preko diskontnog faktora $e^{-rt}$. Želimo izvesti stohastičke diferencijalne jednažbe za te diskontirane vrijednosti. U tu svrhu primjenjujemo Itôvu formulu s funkcijom $f(t,x) = e^{-rt}x$. Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&d(e^{-rt}S(t)) \\
&\quad = df(t, S(t)) \\
&\quad = f_t(t, S(t))\,dt + f_x(t, S(t))\,dS(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S(t))\,dS(t)\,dS(t) \\
&\quad = -re^{-rt}S(t)\,dt + e^{-rt}\,dS(t) \\
&\quad = (\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t)\,, \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

te

$$
\begin{aligned}
&d(e^{-rt}X(t)) \\
&\quad = df(t, X(t)) \\
&\quad = f_t(t, X(t))\,dt + f_x(t, X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t))\,dX(t)\,dX(t) \\
&\quad = -re^{-rt}X(t)\,dt + e^{-rt}\,dX(t) \\
&\quad = -re^{-rt}X(t)\,dt + e^{-rt}(rX(t)\,dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma S(t)\,dW(t)) \\
&\quad = \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)\,dW(t) \\
&\quad = \Delta(t)\,d(e^{-rt}S(t)) \qquad (5.47)
\end{aligned}
$$

Usporedimo li (5.44) sa (5.46), vidimo da diskontiranje cijene dionice smanjuje srednju stopu povrata sa $\alpha$ na $\alpha - r$. Usporedimo li (5.45) sa (5.47), vidimo da diskontiranje vrijednosti portfelja uklanja stopu povrata $r$: promjena diskontirane vrijednosti portfelja posljedica je samo promjene diskontirane vrijednosti dionice.

### 5.4.2 Call i put opcija

Promotrimo sada europsku call opciju s danom dospijeća $T > 0$ i cijenom izvršenja $K > 0$. U trenutku $T$ vrijednost takve opcije jednaka je $(S(T) -$

$K)^+$. U nastavku odgovaramo na pitanje čemu je jednaka vrijednost takve call opcije u trenutku $t \in [0,T)$. Black, Scholes i Merton rezonirali su da vrijednost opcije u trenutku $t$ ovisi o vremenu $t$ (preciznije o preostalom vremenu $T-t$ do isteka opcije), o vrijednosti dionice u trenutku $t$, te naravno, o parametrima modela $r$ i $\sigma$. Označimo zato sa $c(t,x)$ vrijednost call opcije u trenutku $t$ ako je cijena dionice u tom trenutku $S(t)=x$ (parametri $r$ i $\sigma$ su izostavljeni, jer se ne mijenjaju tokom trajanja opcije). Funkcija $c(t,x)$ je deterministička: $c:[0,T]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$. Ono što je slučajno je cijena dionice $S(t)$ u trenutku $t$. Zato je slučajna i vrijednost opcije $c(t,S(t))$ u trenutku $t$. Primjetimo da je $(c(t,S(t)) : 0\le t\le T)$ slučajni proces. Cilj nam je izračunati funkciju $c(t,x)$.

Odredimo najprije diferencijal od $c(t,S(t))$. Po Itôvoj formuli imamo

$$\begin{aligned}
& dc(t,S(t)) \\
&= c_t(t,S(t))\,dt + c_x(t,S(t))\,dS(t) + \frac{1}{2}c_{xx}(t,S(t))\,dS(t)\,dS(t) \\
&= c_t(t,S(t))\,dt + c_x(t,S(t))(\alpha S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2}c_{xx}(t,S(t))\sigma^2 S^2(t)\,dt \\
&= \left[c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t,S(t))\right]dt \\
&\quad + \sigma S(t)c_x(t,S(t))\,dW(t)\,. \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

