Poglavlje 3

Problem optimalnog zaustavljanja i američke opcije

3.1 Vrijeme zaustavljanja

Kao i u prethodnom poglavlju, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diskretni vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Pretpostavit ćemo da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka je, nadalje, dana filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$. Ne pretpostavljamo da nužno vrijedi $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega)$, niti $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definicija 3.1 *Slučajna varijabla* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, T\}$ *zove se* vrijeme zasutavljanja *ako za svaki* $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ *vrijedi*

$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Napomena 3.2 *Uočite da je po definiciji slučajna varijabla* τ *vrijeme zaustavljanja, ako događaj* $\{\tau \le t\}$ *ovisi samo o informaciji dostupnoj do trenutka* t*. Drugim riječima, u trenutku* t *znamo da li se vrijeme* τ *već dogodilo ili ne. Jednostavno se vidi da je uvjet iz definicije ekvivalentan sljedećem uvjetu: za svaki* $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ *vrijedi*

$$\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Neka je $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. *Slučajni proces zaustavljen u vremenu* τ, u oznaci $X^\tau = (X_t^\tau\,,\, 0 \le t \le T)$ definiran je formulom

$$X_t^\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)\wedge t}(\omega)\,,$$

odnosno preciznije, na skupu $\{\tau = s\}$ vrijedi

$$X_t^\tau = \begin{cases} X_s & \text{ako je } s \le t \\ X_t & \text{ako je } s > t \end{cases}$$

Uočimo da je uvijek $X_T^\tau = X_\tau$.

Propozicija 3.3 *Neka je $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $X^\tau = (X_t^\tau\,,\, 0 \le t \le T)$ također adaptiran. Ako je X martingal (odnosno supermartingal), tada je i X^τ također martingal (odnosno supermartingal).*

Dokaz: Za dokaz adaptiranosti primjetimo prvo da za Borelov skup $A \subset \mathbb{R}$ vrijedi

$$(X_s \in A, \tau = s) \in \mathcal{F}_s$$

(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_s$), te

$$(X_t \in A, \tau > t) \in \mathcal{F}_t$$

(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_t$). Zato je

$$\begin{aligned} (X_t^\tau \in A) &= \cup_{s=0}^T (X_t^\tau \in A, \tau = s) \\ &= \cup_{s=0}^t (X_s \in A, \tau = s) \bigcup \cup_{s=t+1}^T (X_t \in A, \tau = s) \\ &= \cup_{s=0}^t (X_s \in A, \tau = s) \cup (X_t \in A, \tau > t) \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

po gore pokazanom.

Definirajmo proces $\phi = (\phi_t\,,\, 1 \le t \le T)$ formulom

$$\phi_t := 1_{\{t \le \tau\}}\,,$$

(dakle, ϕ je jednak 1 do vremena τ, a nakon toga je nula). Uočimo da je $\{t \le \tau\} = \{\tau < t\}^c = \{\tau \le t-1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$ (zbog τ vrijeme zaustavljanja). To znači da je slučajni proces ϕ predvidiv. Nadalje, za $1 \le t \le T$ vrijedi

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{s=1}^t \phi_s (X_s - X_{s-1}) &= X_0 + \sum_{s=1}^t 1_{(s \le \tau)} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_0 + \sum_{s=1}^{t \wedge \tau} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_{t \wedge \tau} = X_t^\tau\,. \end{aligned}$$

Dakle, zaustavljen proces X^τ je martingalna transformacija procesa X pomoću predvidivog procesa ϕ. Sada tvrdnja slijedi iz Propozicije 2.16. $\square$

3.2 Snellov omotač i optimalno zaustavljanje

Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces. Definiramo slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T\,, \\ U_t &= \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) \quad 0 \le t \le T-1\,. \end{aligned}$$

Po Propoziciji 2.31, U je najmanji supermartingal koji dominira proces Z. Slučajni proces $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ zovemo *Snellov omotač* od $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$.

Uočimo da je $U_t \ge Z_t$ za sve t i u slučaju stroge nejednakosti vrijedi $U_t = \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]$. To sugerira da se pogodnim zaustavljanjem procesa U može dobiti martingal.

Propozicija 3.4 *Slučajna varijabla definirana formulom*

$$\tau_0 := \min\{t \ge 0\,, U_t = Z_t\}$$

je vrijeme zaustavljanja. Zaustavljen proces $U^{\tau_0} = (U_{t\wedge\tau_0}\,,\, 0 \le t \le T)$ *je martingal.*

Dokaz: Zbog $U_T = Z_T$ slijedi da je τ_0 dobro definiran i $\tau_0 \in \{0, 1, \ldots, T\}$. Nadalje, $\{\tau_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$, a za $t \ge 1$

$$\{\tau_0 = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \cdots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t\,.$$

Dakle, τ_0 je vrijeme zaustavljanja.

Zapišimo zaustavljen proces kao u dokazu Propozicije 3.3:

$$U_t^{\tau_0} = U_{t\wedge\tau_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta U_j$$

gdje je $\phi_j = 1_{\{\tau_0 \ge j\}}$. Slijedi da je za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = \phi_{t+1}(U_{t+1} - U_t) = 1_{\{t+1 \le \tau_0\}}(U_{t+1} - U_t)\,.$$

Po definiciji je $U_t = \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])$, te na skupu $\{t+1 \le \tau_0\}$ vrijedi $U_t > Z_t$. Dakle, $U_t = \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]$, pa slijedi

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = 1_{\{t+1 \le \tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])\,.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje obje strane:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t \,|\, \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[1_{\{t+1\le\tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1\le\tau_0\}}\mathbb{E}[U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]] = 0\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi zbog $\{t+1 \le \tau_0\} = \{\tau_0 \le t\}^c \in \mathcal{F}_t$. Dakle, $\mathbb{E}[U^{\tau_0}_{t+1} - U^{\tau_0}_t \,|\, \mathcal{F}_t] = 0$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. □

Označimo sa $\mathcal{T}_{t,T}$ familiju svih vremena zaustavljanja koja primaju vrijednosti u skupu $\{t, t+1, \ldots, T\}$. Uočimo da zbog Ω konačan skup slijedi da je i $\mathcal{T}_{t,T}$ također konačan skup.

