Poglavlje 4

Brownovo gibanje

4.1 Skalirana slučajna šetnja

Prisjetimo se definicije jednostavne simetrične slučajne šetnje: neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $(X_j,\ j = 1, 2, \dots)$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima ± 1 s parametrom $p = 1/2$ definiranih na tom prostoru. Konkretno, za Ω možemo uzeti beskonačni produkt $\{-1, 1\}^\infty$, za $\mathcal{F}$ cilindarsku σ-algebru, a za $\mathbb{P}$ produktnu vjerojatnost. Simetrična slučajna šetnja je stohastički proces $M = (M_k,\ k = 0, 1, 2, \dots)$ definiran sa $M_0 = 0$, te

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad k = 1, 2, \dots .$$

Slučajna šetnja ima *nezavisne priraste*. To znači da ako su $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m$ nenegativni cijeli brojevi, tada su slučajne varijable

$$M_{k_1} = M_{k_1} - M_{k_0}, M_{k_2} - M_{k_1}, \dots, M_{k_m} - M_{k_{m-1}} ,$$

nezavisne. Svaka od tih slučajnih varijabli,

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$

naziva se *prirast* slučajne šetnje. Nadalje, očekivanje prirasta $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ je nula, dok je varijanca tog priraste jednaka $k_{i+1} - k_i$. Zaista,

$$\mathrm{Var}(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \mathrm{Var}(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \mathrm{Var}(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i\,.$$

Uočimo da se varijanca akumulira brzinom jedan po jedinici vremena. Dakle, varijanca prirasta kroz vremenski interval od k do l, $k < l$, biti će jednaka $l - k$.

Označimo sa $\mathcal{F}_k$ σ-algebru generiranu s $X_1, X_2, \dots, X_k$. Primjetimo da je to ta σ-algebra jednaka σ-algebri generiranoj s $M_1, M_2, \dots, M_k$. Dakle, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_k,\, k = 0, 1, 2, \dots)$ je prirodna filtracija slučajne šetnja M.

Lema 4.1 *(Martingalno svojstvo simetrične slučajne šetnje) Simetrična slučajna šetnja $M = (M_k,\, k = 0, 1, 2, \dots)$ je martingal.*

Dokaz: Za nenegativne cijele brojeve $k < l$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_l \,|\, \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[(M_l - M_k) + M_k \,|\, \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[M_l - M_k \,|\, \mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[M_k \,|\, \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[M_l - M_k \,|\, \mathcal{F}_k] + M_k \quad (\text{zbog } M_k \text{ je } \mathcal{F}_k \text{ izmjeriva}) \\
&= \mathbb{E}[M_l - M_k] + M_k \quad (\text{zbog } M_l - M_k \text{ nezavisna od } \mathcal{F}_k) \\
&= M_k\,. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

□

Sada ćemo definirati kvadratnu varijaciju simetrične slučajne šetnje. *Kvadratna varijacija* do trenutka k definirana je sa

$$[M, M]_k := \sum_{j=1}^{k} (M_j - M_{j-1})^2\,.$$

Uočimo da je svaki član u gornjoj sumi jednak 1, te je trivijalno $[M, M]_k = k$. Nadalje, kvadratna varijacija računa se po svakom putu slučajne šetnje: $[M, M]_k$ je slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koja je jednaka konstanti k. S druge strane, $\mathrm{Var}(M_k)$ je također jednaka k, ali se računa usrednjenjen po svim putevima. U slučaju nesimetrične slučajne šetnje, $\mathbb{P}(X_j = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_j = -1) = q := 1 - p$, kvadratna varijacija u trenutku k je i dalje jednaka k, dok je $\mathrm{Var}(M_k) = 4pqk$. Kod računanja kvadratne varijacije ključno je da vjerojatnosti prirasta ne ulaze u račun. Ako je dan put slučajne šetnje (realizacija šetnje za dani $\omega \in \Omega$), iz tog puta možemo izračunati kvadratnu varijaciju (za taj put).

Za aproksimaciju Brownovog gibanja trebamo ubrzati vrijeme i smanjiti korak slučajne šetnje. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$, definiramo *skaliranu slučajnu šetnju*

$$W^{(n)}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}\,, \tag{4.2}$$

ako je $nt \in \mathbb{Z}_+$. Ako nt nije cijeli broj, $W^{(n)}(t)$ definiramo linearnom interpolacijom između dviju najbližih točaka s i u, lijevo, odn. desno, od t za koje su ns i nu cijeli brojevi. Preciznije,

$$W^{(n)}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{[nt]+1} - M_{[nt]})(nt - [nt])\,. \tag{4.3}$$

Primjetimo da je $W^{(n)}(t)$ definirano za svaki realan $t \geq 0$. Za fiskni $\omega \in \Omega$, $t \mapsto W^{(n)}(t)(\omega)$ je neprekidna funkcija. Brownovo gibanje dobit ćemo kao limes kada $n \to \infty$. Na Slici 1. prikazana je simulacija puta od $W^{(400)}$ do vremena 1. Taj put generiran je pomoću 400 realizacija simetričnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima $\pm 1/20$.