Sada računamo diferencijal diskontirane cijene opcije $e^{-rt}c(t,S(t))$. Ponovno koristimo Itôvu formulu s $f(t,x)=e^{-rt}x$:

$$\begin{aligned}
& d(e^{-rt}c(t,S(t)) \\
&= df(t,c(t,S(t))) \\
&= f_t(t,c(t,S(t)))\,dt + f_x(t,c(t,S(t)))\,dc(t,S(t)) \\
&\quad \frac{1}{2}f_{xx}(t,c(t,S(t)))\,dc(t,S(t))\,dc(t,S(t)) \\
&= -re^{-rt}c(t,S(t))\,dt + e^{-rt}\,dc(t,S(t)) \\
&= e^{-rt}\Big[-rc(t,S(t)) + c_t(t,S(t)) + \alpha S(t)c_x(t,S(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t,S(t))\Big]dt + e^{-rt}\sigma S(t)c_x(t,S(t))\,dW(t)\,. \qquad (5.49)
\end{aligned}$$

Osnovna ideja određivanja cijena opcije ista je kao i u diskretnom slučaju. Želimo naći portfelj čija je vrijednost $X(t)$ u svakom trenutku $t\in[0,T]$

jednaka vrijednosti opcije $c(t, S(t))$. Takav portfelj zvat ćemo replicirajućim portfeljom. Ako je $X(t) = c(t, S(t))$, tada će jednakost vrijediti i nakon diskontiranja, t.j., ako i samo ako je $e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(t, S(t))$, za sve $t \in [0, T]$. To će vrijediti ako i samo ako je $X(0) = c(0, S(0))$ i

$$d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}c(t, S(t)))\,. \tag{5.50}$$

Diferencijali koji se pojavljuju u (5.50) izračunati su u (5.47) i (5.49). Slijedi da (5.50) vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{aligned} &\Delta(t)(\alpha - r)S(t)\,dt + \Delta(t)\sigma S(t)\,dW(t) \\ &= \Big[ - rc(t, S(t)) + c_t(t, S(t)) + \alpha S(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t))\Big]\,dt \\ &\quad + \sigma S(t)c_x(t, S(t))\,dW(t)\,. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Izjednačavamo prvo članove uz $dW(t)$ u (5.51). Slijedi

$$\Delta(t) = c_x(t, S(t)) \quad \text{za sve } t \in [0, T)\,. \tag{5.52}$$

Ta jednakost naziva se *delta-hedging* pravilo. Ukoliko je investitor prodao call opciju, te se štiti od obaveza koje iz nje izlaze, u svakom trenutku $t$ prije isteka opcije broj dionica $\Delta(t)$ koje treba imati jednak je parcijalnoj derivaciji (u odnosu na cijenu dionice) vrijednosti opcije u tom trenutku. Veličina $c_x(t, S(t))$ naziva se *delta* opcije.

Izjednačimo sada članove uz $dt$ u (5.51). Dobivamo

$$\begin{aligned} &(\alpha - r)S(t)c_x(t, S(t)) \\ &= -rc(t, S(t)) + c_t(t, S(t)) + \alpha S(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t)) \\ &\qquad \text{za sve } t \in [0, T)\,. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Na obje strane pojavljuje se član $\alpha S(t)c_x(t, S(t))$, pa nakon skraćivanja dobivamo

$$\begin{aligned} rc(t, S(t)) &= c_t(t, S(t)) + rS(t)c_x(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)c_{xx}(t, S(t)) \\ &\qquad \text{za sve } t \in [0, T)\,. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Zaključujemo da trebamo naći funkciju $c(t, x)$ koja zadovoljava sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$c_t(t, x) + rxc_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c_{xx}(t, x) = rc(t, x) \quad \text{za sve } t \in [0, T), x \geq 0\,. \tag{5.55}$$

Ta jednadžba zove se *Black-Scholes-Mertonova parcijalna diferencijalna jednadžba*. Rješenje te jednadžbe tražimo uz terminalni uvjet

$$c(T,x) = (x-K)^+ . \tag{5.56}$$

Pretpostavimo da smo pronašli funkciju $c(t,x)$. Ako investitor kreće s početnim kapitalom $X(0) = c(0,S(0))$ i investira u trenutku $t$ u $\Delta(t) = c_x(t,S(t))$ dionica, tada će (5.51) vrijediti za sve $t \in [0,T)$. Zato će vrijediti i (5.50), pa zbog $X(0) = c(0,S(0))$ također i $e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(t,S(t))$. Slijedi da će vrijediti $X(t) = c(t,S(t)$ za sve $t \in [0,T)$. Uzimanjem limesa kada $t \uparrow T$, zbog neprekidnosti procesa $X(t)$ i $c(t,S(t))$, dobivamo i $X(T) = c(T,S(T)) = (S(T)-K)^+$.