Korolar 3.5 *Vrijeme zaustavljanja τ_0 zadovoljava*

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

Dokaz: Budući da je U^{τ_0} martingal, vrijedi

$$U_0 = U^{\tau_0}_0 = \mathbb{E}[U^{\tau_0}_T\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

S druge strane, za sve $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$, iz Propozicije 3.3 slijedi da je U^σ supermartingal. Dakle,

$$U_0 \ge \mathbb{E}[U^\sigma_T\,|\,\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0] \ge \mathbb{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_0]\,.$$

□

Ukoliko o slučajnom procesu Z mislimo kao o dobitku (Z_t je dobitak u trenutku t), tada nam Korolar 3.5 kaže da vrijeme zaustavljanja τ_0 maksimizira očekivani dobitak uz dano $\mathcal{F}_0$. Ako je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je

$$U_0 = \mathbb{E}[Z_{\tau_0}] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma]\,.$$

Napomena 3.6 *Poopćenje Korolara 3.5 daje*

$$U_t = \mathbb{E}[Z_{\tau_t}\,|\,\mathcal{F}_t] = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma\,|\,\mathcal{F}_t]\,,$$

gdje je $\tau_t := \min\{j \ge t\,,\, U_j = Z_j\}$.

Definicija 3.7 *Vrijeme zaustavljanja τ je* optimalno *za slučajni proces $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0]\,.$$

Po Korolaru 3.5, τ_0 je optimalno vrijeme zaustavljanja za Z.

Teorem 3.8 *(Karakterizacija optimalnih vremena) Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno ako i samo ako vrijedi:*

$$Z_\tau = U_\tau \quad i \quad U^\tau \text{ je martingal.} \tag{3.1}$$

Napomena 3.9 *Zbog $\tau_0 = \min\{t \ge 0\,,\, U_t = Z_t\}$, slijedi da je τ_0 najmanje optimalno vrijeme.*

Dokaz: Pretpostavimo da vrijedi (3.1). Tada je $U_0 = \mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]$. Međutim, po Korolaru 3.5,

$$U_0 = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0]\,.$$

Dakle, τ je optimalno vrijeme zaustavljanja.

Obratno, pretpostavimo da je τ optimalno. Tada je

$$\begin{aligned} U_0 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[Z_\sigma \,|\, \mathcal{F}_0] \quad \text{(po Korolaru 3.5)} \\ &= \mathbb{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \quad (\text{zbog } \tau \text{ optimalno}) \\ &\le \mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \\ &\le U_0 \quad (\text{zbog } U \text{ supermartingal}) \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Z_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]$, pa zbog $U_\tau \ge Z_\tau$, slijedi $U_\tau = Z_\tau$. Nadalje,

$$\mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = U_0 \ge \mathbb{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] \ge \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[U_\tau \,|\, \mathcal{F}_0]\,,$$

gdje nejednakosti vrijede zbog U supermartingal. Budući da su lijeva i desna strana gore jednake, imamo jednakost

$$\mathbb{E}[U_t^\tau \,|\, \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_0]\,.$$

Budući da je $U_t^\tau \ge \mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$ (zbog U^τ supermartingal), iz gornje jednakosti uvjetnih očekivanja ta dva izraza slijedi $U_t^\tau = \mathbb{E}[U_T^\tau \,|\, \mathcal{F}_t]$. Međutim, to znači da je U^τ martingal. $\square$

Sada želimo karakterizirati najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. U karakterizaciji tog optimalnog vremena koristit ćemo se vrlo važnom dekompozicijom supermartingala. Prvo nam je potrebna definicija neopadajućeg procesa.

Definicija 3.10 *Slučajni proces* $A = (A_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ *je* neopadajući *ako za sve* $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ *vrijedi* $A_t \leq A_{t+1}$.

Propozicija 3.11 *(Doobova dekompozicija) Neka je* $U = (U_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ *supermartingal. Tada postoje martingal* $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ *i neopadajući, predvidiv proces* $A = (A_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$, $A_0 = 0$, *takvi da vrijedi* $U = M - A$. *Nadalje, gornja dekompozicija je jedinstvena.*

Dokaz: Definiramo $A_0 = 0$ i $M_0 = U_0$, te induktivno za $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= M_t + U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ A_{t+1} &= A_t + U_t - \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tada je

$$\mathbb{E}[M_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = M_t\,,$$

što znači da je $M = (M_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ martingal. Nadalje, zbog $E[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] \leq U_t$, slijedi da je $A_{t+1} \geq A_t$. Iz definicije je vidljivo da je A_{t+1} izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle, $A = (A_t\,,\, 0 \leq t \leq T)$ je neopadajući predvidiv proces sa $A_0 = 0$.

