Poglavlje 2

Modeli u diskretnom vremenu - dinamički modeli

2.1 Imovine, strategije i arbitraža

U ovom poglavlju proširujemo model iz prethodnog poglavlja na konačno mnogo vremenskih perioda. Financijskom imovinom trži se u trenucima $t = 0, 1, \ldots, T$. Kao i do sada, financijski model gradit ćemo na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je prostor elementarni događaja konačan - $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$. Za σ-algebru $\mathcal{F}$ uzimamo partitivni skup od Ω: $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. I dalje pretpostavljamo da su svi elementarni događaji mogući: $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$.

Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dan nam je i neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. O σ-algebri $\mathcal{F}_t$ mislimo kao o informaciji o stanju svijeta koja nam je dostupna u trenutku t. Kako vrijeme prolazi, informacija se povećava otkud uvjet o neopadajućoj familiji. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_0$ trivijalna σ- algebra, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, t.j., u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju o mogućem stanju svijeta. Također ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, t.j., na kraju imamo potpunu informaciju.

Financijsko tržište sastoji se od $d + 1$ financijske imovine. Cijenu i-te financijske imovine u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ označavamo sa S_t^i. Dakle, gornji indeks označava o kojoj se imovini radi, dok donji indeks pokazuje vremenski trenutak. Cijene financijskih imovina općenito su slučajne, te ćemo stoga pretpostaviti da su S_t^i slučajne varijable. Prirodno je pretpostaviti da cijena S_t^i ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t, odnosno o informaciji do trenutka t. Matematički to formuliramo tako da ćemo pretpostaviti da je slučajna varijabla S_t^i izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$. To znači da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\{S_t^i \le x\} \in \mathcal{F}_t$ (ekvivalentno, $\{S_t^i < x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S_t^i \ge x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S_t^i > x\} \in \mathcal{F}_t$). Dakle, da li je cijena od S^i u trenutku t veća (manja) od x ovisi samo o događajima do trenutka t. Označimo sa $S_t := (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$ vektor cijena svih imovina u trenutku t. Tada je $S_t : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriv slučajni vektor.

Definicija 2.1 *Slučajni proces $S = (S_t\,,\, t = 0, 1, \dots, T)$ je* adaptiran *u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \dots, T)$ ako za je za svaki $t = 0, 1, \dots, T$, slučajna varijabla (vektor) S_t izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.*

Kao i u prvom poglavlju pretpostavljamo da je 0-ta financijska imovina nerizična (npr., novac u banci). Stavljamo $S_0^0 = 1$, te zbog jednostavnosti $S_t^0 = (1 + r)^t$ (ukamaćivanje po stopi r).

Napomena 2.2 *Općenito možemo pretpostaviti da je 0-ta imovina lokalno nerizična. To znači da u trenutku $t-1$ znamo njenu vrijednost u trenutku t, $t = 1, 2, \dots, T$. Formalno, to znači da je S_t^0 $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva.*

Uvedimo oznaku $\beta_t := 1/S_t^0$. Koeficijent β_t interpretiramo kao diskontni faktor od vremena t do vremena 0: ako u trenutku $t = 0$ uložimo u banku β_t kuna, u trenutku t imat ćemo točno 1 kunu. Imovine indeksirane s $i = 1, 2, \dots, d$ su rizične.

Nakon što smo uveli financijski model, objasnimo kako se u modelu trguje. U slučaju jednoperiodnog modela, u trenutku $t = 0$ investirali bismo u financijske imovine tako da stvorimo portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$. Prisjetimo se, ϕ^i označava broj jedinica i-te imovine. Označimo sada ϕ sa ϕ_1: $\phi_1 = (\phi_1^0, \phi_1^1, \dots, \phi_1^d)$. U trenutku $t = 1$, dopušteno nam je rebalansirati portefelj i zamijeniti ga nekim drugim portfeljom koji označamo s $\phi_2 = (\phi_2^0, \phi_2^1, \dots, \phi_2^d)$. O čemu će ovisiti taj novi portfelj? O cijenama financijskih imovina u trenutku $t = 1$. Budući da su te cijene slučajne, i to tako da su $\mathcal{F}_1$ izmjerive, to će općenito i portfelj ϕ_2 biti $\mathcal{F}_1$-izmjeriv slučajni vektor u $\mathbb{R}^{d+1}$. U trenutku $t = 2$ saznamo nove cijene S_2^i, te rebalansirano portfelj, itd.

Definicija 2.3 *Slučajni proces $\phi = (\phi_t\,,\, t = 0, 1, \dots, T)$ je* predvidiv *(u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \dots, T)$) ako za je za svaki $t = 1, \dots, T$, slučajna varijabla (vektor) ϕ_t izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{t-1}$, te ako je ϕ_0 izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_0$.*

Definicija 2.4 Strategija trgovanja *(ili* dinamički portfelj*) je predvidiv slučajni proces* $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d), t = 1, 2, \dots, T)$ *s vrijednostima u* $\mathbb{R}^{d+1}$.

Zanima nas *vrijednost portfelja* u trenutku $t = 1, 2, \dots, T$. To je slučajna varijabla

$$V_t(\phi) := \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i \,.$$

Primjetimo da je $V_t(\phi)$ izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle, $V(\phi) = (V_t(\phi)\,,\, t = 1, 2, \dots, T)$ je adaptiran slučajni proces.

Po definiciji je vrijednost portfelja u trenutku t jednaka vrijednosti nakon što se saznaju cijene imovina u trenutku t, a prije rebalansa portfelja. Primjetimo da nismo definirali vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$. Po definiciji stavljamo $V_0(\phi) := \phi_1 \cdot S_0$. Ta definicija nije formalno u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \dots, T$. Alternativno, možemo definirati portfelj u trenutku $t = 0$ formulom $\phi_0 = \phi_1$. Tada možemo staviti $V_0(\phi) = \phi_0 \cdot S_0$ što je u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \dots, T$. Od sada nadalje koristimo konvenciju da je $\phi_0 = \phi_1$.

Osim stvarnih vrijednosti financijskih imovina i portfelja zanimat će nas i njihove diskontirane vrijednosti (t.j., svedene na sadašnju vrijednost). Diskontirane vrijednosti ćemo uvijek označavati tildom $\tilde{}$:

$$\tilde{S}_t^i := \beta_t S_t^i = \frac{1}{(1+r)^t} S_t^i \,.$$

Uočimo da je $\tilde{S}_t^0 = 1$. *Diskontirana vrijednost portfelja* u trenutku $t = 1, 2, \dots, T$ je slučajna varijabla

$$\tilde{V}_t(\phi) := \beta_t V_t(\phi) = \phi_t \cdot \tilde{S}_t \,.$$

Definicija 2.5 *Strategija* ϕ *je* samofinancirajuća *ako za sve* $t = 0, 1, \dots, T-1$ *vrijedi*

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t \,. \tag{2.1}$$

Interpretacija: u trenutku t saznamo cijene $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d$. Vrijednost portfelja (strategije) postaje $\phi_t \cdot S_t$. Prilagođavamo svoju financijsku poziciju tako da biramo novi portfelj ϕ_{t+1}. Sredstva za kupovinu tog novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti portfelja ϕ_t koja je $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$. Dakle, vrijednost (u trenutku t) novog portfelja ϕ_{t+1}, koja je $\phi_{t+1} \cdot S_t$, mora biti jednaka vrijednosti starog portfelja ϕ_t koja je $\phi_t \cdot S_t$.

Napomena 2.6 *Jednakost (2.1) ekvivalentna je sa*

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = \phi_{t+1} \cdot S_{t+1} - \phi_t \cdot S_t \,,$$

odnosno

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = V_{t+1}(\phi) - V_t(\phi) \,. \tag{2.2}$$

Desna strana je razlika vrijednosti portfelja ϕ u trenucima $t+1$ i t. Lijeva strana je dobitak (gubitak) ostvaren promjenom cijena od trenutka t do trenutka $t+1$. Dakle, strategija je samofinancirajuća ako i samo ako je dobitak (gubitak) ostvaren samo promjenom cijena financijskih imovina (a ne, npr., dodatnim investiranjem ili povlačenjem novca iz portfelja - konzumacija).

Uvedimo oznaku za razliku cijena financijskih imovina u trenucima $t-1$ i t: $\Delta S_t := S_t - S_{t-1}$, za $t = 1, 2, \ldots, T$, te za ukupni dobitak (gubitak) do trenutka t:

$$G_t(\phi) := \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta S_j \,.$$

Tada je $G = (G_t \,, t = 1, 2, \ldots, T)$ adaptiran slučajni proces koji zovemo *proces dobitka.*

Propozicija 2.7 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) Strategija ϕ je samofinancirajuća.