Preostaje riješiti jednadžbu (5.55). To je parcijalna diferencijalna jednadžba tipa *paraboličke jednadžbe unatrag*. Za njeno rješenje, uz terminalni uvjet (5.56), potrebno je znati i rubne uvjete u $x=0$ i $x=\infty$. Rubni uvjet u $x=0$ dobije se uvrštavanjem $x=0$ u (5.55). Slijedi:

$$c_t(t,0) = rc(t,0) . \tag{5.57}$$

To je obična diferencijalna jednadžba za funkciju $t \mapsto c(t,0)$ čije je rješenje

$$c(t,0) = e^{rt}c(0,0) .$$

Uvrstimo $t = T$ u gornju jednakost. Zbog $c(T,0) = (0-K)^+ = 0$ slijedi $c(0,0) = 0$. Zato je i

$$c(t,0) = 0 \quad \text{za sve } t \in [0,T] . \tag{5.58}$$

To je rubni uvjet u $x = 0$.

Kada $x \to \infty$, funkcija $c(t,x)$ također raste u $\infty$. U tom slučaju rubni uvjet u $x=\infty$ se zadaje tako da se zada brzina rasta te funkcije u $\infty$. To vodi do sljedećeg rubnog uvjeta kojeg nećemo detaljnije razmatrati:

$$\lim_{x\to\infty}[c(t,x) - (x - e^{-r(T-t)}K)] = 0 \quad \text{za sve } t \in [0,T] . \tag{5.59}$$

Pokazuje se da je rješenje jednadžbe (5.55) uz terminalni uvjet (5.56) i rubne uvjete (5.58) i (5.59) dano formulom

$$c(t,x) = xN(d_+(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-(T-t,x)) ,\ 0 \le t \le T , x > 0 , \tag{5.60}$$

gdje je

$$d_{\pm}(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right], \tag{5.61}$$

a $N$ je funkcija distribucije standardne normalne distribucije,

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\,.$$

Uvedimo i notaciju

$$BSM(\tau, x; K, r, \sigma) = xN(d_+(\tau, x)) - Ke^{-r\tau}N(d_-(\tau, x))\,. \tag{5.62}$$

Funkciju $BSM$ zovemo Black-Scholes-Mertonova funkcija. U toj funkciji $\tau$ označava vrijeme do isteka opcije, a $x$ trenutnu cijenu dionice. Parametri $K$, $r$ i $\sigma$ su cijena izvršenja, kamatna stopa i volatilnost. Uočite da $\alpha$, srednja stopa povrata na dionicu, *ne* ulazi u formulu. Drugim riječima, cijena opcije ne ovisi o $\alpha$.

Formulom (5.60) nisu definirani $c(t, x)$ za $t = T$ (zbog $\tau = T - t = 0$ u tom slučaju), te za $x = 0$ (pojavljuje se $\log x$). Međutim, te vrijednosti definirane su po neprekidnosti: $\lim_{t\to T} c(t, x) = (x - K)^+$ i $\lim_{x\downarrow 0} c(t, x) = 0$.

Sada želimo odrediti cijenu europske put opcije. Da bismo to učinili, promotrimo prvo tzv. forward ugovor. *Forward ugovor* sa cijenom izvršenja $K$ obavezuje na kupnju jedne dionice na dan dospijeća $T$ po cijeni $K$. Na dan dospijeća je vrijednost forward ugovora jednaka $S(T) - K$. Neka $f(t, x)$ označava vrijednost forward ugovora u trenutku $t \in [0, T]$ ukoliko je cijena dionice u trenutku $t$ jednaka $S(t) = x$. Cilj nam je izračunati $f(t, x)$. Da bismo to izračunali, postavimo se u poziciju agenta koji je prodao takav forward ugovor za cijenu $F$. U trenutku $t = 0$ takav agent formira portfelj koji se sastoji od jedne dionice čija je cijena $S(0)$. Razliku $S(0) - F$ posudi na tržistu novca po kamatnoj stopi $r$. Agent ne mijenja portfelj kroz cijelo vrijeme trajanja forward ugovora. U trenutku $T$, agent i dalje ima jednu dionicu, a vrijednost posuđenog novca je sada $e^{rT}(S(0) - F)$. Na dan dospijeća agent mora kupcu forward ugovora prodati dionicu za vrijednost $K$. Cijena $F$ mora biti određena tako da ne postoji mogućnost arbitraže. To će biti tako samo u slučaju da vrijedi $e^{rT}(S(0) - F) = K$, t.j., obaveza agenta jednaka je cijeni koju će dobiti za dionicu. Odavde slijedi da je $F = S(0) - e^{-rT}K$. Na sličan način se pokazuje da je