Očito je $U_0 = M_0 - A_0$. Pretpostavimo $U_t = M_t - A_t$. Tada je

$$\begin{aligned} M_{t+1} - A_{t+1} &= (M_t + U_{t+1} - \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) - (A_t + U_t - \mathbb{E}[U_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]) \\ &= M_t + U_{t+1} - A_t - U_t = U_{t+1}\,. \end{aligned}$$

Time smo dokazali i dekompoziciju.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da su $U = M - A = M' - A'$ dvije dekompozicije. Tada je

$$M_t - M'_t = A_t - A'_t\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,.$$

Zbog $A_0 = 0 = A'_0$ slijedi $M_0 = M'_0$. Pretpostavimo $A_t = A'_t$, otkud odmah dobivamo $M_t = M'_t$. Zato je

$$0 = M_t - M'_t = \mathbb{E}[M_{t+1} - M'_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[A_{t+1} - A'_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = A_{t+1} - A'_{t+1}\,,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz predvidivosti proces A i A'. Dakle, $A_{t+1} = A'_{t+1}$. □

Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ slučajni proces, te neka je $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ njegov Snellov omotač. Najveće optimalno vrijeme zaustavljanja procesa Z može se karakterizirati pomoću neopadajućeg procesa A iz Doobove dekompozicije supermartingala U.

Propozicija 3.12 *Najveće optimalno vrijeme slučajnog procesa Z dano je formulom*

$$\tau_{\max} = \begin{cases} T & \textit{ako je } A_T = 0 \\ \min\{t \ge 0\,,\, A_{t+1} \ne 0\} & \textit{ako } A_T \ne 0\,. \end{cases}$$

Dokaz: Budući da je A predvidiv, $\tau_{\max}$ je vrijeme zaustavljanja. Uočimo da vrijedi $A_t = 0$ za sve $t \le \tau_{\max}$. Zato iz $U_t = M_t - A_t$ za sve t slijedi $U^{\tau_{\max}} = M^{\tau_{\max}}$. Budući da je M martingal, to je i $M^{\tau_{\max}}$ martingal, pa je $U^{\tau_{\max}}$ također martingal. Po Teoremu 3.8 je stoga za optimalnost vremena $\tau_{\max}$ dovoljno pokazati da je $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} U_{\tau_{\max}} &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} U_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} U_T \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]) + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T\,. \end{aligned}$$

Primjetimo da na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$ vrijedi $A_t = 0$ i $A_{t+1} > 0$. Stoga je na tom događaju $U_t = M_t - A_t = M_t$, te nadalje,

$$\mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_{t+1} - A_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t] = M_t - A_{t+1} < M_t = U_t\,.$$

Zbog gornje jednakosti i definicije $U_t = \max(Z_t, \mathbb{E}[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t])$, slijedi da je $U_t = Z_t$ na događaju $\{\tau_{\max} = t\}$. Dakle

$$U_{\tau_{\max}} = \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{\tau_{\max}=t\}} Z_t + 1_{\{\tau_{\max}=T\}} Z_T = Z_{\tau_{\max}}\,.$$

Preostaje pokazati da je $\tau_{\max}$ najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. Pretpostavimo da je τ vrijeme zaustavljanja takvo da je $\mathbb{P}(\tau > \tau_{\max}) > 0$. Za

$\omega \in \Omega$ takav da je $\tau(\omega) > \tau_{\max}(\omega)$ vrijedi $A_\tau(\omega) > 0$. Zato je i $\mathbb{P}(A_\tau > 0) > 0$ otkud slijedi da je $\mathbb{E}[A_\tau] > 0$. Sada imamo

$$\mathbb{E}[U_\tau] = \mathbb{E}[M_\tau] - \mathbb{E}[A_\tau] < \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[U_0]\,,$$

što znači da U^τ nije martingal. Po Teoremu 3.8, τ nije optimalno vrijeme. □

Na kraju ovog odjeljka izračunat ćemo Snellov omotač u slučaju kada je proces Z funkcija Markovljevog lanca. Prvo ćemo dati definiciju Markovljevog lanca $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ na filtriranom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ filtracija. Pretpostavit ćemo da X prima vrijednosti u prebrojivom skupu E, te da je P neka prijelazna matrica.

Definicija 3.13 *Slučajni proces $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ s vrijednostima u E je* homogen Markovljev lanac *u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ s prijelaznom matricom P, ako je X adaptiran u odnosu na $\mathbb{F}$, te ako za svaku funkciju $f : E \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[f(X_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t] = Pf(X_t)\,, \qquad \text{za sve } t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}\,. \tag{3.3}$$

Ovdje je $Pf : E \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$Pf(x) := \sum_{y \in E} P(x, y) f(y)\,.$$

Pretpostavimo da je filtracija $\mathbb{F}$ prirodna filtracija procesa X. Tada su događaji u $\mathcal{F}_t$ oblika $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$, $x_0, x_1, \ldots, x_t \in E$. Za specijalnu funkciju f oblika $f = 1_{\{z\}}$, $z \in E$, iz formule (3.3) i definicije uvjetnog očekivanja slijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1}) \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] 1_{\{X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}} \\
&= \mathbb{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1}) \,|\mathcal{F}_t] 1_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}} \\
&= P1_{\{z\}}(X_t) 1_{\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}}\,.
\end{aligned}$$

To znači da na događaju $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[1_{\{z\}}(X_{t+1}) \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P1_{\{z\}}(X_t)\,.$$

Budući da je

$$P1_{\{z\}}(x) = \sum_{y\in E} P(x,y)1_{\{z\}}(y) = P(x,z)\,,$$

slijedi da je na događaju $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t\}$

$$\mathbb{P}[X_{t+1} = z \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P(X_t, z) = P(x_t, z)\,.$$

To znači da za sve $x_0, x_1, \ldots, x_t, z \in E$ vrijedi

$$\mathbb{P}[X_{t+1} = z \,|\, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t] = P(x_t, z)\,,$$

šo je klasična definicija Markovljevog svojstva.