Skalirana slučajna šetnja ima nezavisne priraste. Zaista, neka su $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ takvi da je svaki nt_j cijeli broj. Tada su slučajne varijable

$$W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0), W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1), \ldots, W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1})$$

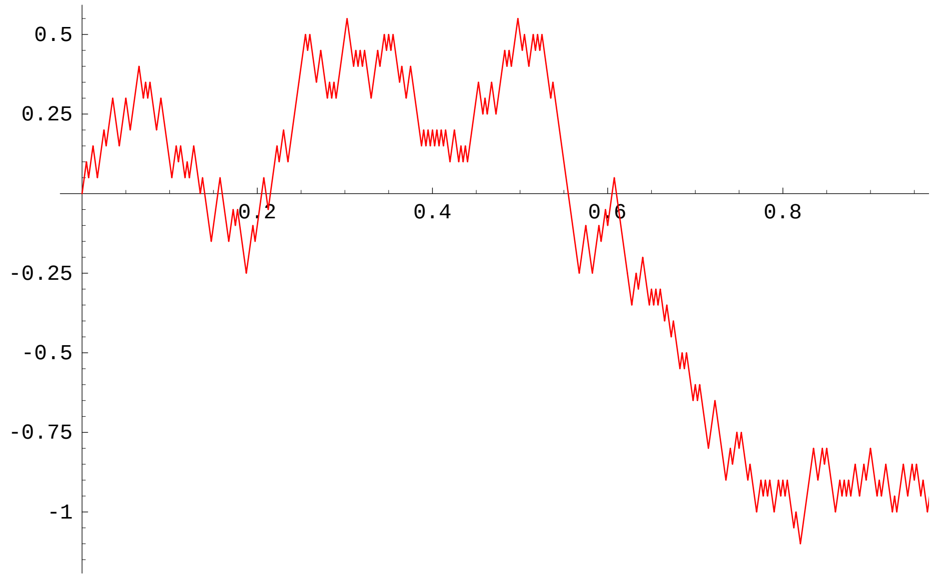
nezavisne. To je zato jer te slučajne varijable ovise o različitim Bernoullijevim varijablama X_j. Na primjer,

$$W^{(n)}(t_{i+1}) - W^{(n)}(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}}(M_{nt_{i+1}} - M_{nt_i}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=nt_i+1}^{nt_{i+1}} X_j\,.$$

Upotrebom formule (4.3), može se pokazati nezavisnost prirasta i za općenite $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$.

Izračunajmo sada očekivanje i varijancu prirasta $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$, $0 \leq s \leq t$, u slučaju kada su ns i nt cjelobrojni. Po gornjoj formuli

$$W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=ns+1}^{nt} X_j\,,$$



Slika 4.1:

otkud slijedi

$$\mathbb{E}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = 0\,, \quad \mathrm{Var}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = \frac{1}{n}\sum_{j=ns+1}^{nt} 1 = t - s\,.$$

Označimo sa $\mathcal{F}(s)$ σ-algebru generiranu slučajnim varijablama $W^{(n)}(u)$, $0 \le u \le s$. Ako su $0 \le s \le t$ vremena takva da su ns i nt cjelobrojni, tada je slučajna varijabla $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ nezavisna od $\mathcal{F}(s)$, dok je $W^{(n)}(s)$ izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}(s)$. Na isti način kao i za slučajnu šetnju dokazuje se sljedeće martingalno svojstvo skalirane slučajne šetnje:

$$\mathbb{E}[W^{(n)}(t)\,|\,\mathcal{F}(s)] = W^{(n)}(s)$$

za sve $0 \le s \le t$ za koje su ns i nt cjelobrojni.

Izračunajmo još i *kvadratnu varijaciju* skalirane slučajne šetnje. U trenutku

$t \geq 0$ takvom da je nt cijeli broj, definiramo

$$\begin{aligned}
[W^{(n)}(t), W^{(n)}(t)] &:= \sum_{j=1}^{nt} \left[W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{nt} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} X_j \right]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t\,.
\end{aligned}$$

Uočimo da je i ovdje kvadratna varijacija slučajna varijabla (jednaka konstanti t) i računa se za svaki put $t \mapsto W^{(n)}(t)(\omega)$, i ne ovisi o vjerojatnosti $\mathbb{P}$. S druge strane, $\mathrm{Var}(W^{(n)}(t)) = t$ je usrednjenje po svim mogućim putovima, te ovisi o vjerojatnosti $\mathbb{P}$.

Za fiksni $n \in \mathbb{N}$, skalirana slučajna šetnja $W^{(n)}$ je funkcija dva argumenta: elementarnog događaja $\omega \in \Omega$ i vremena $t \in \mathbb{R}_+$. Fiksiramo li elementarni događaj $\omega \in \Omega$, dobivamo (neprekidnu) funkciju $t \mapsto W^{(n)}(t)(\omega)$ s $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$. Tu funkciju nazivamo *put* skalirane slučajne šetnje za dani ω. S druge strane, fiksiramo li vrijeme $t \geq 0$, dobivamo slučajnu varijablu $W^{(n)}(t) : \Omega \to \mathbb{R}$. Što možemo reći o distribuciji te slučajne varijable (barem za $nt \in \mathbb{Z}_+$)?

Uočimo da je za $t \geq 0$ takav da je nt cijeli broj

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j\,.$$

Stavimo $Y_j := (X_j + 1)/2$. Tada su Y_j, $j = 1, 2, \ldots$, nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s vrijednostima 0 i 1 koje poprimaju s jednakim vjerojatnostima 1/2. Uvedimo oznaku $B_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$. Tada je $B_k \sim B(k, 1/2)$, binomna slučajna varijabla s parametrom $p = 1/2$. Prisjetimo se da je