$$f(t, x) = x - e^{-r(T-t)}K\,. \tag{5.63}$$

Kolika mora biti cijena izvršenja $K$ da bi vrijednost forward ugovora u trenutku $t = 0$ bila jednaka nuli? Očito mora vrijediti $0 = F = S(0) - e^{-rT}K$, otkuda $K = e^{rT}S(0)$. Tu vrijednost nazivamo *forward cijenom dionice* u trenutku $t = 0$. Na sličan način možemo definirati forward cijenu dionice u trenutku $t$ kao vrijednost $K$ uz koju je vrijednost forward ugovora trenutku $t$ jednak nuli, t.j., onaj $K$ za koji je $0 = f(t, S(t)) = S(t) - e^{-r(T-t)}K$. Slijedi da je forward cijena u trenutku $t$ jednaka

$$\mathrm{For}(t) = e^{r(T-t)}S(t)\,. \tag{5.64}$$

Forward cijena dionice *nije* vrijednost forward ugovora. To je iznos cijene izvršenja $K$ uz koji je vrijednost forward ugovora jednaka nuli.

Promotrimo situaciju u trenutku $t = 0$. Neka je cijena izvršenja forward ugovora $K$ jednaka $\mathrm{For}(0) = e^{rT}S(0)$. Vrijednost forward ugovora je u trenutku $t = 0$ jednaka nuli. Međutim, vrijednost forward ugovora se mijenja kako vrijeme prolazi. U trenutku $t \in [0, T]$ ta vrijednost je jednaka

$$f(t, S(t)) = S(t) - e^{rt}S(0)\,.$$

Sada možemo izračunati cijenu europske put opcije s cijenom izvršenja $K$ i danom dospijeća $T$. Prisjetimo se da je vrijednost put opcije na dan dospijeće jednaka $(K - S(T))^+$. Primjetimo da za sve $x \geq 0$ vrijedi

$$x - K = (x - K)^+ - (K - x)^+\,. \tag{5.65}$$

Označimo vrijednost put opcije u trenutku $t$ sa $p(t, x)$ gdje je cijena dionice u trenutku $t$ jednaka $S(t) = x$. Iz jednakosti (5.65) vidimo da vrijedi $S(T) - K = (S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+$ što možemo zapisati kao

$$f(T, S(T)) = c(T, S(T)) - p(T, S(T))\,.$$

Na lijevoj strani je vrijednost forward ugovora s cijenom izvršenja $K$ na dan dospijeća $T$, a na desnoj razlika vrijednosti call i put opcije na dan dospjeća $T$. To znači da su u trenutku $T$ sljedeća dva portfelja jednako vrijedna: (a) forward ugovor i (b) kupljena call opcija i prodana put opcija. Zato ta dva portfelja moraju biti jednako vrijedna i u svakom trentku $t \in [0, T]$, t.j.,

$$f(t, x) = x - e^{-r(T-t)}K = c(t, x) - p(t, x)\,. \tag{5.66}$$

Gornja jednakost naziva se *put-call paritet*. Primjetimo da smo put-call paritet izveli samo na temelju ne postojanja arbitraže na tržištu, ne koristeći specifičnosti Black-Scholes-Mertonovng modela. U Black-Scholes-Mertonovom modelu poznata nam je funkcija $c(t,x)$, te jednostavno dobijemo da je

$$\begin{aligned} p(t,x) &= c(t,x) - x + Ke^{-r(T-t)} \\ &= xN(d_+(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-(T-t,x)) - x + Ke^{-r(T-t)} \\ &= x(N(d_+(T-t,x)) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_-(T-t,x)) - 1) \\ &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_-(T-t,x)) - x(N - (d_+(T-t,x))\,, \end{aligned} \tag{5.67}$$

gdje smo koristili da je

$$\begin{aligned} N(y) - 1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z}{2}}\, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}}\, dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}}\, dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-y} e^{-\frac{z}{2}}\, dz = -N(-y) \end{aligned}$$