Propozicija 3.14 *Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ adaptiran slučajni proces definiran formulom*

$$Z_t = \psi(t, X_t)\,,$$

gdje je $X = (X_t\,,\, 0 \le t \le T)$ homogen Markovljev lanaca s vrijednostima u E i prijelaznom matricom P, a $\psi : \{0, 1, \ldots, T\} \times E \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada je Snellov omotač U procesa Z dan formulom

$$U_t = u(t, X_t)\,,$$

gdje je $u : \{0, 1, \ldots, T\} \times E \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$\begin{aligned} u(T,x) &:= \psi(T,x)\,, \\ u(t,x) &:= \max(\psi(t,x), Pu(t+1,x))\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1\,. \end{aligned}$$

Dokaz: Stavimo $V_t := u(t, X_t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Tada je

$$V_T = u(T, X_T) = \psi(T, X_T) = Z_T\,,$$

te za $t \le T-1$,

$$\begin{aligned} V_t &= u(t, X_t) = \max(\psi(t, X_t), Pu(t+1, X_t)) \\ &= \max(Z_t, \mathbb{E}[u(t+1, X_{t+1}) \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= \max(Z_t, \mathbb{E}[V_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t]\,. \end{aligned}$$

U drugoj jednakosti koristili smo formulu (3.3) za funkciju $f(\cdot) = u(t+1, \cdot)$. Zbog $U_T = Z_T = V_T$, indukcijom slijedi $U_t = V_t$, $t \le T-1$. $\square$

3.3 Primjena na američke opcije

U ovom odjeljku vraćamo se na model potpunog tržišta bez arbitraže kakav smo promatrali u 2.3. Preciznije, dan je (konačan) filtrirani vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Na financijskom tržištu imamo $d+1$ financijsku imovinu čije su cijene $S^i = (S^i_t\,,\, 0 \le t \le T)$ adaptirani slučajni procesi. Budući da je tržište bez arbitraže i potpuno, postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera koju označavamo s $\mathbb{P}^*$. To znači da su diskontirane cijene financijskih imovina $\tilde{S}^i = (\tilde{S}^i_t\,,\, 0 \le t \le T)$, $i = 1, 2, \ldots, d$, martingali s obzirom na $\mathbb{P}^*$.

Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ američka opcija. Vrijednost američke opcije dana je slučajnim nizom $U = (U_t\,,\, 0 \le t \le T)$ izračunatim u odjeljku 2.4:

$$
\begin{aligned}
U_T &= Z_T\,,\\
U_t &= \max\left(Z_t, S^0_t\,\mathbb{E}^*\left[\tfrac{U_{t+1}}{S^0_{t+1}} \,|\, \mathcal{F}_t\right]\right)\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,.
\end{aligned}
$$

Kao što smo već prije vidjeli, $U_t \ge Z_t$. Vrijednost Z_t zovemo *unutarnja vrijednost opcije* (engl. *intrinsic value*), dok razliku $U_t - Z_t$ zovemo *vremenska vrijednost opcije* (engl. *time value*). Dakle, vrijednost američke opcije u trenutku t jednaka je zbroju unutarnje vrijednosti i vremenske vrijednosti.

Niz $\tilde{U} = (\tilde{U}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ diskontiranih cijena opcije definiran formulom $\tilde{U}_t = U_t / S^0_t$ zadovoljava

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_T &= \tilde{Z}_T\,,\\
\tilde{U}_t &= \max(\tilde{Z}_t, \mathbb{E}^*[\tilde{U}_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t])\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,.
\end{aligned}
$$

Dakle, slučajni proces $\tilde{U} = (\tilde{U}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ je Snellov omotač slučajnog procesa $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_t\,,\, 0 \le t \le T)$ (s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$). Iz Napomene (3.6) slijedi

$$\tilde{U}_t = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t]\,,$$

otkud

$$U_t = S^0_t \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}^*\left[\frac{Z_\sigma}{S^0_\sigma} \,|\, \mathcal{F}_t\right]\,. \tag{3.4}$$

Primjenimo Doobovu dekompoziciju na $\mathbb{P}^*$-supermartingal $\tilde{U}$. Vrijedi $\tilde{U} = \tilde{M} - \tilde{A}$, gdje je $\tilde{M}$ $\mathbb{P}^*$-martingal, a $\tilde{A}$ je neopadajući proces. Budući da je tržište potpuno, postoji samofinancirajuća strategija ϕ takva da je

$V_T(\phi) = S_T^0 \tilde{M}_T$ (slučajni zahtjev $S_T^0 \tilde{M}_T$ je dostižan), odnosno nakon diskontiranja, $\tilde{V}_T(\phi) = \tilde{M}_T$. Budući da je slučajni niz $(\tilde{V}_t(\phi)\,,\, 0 \le t \le T)$ $\mathbb{P}^*$-martingal (vidi dokaz Teorema 2.21), vrijedi

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi) \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\tilde{M}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \tilde{M}_t \,.$$

Dakle, martingal $\tilde{M}$ jednak je procesu diskontiranih vrijednosti portfelja ϕ koji replicira slučajni zahtjev $S_T^0 \tilde{M}_T$. Specijalno imamo $\tilde{U}_t = \tilde{V}_t(\phi) - \tilde{A}_t$, otkud slijedi

$$U_t = V_t(\phi) - A_t \,, \tag{3.5}$$

gdje smo definirali $A_t := S_t^0 \tilde{A}_t$. Gornja formula kaže da je cijena U_t američke opcije jednaka vrijednosti (nekog) portfelja minus nešto nenegativno.