$\mathbb{E}(B_k) = k/2$, dok je $\mathrm{Var}B_k = k/4$. Uz ovakvu notaciju imamo

$$
\begin{aligned}
W^{(n)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} (2Y_j - 1) \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} (Y_j - \frac{1}{2}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} [B_{nt} - \mathbb{E}B_{nt}] \\
&= \sqrt{t}\, \frac{2}{\sqrt{nt}} [B_{nt} - \mathbb{E}B_{nt}] \\
&= \sqrt{t}\, \frac{B_{nt} - \mathbb{E}B_{nt}}{\sqrt{\mathrm{Var}B_{nt}}}\,. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Primjetite da je

$$\frac{B_{nt} - \mathbb{E}B_{nt}}{\sqrt{\mathrm{Var}B_{nt}}} = \frac{B(nt, 1/2) - nt/2}{\sqrt{nt/4}} \qquad (4.5)$$

gdje $B(nt, 1/2)$ označava binomnu slučajnu varijablu s parametrima nt i $p = 1/2$. Po integralnom Moivre-Laplaceovom teoremu, odnosno po centralnom graničnom teoremu, izraz u (4.5) konvergira po distribuciji (kada $n \to \infty$, $t \geq 0$ fiksan) prema standardnoj normalnoj distribuciji. Preciznije, za svaki $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{B_{nt} - \mathbb{E}B_{nt}}{\sqrt{\mathrm{Var}B_{nt}}} \leq x \right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}\, dy = \mathbb{P}(N(0,1) \leq x)\,.$$

To povlači da za fiksni $t > 0$ i svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(W^{(n)}(t) \leq x) &= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{B_{nt} - \mathbb{E}B_{nt}}{\sqrt{\mathrm{Var}B_{nt}}} \leq \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy\,.
\end{aligned}
$$

Zadnji red gore je funckija distribucije (u točki $x \in \mathbb{R}$) normalne distribucije s očekivanjem 0 i varijancom t, $N(0, t)$. Na taj način dokazana je sljedeći teorem:

Teorem 4.2 *(Centralni granični teorem) Fiksirajmo $t \geq 0$. Kada $n \to \infty$, distribucija skalirane slučajne šetnje $W^{(n)}(t)$ izračunate u trenutku t konvergira prema normalnoj distribuciji s očekivanjem 0 i varijancom t.*

Sada ćemo pomoću gornjem centralnog graničnog teorema pokazati da limes odgovarajuće skaliranog Cox-Ross-Rubinsteinov modela vodi prema cijenama dionica koje imaju log-normalnu distribuciju. Zbog jednostavnosti promatramo CRR model u kojem je kamatna stopa $r = 0$. Fiksirajmo vrijeme $t \geq 0$. Promatrat ćemo CRR model sa $n \in \mathbb{N}$ promjena cijena dionice po jedinici vremena. Neka je nt cijeli broj. Tada se do trenutka t cijena dionice promjeni nt puta. Označimo sa a_n, odnosno b_n, relativne promjene cijene dionice. Odaberimo te relativne promjene cijena na sljedeći način: neka je $\sigma > 0$ konstanta, i stavimo

$$a_n = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad b_n = +\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Vjerojatnost neutralna na rizik izračunate su u odjeljku 2.5, te imamo

$$\hat{p}_n = \frac{r - a_n}{b_n - a_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}, \quad \hat{q}_n = \frac{b_n - r}{b_n - a_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Neka su sada $(X_j,\ j = 1, 2, \dots)$ nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s vrijednostima ± 1. Označimo sa M_{nt} slučajnu šetnju u trenutku nt: $M_{nt} = \sum_{j=1}^{nt} X_j$. Tada je

$$G_{nt} := \frac{1}{2}(nt + M_{nt})$$

broj jedinica u nizu $(X_j, 1 \leq j \leq nt)$, a

$$D_{nt} := \frac{1}{2}(nt - M_{nt})$$

broj minus jedinica u nizu $(X_j, 1 \leq j \leq nt)$. Ako je $S(0)$ početna cijena dionice, tada je cijena dionice $S_n(t)$ u trenutku t (dakle, nakon nt koraka) jednaka

$$\begin{aligned} S_n(t) &= S(0)(1 + b_n)^{G_{nt}}(1 + a_n)^{D_{nt}} \\ &= S(0)\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt + M_{nt})}\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt - M_{nt})}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Teorem 4.3 *Kada $n \to \infty$, distribucija od $S_n(t)$ u (4.6) konvergira prema distribuciji od*

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\right\}\,, \tag{4.7}$$

gdje je $W(t)$ normalna slučajna varijabla ss očekivanjem 0 i varijancom t.

Dokaz: Dovoljno je pokazati da distribucija od

$$\log S_n(t) = \log S(0) + \frac{1}{2}(nt+M_{nt}) \log\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}(nt-M_{nt}) \log\left(1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{4.8}$$

konvergira prema distribuciji od

$$\log S(t) = \log S(0) + \sigma W(t) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t\,.$$

Po Taylorovoj formuli imamo

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

gdje je član $O(x^3)$ reda x^3. Primjenimo gornji razvoj na (4.8) uzimajući prvo $x = \sigma/\sqrt{n}$, a zatim $x = -\sigma/\sqrt{n}$. Uočimo da je $O((\pm\sigma/\sqrt{n})^3) = O(n^{-3/2})$. Zato je

$$\begin{aligned}
\log S_n(t) &= \log S(0) + \frac{1}{2}(nt+M_{nt})\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(nt-M_{nt})\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\
&= \log S(0) + nt\left(-\frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) + M_{nt}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2})\right) \\
&= \log S(0) - \frac{1}{2}\sigma^2 t + O(n^{-1/2}) + \sigma W^{(n)}(t) + O(n^{-1}) W^{(n)}(t)\,.
\end{aligned}$$

Po Teoremu 4.2, distribucija od $W^{(n)}(t)$ konvergira kada $n \to \infty$ prema distribuciji od $W(t)$ - centrirana normalna s varijancom t. Drugi izraz gore u kojem se pojavljuje $W^{(n)}(t)$ je $O(n^{-1})W^{(n)}(t)$. Taj izraz je produkt nečega što konvergira prema normalnoj distribuciji i člana $O(n^{-1})$ koji teži prema nuli. Zato i produkt $O(n^{-1})W^{(n)}(t)$ teži prema nuli kada $n \to \infty$. Zaključujemo da kad $n \to \infty$, distribucija od $\log S_n(t)$ teži prema distribuciji od $\log S(0) + \sigma W(t) - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t$. □