(ii) Za sve $t = 1, 2, \ldots, T$ vrijedi

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi) \,.$$

(iii) Za sve $t = 1, 2, \ldots, T$ vrijedi

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \tilde{G}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j \,.$$

Dokaz: Iz Napomene 2.6, ϕ je samofinancirajuća ako i samo ako vrijedi jednakost (2.2).
(i)$\Rightarrow$ (ii) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t (V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta S_j$.
(ii)$\Rightarrow$ (i) Iz $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta S_j$ za sve $t = 1, 2, \ldots, T$, slijedi $V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi) = \phi_t \cdot \Delta S_t$.
(i)$\Leftrightarrow$(iii) Vrijedi $\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t$ ako i samo ako je $\phi_t \cdot \tilde{S}_t = \phi_{t+1} \cdot \tilde{S}_t$. Sada je dokaz isti kao dokaz ekvivalencije (i) i (ii). $\Box$

Propozicija 2.8 *Za svaki predvidiv proces* $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d), 0 \le t \le T)$ *i za svaku* $\mathcal{F}_0$*-izmjerivu slučajnu varijablu* V_0 *postoji jedinstven predvidiv proces* $(\phi_t^0, 0 \le t \le T)$ *takav da je strategija* $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ *samofinancirajuća i vrijedi* $V_0(\phi) = V_0$.

Dokaz: Pretpostavimo da je ϕ samofinancirajuća i vrijedi $V_0(\phi) = V_0$. Tada iz Propozicije 2.7 i jednakosti $\Delta\tilde{S}_j^0 = 1 - 1 = 0$ slijedi

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t(\phi) &= V_0 + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j \\
&= V_0 + \sum_{j=1}^t (\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d) .
\end{aligned}$$

S druge strane vrijedi

$$\tilde{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 \tilde{S}_t^1 + \cdots + \phi_t^d \tilde{S}_t^d .$$

Iz te dvije jednakosti slijedi da je ϕ_t^0 jedinstveno određen formulom

$$\begin{aligned}
\phi_t^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^t (\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d) - \phi_t^1 \tilde{S}_t^1 - \cdots - \phi_t^d \tilde{S}_t^d \\
&= V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} (\phi_j^1 \Delta\tilde{S}_j^1 + \cdots \phi_j^d \Delta\tilde{S}_j^d) - \phi_{t-1}^1 \tilde{S}_{t-1}^1 - \cdots - \phi_{t-1}^d \tilde{S}_{t-1}^d .
\end{aligned}$$

Definiramo li ϕ_t^0, $t = 1, \ldots, T$, gornjom formulom, (i dodatno $\phi_0^0 = \phi_1^0$), odmah se vidi da je strategija ϕ samofinancirajuća, te da je proces $(\phi_t^0, 0 \le t \le T)$ predvidiv. $\Box$

Gornja propozicija nam omogućava da samofinancirajuće strategije zadajemo predvidim nizom slučajnih vektora $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d), 0 \leq t \leq T)$. Za danu početnu vrijednost portfelja V_0, taj predvidiv niz na jedinstven način definira samofinancirajuću strategiju.

Definicija 2.9 *Strategija ϕ je* dopustiva*, ako je ϕ samofinancirajuća i vrijedi $V_t(\phi) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$.*

Uočimo da za za $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, te $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ može vrijediti $\phi_t^i < 0$. U slučaju $\phi_t^0 < 0$ u trenutku t smo "kratki" nultu financijsku imovinu (t.j., dužni smo banci novac), dok $\phi_t^i < 0$, $i = 1, 2 \ldots, d$, znači da smo "kratki" za i-tu financijsku imovinu (short selling of stock). Međutim, bez obzira na takvu mogućnost, vrijednost portfelja (dopustive strategije) u svakom trenutku t mora biti nenegativna, odnosno investitor u svakom trenutku t mora moći isplatiti svoje eventualne dugove.

Definicija 2.10 *Dopustiva strategija ϕ je* arbitraža (arbitražna strategija)*, ako je $V_0(\phi) = 0$ i $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$.*

Uočimo da iz dopustivosti od ϕ imamo $V_T(\phi) \geq 0$. Interpretacija arbitraže ista je kako i u jednoperiodnom modelu: bez rizika od gubitka, arbitražna strategija s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit.

Kao i u prvom poglavlju, ekonomski razlozi nalažu nam da promatramo samo modele financijskih tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Za financijsko tržište kažemo da ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. To možemo izreći na sljedeći ekvivalentan način: neka je Γ konveksni konus svih pozitivnih varijabli ($X \in \Gamma$ ako je $X(\omega) \geq 0$ za sve $\omega \in \Omega$, te postoji $\omega' \in \Omega$ takav da je $X(\omega') > 0$). Ako tržište ne dopušta arbitražu, za svaku dopustivu strategiju ϕ (za koju je $V_0(\phi) = 0$) vrijedi $\tilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zaista, kada bi za dopustivu strategiju ϕ vrijedilo $V_0(\phi) = 0$ i $\tilde{V}_T(\phi) \in \Gamma$, tada bi bilo i $V_T(\phi) \in \Gamma$, što znači da je ϕ arbitraža. Naravno, vrijedi i obrat: ako za svaku dopustivu strategiju ϕ takvu da je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $V_T(\phi) \notin \Gamma$, tada tržište ne dopušta arbitražu.

Uočimo, također, da je $V_T(\phi) \notin \Gamma$ ekvivalentno s $\tilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$.

Pojam arbitraže možemo definirati i za samofinancirajuće strategije koje nisu nužno dopustive: kažemo da je samofinancirajuća strategija ϕ arbitraža, ako je $V_0(\phi) = 0$, $V_T(\phi) \geq 0$ i $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$. Jasno je da ako niti jedna samofinancirajuća strategija nije arbitraža, tada niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. Postavlja se pitanje da li vrijedi i obrat. Naime, ako tržište ne dopušta arbitražu (t.j., niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža), da li se može dogoditi da postoji samofinancirajuća strategija koja je arbitraža. Da bismo odgovorili na to pitanje, prisjetimo se prvo procesa dobitka G, odnosno procesa diskontiranog dobitka $\tilde{G}$:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_t(\phi) &= \sum_{j=1}^{t} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{t} \phi_j^i \Delta\tilde{S}_j^i \,.\end{aligned}$$

Uočimo da zbog $\Delta\tilde{S}_t^0 = 0$, vrijednosti ϕ_t^0 nisu bitne za vrijednost od $\tilde{G}$.

Lema 2.11 *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada za svaki predvidiv proces* $(\phi^1, \dots, \phi^d) = ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d)\,,\, 0 \le t \le T)$ *vrijedi*

$$\tilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma\,.$$

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, t.j., $\tilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$. Tada ne može biti $\tilde{G}_t(\phi) \ge 0$ za sve $t = 0, 1, \dots, T-1$, jer bi tada (nadopunjena) strategija ϕ (koju dobijemo iz Propozicije 2.8) bila arbitraža. Dakle, postoji $s \in \{1, \dots, T-1\}$ takav da $\tilde{G}_s(\phi)$ nije nenegativan. Definiramo

$$t_0 = \max\{s \,:\, \mathbb{P}(\tilde{G}_s(\phi) < 0) > 0\}\,.$$

Znamo da mora biti $t_0 \le T-1$, i vrijedi $\mathbb{P}(\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0) > 0$, i $\tilde{G}_s(\phi) \ge 0$ za $t < s \le T$. Definirajmo novu strategiju ψ na sljedeći način:

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & j \le t_0 \\ 1_{(\tilde{G}_{t_0}(\phi)<0)}\phi_j & j > t_0\,. \end{cases}$$

Po strategiji ψ do (uključivo) trenutka t_0 uopće ne trgujemo, a od trenutka t_0 nadalje ne trgujemo za one ω za koje je $\tilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) \ge 0$, dok za ω koje je $\tilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) < 0$ slijedimo strategiju ϕ. Budući da je $\tilde{G}_{t_0}(\phi)$ $\mathcal{F}_{t_0}$-izmjeriva i ϕ je predvidiv, dobivamo da je i slučajni niz ψ također predvidiv.

Izračunajmo diskontirani proces dobitka $\tilde{G}(\psi)$ za strategiju ψ. Ako je $j \leq t_0$, tada je očito $\tilde{G}_j(\psi) = 0$ (jer $\psi_k = 0$, $k = 0, \ldots, j$). Za $j > t_0$ imamo

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_j(\psi) &= \sum_{k=1}^{j} (\psi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \cdots + \psi_k^d \Delta \tilde{S}_j^d) \\
&= \sum_{k=t_0+1}^{j} (\psi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \cdots + \psi_k^d \Delta \tilde{S}_j^d) \\
&= 1_{(\tilde{G}_{t_0}(\phi)<0)} \sum_{k=t_0+1}^{j} (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \cdots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_j^d) \\
&= 1_{(\tilde{G}_{t_0}(\phi)<0)} (\sum_{k=1}^{j} - \sum_{k=1}^{t_0}) \\
&= 1_{(\tilde{G}_{t_0}(\phi)<0)} (\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_{t_0}(\phi)) \,.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\tilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & j \leq t_0 \\ 1_{(\tilde{G}_{t_0}(\phi)<0)} (\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_{t_0}(\phi)) \,, & t_0 < j \leq T \,. \end{cases}$$

Slijedi da je $\tilde{G}_j(\psi) \geq 0$, za sve $j \in \{0, 1, \ldots, T\}$, te

$$\tilde{G}_T(\psi) = 1_{(\tilde{G}_{t_0}(\phi)<0)} (\tilde{G}_T(\phi) - \tilde{G}_t(\phi)) > 0$$

na $\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}$. Dakle, ψ je dopustiva strategija koja je arbitraža. Kontradikicija. $\square$

Pretpostavimo sada da je ϕ samofinancirajuća strategija za koju je $V_0(\phi) = 0$. Tada je $\tilde{V}_T(\phi) = \tilde{G}_T(\phi)$ i po Lemi 2.11, $\tilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zato vrijedi i $V_T(\phi) \notin \Gamma$. Dakle, niti jedna samofinancirajuća strategija ne može biti arbitraža.