Promotrimo detaljnije što nam kaže formula (3.5) s pozicije pisca opcije. Pisac opcije prodaje američku opciju $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ u trenutku $t = 0$ za njenu vrijednost U_0. Iz (3.5) prvo slijedi da je $U_0 = V_0(\phi)$ za neki portfelj ϕ. Pisac opcije kupuje u trenutku $t = 0$ samofinancirajući portfelj ϕ po cijeni U_0 (upravo za koliko je prodao američku opciju Z). U svakom daljnjem trenutku pisac slijedi strategiju ϕ, što mu u trenutku t vrijedi $V_t(\phi)$. Iz formule (3.5) vidimo da je $V_t(\phi) \ge U_t$, a s druge strane, $U_t \ge Z_t$. Dakle, $V_t(\phi) \ge Z_t$, za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. To znači da pisac opcije u svakom trenutku t može pokriti obvezu koja izlazi iz američke opcije Z. Štoviše, ako kupac opcije odluči iskoristiti opciju u trenutku t u kojem je $Z_t < V_t(\phi)$, pisac opcije ostvaruje profit od $V_t(\phi) - Z_t > 0$. Očito je da takav trenutak t ne bi smio biti optimalan za iskoristiti opciju, jer bismo u protivnom imali arbitražu.

Pronađimo sada optimalno vrijeme za iskoristiti opciju. To će biti vrijeme zaustavljanja iz skupa svih vremena zaustavljanja $\mathcal{T}_{0,T}$. Za kupca opcije besmisleno je iskoristiti opciju u trenutku t u kojem je $U_t > Z_t$, jer je tada vrijednost opcije U_t veća od njene unutarnje vrijednosti Z_t (što znači da je bolje prodati opciju za U_t nego ju iskoristiti i dobiti Z_t - vremenska vrijednost opcije veća je od nule). Dakle, optimalno vrijeme τ mora zadovoljavati $U_\tau = Z_\tau$. Najmanje takvo vrijeme je

$$\tau_0 = \min\{t \ge 0\,,\, U_t = Z_t\} \,.$$

S druge strane, nema smisla iskoristiti opciju nakon vremena

$$\tau_{\max} = \min\{t \ge 0\,,\, \tilde{A}_{t+1} \ne 0\} = \min\{t \ge 0\,,\, A_{t+1} \ne 0\} \,.$$

Zaista, ako kupac opcije iskoristi opciju u trenutku $\tau_{\max}$ (uočimo da je tada $U_{\tau_{\max}} = Z_{\tau_{\max}}$ - vidi Propoziciju 3.12 i njen dokaz), tada će dobiti iznos $U_{\tau_{\max}}$ koji je jednak $V_{\tau_{\max}}(\phi)$ (zbog $A_{\tau_{\max}} = 0$). Za tu vrijednost kupac opcije može kupiti portfelj ϕ, te slijedivši tu strategiju ϕ, generira bogatstvo koje je u trenucima $\tau_{\max}+1, \tau_{\max}+2, \ldots, T$ striktno veće nego vrijednost opcije u tim trenucima: $V_t(\phi) = U_t + A_t > U_t$, $t = \tau_{\max}+1, \tau_{\max}+2, \ldots, T$. Dakle, iskorištenje opcije nakon trenutka $\tau_{\max}$ generira manju vrijednost nego iskorištenje opcije u trenutku $\tau_{\max}$ i slijeđenje strategije ϕ.

Dakle, drugi uvjet na optimalno vrijeme za iskoristiti opciju je $\tau \le \tau_{\max}$. Dakle, za optimalno vrijeme τ vrijedi $\tau_0 \le \tau \le \tau_{\max}$, te $A^\tau = 0$. Iz $\tilde{U} = \tilde{M} - \tilde{A}$, dobivamo $\tilde{U}^\tau = \tilde{M}^\tau$, što znači da je $\tilde{U}^\tau$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Usporedimo li s Teoremom 3.8, vidimo da su optimalna vremena za iskoristiti opciju vremena optimalna za slučajni niz $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_t\,,\, 0 \le t \le T)$.

Vratimo se još jednom na poziciju pisca opcije koji se štiti prateći strategiju ϕ. Ako kupac iskoristi opciju u trenutku σ koje nije optimalno, tada je ili $U_\sigma > Z_\sigma$, ili $A_\sigma > 0$. U prvom slučaju pisac ima profit $V_\sigma(\phi) - Z_\sigma = (3.5) = U_\sigma + A_\sigma - Z_\sigma > 0$ (zbog $U_\sigma > Z_\sigma$), a u drugom slučaju profit je opet $V_\sigma(\phi) - Z_\sigma = U_\sigma + A_\sigma - Z_\sigma > 0$ (ovaj put zbog $A_\sigma > 0$).

Rezimirajmo gornja razmatranja u sljedećem teoremu.

Teorem 3.15 *Neka je $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ američka opcija. Vrijeme zaustavljanja τ optimalno je za iskoristiti opciju Z ako i samo ako vrijedi:*

$$\tilde{Z}_\tau = \tilde{U}_\tau \quad i \quad \tilde{U}^\tau \text{ je } \mathbb{P}^*\text{-martingal.}$$

Promotrimo sada detaljnije vezu između američke opcije $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$ i europske opcije dane slučajnim zahtjevom $C = Z_T$.

Propozicija 3.16 *Neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije $Z = (Z_t\,,\, 0 \le t \le T)$, te neka je C_t vrijednost u trenutku t europske opcije dane slučajnim zahtjevom $C = Z_T$. Tada vrijedi $U_t \ge C_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Nadalje, ako je $C_t \ge Z_t$ za svaki t, tada je $U_t = C_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$.*

Dokaz: Budući da je diskontirani proces $\tilde{U}$ $\mathbb{P}^*$-supermartingal, vrijedi

$$\tilde{U}_t \ge \mathbb{E}^*[\tilde{U}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\tilde{C}_T \,|\, \mathcal{F}_t] = \tilde{C}_t$$

što dokazuje prvu tvrdnju.