Definicija 4.4 *Za slučajnu varijablu $X > 0$ kažemo da ima* lognormalnu distribuciju, *ako slučajna varijabla $Y = \log X$ ima normalnu distribuciju.*

Ekvivalentno, ako Y ima normalnu distribuciju, tada $X = e^Y$ ima lognormalnu distribuciju. Pretpostavimo da je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajmo funkciju gustoće slučajne varijable $X = e^Y$: za $x > 0$ je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \le x) &= \mathbb{P}(Y \le \log x) \\ &= \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(\log u-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\, \frac{du}{u}\,. \end{aligned}$$

otkud

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}, \quad x > 0\,.$$

4.2 Brownovo gibanje

Brownovo gibanje je limes skaliranih slučajnih šetnji $W^{(n)}(t)$ kada $n \to \infty$, te stoga nasljeđuje svojstva tih skaliranih slučajnih šetnji. To vodi na sljedeću definiciju:

Definicija 4.5 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $W = (W(t),\, t \ge 0)$ je* Brownovo gibanje *ako vrijedi:*

(i) *Putovi $t \mapsto W(t)(\omega)$ su neprekidne funkcije sa $\mathbb{R}_+$ u $\mathbb{R}$ (za g.s. $\omega \in \Omega$).*

(ii) $W(0) = 0$.

(iii) *Za sve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

nezavisni.

(iv) *Za sve $0 \le s < t$ je prirast $W(t) - W(s)$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.*

Prisjetimo se da skalirana slučajna šetnja $W^{(n)}(t)$ ima prirodan vremenski korak $1/n$, te je linearna između dva konsekutivan vremenska koraka. Brownovo gibanje nema linearnih dijelova. Nadalje, distribucija skalirane slučajne šetnje u trenutku $t > 0$ je približno normalna (Teorem 4.2), dok je distribucija Brownovog gibanja upravo normalna $N(0, t)$.

Odredimo sada distribuciju slučajnog vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. Uočimo da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ W(t_3) - W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ W(t_3) \\ \vdots \\ W(t_m) \end{bmatrix}$$

Budući da su slučajne varijable $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ nezavisne i normalne, to je $(W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1}))$ normalni slučajni vektor. Zato je i $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$ normalni slučajni vektor kao linearna transformacija normalnog slučajnog vektora. Da bismo u potpunosti odredili distribuciju vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$, moramo izračunati kovarijacijsku matricu (vektor očekivanja je očito nula).

Neka je $0 \le s < t$. Kovarijanca od $W(s)$ i $W(t)$ jednaka je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(s)W(t)] &= \mathbb{E}[W(s)(W(t) - W(s)) + W(s)^2] \\ &= \mathbb{E}[W(s)] \cdot \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + \mathbb{E}[W(s)^2] \quad \text{(nezavisnost prirasta)} \\ &= 0 + \mathrm{Var} W(s) = s\,. \end{aligned}$$

Slijedi da je kovarijacijska matrica normalnog slučajnog vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$ jednaka

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \cdots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Na taj način smo dokazali dio sljedećeg teorema:

Teorem 4.6 *(Alternativna karakterizacija Brownovog gibanja) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $W = (W(t),\, t \ge 0)$ slučajni proces takav da su putovi $t \mapsto W(t)(\omega)$ neprekidni za g.s. $\omega \in \Omega$ i $W(0) = 0$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *Za sve* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

nezavisni i normalno distribuirani s očekivanjem nula i varijancom $\mathrm{Var}[W(t_i) - W(t_{i-1})] = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

(b) *Za sve* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *slučajni vektor* $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$ *ima normalnu distribuciju s vektorom očekivanja nula i kovarijacijskom matricom (4.9).*

Dokaz: Implikaciju (a)⇒ (b) smo već pokazali. Obrat se dokazuje slično. □

Osim samog slučajnog procesa, biti će nam potrebna i informacija vezana uz taj proces. Zato uvodimo pojam filtracije za Brownovo gibanje.

Definicija 4.7 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $W = (W(t),\, t \geq 0)$ *Brownovo gibanje na tom prostoru.* Filtracija *za Brownovo gibanje je familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$ σ*-algebri koja zadovoljava*

(i) *Za sve* $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ *(informacija kasnije ne može biti manja od informacije ranije).*

(ii) *(Adaptiranost) Za svaki* $t \geq 0$, $W(t)$ *je* $\mathcal{F}(t)$*-izmjeriva slučajna varijabla (informacija dostupna u trenutku* t *dovoljna je za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku).*

(iii) *(Nezavisnost budućih prirasta) Za sve* $0 \leq s < t$, *prirast* $W(t) - W(s)$ *nezavisan je od* $\mathcal{F}(s)$ *(svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena* s *nezavisan je od informacije dostupne u trenutku* s*).*

Tipičan primjer filtracije za Brownovo gibanje je prirodna filtracija Brownovog gibanja definirana s $\mathcal{F}(t) = \sigma(W(s),\, 0 \leq s \leq t)$. Informacija u trenutku t sadrži informaciju o Brownovom gibanje do trenutka t i ništa više.

Slično kao i slučajna šetnja, i Brownovo gibanje ima martingalno svojstvo. Definirajmo prvo pojam martingala s neprekidnim vremenom.