### 5.4.3 "Hedging" i "Grci"

Promatramo financijsko tržište na kojem imamo jednu primarnu financijsku imovinu, na primjer dionicu, čija je cijena u trenutku $t \in [0,T]$ označena sa $S(t)$ i modelirana jednadžbom (5.44). Osim u dionice moguće je ulagati ili posuđivati novac po konstantnoj kamatnoj stopi $r$. Također je moguće trgovati vrijednosnicama izvedenim iz primarne financijske imovine kao što su call i put opcija na tu imovinu. Promotrmo portfelj koji se sastoji od bilo koje kombinacije tih financijskih instrumenata. Vrijednost $X(t)$ takvog portfelja ovisi o vremenu $t$ i o vrijednosti dionice $S(t) = x$ u tom trenutku (te, naravno, o parametrima modela). Zato možemo pretpostaviti da je $X(t) = \chi(t, S(t))$, gdje je $\chi : [0,T] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ neka funkcija.

U praksi je važno poznavati osjetljivost portfelja s obzirom na

1. promjene u cijeni primarne imovine (dionice), i
2. promjene u modelima parametara.

U prvom slučaju želimo naći mjeru izloženosti riziku, tj., kako se mijenja vrijednost portfelja u odnosu na promjenu vrijednosti dionice. Drugi slučaj se može činite besmislenim, budući da je pretpostavka modela da su parametri konstanti. U tom slučaju misli se na osjetljivost modela na moguće krive specifikacije parametara.

Uvodimo sljedeće parcijalne derivacije funkcije $\chi$ koje imaju zajedničko ime "Grci" ("The Greeks"):

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial \chi}{\partial x} && \text{delta} \\
\Gamma &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} && \text{gama} \\
\rho &= \frac{\partial \chi}{\partial r} && \text{ro} \\
\Theta &= \frac{\partial \chi}{\partial t} && \text{theta} \\
\mathcal{V} &= \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} && \text{vega}
\end{aligned}$$

Za portfelj koji je neosjetljiv na male promjene u odnosu na neki od parametara kažemo da je *neutralan*, odnosno preciznije, to znači da je odgovarajući "Grk" jednak nuli. Na primjer, ako je $\Delta = 0$ kažemo da je portfelj *delta neutralan*.

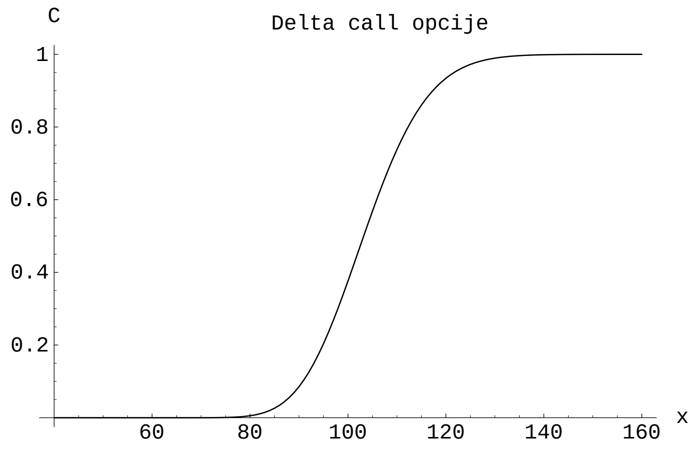
U sljedećoj propoziciji izračunati su "Grci" za portfelj koji se sastoji od jedne call opcije (tj. "Grci" za call opciju). Slovom $n$ označena je funkcija gustoće standardne normalne distribucije, $n(y) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp\{-y^2/2\}$.