Pretpostavimo da je $C_t \ge Z_t$ za svaki t. Slijedi da je $\tilde{C} \ge \tilde{Z}$, t.j. $\tilde{C}$ dominira $\tilde{Z}$. Budući da je $\tilde{C} = (\tilde{C}_t\,,\, 0 \le t \le T)$- $\mathbb{P}^*$-martingal, to je $\tilde{C}$

ujedno i $\mathbb{P}^*$-supermartingal. Međutim, $\tilde{U}$ je Snellov omotač niza $\tilde{Z}$, dakle najmanji $\mathbb{P}^*$-supermartingal koji dominira $\tilde{Z}$. Zato je $\tilde{U} \leq \tilde{C}$, što dokazuje i drugu tvrdnju. □

Promotrimo sada američku call opciju na prvu financijsku imovinu sa cijenom izvršenja K. Tada je $Z_t = (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Neka je, kao i do sada, C_t vrijednost u trenutku t europske call opcije $(S_T^1 - K)^+$, te neka je U_t vrijednost u trenutku t američke opcije. Vrijedi

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= (1+r)^{-T}\mathbb{E}^*[(S_T^1 - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T})^+ \mid \mathcal{F}_t] \\ &\geq \mathbb{E}^*[\tilde{S}_T^1 - K(1+r)^{-T} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \tilde{S}_t^1 - K(1+r)^{-T} . \end{aligned}$$

Pomnožimo obje strane s $S_t^0 = (1+r)^t$. Slijedi

$$C_t \geq S_t^1 - K(1+r)^{-T+t} \geq S_t^1 - K$$

uz strogu nejednakost za $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Zbog $C_t \geq 0$, dobivamo $C_t \geq (S_t^1 - K)^+ = Z_t$. Iz Propozicije 3.16 slijedi da je $C_t = U_t$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Dakle, **američka call opcija vrijedi jednako kao i europska call opcija.**

Napomena 3.17 *Isti račun za put opciju $Z_t := (K - S_t^1)^+$ daje*

$$P_t \geq K(1+r)^{-T+t} - S_t^1$$

i ne možemo zaključiti $P_t \geq K - S_t^1$. Općenito, američka put opcija vrijedi više od europske put opcije.

Izračunajmo, na kraju, optimalno vrijeme za iskoristiti američku call opciju. Iz $U_t = C_t$ slijedi $\tilde{U}_t = \tilde{C}_t$, te je stoga $\tilde{U}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Zbog $\tilde{U} = \tilde{V}(\phi) - \tilde{A}$ slijedi $\tilde{A} = 0$, odnosno $A_t = 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. To znači da je $\tau_{\max} = T$, odnosno optimalno je čekati do dana dospijeća američke call opcije.

Neka je sada τ proizvoljno optimalno vrijeme za američku call opciju. Po Teoremu 3.15 je tada $\tilde{U}_\tau = \tilde{Z}_\tau$, odnosno zbog $\tilde{U} = \tilde{C}$,

$$C_\tau = Z_\tau = (S_\tau^1 - K)^+ .$$

Pokazali smo da je $C_t > S_t^1 - K$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, te $C_T = (S_T^1 - K)^+$. Zato je

$$C_\tau \geq S_\tau^1 - K$$

uz strogu nejednakost za $\tau \leq T-1$. Prema tome, za $\tau \leq T-1$ imamo

$$(S_\tau^1 - K)^+ = C_\tau > S_\tau^1 - K\,,$$

što je moguće samo u slučaju $S_\tau^1 - K < 0$. Slijedi da je $C_\tau = (S_\tau^1 - K)^+ = 0$. Odavde je jednostavno pokazati da je tada i $C_t = 0$ za sve $t > \tau$.

Zaključujemo da ako je τ optimalno vrijeme za iskoristiti američku call opciju da je tada ili $\tau = T$ ili je u trenutku τ vrijednost američke (i europske) call opcije jednaka nuli.

3.4 Američka put opcija u CRR modelu

U ovom odjeljku želimo izračunati vrijednost američke put opcije u Cox-Ross-Rubinsteinovom modelu. To je model opisan u odjeljku 2.5, te ovdje koristimo notaciju uvedenu u tom odjeljku. Podsjetimo se, slučajni povrati modelirani su nizom nezavisnih slučajnih varijabli $(X_t : 1 \leq t \leq T)$ s vrijednostima a ili b. Vrijednost rizične imovine u trenutku t jednaka je $S_t = S_{t-1}(1 + X_t)$. Nerizična imovina dana je s $S_t^0 = (1+r)^t$ gdje je r kamatna stopa. Uz uvjet $a < r < b$ model ne dopušta arbitražu i potpun je. Jedinstvena martingalna mjera $\mathbb{P}^*$ dana je s $\mathbb{P}^*(X_t = b) = p^*$, $\mathbb{P}^*(X_t = a) = 1 - p^*$, gdje je $p^* = (r-a)/(b-a)$.

Primjetimo da je $(S_t : 0 \leq t \leq T)$ Markovljev lanac u odnosu na prirodnu filtraciju $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, \ldots, S_t) = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$. Prostor stanja tog lanca je $E = \{S_0(1+a)^i(1+b)^j : 0 \leq i, j \leq T\}$, a prijelazna matrica Q dana je sa

$$Q(x, x(1+a)) = 1 - p^*\,, \quad Q(x, x(1+b)) = p^* \quad , x \in E\,.$$

Neka je cijena izvršenja američke put opcije jednaka K. Tada je američka put opcija slučajni niz $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ gdje je $Z_t := (K - S_t)^+$. Definiramo li funkciju $\psi : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $\psi(t, x) = (K - x)^+$, tada je $Z_t = \psi(t, S_t)$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Dakle, američka put opcija je funkcija Markovljevog lanca $(S_t : 0 \leq t \leq T)$. Označimo vrijednost te opcije u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ sa P_t. U odjeljku 2.4 izračunali smo da je vrijednost američke opcije $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ jednaka slučajnom nizu

$U = (U_t \,:\, 0 \le t \le T)$ danim sa:

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T\,, \\ U_t &= \max\left(Z_t, S_t^0\,\mathbb{E}^*\left[\tfrac{U_{t+1}}{S_{t+1}^0} \mid \mathcal{F}_t\right]\right)\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T\,. \end{aligned}$$

Dakle, $P_t = U_t$.