2.2 Martingali i mogućnost arbitraže

U ovom odjeljku podsjećamo na pojam uvjetnog očekivanja, te uvodimo fundamentalan pojam martingala. Radit ćemo na konačnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, te vrijedi $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$.

Podsjetimo se definicije uvjetne vjerojatnosti i uvjetnog očekivanja s obzirom na događaj pozitivne vjerojatnosti. Neka je $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$. Tada definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \to [0,1]$ formulom

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}\,.$$

Uvjetno očekivanje slučajne varijable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ u odnosu na događaj A, je očekivanje od X s obzirom na (uvjetnu) vjerojatnost $\mathbb{P}_A$:

$$\mathbb{E}[X|A] = \mathbb{E}_A[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}_A(\{\omega\})\,.$$

Jednostavno se vidi da je

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X 1_A]}{\mathbb{P}(A)}\,.$$

Definirajmo sada uvjetno očekivanje s obzirom na σ-podalgebru od $\mathcal{F}$. Neka je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra sadržana u $\mathcal{F}$, te neka su $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ atomi od $\mathcal{G}$. To znači da je familija $\{A_1, \dots, A_k\}$ (izmjeriva) particija od Ω. Očito vrijedi $\mathbb{P}(A_j) > 0$ za sve $j = 1, 2, \dots, k$.

Slučajna varijabla $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zove se $\mathcal{G}$-izmjeriva ako je $\{Y = y\} \in \mathcal{G}$ za svaki $y \in \mathbb{R}$. U tom slučaju je $\{Y = y\} = \emptyset$ ili je $\{Y = y\}$ jednak uniji nekih atoma iz $\mathcal{G}$. Specijalno slijedi da je Y konstantna na svakom atomu A_j, $j = 1, 2, \dots, k$.

Definicija 2.12 *Neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra sadržana u $\mathcal{F}$ s atomima $A_1, A_2, \dots, A_k$, te neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla.* Uvjetno očekivanje od X s obzirom na $\mathcal{G}$ *je funkcija $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) := \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[X|A_j] 1_{A_j}(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathbb{E}[X 1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}(\omega)\,.$$

Drugim riječima, ako je $\omega \in A_j$, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X|A_j]$.

Propozicija 2.13 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla za koju vrijedi*

$$\mathbb{E}[1_A\, \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1_A X] \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{G}\,. \tag{2.3}$$

Nadalje, formula (2.3) karakterizira uvjetno očekivanje s obzirom na $\mathcal{G}$: ako za $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y vrijedi

$$\mathbb{E}[1_A Y] = \mathbb{E}[1_A X] \qquad \text{za sve } A \in \mathcal{G}\,,$$

tada je $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Navedimo osnovna svojstva uvjetnog očekivanja:

(i) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.

(ii) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

(iii) Ako je Y $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada vrijedi

$$\mathbb{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,.$$

(iv) Uvjetno očekivanje je linearno: za slučajne varijable X_1, X_2 i realne brojeve a_1, a_2 vrijedi

$$\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}] = a_1\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}]\,.$$

(v) Uvjetno očekivanje je nenegativno: $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.

(vi) $|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X|\,|\mathcal{G}]$.

(vii) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]\,.$$

(viii) Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Uvjetno očekivanje možemo interpretirati na sljedeći koristan način: tražimo najbolju aproksimaciju slučajne varijable X ukoliko nam je poznata informacija dana σ-algebrom $\mathcal{G}$. Najbolja aproksimacija traži se u smislu najmanjih kvadrata. Dakle, želimo naći $\mathcal{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y koja minimizira $\mathbb{E}[(Y - X)^2]$.

Propozicija 2.14 *Vrijedi:*

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - X)^2] = \min\{\mathbb{E}[(Y - X)^2]\,,\ Y \text{ je } \mathcal{G}\text{-izmjeriva}\}\,.$$

Dokaz: Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y-X)^2] &= \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]+\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)^2] \\
&= \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2]+2\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)] \\
&+ \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)^2] \\
&= \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2]+\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)^2]
\end{aligned}$$

otkud slijedi tvrdnja. Još preostaje objasniti zašto je srednji član u drugom retku gore jednak nuli. Imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)|\mathcal{G}]] \\
&= \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)|\mathcal{G}]] \quad \text{zbog (iii)} \\
&= \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])] \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

□

Nadalje pretpostavljamo da nam je uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dana i filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$. Prisjetimo se da za niz slučajnih varijabli $(M_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ kažemo da je adaptiran (s obzirom na $\mathbb{F}$) ako je M_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva za svaki $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.

Definicija 2.15 *Adaptiran slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \le t \le T)$ je*

(a) martingal*, ako je* $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1$,

(b) supermartingal*, ako je* $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \le M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1$,

(c) submartingal*, ako je* $\mathbb{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \ge M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Definicija se proširuje na višedimenzionalan slučaj: niz $M = (M_t, \,, 0 \le t \le T)$ slučajnih vektora u $\mathbb{R}^d$ je martingal, ako su sve komponente martingali.

Uočimo da ako je $M = (M_t\,,\, 0 \le t \le T)$ martingal, tada je najbolji procjenitelj slučajne varijable M_{t+1} (neposredna budućnost) uz danu informaciju (o prošlosti i sadašnjosti) $\mathcal{F}_t$ upravo trenutna vrijednost procesa M_t.

Navedimo neka od osnovnih svojstava martingala:

(i) Slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \le t \le T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \le s \le t \le T$ vrijedi

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s\,.$$

(ii) Slučajni proces $M = (M_t\,,\, 0 \le t \le T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \le t \le T$ vrijedi

$$\mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_t] = M_t\,.$$

(iii) Ako je $M = (M_t\,,\, 0 \le t \le T)$ martingal, tada je $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$ za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.

(iv) Zbroj dva martingala opet je martingal.

Slična svojstva vrijede i za super(sub)martingale.

Kako pomoću danog martingala M možemo konstruirati nove martingale? Vrlo koristan postupak kojim to činimo zove se martingalna transformacija. Prije definicije uvedimo oznaku $\Delta M_t := M_t - M_{t-1}$ za martingalnu razliku. Uočimo odmah da je $\mathbb{E}[\Delta M_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ zbog definicije martingala.

Definicija 2.16 *Neka je $M = (M_t\,,\, 0 \le t \le T)$ martingal, te neka je $H = (H_t\,,\, 0 \le t \le T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Definiramo niz $X = (X_t\,,\, t = 0, 1, \ldots, T)$ slučajnih varijabli na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0\,, \\ X_t &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_t \Delta M_t\,, \quad 1 \le t \le T\,. \end{aligned}$$

Niz X naziva se martingalna transformacija. *Ponekad ćemo slučajni proces X označavati kao $H \circ M = ((H \circ M)_t\,,\, 0 \le t \le T)$.*

Propozicija 2.17 *Martingalna transformacija X je martingal. Nadalje, ako je slučajni proces M supermartingal, te ako je H nenegativan, tada je i martingalna transformacija X također supermartingal.*

Dokaz: Budući da je X_t linearna kombinacija $\mathcal{F}_t$-izmjerivih slučajnih varijabli, to je i sama $\mathcal{F}_t$-izmjeriva. Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] &= \mathcal{E}[H_{t+1} \Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= H_{t+1} \mathbb{E}[\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

gdje je za drugu jednakost iskorištena činjenica da je H_{t+1} $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i svojstvo (iii) martingala. Tvrdnja za supermartingal slijedi iz istog računa zbog $H_{t+1} \geq 0$ i $\mathbb{E}[\Delta M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq 0$. □

Financijska interpretacija martingalne transformacije: pretpostavimo da su diskontirane cijene $(\tilde{S}_t\,,\ 0 \leq t \leq T)$ financijskih imovina martingali. Ako je ϕ samofinancirajuća strategija, tada je po Propoziciji 2.7 (iii)

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta \tilde{S}_j\,.$$

Dakle, diskontirane vrijednosti portfelja su martingalna transformacija $\phi \circ \tilde{S}$, te također tvore martingal. Specijalno je $\mathbb{E}[\tilde{V}_t(\phi)] = \mathbb{E}[V_0(\phi)]$, za sve $0 \leq t \leq T$.