**Propozicija 5.18** *Za europsku call opciju sa cijenom izvršenja $K$ i danom dospijeća $T$ vrijede sljedeće jednakosti:*

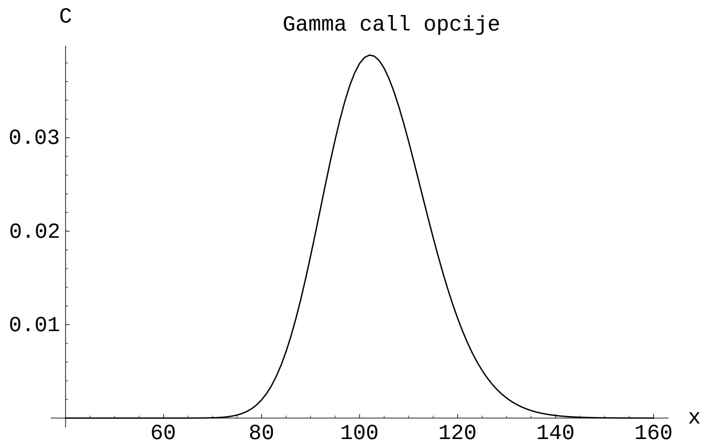
$$\begin{aligned}
\Delta &= N(d_+) \\
\Gamma &= \frac{n(d_+)}{x\sigma\sqrt{T-t}} \\
\rho &= K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_-) \\
\Theta &= -\frac{x\, n(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_-) \\
\mathcal{V} &= x\, n(d_+)\sqrt{T-t}\,.
\end{aligned}$$

**Dokaz:** Direktnim, ali mukotrpnim, računom iz formule (5.60). □

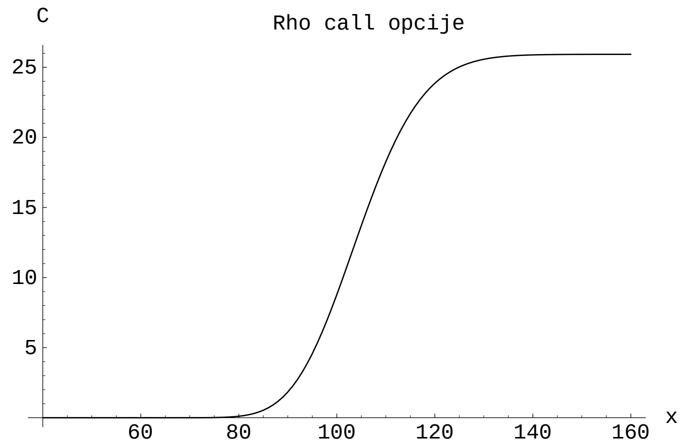
Grafovi funkcija $\Delta, \Gamma, \rho, \mathcal{V}$ i $\Theta$ kao funkcija cijene dionice $x$ dani su na Slikama 1.-5. [1]