Diskontirajmo Z i U: $\tilde{Z}_t = (1+r)^{-t} Z_t$, $\tilde{U}_t = (1+r)^{-t} U_t$. Tada je $\tilde{U}$ Snellov omotač (uz $\mathbb{P}^*$) od $\tilde{Z}$. Stavimo

$$\tilde{\psi}(t,x) = (1+r)^{-t}\psi(t,x) = (1+r)^{-t}(K-x)^+\,.$$

Tada je $\tilde{Z}_t = (1+r)^{-t}(K-S_t)^+ = \tilde{\psi}(t, S_t)$. Dakle, $\tilde{Z}$ je funkcija Markovljevog lanca S, pa je Snellov omotač od $\tilde{Z}$ po Propoziciji 3.14 jednak

$$\tilde{U}_t = u(t, S_t)\,,$$

gdje je $u : \{0, 1, \ldots, T\} \times E \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$\begin{aligned} u(T,x) &= \tilde{\psi}(T,x)\,, \\ u(t,x) &= \max(\tilde{\psi}(t,x), Qu(t+1,x))\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1\,. \end{aligned}$$

Primjetimo da je $P_t = U_t = (1+r)^t \tilde{U}_t = (1+r)^t u(t, S_t)$. Definirajmo funkciju $p_{\mathrm{am}} : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ sa

$$p_{\mathrm{am}}(t,x) = (1+r)^t u(t,x)\,.$$

Na taj način je dokazana prva tvrdnja sljedeće propozicije.

Propozicija 3.18 *Za sve $t = 0, 1, \ldots, T$ imamo*

$$P_t = p_{\mathrm{am}}(t, S_t)\,.$$

Nadalje, za funkciju p_{am} vrijedi

$$p_{\mathrm{am}}(T,x) = (K-x)^+\,, \tag{3.6}$$

$$p_{\mathrm{am}}(t,x) = \max\left((K-x)^+, \frac{f(t+1,x)}{1+r}\right)\,, \quad 0 \le t < T\,, \tag{3.7}$$

gdje je $f : \{0, 1, \ldots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$f(t,x) := (1-p^*)p_{\mathrm{am}}(t, x(1+a)) + p^* p_{\mathrm{am}}(t, x(1+b))\,. \tag{3.8}$$

Dokaz: Preostaje dokazati da $p_{\rm am}$ ima gornji oblik. Po definiciji, $p_{\rm am}(t,x) = (1+r)^t u(t,x)$. Zato je $p_{\rm am}(T,x) = (1+r)^t u(T,x) = \psi(T,x) = (K-x)^+$. Nadalje,

$$\begin{aligned} & Qu(t+1,x) \\ &= Q(x,x(1+a))\,u(t+1,x(1+a)) + Q(x,x(1+b))\,u(t+1,x(1+b)) \\ &= (1-p^*)\,u(t+1,x(1+a)) + p^*\,u(t+1,x(1+b)) \\ &= (1+r)^{-t-1}((1-p^*)\,p_{\rm am}(t+1,x(1+a)) + p^*\,p_{\rm am}(t+1,x(1+b))) \\ &= (1+r)^{-t-1} f(t+1,x)\,. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} p_{\rm am}(t,x) &= (1+r)^t u(t,x) \\ &= \max((1+r)^t\tilde{\psi}(t,x), (1+r)^t Qu(t+1,x)) \\ &= \max\left((K-x)^+, \frac{f(t+1,x)}{1+r}\right)\,. \end{aligned}$$

□

Odredimo sada hedging portfelj $\phi = ((\phi_t, \phi_t^0)\,, 0 \le t \le T)$ za američku put opciju. Prisjetimo se da je ϕ portfelj koji replicira slučajni zahtjev $M_T = (1+r)^T \tilde{M}_T$, gdje je $\tilde{M} = (\tilde{M}_t\,, 0 \le t \le T)$ $\mathbb{P}^*$-martingal iz Doobove dekompozicije $\mathbb{P}^*$ supermartingal $\tilde{U}$: $\tilde{U} = \tilde{M} - \tilde{A}$. Izračunajmo proces $M = (M_t\,, 0 \le t \le T)$ gdje je $M_t = (1+r)^t \tilde{M}_t$. Zbog $\tilde{M}_0 = \tilde{U}_0$, imamo $M_0 = U_0$. Nadalje (vidi (3.2),

$$\tilde{M}_{t+1} = \tilde{M}_t = \tilde{U}_{t+1} - \mathbb{E}^*[\tilde{U}_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]\,.$$

Množenjem s $(1+r)^{t+1}$ dobivamo

$$M_{t+1} = (1+r)M_t + U_{t+1} - \mathbb{E}^*[U_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]\,.$$

Vrijedi $U_{t+1} = P_{t+1} = p_{\rm am}(t+1, S_{t+1})$. Zbog Markovljevog svojstva,

$$\mathbb{E}^*[p_{\rm am}(t+1,S_{t+1})\,|\,\mathcal{F}_t] = (1-p^*)\,p_{\rm am}(t+1,S_t(1+a)) + p^*\,p_{\rm am}(t+1,S_t(1+b))\,.$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= (1+r)M_t + p_{\rm am}(t+1,S_{t+1}) \\ &\quad -[(1-p^*)\,p_{\rm am}(t+1,S_t(1+a)) + p^*\,p_{\rm am}(t+1,S_t(1+b))]\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

S druge strane, budući da ϕ replicira M_T,

$$M_{t+1} = \phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi_{t+1}S_{t+1}\,.$$