Sljedeća tvrdnja pokazuje da se martingalnost slučajnog procesa može karakterizirati pomoću svih martingalnih transformacija.

Propozicija 2.18 *Adaptiran niz slučajnih varijabli $M = (M_t\,,\ 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za svaki predvidiv niz slučajnih varijabli $H = (H_t\,,\ 1 \leq t \leq T)$ vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t\right] = 0\,.$$

Dokaz: Neka je M martingal i neka je $H = (H_t\,,\ 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Stavimo $H_0 = 0$. Tada je martingalna transformacija $X = H \circ M$ također martingal. Specijalno vrijedi $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$. Međutim, zbog $H_0 = 0$ imamo $X_0 = 0$. Dakle, $0 = \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t]$.
Obratno: fiksirajmo $j \in \{0, \ldots, T-1\}$, odaberimo $A \in \mathcal{F}_j$, i definirajmo niz slučajnih varijabli $H = (H_t\,,\ 1 \leq t \leq T)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} H_t &= 0 \qquad t \neq j+1\,, \\ H_{j+1} &= 1_A \end{aligned}$$

Tada je $H = (H_t\,,\ 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz, pa po pretpostavci vrijedi $\mathbb{E}[\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t] = 0$. Međutim,

$$\sum_{t=1}^{T} H_t \Delta M_t = H_{j+1}(M_{j+1} - M_j) = 1_A(M_{j+1} - M_j)\,.$$

Slijedi da je

$$\mathbb{E}[1_A M_j] = \mathbb{E}[1_A M_{j+1}] .$$

Budući da je $A \in \mathcal{F}_j$ bio proizvoljan, iz Propozicije 2.13 slijedi da je

$$\mathbb{E}[M_{j+1}|\mathcal{F}_j] = M_j .$$

Tvrdnja slijedi zbog j proizvoljan. □

Sada ćemo pojam martingala upotrijebiti za karakterizaciju financijskog tržišta bez arbitraže. Prvo nam treba definicija martingalne mjere.

Definicija 2.19 *Vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *naziva se* martingalna mjera *ili* mjera neutralna na rizik*, ako za sve* $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}^i_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}^i_t , \quad i = 0, 1, \ldots, d .$$

Ekvivalentno, $\mathbb{P}^*$ *je martingalna mjera ako su diskontirane cijene financijskih imovina martingali u odnosu na* $\mathbb{P}^*$*. Vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *naziva se* ekvivalentna martingalna mjera*, ako je martingalna mjera i vrijedi* $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$*.*

Napomena 2.20 Uočimo da za $t = 0$ uvjet iz definicije daje

$$\mathbb{E}^*[\tilde{S}^i_1|\mathcal{F}_0] = \tilde{S}^i_0 , \quad i = 0, 1, \ldots, d .$$

Uvjetno očekivanje u odnosu na trivijalnu σ-algebru $\mathcal{F}_0$ je očekivanje. Budući da je $\tilde{S}^i_1 = S^i_1/(1+r)$, gornja jednakost postaje

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{S^i_1}{1+r} \right] = S^i_0 , \quad i = 0, 1, \ldots, d .$$

To znači da je $\mathbb{P}^*$ martingalna mjera i u smislu Definicije 1.5.

Sljedeći rezultat je fundamentalni teorem određivanja cijena imovine u kontekstu u kojem smo sada.

Teorem 2.21 *Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz: $\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Tada je niz $(\tilde{S}_t\,,\,0 \leq t \leq T)$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Neka je $\phi = (\phi_t,\,,\,0 \leq t \leq T)$ dopustiva (ili samofinancirajuća) strategija takva da je $V_0(\phi) = 0$. Tada je slučajni proces diskontiranih vrijednosti

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{t} \phi_j \Delta \tilde{S}_j$$

martingalna transformacija, pa po Propoziciji 2.16, i sam $\mathbb{P}^*$-martingal. Slijedi $\mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbb{E}^*[V_0(\phi)]$. Zbog $V_0(\phi) = 0$ slijedi $\mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = 0$, a zbog dopustivosti je $\tilde{V}_T(\phi) = \beta_T V_T(\phi) \geq 0$. Budući da je $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ za sve ω, iz $\mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = 0$ i $\tilde{V}_T(\phi) \geq 0$ slijedi da je $\tilde{V}_T(\phi) \equiv 0$. Tada je i $V_T(\phi) \equiv 0$, pa je i $\mathbb{P}[V_T(\phi) > 0] = 0$. Dakle, dopustiva strategija ϕ nije arbitraža.
$\Rightarrow$ Obratno, pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitažu. Neka je $\mathcal{V} := \{\tilde{G}_T(\phi)\,,\,\phi$ predvidiv proces u $\mathbb{R}^d\}$. Tada je $\mathcal{V}$ vektorski prostor slučajnih varijabli na Ω i možemo ga shvatiti kao vektorski potprostor konačnodimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^K$ $(K = |\Omega|)$. Po Lemi 2.11, $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$. Definirajmo $K := \{X \in \Gamma\,:\,\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = 1\}$. Tada je $K \subset \Gamma$ konveksan i kompaktan skup za koji vrijedi $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 1.7 (b)), postoji $\lambda = (\lambda(\omega)\,:\,\omega \in \Omega)$ takav da vrijedi:

(i) $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$ za sve $X \in K$,

(ii) $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0$ za svaki predvidiv ϕ.

Iz svojstva (i) slijedi da je $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ (zaista, dovoljno je uzeti X tako da je $X(\omega) = 1$ i $X(\omega') = 0$ za sve ostale ω'). Definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ formulom:

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}\,.$$

Zbog $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ slijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$. Za proizvoljni predvidiv proces

ϕ s vrijednostima u $\mathbb{R}^d$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left[\sum_{t=1}^{T}\phi_j\cdot\Delta\tilde{S}_t\right] &= \mathbb{E}^*[\tilde{G}_T(\phi)] \\ &= \sum_{\omega\in\Omega}\tilde{G}_T(\phi)(\omega)\mathbb{P}^*(\{\omega\}) \\ &= \frac{1}{\sum_{\omega'\in\Omega}\lambda(\omega')}\sum_{\omega\in\Omega}\tilde{G}_T(\phi)(\omega)\lambda(\omega) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost izlazi iz (ii). Specijalno, za $i\in\{1,2,\ldots,d\}$, stavimo $\phi_t^j=0$, $t=0,1,\ldots,T$, $j\neq i$. Tada je

$$\mathbb{E}^*[\sum_{j=1}^{T}\phi_t^i\Delta\tilde{S}_t^i]=0$$

za svaki (1-dim) predvidiv proces $(\phi_t^i,\ 1\leq t\leq T)$. Po Propoziciji 2.18 slijedi da je $\tilde{S}^i$ $\mathbb{P}^*$-martingal. □

2.3 Potpuni modeli tržišta

Definicija 2.22 Slučajni zahtjev s dospijećem T *je* $\mathcal{F}_T$*-izmjeriva slučajna varijabla* C *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *takva da je*

$$0\leq C<\infty \quad \mathbb{P}-g.s.$$

Slučajni zahtjev C *s dospijećem* T *zove se* izvedenica (derivative) *primarnih imovina* $S^0,S^1,\ldots,S^d$ *ako je* C *funkcija slučajnih vektora* $S_1,S_2,\ldots,S_T$.

Primjer 2.23 *Europska call opcija* (na financijsku imovinu 1) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C=(S_T^1-K)^+$. Dakle,

$$C=\begin{cases} S_T^1-K\,, & S_T^1>K \\ 0\,, & S_T\leq K\,. \end{cases}$$

Europska put opcija (na financijsku imovinu 1) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C=(K-S_T^1)^+$.

U gornja dva primjera C je funkcija od S_T^1. Općenito, C može ovisiti o svim cijenama financijske imovine 1 do trenutka T.
Azijska call opcija (na financijsku imovinu 1) s dospijećem T. Neka je

$$A_T^1 := \frac{1}{T+1}(\tilde{S}_0^1 + \tilde{S}_1^1 + \cdots + \tilde{S}_T^1)$$

srednja vrijednost diskontiranih cijena prve imovine. Azijska call opcija s cijenom izvršenja K je slučajni zahtjev $C = (A_T^1 - K)^+$.

Definicija 2.24 *Slučajni zahtjev C je* dostižan *ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = C$. Kažemo da strategija ϕ* replicira *C.*

Napomena 2.25 *Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Ako je C slučajni zahtjev takav da je $V_T(\phi) = C$ za neku samofinancirajuću strategiju, tada je C dostižan slučajni zahtjev. Dovoljno je provjeriti da je u tom slučaju ϕ dopustiva strategija, t.j., $V_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Taj uvjet je ekvivalentan uvjetu $\tilde{V}_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Neka je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je $(\tilde{V}_t(\phi)\,, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbb{P}^*$-martingal, pa je*

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)\,|\,\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[\beta_T C\,|\,\mathcal{F}_t] \geq 0\,,$$

zbog $\beta_T > 0$ i $C \geq 0$.