Definicija 4.8 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor, te neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$ *filtracija. Slučajni proces* $M = (M(t),\, t \geq 0)$ *je* martingal *ako vrijedi:*

(i) M *je* $\mathbb{F}$*-adaptiran,*

(ii) *za sve* $t \geq 0$, $\mathbb{E}|M(t)| < \infty$,

(iii) *za sve* $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[M(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] = M(s)$ *g.s.*

Teorem 4.9 *Brownovo gibanje je martingal (s obzirom na filtraciju za to Brownovo gibanje).*

Dokaz: Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[W(t) - W(s) + W(s) \,|\, \mathcal{F}(s)] \\
&= \mathbb{E}[W(t) - W(s) \,|\, \mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s) \,|\, \mathcal{F}(s)] \\
&= \mathbb{E}[(W(t) - W(s)] + W(s) \quad \text{(nezavisnost } W(t) - W(s) \text{ od } \mathcal{F}(s)) \\
&= W(s)\,.
\end{aligned}$$

□

4.3 Kvadratna varijacija

Kvadratnu varijaciju skalirane slučajne šetnje $W^{(n)}$ do trenutka T izračunali smo u (4.4), te smo dobili da je jednaka T. Prisjetimo se da je ta kvadratna varijacija bila izračunata tako da smo uzeli sve korake skalirane slučajne šetnje od 0 do T, kvadrirali ih, te zbrojili. Kod Brownovog gibanja nemamo prirodnu veličinu koraka. Za dani $T > 0$ možemo odabrati veličinu koraka, npr. T/n, i izračunati kvadratnu varijaciju za tu veličinu koraka. Preciznije, možemo računati

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right) \right]^2 .$$

Zanimat će nas taj izraz za male veličine koraka, te ćemo zato pustiti $n \to \infty$. Kao limes dobit ćemo opet T, duljinu vremenskog intervala na kojem računamo kvadratnu varijaciju. To je glavni rezultat ovog odjeljka.

Prije nego što definiramo kvadratnu varijaciju, pogledajmo prvo poznatiji koncept varijacije (odn. varijacije prvog reda). Neka je $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funkcija. Particija intervala $[0,T]$ je skup $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ točaka takvih da je $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = T$. Dijametar particije Π je najveća veličina koraka: $||\Pi|| := \max_{j=0,1,\ldots,n-1}(t_{j+1} - t_j)$. *Varijacija prvog reda* funkcije f na intervalu $[0,T]$ definira se kao

$$FV_T(f) := \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \,. \tag{4.10}$$

Ako je taj limes konačan, za funkciju f kažemo da je konačne varijacije na $[0,t]$. Primjetimo da je monotona funkcija f uvijek konačne varijacije, te da je $FV_T(f) = |f(T) - f(0)|$. Može se pokazati da je f konačne varijacije na $[0,T]$ ako i samo ako je f razlika dvije neopadajuće funkcije.

Sljedeća propozicija pokazuje da neprekidno diferencijabilne funkcije imaju konačnu varijaciju.

Propozicija 4.10 *Neka je $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 na $[0,T]$. Tada je*

$$FV_T(f) = \int_0^T |f'(t)| \, dt \,.$$

Dokaz: Neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ proizvoljna particija intervala $[0,T]$. Po teoremu srednje vrijednosti, za svaki $j = 0,1,\ldots,n-1$, postoji $t_j^* \in (t_j, t_{j+1})$ takav da je $f(t_{j+1} - f(t_j) = f'(t_j^*)(t_{j+1} - t_j)$. Zato je

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|(t_{j+1} - t_j) \,.$$

Međutim, gornji izraz je Riemannova suma funkcije f' na intervalu $[0,T]$. Budući da je f' Riemann integrabilna, gornje Riemannove sume konvergiraju, kada $||\Pi|| \to 0$ prema integralu $\int_0^T |f'(t)| \, dt$. □

Sada ćemo definirati kvadratnu varijaciju funkcije f defininirane na $[0,T]$.

Definicija 4.11 *Neka je $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ funkcija.* Kvadratna varijacija *od f na intervalu $[0,T]$ definira se kao*

$$[f,f](T) := \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2 \,. \tag{4.11}$$

Za f kažemo da je konačne kvadratne varijacije na $[0,T]$ ako gornji limes postoji i konačan je.

Pretpostavimo da je f klase C^1na $[0,T]$. Tada je kao i u dokazu Propozicije 4.10

$$\sum_{j=0}^{n-1}|f(t_{j+1})-f(t_j)|^2=\sum_{j=0}^{n-1}|f'(t_j^*)|^2(t_{j+1}-t_j)^2\leq ||\Pi||\sum_{j=0}^{n-1}|f'(t_j^*)|^2(t_{j+1}-t_j)\,.$$

Zato je

$$\begin{aligned}[f,f](t) &\leq \lim_{||\Pi||\to 0}\left[||\Pi||\sum_{j=0}^{n-1}|f'(t_j^*)|^2(t_{j+1}-t_j)\right]\\ &= \lim_{||\Pi||\to 0}||\Pi||\cdot\lim_{||\Pi||\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}|f'(t_j^*)|^2(t_{j+1}-t_j)\\ &= \lim_{||\Pi||\to 0}||\Pi||\cdot\int_0^T|f'(t)|^2\,dt=0\,.\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili da je $|f'|^2$ neprekidna, pa stoga i integrabilna, na $[0,T]$. Gornji račun pokazuje da većina funkcija na koje smo naviknuti ima kvadratnu varijaciju nula. Stoga se kvadratna varijacija nikada ne proučava u diferencijalnom računu. S druge strane, može se pokazati da putovi Brownovog gibanja nisu diferencijabilna funkcije. Preciznije, vrijedi sljedeći rezultat: za g.s. $\omega\in\Omega$, funkcija $t\mapsto W(t)(\omega)$ nije diferencijabila niti u jednoj točki. To znači da niti u jednoj točki $t\geq 0$ ne možemo definirati $\frac{d}{dt}W(t)$. Međutim, takvo "neobično" svojstvo Brownovskih putova sugerira da bi kvadratna varijacija putova mogla biti različita od nule.