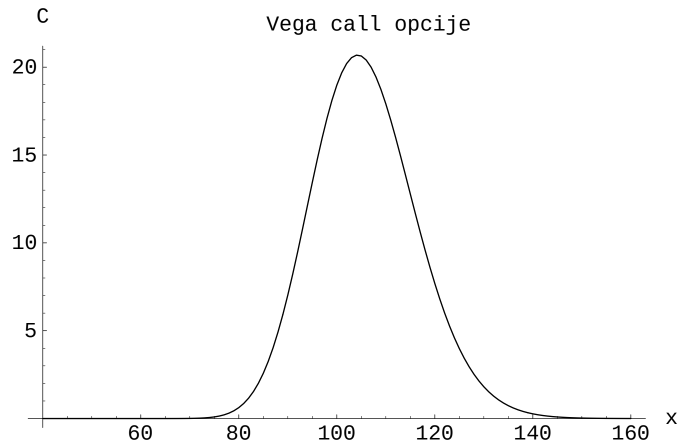

Slika 5.1: Delta call opcije



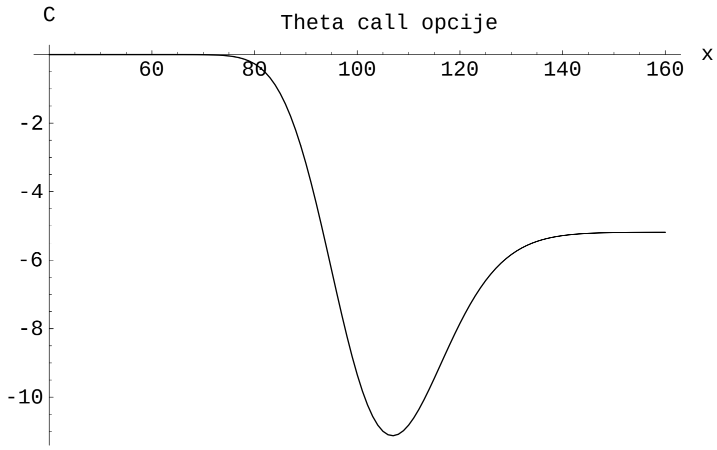

Slika 5.2: Gama call opcije




Slika 5.3: Ro call opcije




Slika 5.4: vega call opcije




Slika 5.5: Theta call opcije

Promotrimo opet dani portfelj čija je vrijednost jednaka $X(t) = \chi(t, S(t))$. Cilj je imunizirati taj portfelj u odnosu na male promjene u vrijednosti dionice. Ako je portfelj delta neutralan, tj., ako je

$$\Delta_\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0\,,$$

tada smo gotovi. Što ako portfelj nije delta neutralan? Možemo li ga učiniti delta neutralnim? Jedan način je da prodamo cijeli portfelj i novac stavimo u banku (očito taj novi portfelj nije više nimalo osjetljiv na promjene cijene dionice). No, tako nešto najčešće nije praktički moguće.

Druga, zanimljivija mogućnost je portfelju dodati izvedenicu, na primjer opciju na dionicu. Budući da je cijena izvedenica u potpunosti korelirana s cijenom dionice, razumno je očekivati da na taj način možemo stvoriti delta neutralan porfelj. Označimo sa $f(t,x)$ funkciju cijene dodane izvedenice. To znači da je cijena izvedenice u trenutku $t$ jednaka $f(t, S(t))$. Na primjer, ako je izvedenica call opcija, tada je $f(t,x) = c(t,x)$. Pretpostavimo da smo portfelju dodali $\zeta$ jedinica izvedenice. Vrijednost novog portfelja biti će jednaka $\nu(t, S(t))$ gdje je

$$\nu(t,x) = \chi(t,x) + \zeta f(t,x)\,.$$

[1]Parametri modela su $r = 0.05$, $\sigma = 0.20$, cijena izvršenja $K = 105$ i vrijeme dospijeća $T = 0.25$

Želimo naći $\zeta$ takav da je $\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0$. To daje jednadžbu

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \zeta \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,$$

s očitim rješenjem

$$\zeta = -\frac{\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\Delta_\chi}{\Delta_f}\,.$$

**Primjer 5.19** *Pretpostavimo da smo prodali izvedenicu čija je cijena dana funkcijom $f(t,x)$, te se želimo zaštititi od proizašlih obaveza, i to tako da koristimo financijsku imovinu na koju je izvedenica napisana (na primjer dionicu). Koliko dionica trebamo imati po prodanoj izvedenici? Neka je $\zeta$ taj broj. Tada se naš portfelj sastojati od -1 jedinice izvedenice i $\zeta$ dionica, tj., vrijednost portfelja je $-f(t,x) + \zeta \cdot x$. Deriviranjem po $x$ i izjednačavanjem s nulom slijedi*

$$\zeta = \frac{\partial f}{\partial x} = \Delta_f\,.$$

Važno je uočiti da delta hedge vrijedi samo za male promjene cijene dionice, pa zato samo za kratko vrijeme. Kako vrijeme prolazi, vrijednosti od $x$ (cijena dionice) i $t$ (vrijeme) se mijenjaju, a naša zaštita (hedge) koristi staru, sada netočnu vrijednost od delta. U praksi se stoga provodi diskretno rebalansiranje delta zaštite koje na gornjem primjeru može izgledati ovako:

- Prodaj jednu jedinicu izvedenice u trenutku $t = 0$ po cijeni $f(0,x)$.
- Izračunaj $\Delta$, te kupi $\Delta$ dionica. Za to upotrijebi novac dobiven prodajom izvedenice, te ako je potrebno posudi novac iz banke.
- Čekaj jedan dan (tjedan, minutu,...). Cijena dionice se promijenila i tvoj stari $\Delta$ više nije točan.
- Izračunaj novu vrijednost od $\Delta$ i prilagodi prema tome novu poziciju u dionicama. Dobiveni (ili potreban) novac uloži u banku (ili posudi iz banke).
- Ponavljaj tu proceduru do dana dospijeća $T$.
- Na taj način će vrijednost tvojih dionica i novca biti približno jednaka vrijednosti izvedenice.