Definicija 2.26 *Model tržišta bez arbitraže je* potpun *ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Zahtjev na potpunost tržišta je ekonomski restriktivan i često nema ekonomsko opravdanje, za razliku od zahtjeva na nepostojanje arbitraže. Osnovni rezultat o potpunosti tržišta je sljedeći

Teorem 2.27 *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.*

Dokaz: $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je model tržišta bez arbitraže potpun. Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev. Po pretpostavci postoji dopustiva strategija ϕ koja replicira C, $C = V_T(\phi)$. Specijalno vrijedi

$$\beta_T C = \tilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{T} \phi_j \cdot \Delta\tilde{S}_j\,.$$

Pretpostavimo da su $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Tada je proces $(\tilde{V}_t(\phi)\,,\, 0 \le t \le T)$ martingal u donosu na $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$. Specijalno, to znači da je (zbog $\mathcal{F}_0$ trivijalna)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1[\tilde{V}_T(\phi)] &= \mathbb{E}_1[V_0(\phi)] = V_0(\phi)\,, \\ \mathbb{E}_2[\tilde{V}_T(\phi)] &= \mathbb{E}_2[V_0(\phi)] = V_0(\phi)\,, \end{aligned}$$

otkud $\mathbb{E}_1[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbb{E}_2[\tilde{V}_T(\phi)]$. Slijedi $\mathbb{E}_1[\beta_T C] = \mathbb{E}_2[\beta_T C]$. Budući da je $\beta_T = 1/(1+r)^T$ deterministički, dobivamo

$$\mathbb{E}_1[C] = \mathbb{E}_2[C]\,.$$

Ta jednakost vrijedi za svaku nennegativnu $\mathcal{F}_T$-izmjerivu slučajnu varijablu C. Budući da je po pretpostavci $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, slijedi $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ (zaista, dovoljno je za C uzeti $1_{\{\omega\}}$).
$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže, ali nepotpuno. To znači da postoji slučajni zahtjev C koji nije dostižan. Definiramo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}} := \{U_0 + \sum_{t=1}^{T} \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t \,:\, U_0 \text{ je } \mathcal{F}_0 \text{ izmjeriva}, \\ ((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) : 1 \le t \le T) \text{ predvidiv proces}\}\,. \end{aligned}$$

Uočimo da za dani d-dimenzionalni predvidiv proces $((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) : 1 \le t \le T)$ postoji predvidiv proces $(\phi_t^0 \,:\, 1 \le t \le T)$ takav da je strategija $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) \,:\, 1 \le t \le T)$ samofinancirajuća (Propozicija 2.8). Zbog $\Delta \tilde{S}_t^0 = 0$, te budući da je U_0 konstanta ($\mathcal{F}_0$ je trivijalna), slijedi da je

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{V}_T(\phi) \,:\, \phi \text{ samofinancirajuća}\}\,.$$

Budući da po pretpostavci C nije dostižan zahtjev, zbog Napomene 2.25, ne može se dostići niti samofinancirajućom strategijom. Slijedi: $C/S_T^0 \notin \tilde{\mathcal{V}}$. To znači da je $\tilde{\mathcal{V}}$ pravi podskup skupa svih slučajnih varijabli. Jednostavno se provjeri da je $\tilde{\mathcal{V}}$ vektorski podprostor.

Neka je $\mathbb{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera. Na prostoru svih slučajnih varijabli definiramo skalarni produkt

$$(X, Y) := \mathbb{E}^*[XY]\,, \quad X, Y : \Omega \to \mathbb{R}\,.$$

Budući da je $\tilde{\mathcal{V}}$ pravi podprostor, postoji slučajna varijabla $X \ne 0$ ortogonalna na $\tilde{\mathcal{V}}$, $X \in \tilde{\mathcal{V}}^{\perp}$. Definiramo

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbb{P}^*(\{\omega\})$$

gdje je $\|X\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$. Uočimo da je $1 \in \tilde{\mathcal{V}}$ ($U_0 = 1$, $\phi \equiv 0$), pa je $X \perp 1$, t.j., $0 = \mathbb{E}^*[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}^*(\{\omega\})$. Slijedi:

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|X\|_\infty} \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = 1\,.$$

Očito je $1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} > 0$, pa je $\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Dakle, $\mathbb{P}^{**}$ je vjerojatnost ekvivalentna s $\mathbb{P}^*$ i $\mathbb{P}^{**} \neq \mathbb{P}^*$ (zbog $X \neq 0$).

Neka je $\phi = ((\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d) \,:\, 1 \le t \le T)$ predvidiv proces. Računamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{**}[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t] \\ = \;& \mathbb{E}^*[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t] + \frac{1}{2\|X\|_\infty}\,\mathbb{E}^*[X \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta\tilde{S}_t] = 0\,. \end{aligned}$$

Prvi sumand je nula, jer je $(\tilde{S}_t)$ $\mathbb{P}^*$-martingal, a drugi je nula, jer je $X \perp \tilde{\mathcal{V}}$. Po Propoziciji 2.18 slijedi da je $(\tilde{S}_t \,:\, 0 \le t \le T)$ martingal u donosu na $\mathbb{P}^{**}$. Dakle, $\mathbb{P}^{**}$ je martingalna mjera. Budući da je različita od $\mathbb{P}^*$, martingalna mjera nije jedinstvena. □

Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže i potpuno. Neka je $\mathbb{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Cilj nam je odrediti cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva C.

Neka je $C \ge 0$ proizvoljna $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla, te neka je ϕ dopustiva strategija koja replicira C: $V_T(\phi) = C$. Niz $(\tilde{V}_t(\phi) \,:\, 0 \le t \le T)$ je $\mathbb{P}^*$-martingal, pa je

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right]\,.$$

Općenitije,

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T(\phi) \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_t\right], t = 0, 1, \ldots, T\,,$$

otkud

$$V_t(\phi) = S_t^0 \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_t\right], t = 0, 1, \ldots, T\,. \tag{2.4}$$

Dakle, u trenutku t je vrijednost $V_t(\phi)$ dopustive strategije ϕ koja replicira C potpuno određena s C.

Prirodno je $V_t(\phi)$ zvati cijenom slučajnog zahtjeva u trenutku t. To je bogatstvo potrebno u trenutku t za repliciranje zahtjeva C slijedeći strategiju ϕ. Specijalno, u trenutku $t = 0$,

$$C_0 = V_0(\phi) = \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{S_T^0} \right] .$$

Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ proda slučajni zahtjev C za cijenu $C_0 = \mathbb{E}^*[C/S_T^0]$, te dobiveni iznos $C_0 = V_0(\phi)$ uloži u replicirajući portfelj ϕ. Budući da je ϕ samofinancirajući, investitor može slijediti ϕ bez dodatnog ulaganja. Dakle, u svakom daljnjem vremenskom trenutku t, redistribucija imovina po dinamičkom portfelju ϕ je besplatna. U trenutku T, vrijednost portfelja jednaka je $V_T(\phi)$. Međutim , $V_T(\phi) = C$, što znači da je iznos $V_T(\phi)$ upravo dovoljan za pokriće obaveze dospijele po slučajnom zahtjevu C. Drugim riječima, dinamički portfelj ϕ je savršena zaštita (engl. hedge) za slučajni zahtjev C.

Uočite da nam je do sada za razvoj teorije bila potrebna samo egzistencija replicirajućeg portfelja ϕ. Za praktične potrebe hedginga, važno je izračunati taj portfelj. To ćemo kasnije naučiti za slučaj Cox-Ross-Rubinsteinovog (ili binomnog) modela.

Napomena 2.28 *Ponovimo još jednom da za računanje cijene slučajnog zahtjeva (opcije) moramo znati samo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$, t.j., ekvivalentnu martingalnu mjeru. Vjerojatnost $\mathbb{P}$, koja može biti objektivna vjerojatnost (statistički ustanovljena) ili bilo koja subjektivna vjerojatnost, potpuno je irelevantna za računanje cijena opcija.* **Cijena slučajnog zahtjeva jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev**.

2.4 Uvod u američke opcije

Definicija 2.29 Američka call opcija *s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo kupiti dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T.* Američka put opcija *s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo prodati dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeća T.*

Razlika američkih opcija u odnosu na opcije koje smo do sada promatrali (europske opcije) je ta da se pravo na kupnju (prodaju) može ostvariti i u trenucima prije dospijeća opcije.

Pretpostavimo da je američka call opcija napisana na prvu financijsku imovinu, te da je cijena izvršenja jednaka K. U trenutku $t = 1$, vrijednost tog američkog calla jednaka je $(S_1^1 - K)^+$, u trenutku $t = 2$ vrijednost je $(S_2^1 - K)^+$, i tako dalje do trenutka $t = T$ kada joj je vrijednost $(S_T^1 - K)^+$. Stavimo $Z_t := (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Tada na američku call opciju možemo gledati kao na adaptiran niz slučajnih varijabli $(Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$.