Izjednačavanjem s (3.9) dobivamo

$$\begin{aligned}\phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi_{t+1}S_{t+1} &= (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_{t+1}) \\ &\quad -[(1-p^*)\,p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned}$$

Množimo s $1_{(X_{t+1}=a)}$, računamo uvjetno očekivanje $\mathbb{E}^*[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ i kratimo s $\mathbb{P}^*(X_{t+1} = a)$ (vidi sličan račun za replicirajući portfelj europske call opcije na kraju drugog poglavlja). Slijedi:

$$\begin{aligned}\phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi_{t+1}S_t(1+a) &= (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) \\ &\quad -[(1-p^*)\,p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned}$$

Na isti način dobijemo

$$\begin{aligned}\phi^0_{t+1}(1+r)^{t+1} + \phi_{t+1}S_t(1+b) &= (1+r)M_t + p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b)) \\ &\quad -[(1-p^*)\,p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a)) + p^*\,p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b))]\,.\end{aligned}$$

Oduzimanjem slijedi

$$\phi_{t+1}S_t(b-a) = p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b)) - p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a))\,,$$

otkud

$$\phi_{t+1} = \frac{p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+b)) - p_{\,\mathrm{am}}(t+1, S_t(1+a))}{S_t(b-a)}\,.$$

Definiramo funkciju $\Delta : \{1, \ldots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$\Delta(t,x) = \frac{p_{\,\mathrm{am}}(t, x(1+b)) - p_{\,\mathrm{am}}(t, x(1+a))}{x(b-a)}\,. \tag{3.10}$$

Tada vrijedi $\phi_{t+1} = \Delta(t+1, S_t)$. Na taj način smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.19 *Hedging portfelj za američku put opciju dan je sa*

$$\phi_{t+1} = \Delta(t+1, S_t)\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1\,,$$

gdje je Δ funkcija definirana formulom (3.10).

Funkciju Δ zovemo *delta opcije.*

Sada ćemo proučiti neka svojstva funkcije $x \mapsto p_{\mathrm{am}}(0,x)$. Primjetimo da je $p_{\mathrm{am}}(0,x)$ vrijednost američke put opcije (s cijenom izvršenja K) u trenutku $t=0$ uz $S_0 = x$.

Po Propoziciji 3.18 je $p_{\mathrm{am}}(0,S_0) = P_0$, a $P_0 = U_0$. S druge strane, po formuli (3.4)

$$\begin{aligned} U_0 &= \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^*\left[\frac{Z_\sigma}{S_\sigma^0} \mid \mathcal{F}_0\right] \\ &= \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^*[(1+r)^{-\sigma}(K-S_\sigma)^+]\,. \end{aligned}$$

Definiramo slučajni proces $W = (W_t : 0 \le t \le T)$ formulom $W_t = (1+X_1)(1+X_2)\cdots(1+X_t)$. Tada je $S_t = S_0 W_t$, te iz gornjih formula dobivamo

$$p_{\mathrm{am}}(0,S_0) = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^*[(1+r)^{-\sigma}(K-S_0W_\sigma)^+]\,,$$

odnosno,

$$p_{\mathrm{am}}(0,x) = \sup_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^*[(1+r)^{-\sigma}(K-xW_\sigma)^+] \tag{3.11}$$

Iz gornje formule zaključujemo da je funkcija $x \mapsto p_{\mathrm{am}}(0,x)$ neopadajuća i konveksna. Zaista, ako je $x \le y$, i $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$, tada je $(K-xW_\sigma)^+ \ge (K-yW_\sigma)^+$, otkud slijedi $p_{\mathrm{am}}(0,x) \ge p_{\mathrm{am}}(0,y)$. Za dokaz konveksnosti uzmimo $x,y>0$ i $\lambda \in (0,1)$. Budući da je $x \mapsto (K-xW_\sigma)^+$ konveksna funkcija, jednostavno se vidi da za sve $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^*[(1+r)^{-\sigma}(K-(\lambda x+(1-\lambda)y)W_\sigma)^+] \\ &\le \lambda\mathbb{E}^*[(1+r)^{-\sigma}(K-xS_\sigma)^+] + (1-\lambda)\mathbb{E}^*[(1+r)^{-\sigma}(K-yS_\sigma)^+] \\ &\le \lambda p_{\mathrm{am}}(0,x) + (1-\lambda)p_{\mathrm{am}}(0,y)\,. \end{aligned}$$

Uzimanjem supremuma lijeve strane po svim $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ slijedi

$$p_{\mathrm{am}}(0,\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda p_{\mathrm{am}}(0,x) + (1-\lambda)p_{\mathrm{am}}(0,y)\,.$$

Uočimo da je po formuli (3.7), $p_{\mathrm{am}}(0,x) \ge (K-x)^+$. Nadalje, za $x=0$ imamo $p_{\mathrm{am}}(0,0) = K$ (to slijedi iz pretpostavke $S_t \ge 0$, pa je $(K-S_t)^+ \le K$ za sve t). Pretpostavimo, nadalje, da vrijedi $a<0$ (negativan povrat na dionicu u slučaju niže cijene). Uz početnu cijeni x, najmanja vrijednost koju dionica može imati u trenutku T je $x(1+a)^T$. Ako je ta vrijednost veća od K, (t.j., $x > K(1+a)^{-T}$), tada je iz ekonomskih razloga jasno da je $p_{\rm am}(0,x) = 0$. Iz konveksnosti funkcije $x \mapsto p_{\rm am}(0,x)$ slijedi da ta funkcija ima oblik kako na Slici. Specijalno, postoji $x^* \in [0,K]$ takav da je $p_{\rm am}(0,x) = (K-x)^+$ za sve $x \in [0,x^*]$.