Ukoliko se rebalansiranje portfelja vrši neprekidno, vrijednost portfelja na dan dospijeća biti će jednaka vrijednosti izvedenice. To i jeste ideja replicirajućeg portfelja.

U diskretnoj vremenskoj shemi koja je gore opisana postavlja se pitanje koliko često treba prilagođavati portfelj. Prerijetko znači veliko odstupanje od delta neutralnog portfelja. Prečesto dovodi do velikih troškova transakcije (to je praktičan problem - u modelu *ne* postoje troškovi transakcije). Razlog zašto portfelj treba prilagođavati je taj da se $\Delta$ mijenja kako se mijenja cijena dionice. Osjetljivost od $\Delta$ s obzirom na $x$, cijenu dionice, dana je s $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$. Ako je $\Gamma$ velik, treba često rebalansirati portfelj. S druge strane, mali $\Gamma$ znači da ćemo dulje vrijeme zadržati delta hedge. Stoga je preporučljivo formirati portfelj koji je, uz to što je delta neutralan, također i *gama neutralan*.

Uočimo da za portfelj koji se sastoji od jedne dionice imamo $\Delta_S = 1$, te $\Gamma_S = 0$. Činjenica da je gama dionice jednaka nuli znači da promjena broja dionica u portfelju ne može utjecati na gama cijelog portfelja. To vodi do sljedeće konstrukcije portfelja koji je i delta i gama neutralan. Pretpostavimo da imamo portfelj čija je vrijednost dana funkcijom $\chi(t, x)$, te ga želimo modificirati tako da postane delta i gama neutralan. Prvi korak je da mu dodamo izvedenicu s cijenom $f(t, x)$ tako da postane gama neutralan. Zatim dodamo (ili oduzmemo) izvjestan broj dionica tako da portfelj postane i delta neutralan. Uočimo da promjena broja dionica neće narušiti gama neutralnost portfelja. Formalno, neka je $\zeta_f$ dodani broj izvedenica, te $\zeta_x$ dodani broj dionica. Vrijednost novog portfelja je

$$\nu(t, x) = \chi(t, x) + \zeta_f \cdot f(t, x) + \zeta_x \cdot x\,.$$

Izjednačavnajem prve i druge parcijalne derivacije od $\nu(t, x)$ po $x$ s nulom, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} \Delta_\chi + \zeta_f \Delta_f + \zeta_x &= 0\,, \\ \Gamma_f + \zeta_f \Gamma_f &= 0\,, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\begin{aligned} \zeta_f &= -\frac{\Gamma_\chi}{\Gamma_f}\,, \\ \zeta_x &= \frac{\Delta_f \Gamma_\chi}{\Gamma_f} - \Delta_\chi\,. \end{aligned}$$

Drugi način kako formirati portfelj koji je i delta i gama neutralan, je dodavanje dva različita tipa izvedenica portfelju. To mogu biti, na primjer, dvije call opcije s različitim danima dospijeća ili s različitim cijenama izvršenja. Označimo zbog jednostavnosti te izvedenice sa $f$, odnosno $g$. Neka su $f(t,x)$ i $g(t,x)$ funkcije koje daju cijenu tih izvedenica u trenutku $t$ ako je cijena dionice $S(t) = x$. Pretpostavimo da portelj ima $\zeta_f$, odnosno $\zeta_g$ tih izvedenica. Vrijednost novog portfelja je

$$\nu(t,x) = \chi(t,x) + \zeta_f f(t,x) + \zeta_g g(t,x)\,.$$

Izabiremo $\zeta_f$ i $\zeta_g$ tako da delta i gama novog portfelja budu jednaki nula, tj., tako da vrijede jednadbe

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0\,.$$

Odavde slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \Delta_\chi + \zeta_f \Delta_f + \zeta_g \Delta_g &= 0\,, \\ \Gamma_\chi + \zeta_f \Gamma_f + \zeta_g \Gamma_g &= 0\,, \end{aligned}$$

koji je jednostavno riješiti.