Teorem 4.12 *Neka je W Brownovo gibanje. Tada je $[W,W](T)=T$ za sve $T\geq 0$ gotovo sigurno.*

Dokaz: Neka je $\Pi=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ particija od $[0,T]$. Definirajmo

$$Q_\Pi=\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^2\,.$$

Pokazat ćemo da vrijedi konvergencija u srednjem

$$\lim_{||\Pi||\to 0}\mathbb{E}[Q_\Pi-T]^2=0\,. \tag{4.12}$$

Poznato je da ako niz konvergira u srednjem, tada postoji podniz (particija) tako da taj podniz konvergira gotovo sigurno. To nam daje tvrdnju teorema.

Da bismo dokazali (4.12), potrebni su nam drugi i četvrti moment normalne slučajne varijable $X \sim N(0,t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= t\,, &(4.13)\\ \mathbb{E}[X^4] &= 3t^2\,. &(4.14) \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\mathbb{E}Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = \sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1} - t_j) = T\,.$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)\right)^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4\right] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] + (t_{j+1} - t_j)^2\\ &= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2\\ &= 2(t_{j+1} - t_j)^2 \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Q_\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Var}\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] = \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2\\ &\le \sum_{j=0}^{n-1} 2||\Pi||(t_{j+1} - t_j) = 2||\Pi||\,T\,. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\lim_{||\Pi||\to 0} \mathrm{Var}(Q_\Pi) = 0$. Međutim, $\mathrm{Var}(Q_\Pi) = \mathbb{E}[Q_\Pi - \mathbb{E}Q_\Pi]^2 = \mathbb{E}[Q_\Pi - T]^2$, otkud slijedi (4.12). □

Napomena 4.13 Iz gornjeg dokaza se vidi da je

$$\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = t_{j+1} - t_j$$

i

$$\mathrm{Var}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] = 2(t_{j+1} - t_j)^2\,.$$

Kada je $t_{j+1} - t_j$ malo, $(t_{j+1} - t_j)^2$ je *vrlo malo*, pa bismo mogli rezonirati da je $(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$, iako slučajno, s velikom vjerojatnošću blizu svoje sredine $t_{j+1} - t_j$. To bismo mogli zapisati kao

$$(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \approx t_{j+1} - t_j \,.$$

ili možda malo preciznije

$$\frac{(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j} \approx 1 \,.$$

Međutim, gornji izraz ne može biti približno jednak 1, budući da je

$$Y_{j+1} := \frac{W(t_{j+1}) - W(t_j)}{\sqrt{t_{j+1} - t_j}}$$

jedinična normalna slučajna varijabla (bez obzira koliko blizu bili t_j i t_{j+1}).

Uzmimo zbog jednostavnosti, $t_j = jT/n$. Tada je

$$(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = T \cdot \frac{Y_{j+1}^2}{n} \,.$$

Slučajne varijable $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ su nezavisne i jednako distribuirane, pa po zakonu velikih brojeva slijedi da $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{Y_{j+1}^2}{n}$ konvegira prema očekivanju $\mathbb{E}Y_{j+1}^2$ kada $n \to \infty$. To očekivanje je jednako 1, pa zaključujemo da $\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$ konvergira prema T. Dakle, iako članovi $(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$ te sume mogu biti vrlo različiti od svog očekivanja T/n, sumiranjem puno takvih članova razlike se usrednje i u limesu dobivamo T.

Od sada nadalje ćemo neformalno rezultat Teorema 4.12 pisati kao

$$dW(t)\, dW(t) = dt \,. \tag{4.15}$$

Budući da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[0, T_1]$ jednako T_1, a na intervalu $[0, T_2]$, $T_1 < T_2$, jednaka T_2, slijedi da je kvadratna varijacija Brownovog gibanja na intervalu $[T_1, T_2]$ jednaka $T_2 - T_1$. Brownovo gibanje akumulira $T_2 - T_1$ jedinica kvadratne varijacije na intervalu $[T_1, T_2]$. Budući da to vrijedi za svaki vremenski interval, možemo zaključiti:

> *Brownovo gibanje akumulira kvadratnu varijaciju po stopi jedan po jedinici vremena.*

To pišemo neformalno kao (4.15) gdje na desnoj strani pretpostavljamo da piše 1 ispred dt.

Napomena 4.14 Neka je $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ particija od $[0, T]$. Izračunajmo zajedničku varijaciju od $W(t)$ i t:

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j) = 0\,.$$

Zaista,

$$|(W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j)| \leq \max_{0\leq k\leq n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)|(t_{j+1} - t_j)\,,$$

te je

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j)\right| \leq \max_{0\leq k\leq n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)|T\,.$$

Budući da je W neprekidno, gornji maksimum teži u 0 kada $||\Pi|| \to 0$.

Na sličan način se pokazuje da je kvadratna varijacija od t također nula (vidi razmatranje nakon Definicije 4.11). Te dvije činjenice pišemo neformalno kao

$$dW(t)\,dt = 0, \quad dt\,dt = 0\,. \tag{4.16}$$

Definicija 4.15 *Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.* Geometrijsko Brownovo gibanje *je slučajni proces $S = (S(t),\, t \geq 0)$ definiran sa*

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma W(t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}\,.$$

Geometrijsko Brownovo gibanje služi kako model kretanja cijena dionica u Black-Scholes-Mertonovom modelu. Parametar σ ima interpretaciju *volatilnosti* i na financijskom tržištu je od velikog je značenja.