To vodi na definiciju američkog slučajnog zahtjeva (opcije).

Definicija 2.30 Američki slučajni zahtjev *je adaptiran niz slučajnih varijabli* $Z = (Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$.

Označimo sa U_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, cijenu (vrijednost) američkog slučajnog zahtjeva $Z = (Z_t : t = 0, 1, \ldots, T)$. Uočimo da je U_t općenito slučajna varijabla. Kako možemo odrediti cijene $(U_t : t = 0, 1, \ldots, T)$? Uočimo da je u trenutku T vrijednost U_T američkog slučajnog zahtjeva Z jednaka točno Z_T. Promotrimo trenutak $T - 1$. U tom trenutku vlasnik američke opcije je može odmah iskoristiti i dobiti iznos Z_{T-1}, ili je može iskoristiti u trenutku T, te dobiti iznos Z_T. U trenutku $T - 1$ iznos Z_T je nepoznat, ali znamo izračunati njegovu vrijednost (cijenu). To je vrijednost (u trenutku $T - 1$) opcije koja u trenutku T vrijedi Z_T. Ta vrijednost je po formuli (2.4) jednaka

$$S_{T-1}^0 \, \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}] = S_{T-1}^0 \, \mathbb{E}^* \left[\frac{Z_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_{T-1} \right] .$$

Racionalni investitor odlučit će se u trenutku $T - 1$ za veću od te dvije vrijednosti. Zato je

$$\begin{aligned} U_{T-1} &= \max \Big(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \, \mathbb{E}^*[\tilde{Z}_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}] \Big) , \\ &= \max \left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \, \mathbb{E}^* \left[\frac{Z_T}{S_T^0} \,|\, \mathcal{F}_{T-1} \right] \right) . \end{aligned}$$

Primjetimo da je U_{T-1} $\mathcal{F}_{T-1}$-izmjeriva slučajna varijabla koja je vrijednost američke opcije Z u trenutku $T - 1$.

Pomaknimo se jedan vremenski trenutak unatrag i promotrimo što se događa u $t = T - 2$. Investitor može odmah iskoristiti opciju i dobiti iznos Z_{T-2}, ili je ne iskorisiti. Ako ne iskorisiti opciju, u trenutku $T - 1$ ona će vrijediti U_{T-1}. Vrijednost (u trenutku $T-2$) opcije U_{T-1} s dospijećem $T-1$ po formuli (2.4) jednaka je

$$S^0_{T-2}\,\mathbb{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S^0_{T-1}}\,|\,\mathcal{F}_{T-2}\right].$$

Slijedi da je

$$U_{T-2} = \max\left(Z_{T-2}, S^0_{T-2}\,\mathbb{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S^0_{T-1}}\,|\,\mathcal{F}_{T-2}\right]\right).$$

Indukcijom unatrag dobivamo da je za sve $t = 1, \dots, T$,

$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, S^0_{t-1}\,\mathbb{E}^*\left[\frac{U_t}{S^0_t}\,|\,\mathcal{F}_t\right]\right). \tag{2.5}$$

Za slučaj $S^0_t = (1+r)^t$, iz gornje formule slijedi

$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}^*[U_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]\right).$$

Neka je $\tilde{U}_t := U_t/S^0_t$ diskontirana cijena američke opcije.

Propozicija 2.31 *Niz $(\tilde{U}_t\,:\,0 \le t \le T)$ je $\mathbb{P}^*$-supermartingal. To je najmanji $\mathbb{P}^*$ supermartingal koji dominira niz $(\tilde{Z}_t\,:\,0 \le t \le T)$.*

Dokaz: Iz jednakosti (2.5) slijedi

$$\frac{U_{t-1}}{S^0_{t-1}} = \max\left(\frac{Z_{t-1}}{S^0_{t-1}}, \mathbb{E}^*\left[\frac{U_t}{S^0_t}\,|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]\right),$$

t.j.,

$$\tilde{U}_{t-1} = \max(\tilde{Z}_{t-1}, \mathbb{E}^*[\tilde{U}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]).$$

Odavde čitamo:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{t-1} &\ge \tilde{Z}_{t-1}\,, t = 1, \dots T \qquad (\tilde{U} \text{ dominira } \tilde{Z}), \text{ i}\\
\tilde{U}_{t-1} &\ge \mathbb{E}^*[\tilde{U}_t\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]\,, t = 1, \dots T \qquad (\tilde{U} \text{ je supermartingal}).
\end{aligned}$$

Dakle, $(\tilde{U}_t\,:\,0 \le t \le T)$ je $\mathbb{P}^*$-supermartingal koji dominira niz $\tilde{Z}_t\,:\,0 \le t \le T)$.

Sada pokazujemo da je $(\tilde{U}_t : 0 \leq t \leq T)$ najmanji supermartingal koji dominira niz $(\tilde{Z}_t : 0 \leq t \leq T)$. Neka je $(X_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ supermartingal koji dominira $\tilde{Z}$, $X_t \geq \tilde{Z}_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Zbog $\tilde{Z}_T = \tilde{U}_T$ vrijedi $X_T \geq \tilde{U}_T$. Pretpostavimo da vrijedi $X_t \geq \tilde{U}_t$. Tada je

$$\begin{aligned} X_{t-1} &\geq \mathbb{E}^*[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \geq \mathbb{E}^*[\tilde{U}_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\,, \text{ i} \\ X_{t-1} &\geq \tilde{Z}_{t-1}\,. \end{aligned}$$

Slijedi

$$X_{t-1} \geq \max(\tilde{Z}_{t-1}, \mathbb{E}^*[\tilde{U}_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]) = \tilde{U}_{t-1}\,.$$

□

Napomena 2.32 *Za razliku od europskog slučajnog zahtjeva, diskontirana cijena američkog slučajnog zahtjeva nije nužno* $\mathbb{P}^*$*-martingal, već samo* $\mathbb{P}^*$*-supermartingal.*

2.5 CRR model

U ovom odjeljku ćemo detaljno proučiti Cox-Ross-Rubinsteinov model (CRR model), koji je diskretna verzija Black-Scholesovog modela.

Pretpostavke: na financijskom tržištu imamo jednu rizičnu financijsku imovinu (dionica), čija je cijena jednaka S_t u trenutku t, $0 \leq t \leq T$, te nerizičnu imovinu s fiksnim povratom $r > 0$ u jednom vremenskom trenutku: $S_t^0 = (1+r)^t$, $0 \leq t \leq T$. Rizičnu imovinu modeliramo na sljedeći način: između dva konsekutivna perioda, relativna promjena cijene je ili a ili b, gdje je $-1 < a < b$. To znači da je

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t(1+a) \\ \text{ili} \\ S_t(1+b) \end{cases}$$

U trenutku $t = 0$ dana je početna cijena S_0.

Konstruirajmo prostor elementarnih događaja. Uočimo da se u svakom trenutku t slučajnost manifestira samo u tome da li je relativna promjena cijene jednaka a ili b. Stavimo $\Omega_1 := \{a, b\}$, te neka je $\mathbb{P}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbb{P}_1(\{b\}) = p$, $\mathbb{P}_1(\{a\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Za prostor elementarnih događaja Ω uzeti ćemo Kartezijev produkt skupa $\{a, b\}$. Dakle,

$$\Omega = \Omega_1^T = \{a, b\}^T\,.$$

Na primjer, za $T = 4$, elementarni događaj (b, b, a, b) znači da je u trenucima $t = 1, 2, 4$ relativna promjena cijene dionice bila b, a u trenutku $t = 3$, relativna promjena je bila a. Uočimo da se Ω sastoji od T-torki $(\omega_1, \dots, \omega_T)$ gdje je za $t = 1, 2, \dots, T$, ω_t ili a ili b. Za vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost $\mathbb{P}_1^T$. Dakle, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1^T$.

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ definiramo niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots X_T$ na sljedeći način:

$$X_t(\omega) = \omega_t\,, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T)\,.$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable, s distribucijom

$$\mathbb{P}(X_t = a) = 1 - p\,, \qquad \mathbb{P}(X_t = b) = p\,.$$

Neka je $S_0 \in \mathbb{R}_+$ dano. Niz slučajnih varijabli $S = (S_t\ :\ t = 0, 1, \dots, T)$ definiramo sa

$$S_t := S_{t-1}(1 + X_t)\,, \quad t = 1, 2, \dots, T\,.$$

Uočimo da je

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = X_t\,.$$

Prema tome, niz $S = (S_t\ :\ t = 0, 1, \dots, T)$ možemo interpretirati kao niz cijena dionice kod koje je u svakom trenutku t relativna promjena cijene (t.j., povrat) jednaka ili a ili b. Te relativne promjene modelirane su slučajnim varijablama X_t, $t = 1, 2, \dots, T$.

Još preostaje definirati filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t\ :\ t = 0, 1, \dots, T)$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$. Po definiciji je $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ Dostupna informacija u trenutku t su cijene dionice do (uključivo) trenutka t. Dakle, imamo informaciju o $S_0, S_1, \dots, S_t$. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću $X_1, \dots, X_t$. To je jasno: iz relativnih promjena cijena možemo rekonstruirati cijene dionice, i obratno, iz cijena dionice možemo izračunati relativne promjene. Matematički se informacija dana s $S_1, \dots, S_t$ opisuje σ-algebrom $\mathcal{F}_t := \sigma(S_1, \dots, S_t)$. To je najmanja σ-algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S_1, \dots, S_t$ izmjerive. Alternativno, zbog jednake informacije sadržane u nizu $X_1, \dots, X_t$, vrijedi $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.

Primjer 2.33 Neka je $T = 3$. Izračunajmo eksplicitno filtraciju $\mathbb{F}$ tako da izračunamo atome odgovarajućih σ-algebri $\mathcal{F}_t$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 \quad &- \quad \{(a,a,a),(a,a,b),(a,b,a),(a,b,b)\}, \{(b,a,a),(b,a,b),(b,b,a),(b,b,b)\}\,,\\
\mathcal{F}_2 \quad &- \quad \{(a,a,a),(a,a,b)\}, \{(a,b,a),(a,b,b)\}, \{(b,a,a),(b,a,b)\}, \{(b,b,a),(b,b,b)\}\,,\\
\mathcal{F}_3 \quad &- \quad \{(a,a,a)\}, \{(a,a,b)\}, \{(a,b,a)\}, \{(a,b,b)\}, \{(b,a,a)\}, \{(b,a,b)\}, \{(b,b,a)\}, \{(b,b,b)\}\,.
\end{aligned}$$

Diskontirane cijene dionice definirane su kao i do sada: $\tilde{S}_t = S_t/S_t^0$. Sljedeća lema je glavni tehnički alat za rezultate ove točke.

Lema 2.34 *Neka je $\hat{\mathbb{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s $\mathbb{P}$.*

(a) Niz diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ je $\hat{\mathbb{P}}$-martingal ako i samo ako vrijedi

$$\hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r\,, \quad t = 1, 2, \ldots, T\,.$$

(b) Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $a < r < b$ i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$).

Dokaz: (a) Za $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbb{E}}[\tilde{S}_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{\frac{S_t}{S_t^0}}{\frac{S_{t-1}}{S_{t-1}^0}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{1+r}\hat{\mathbb{E}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \hat{\mathbb{E}}[1 + X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = 1 + r \\
\Leftrightarrow \quad & \hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r
\end{aligned}$$

(b) Po pretpostavci imamo $\hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r$. Međutim, $X_t \in \{a, b\}$, te $\hat{\mathbb{P}}(X_t = a) > 0$ i $\hat{\mathbb{P}}(X_t = b) > 0$. Pretpostavimo da ne vrijedi $r \in (a, b)$. Tada je ili $r \leq a < b$ ili $a < b \leq r$. U prvom slučaju je tada $\hat{\mathbb{P}}(X_t \geq r) = 1$ i $\hat{\mathbb{P}}(X_t > r) > 0$ otkud slijedi $\hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] > r$. Međutim, to je u kontradikciji s $\hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r$. Slučaj $a < b \leq r$ na isti način daje kontradikciju.

Nadalje računamo:

$$\begin{aligned}
r &= \hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= \hat{\mathbb{E}}[1_{(X_t=a)} X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] + \hat{\mathbb{E}}[1_{(X_t=b)} X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= a\hat{\mathbb{E}}[1_{(X_t=a)} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] + b\hat{\mathbb{E}}[1_{(X_t=b)} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= a\hat{\mathbb{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] + b\hat{\mathbb{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]
\end{aligned}$$

Također,
$$1 = \hat{\mathbb{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] + \hat{\mathbb{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\,.$$
Rješavanjem po $\hat{\mathbb{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$ i $\hat{\mathbb{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$ slijedi
$$\hat{\mathbb{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{b-r}{b-a}\,, \quad \hat{\mathbb{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{r-a}{b-a}\,. \tag{2.6}$$
Definiramo
$$\hat{p} := \frac{r-a}{b-a}$$
Zbog pokazanog $a < r < b$ slijedi $0 < \hat{p} < 1$. Uz ovako definirani $\hat{p}$, (2.6) postaje
$$\hat{\mathbb{P}}[X_t = a \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = 1 - \hat{p}\,, \quad \hat{\mathbb{P}}[X_t = b \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \hat{p}\,.$$
Iz gornje dvije jednakosti prvo čitamo da je
$$\hat{\mathbb{P}}[X_t = a] = \hat{\mathbb{E}}[1_{(X_t=a)}] = \hat{\mathbb{E}}[\hat{\mathbb{E}}[1_{(X_t=a)} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbb{E}}[1-\hat{p}] = 1 - \hat{p}\,,$$
i slično, $\hat{\mathbb{P}}[X_t = b] = \hat{p}$. To pokazuje jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_T$. Drugo što čitamo iz (2.6) je da je X_t nezavisna od σ-algebre $\mathcal{F}_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Budući da je $\mathcal{F}_{t-1}$ generirana s $X_1, \ldots, X_{t-1}$, slijedi da je X_t nezavisna s $X_1, \ldots, X_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots, T$. Odavde se vidi nezavisnost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$). $\square$

Uočimo da je uz pretpostavke gornje leme, X_t nezavisna od $\mathcal{F}_{t-1}$ (u odnosu na $\hat{\mathbb{P}}$), pa je uvjetno očekivanje $\hat{\mathbb{E}}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]$ ustvari jednako očekivanju $\hat{\mathbb{E}}[X_t] = (1-\hat{p})a + \hat{p}\, b$.

Lema 2.35 *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada je $r \in (a, b)$.*

Dokaz: Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Po Lemi 2.34 (a) (primjenjenoj na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$), slijedi da je $\mathbb{E}^*[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = r$. Sada iz Leme 2.34 (b) slijedi da je $a < r < b$. $\square$

Gornju lemu možemo jednostavno objasniti i ekonomskim argumentom. Pretpostavimo da $r \notin (a, b)$, i na primjer, $r \leq a < b$. Tada je $S_T(\omega) \geq S_0(1+a)^T \geq S_0(1+r)^T$ za sve $\omega \in \Omega$, te postoji ω' takav da je $S_T(\omega') > S_0(1+r)^T$. Dakle, posudimo li iz banke S_0 kuna i investiramo u jednu dionicu rizične imovine (te čekamo da dođe vrijeme T), ne možemo imati manje od

$S_0(1+r)^T$ koliko smo u trenutku T dužni banci, a s pozitivnom vjerojatnošću ćemo imati strogo više od tog iznosa.

Sada želimo pokazati obrat Leme 2.35, t.j., ako je $r \in (a,b)$, tada tržište ne dopušta arbitražu. To ćemo dokazati tako da konstruiramo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Uz $\mathbb{P}^*$, proces diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t : t = 0,1,\dots,T)$ treba biti martingal. Po Lemi 2.34, će tada vrijediti $\mathbb{E}^*[X_1] = r$. Ako je $p^* := \mathbb{P}^*(X_1 = b)$, tada je $r = \mathbb{E}^*[X_1] = (1-p^*)a + p^*b$, otkud dobivamo

$$p^* = \frac{r-a}{b-a}\,.$$

Definirajmo sada p^* gornjom formulom. Uz pretpostavku $a < r < b$ vrijedi $0 < p^* < 1$. Neka je $\mathbb{P}_1^*$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbb{P}_1^*(\{b\}) = p^*$, te neka je $\mathbb{P}^* := (\mathbb{P}_1^*)^T$. Vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna je vjerojatnosti $\mathbb{P}$. Štoviše, slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_T$ su nezavisne u odnosu na $\mathbb{P}^*$. Nadalje, za sve $t = 1,2,\dots,T$ vrijedi

$$\mathbb{P}^*(X_t = a) = 1 - p^*\,, \qquad \mathbb{P}^*(X_t = b) = p^*\,.$$

Budući da je $\mathbb{E}^*[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^*[X_t] = (1-p^*)a + p^*b = r$, iz Leme 2.34 (a) slijedi da je $(\tilde{S}_t : t = 0,1,\dots,T)$ martingal u odnosu na $\mathbb{P}^*$. Dakle, ovako konstruirana vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera. Na taj način smo dokazali prvi dio sljedeće propozicije.

Propozicija 2.36 *(a) CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r < b$.*

(b) Ako je $a < r < b$, tada je CRR model potpun.