Neka su dani vremenski trenuci $0 \leq T_1 < T_2$, te pretpostavimo da opažamo geometrijsko Brownovo gibanje ("cijenu dionice") $S(t)$ za $T_1 \leq t \leq T_2$. Odaberimo particiju $T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T_2$ tog intervala. Promotrimo log-povrate

$$\log \frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)} = \sigma(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{j+1} - t_j)$$

na svakom podintervalu $[t_j, t_{j+1}]$. Suma kvadrata log-povrata, koja se ponekad zove realizirana volatilnost, je

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1}\left(\log\frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)}\right)^2 \\
&= \sigma^2\sum_{j=0}^{m-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^2+\left(\alpha-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\sum_{j=0}^{m-1}(t_{j+1}-t_j)^2 \\
&\quad +2\sigma\left(\alpha-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j)\,. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Pustimo $||\Pi|| \to 0$. Prvi član u gornjoj sumi konvergira prema $T_2 - T_1$, dok druga dva člana konvergiraju prema nuli. Zato je limes realizirane volatilnosti jednak $\sigma^2(T_2 - T_1)$. To znači da volatilnost možemo procijeniti pomoću formule

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{T_2-T_1}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\log\frac{S(t_{j+1})}{S(t_j)}\right)^2 .$$

4.4 Markovljevo svojstvo

U ovom odjeljku pokazat ćemo da Brownovo gibanje ima Markovljevo svojstvo. Kao prvi korak trebamo precizno definirati Markovljevo svojstvo za procese s neprekidnim parametrom. Ta definicija treba formalizirati intuitivno razumijevanje Markovljevog procesa kao onog čije ponašanje u budućnosti ovisi o prošlosti samo kroz sadašnje stanje.

Definicija 4.16 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$ filtracija. Adaptiran slučajni proces $X = (X(t),\, t \geq 0)$ je* Markovljev proces, *ako za sve $0 \leq s \leq t$ i za sve Borel-izmjerive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji Borel-izmjeriva funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$\mathbb{E}[f(X(t))\,|\,\mathcal{F}(s)] = g(X(s)) \quad g.s. \qquad (4.18)$$

Riječima, uvjetno na informaciju poznatu u trenutku s, svaka funkcija pozicije procesa X u trenutku $t \geq s$ je funkcija pozicije procesa X u trenutku s.

Za dokaz Markovljevog svojstva Brownovog gibanja trebat će nam sljedeća lema koju navodimo bez dokaza.

Lema 4.17 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosti prostor i neka je* $\mathcal{G}$ σ*-podalgebra od* $\mathcal{F}$*. Pretpostavimo da je slučajna varijabla* X $\mathcal{G}$*-izmjeriva, te da je slučajna varijabla* Y *nezavisna od* $\mathcal{G}$*. Neka je* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *Borelova funkcija i definirajmo*

$$g(x) = \mathbb{E}[h(x, Y)] .$$

Tada je

$$\mathbb{E}[h(X, Y) \,|\, \mathcal{G}] = g(X) \quad g.s.$$

Teorem 4.18 *Neka je* $W = (W(t),\, t \geq 0)$ *Brownovo gibanje, te neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$ *filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je* W *Markovljev proces.*

Dokaz: Neka je $0 \leq s \leq t$, te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Trebamo pokazati da postoji Borelova funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$\mathbb{E}[f(W(t)) \,|\, \mathcal{F}(s)] = g(W(s)) \quad g.s.$$

Vrijedi:

$$\mathbb{E}[f(W(t)) \,|\, \mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[f(W(s)+(W(t)-W(s))) \,|\, \mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[h(W(s), W(t)-W(s) \,|\, \mathcal{F}(s)] ,$$

gdje je $h(x, y) = f(x+y)$. Uočimo da je $W(s)$ $\mathcal{F}(s)$-izmjeriva, a $W(t)-W(s)$ nezavisna od $\mathcal{F}(s)$. Po Lemi 4.17 imamo

$$\mathbb{E}[f(W(t)) \,|\, \mathcal{F}(s)] = g(W(s)) \;\; g.s.,$$

gdje je

$$g(x) = \mathbb{E}[h(x, W(t) - W(s))] = \mathbb{E}[f(x + (W(t) - W(s))] .$$

To dokazuje Markovljevo svojstvo. Štoviše, g možemo točno izračunati. Zaista , $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ otkud slijedi

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w + x) e^{-\frac{w^2}{2(t-s)}} \, dw . \tag{4.19}$$

□

Zamjenom varijabli $\tau = t - s$ i $y = w + x$ u formuli (4.19) dobivamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}} \, dy .$$

Definirajmo *prijelaznu gustoću* $p(\tau, x, y)$ Brownovog gibanja formulom

$$p(\tau, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}.$$

Tada (4.19) možemo napisati kao

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(\tau, x, y)\, dy\,,$$

i konačno

$$\mathbb{E}[f(W(t)) \,|\, \mathcal{F}(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)p(\tau, W(s), y)\, dy\,.$$

4.5 Distribucija vremena prvog prijelaza

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Definirajmo *vrijeme prvog prijelaza* nivoa x sa

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 \,:\, W(t) = x\}\,.$$

U ovom odjeljku izračunat ćemo distribuciju tog slučajnog vremena. Vrijeme prvog prijelaza je vrijeme zaustavljanja u smislu da za sve $t \geq 0$ vrijedi $\{\tau_x \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$ (ovdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$ filtracija za Brownovo gibanje). U tom računu trebat će nam teorem o opcionalnom zaustavljanju koji navodimo bez dokaza.