Dokaz: (b) Neka su $\mathbb{P}^*$ i $\hat{\mathbb{P}}$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Po Lemi 2.34 (b), slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_T$ su tada nezavisne, jednako distribuirane (i po $\mathbb{P}^*$ i po $\hat{\mathbb{P}}$), te vrijedi

$$\mathbb{P}^*(X_t = a) = 1 - p = \hat{\mathbb{P}}(X_t = a)\,, \quad \mathbb{P}^*(X_t = b) = p = \hat{\mathbb{P}}(X_t = b)\,.$$

Zbog

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(\{(\omega_1,\dots,\omega_T)\}) &= \mathbb{P}^*(X_1 = \omega_1, \dots, X_T = \omega_T) \\ &= \mathbb{P}^*(X_1 = \omega_1) \cdots \mathbb{P}^*(X_T = \omega_T)\,, \end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(\{(\omega_1,\dots,\omega_T)\}) &= \hat{\mathbb{P}}(X_1=\omega_1,\dots,X_T=\omega_T) \\
&= \hat{\mathbb{P}}(X_1=\omega_1)\cdots\hat{\mathbb{P}}(X_T=\omega_T)\,,
\end{aligned}$$

slijedi

$$\mathbb{P}^*(\{(\omega_1,\dots,\omega_T)\}) = \hat{\mathbb{P}}(\{(\omega_1,\dots,\omega_T)\})$$

za sve $(\omega_1,\dots,\omega_T)\in\Omega$ (ovdje su $\omega_1,\dots,\omega_t\in\{a,b\}$). Zato je $\mathbb{P}^*=\hat{\mathbb{P}}$, što znači da je martingalna mjera jedinstvena. Po Teoremu 2.27, tržište je potpuno. □

Označimo sa C_t (odnosno P_t), $t=0,1,\dots,T$, vrijednost call opcije (odnosno put opcije) na jednu dionicu sa cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T. Te vrijednosti su na dan dospijeća jednake

$$C_T=(S_T-K)^+\,,\quad P_T=(K_S-T)^+\,.$$

Nadalje, neka je $\mathbb{P}^*$ jedinstvena martingalna mjera. Tada po formuli (2.4) imamo

$$C_t = S_t^0\,\mathbb{E}^*\left[\frac{C_T}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = (1+r)^{-(T-t)}\mathbb{E}^*[(S_T-K)^+\,|\,\mathcal{F}_t] \tag{2.7}$$

$$P_t = S_t^0\,\mathbb{E}^*\left[\frac{P_T}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = (1+r)^{-(T-t)}\mathbb{E}^*[(K-S_T)^+\,|\,\mathcal{F}_t]\,. \tag{2.8}$$

Vrijednosti C_t i P_t zadovoljavaju sljedeći *call-put paritet*:

$$\begin{aligned}
C_t-P_t &= (1+r)^{-(T-t)}\mathbb{E}^*[(S_T-K)^+-(K-S_T)^+\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= (1+r)^{-(T-t)}\mathbb{E}^*[S_T-K\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= (1+r)^{-(T-t)}\mathbb{E}^*[S_T\,|\,\mathcal{F}_t]-K(1+r)^{-(T-t)} \\
&= S_t-K(1+r)^{-(T-t)}
\end{aligned}$$

Uočimo da je formulom (2.7) dan izraz za cijenu call opcije pomoću očekivanja u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Sada ćemo to očekivanje eksplicitno izračunati.

Propozicija 2.37 *Neka je $c:\{0,1,\dots,T\}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana formulom*

$$c(t,x) := (1+r)^{-(T-t)}\sum_{j=0}^{T-t}\binom{T-t}{j}(1-p^*)^j(p^*)^{T-t-j}\left(x(1+a)^j(1+b)^{T-t-j}-K\right)^+\,. \tag{2.9}$$

Tada vrijedi $C_t = c(t, S_t)$ *za svaki* $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. *Specijalno, u trenutku* $t = 0$ *cijena call opcije je*

$$C_0 = c(0, S_0) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T} \binom{T}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-j} (S_0(1+a)^j(1+b)^{T-j} - K)^+ . \tag{2.10}$$

Dokaz: Zbog $S_t = S_{t-1}(1 + X_t)$ vrijedi da je $S_T = S_t \prod_{i=t+1}^{T}(1 + X_i)$, $t = 0, 1, \dots, T$. Stoga je po formuli (2.7)

$$C_t = (1 + r)^{-(T-t)} \mathbb{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^{T} (1 + X_i) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] .$$

Računamo

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^{T} (1 + X_i) - K)^+ \mid S_t = x] \\
= \; & \mathbb{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^{T} (1 + X_i) - K)^+ \mid S_t = x] \\
= \; & \mathbb{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^{T} (1 + X_i) - K)^+] \;\; \text{(zbog nezavisnosti } X_i, i \geq t+1, \text{ i } S_t) \\
= \; & \mathbb{E}^*[(x \prod_{i=1}^{T-t} (1 + X_i) - K)^+] \;\; \text{(zbog } X_i \text{ su njd uz } \mathbb{P}^*) \\
= \; & \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} (1 - p^*)^j (p^*)^{T-t-j} \left(x(1 + a)^j (1 + b)^{T-t-j} - K\right)^+ ,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz distribucije (uz $\mathbb{P}^*$) slučajnih varijabli X_j. Tvrdnja propozicije slijedi direktno iz gornjih računa. □

Budući da je model koji promatramo potpun, call opcija se može replicirati. Sada ćemo eksplicitno izračunati replicirajuću strategiju $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1), 0 \leq t \leq T)$. Slijedimo li strategiju ϕ, vrijednost portfelja u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$ jednaka je $\phi_t^0(1 + r)^t + \phi_t^1 S_t$. S druge strane, budući da strategija replicira call opciju, vrijednost replicirajućeg portfelja u trenutku

t jednaka je vrijednosti opcije $C_t = c(t, S_t)$ u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$. Dakle vrijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t = c(t, S_t)\,.$$

Pomnožimo gornju jednakost indikatorom $1_{(X_t=a)}$. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{(X_t=a)} + \phi_t^1 S_t 1_{(X_t=a)} = c(t, S_t) 1_{(X_t=a)}\,.$$

Uvrstimo $S_t\, 1_{(X_t=a)} = S_{t-1}(1+X_t)\, 1_{(X_t=a)} = S_{t-1}(1+a)\, 1_{(X_t=a)}$ u gornju jednadžbu. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{(X_t=a)} + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a)\, 1_{(X_t=a)} = c(t, S_{t-1}(1+a))\, 1_{(X_t=a)}\,.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$ u gornjoj formuli, te iskoristimo da su ϕ_t^0, ϕ_t^1 i S_{t-1} izmjerive u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$, te da je X_t nezavisna s $\mathcal{F}_{t-1}$. Dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t \mathbb{P}^*(X_t = a) + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a)\mathbb{P}^*(X_t = a) = c(t, S_{t-1}(1+a))\mathbb{P}^*(X_t = a)\,.$$

Podijelimo s $\mathbb{P}^*(X_t = a)$ i dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a) = c(t, S_{t-1}(1+a))\,.$$

Na isti način možemo dobiti jednakost

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+b) = c(t, S_{t-1}(1+b))\,.$$

Oduzmimo prvu jednakost od druge. Slijedi:

$$\phi_t^1 S_{t-1}((1+b) - (1+a)) = c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))\,,$$

odnosno

$$\phi_t^1 = \frac{c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)} = \Delta(t, S_{t-1})\,,$$

gdje je $\Delta : \{1, \dots, T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$\Delta(t, x) := \frac{c(t, x(1+b)) - c(t, x(1+a))}{x(b-a)}\,. \tag{2.11}$$

Izraz $\Delta(t, x)$ zovemo *delta opcije.*

Kako računamo replicirajuću strategiju call opcije? U trenutku $t = 0$ vrijednost opcije jednaka je C_0. Izračunamo $\phi_1^1 = \Delta(1, S_0)$ što možemo, jer nam je S_0 poznato u trenutku $t = 0$. Vrijednost od ϕ_1^0 izračunamo iz jednakosti $\phi_1^0 + \phi_1^1 S_0 = C_0$. Riječima, u trenutku $t = 0$ raspolažemo iznosom C_0. Dio $\phi_1^1 S_0$ tog iznosa uložimo u dionice, a ostatak stavimo u banku (ili posudimo iz banke u slučaju $\phi_1^1 S_0 > C_0$). U trenutku $t = 1$ sazna se cijena dionice S_1. Izračunamo $\Delta(2, S_1)$ što je ϕ_2^1. Rebalansiramo portefelj tako da sadrži ϕ_2^1 dionica u vrijednosti $\phi_2^1 S_1$. Razlika ostaje u novcu. Preciznije, vrijedi

$$V_1(\phi) = \phi_1^0(1 + r) + \phi_1^1 S_1 = \phi_2^0(1 + r) + \phi_2^1 S_1\,,$$

otkud izračunamo

$$\phi_2^0 = \frac{1}{1 + r}\left(V_1(\phi) - \phi_2^1 S_1\right).$$

Na isti način računamo replicirajući portfelj u ostalim vremenskim trenucima.