Teorem 4.19 *(Teorem o opcionalnom zaustavljanju) Neka je* $M = (M(t),\, t \geq 0)$ *martingal, te neka je* τ *vrijeme zaustavljana. Tada je zaustavljen proces* $M^\tau = (M(t \wedge \tau),\, t \geq 0)$ *opet martingal.*

Neka je $\sigma > 0$. Promotrimo sljedeći slučajni proces koji će biti od fundamentalnog značenja:

$$Z(t) = \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}\,. \tag{4.20}$$

Teorem 4.20 *(Eksponencijalni martingal) Neka je* $W = (W(t),\, t \geq 0)$ *Brownovo gibanje s filtracijom* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}(t),\, t \geq 0)$*, te neka je* $\sigma > 0$*. Slučajni proces* Z *definiran s (4.20) je martingal.*

Dokaz: Proces Z je očito adaptiran. Integrabilnost slučajne varijable $Z(t)$ slijedi iz formule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp\{\sigma W(t)\}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy \\ &= \exp\{\frac{1}{2}\sigma^2 t\}\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pokazujemo svojstvo (iii). Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada je

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[Z(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \middle| \, \mathcal{F}(s)\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[\exp\{\sigma(W(t) - W(s)\} \cdot \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \middle| \, \mathcal{F}(s)\right] \\ = \; & \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \mathbb{E}\left[\exp\{\sigma(W(t) - W(s)\} | \mathcal{F}(s)\right] \\ = \; & \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \mathbb{E}[\exp\{\sigma(W(t) - W(s)\}] \end{aligned}$$

Budući da je $W(t) - W(s)$ jednako distribuirano kao i $W(t-s)$, iz formule (4.21) slijedi

$$\mathbb{E}[\exp\{\sigma(W(t) - W(s)\}] = \exp\{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\}\,.$$

Uvrstimo li gore dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(t) \,|\, \mathcal{F}(s)] &= \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right\}\,, \\ &= \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right\} \\ &= Z(s)\,. \end{aligned}$$

□

Zaustavimo eksponencijalni martingal Z u vremenu prvog prijelaza τ_x. Zaustavljen proces je po teoremu o opcionalnom zaustavljanju opet martingal pa vrijedi

$$1 = Z(0) = \mathbb{E}[Z(t \wedge \tau_x)] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma W(t \wedge \tau_x) - \frac{1}{2}\sigma^2 (t \wedge \tau_x)\right\}\right]\,. \tag{4.22}$$

Pretpostavimo da je $x > 0$. Do trenutka τ_x se Brownovo gibanje nalazi ispod x, odnosno, $W(t \wedge \tau_x) \le x$. Zato je

$$0 \le \exp\{\sigma W(t \wedge \tau_x)\} \le e^{\sigma x}\,.$$

Ako je $\tau_x < \infty$, tada je $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_x)\} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\}$ za velike t. S druge strane, ako je $\tau_x = \infty$, tada je $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_x)\} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t\} \to 0$ za $t \to \infty$. To možemo zapisati na sljedeći način:

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\,.$$

Nadalje, ako je $\tau_x < \infty$, tada je $\lim_{t\to\infty} \exp\{\sigma W(t \wedge \tau_x)\} = \exp\{\sigma W(\tau_x)\} = \exp\{\sigma x\}$. Ako je $\tau_x = \infty$, tada je $\exp\{\sigma W(t \wedge \tau_x)\} \le \exp\{\sigma x\}$ za sve $t \ge 0$. Međutim, to povlači da je na $\{\tau_x = \infty\}$,

$$\limsup_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma W(t \wedge \tau_x) - \frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_x)\right\} \le e^{\sigma x} \limsup_{t\to\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_x)\right\} = 0\,.$$

Zato je

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{\sigma W(t \wedge \tau_x) - \frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_x)\right\} = 1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\,.$$

Sada možemo pustiti $t \to \infty$ u formuli (4.22), te dobivamo

$$1 = \mathbb{E}\left[1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right]\,,$$

(ovdje smo koristili Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji), odnosno ekvivalentno,

$$\mathbb{E}\left[1_{\{\tau_x<\infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}\,. \tag{4.23}$$

Gornja jednakost vrijedi za sve $\sigma > 0$. Pustimo $\sigma \to 0$. Upotrebom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $\mathbb{E}[1_{\{\tau_x<\infty\}}] = 1$, t.j.,

$$\mathbb{P}(\tau_x < \infty) = 1\,. \tag{4.24}$$

Sada kada znamo da je τ_x konačan gotovo sigurno, možemo ga maknuti iz formule (4.23) i dobiti

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_x\right\}\right] = e^{-\sigma x}\,. \tag{4.25}$$

Iz te formule možemo lagano dokazati sljedeći teorem.

Teorem 4.21 *Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je prvo vrijeme prijelaza nivoa x konačno gotovo sigurno. Nadalje, Laplaceova transformacija distribucije od τ_x je*

$$\mathbb{E}e^{-\alpha\tau_x} = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0\,. \tag{4.26}$$

Dokaz: Promatrajmo prvo slučaj $x > 0$. Stavimo li $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ u (4.25), dobivamo formulu (4.26). Za $x < 0$, formula slijedi iz simetrije Brownovog gibanja. □

Deriviramo li formulu (4.26) po α dobivamo

$$\mathbb{E}[\tau_x e^{-\alpha\tau_x}] = \frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0\,.$$

Pustimo li $\alpha \downarrow 0$ slijedi $\mathbb{E}[\tau_x] = \infty$, $x \neq 0$.

Neka F označava funkcije distribucije od τ_x. Uočite da je $F(t) = 0$ za $t \leq 0$. Formula (4.26) može se zapisati kao

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dF(t) = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0\,.$$

Direktnim računanjem može se pokazati da vrijedi sljedeća formula:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dt = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}, \quad \alpha > 0\,.$$

Uspoređivanjem posljednje dvije formule slijedi da je funkcija distribucije F apsolutno neprekidna s funkcijom gustoće

$$f_{\tau_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\,.$$