Poglavlje 1

Modeli u diskretnom vremenu - jednoperiodni modeli

1.1 Opis modela: imovine, portfelji i arbitraža

Promatramo financijsko tržište s $d+1$ financijskom imovinom. To mogu biti dionice, obveznice, valuta ili novac. U ovom poglavlju ćemo pretpostavljati da se tom imovinom može trgovati u dva vremenska trenutka: $t = 0$ i $t = 1$. Trenutak $t = 0$ možemo shvatiti kao sadašnjost, a trenutak $t = 1$ je neko fiksno vrijeme u budućnosti. Između ta dva trenutka imamo jedan period otkud ime modelu.

U trenutku $t = 0$ cijenu (vrijednost) i-te financijske imovine označit ćemo sa S_0^i, $i = 0, 1, \ldots, d$. Pretpostavit ćemo da nam je ta cijena poznata, te da je $S_0^i \geq 0$ za sve i. Familija

$$S_0 = (S_0^0, S_0^1, \ldots, S_0^d) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$$

naziva se *sustav cijena*.

Označimo sa S_1^i cijenu i-te imovine u trenutku $t = 1$. U trenutku $t = 0$ (sada) ta cijena nam je nepoznata zbog slučajnih fluktuacija. Zato ćemo pretpostaviti da je S_1^i slučajna varijabla. Kada govorimo o slučajnim varijablama pretpostavljamo da u pozadini postoji neki vjerojatnosni prostor. Neka je to $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prisjetimo se da je Ω prostor elementarnih događaja ω. O elementarnim događajima $\omega \in \Omega$ razmišljamo kao o mogućim stanjima svijeta u budućnosti $t = 1$, ili kao o mogućim scenarijima. Ukoliko je stvarno stanje svijeta jednako ω, tada je cijena i-te imovine u trenutku $t = 1$ jednaka $S_1^i(\omega) \in \mathbb{R}_+$.

Osnovna pretpostavka: U ovom poglavlju ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je prostor elementarnih događaja konačan, tj. da se može dogoditi najviše konačno različitih scenarija. Dakle, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$ za neki $K \in \mathbb{N}$.

Za σ-algebru događaja $\mathcal{F}$ ćemo za sada uzeti partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$, ali to općenito nije nužno. Uz tu konvenciju, svako preslikavanje sa Ω u $\mathbb{R}$ je slučajna varijabla. Za vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ pretpostavljamo da zadovoljava uvjet $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$, tj. da su svi scenariji zaista mogući.

Pretpostavit ćemo da naše financijsko tržište sadrži jednu *nerizičnu* imovinu i specifirat ćemo da je to imovina s indeksom 0. Preciznije, pretpostavljamo da vrijedi:

$$S_0^0 = 1 \quad \text{i} \quad S_1^0 \equiv 1 + r\,,$$

gdje je $r \in \mathbb{R}$ konstanta. O S^0 mislimo kao o novcu u banci uloženom uz kamatnu stopu r u promatranom periodu. Financijski je opravdano zahtijevati $r \geq 0$, dok je matematički dovoljno $r > -1$. Za ostale imovine pretpostavljamo da su *rizične*, tj. da su za $i = 1, 2, \ldots, d$, S_1^i (nekonstantne) slučajne varijable.

Uvedimo sljedeću oznaku: $S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$, $t = 0, 1$.

Definicija 1.1 Portfelj *je vektor* $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$*, gdje* ϕ^i *predstavlja broj jedinica i-te financijske imovine koju investitor posjeduje u trenutku* $t = 0$.

Primjetimo da definicija portfelja dozvoljava da je $\phi^i < 0$. Na primjer, ako je $\phi^0 < 0$ znači da smo iz banke *posudili* $|\phi^0|$ novčanih jedinica. Pretpostvka $\phi^i < 0$ za neki $i = 1, 2, \ldots, d$, odgovara *short sale* imovine i. Vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$ jednaka je

$$V_0(\phi) = \sum_{i=0}^{d} \phi^i S_0^i = \phi \cdot S_0\,,$$

gdje $\cdot$ označava skalarni produkt u $\mathbb{R}^{d+1}$.

Neka je $\omega \in \Omega$ stvarno stanje svijeta. Tada su cijene financijskih imovina u trenutku $t = 1$ jednake $S_1(\omega) = (S_1^0, S_1^1(\omega), \ldots, S_1^d(\omega))$, pa je vrijednost portfelja ϕ u $t = 1$ jednaka

$$\phi \cdot S_1(\omega) = \sum_{i=0}^{d} \phi^i S_1^i(\omega) = \phi^0(1 + r) + \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i(\omega)\,.$$

To znači da je vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 1$ slučajna varijabla $\phi \cdot S$.

Pretpostavimo da smo u trenutku $t = 0$ konstruirali portfelj ϕ čija je vrijednost $V_0(\phi) = 0$. Na primjer, iz banke smo posudili izvjestan iznos novca $\phi_0^0 < 0$, te za taj iznos kupili neke dionice. U trenutku $t = 1$ pokazat će se koje je stvarno stanje svijeta $\omega \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$. Pretpostavimo da za svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $\phi \cdot S_1(\omega) \geq 0$, te da postoji barem jedan ω' takav da je $\phi \cdot S_1(\omega') > 0$. To znači da uz ulog jednak nuli (vrijednost protfelja ϕ u $t = 0$), sigurno ne možemo izgubiti, te uz barem jedan scenarij ostvarujemo strogo pozitivnu dobit. Takav portfelj zove se arbitraža.

Definicija 1.2 *Portfelj ϕ naziva se* arbitraža *(ili* mogućnost arbitraže*), ako vrijedi $\phi \cdot S_0 = 0$, ali je $\phi \cdot S_1 \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s. i $\mathbb{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$.*

Intuitivno, arbitraža je portfelj koji nije izložen riziku gubitka, i s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit. Postojanje arbitraže na tržištu ukazuje na neefikasnost tržišta. U realnom životu na tržištu je teško pronaći mogućnost arbitraže.

Napomena 1.3 *Na koji način vjerojatnost $\mathbb{P}$ ulazi u definiciju arbitraže? Jednostavno se vidi da je to samo kroz činjenicu da je $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$. U paragrafu prije definicije, arbitraža je definirana bez pozivanja na vjerojatnost $\mathbb{P}$.*

Uvjet ekvivalentan nepostojanju arbitraže može se iskazati na sljedeći način: svaka investicija u rizičnu imovinu koja s pozitivnom vjerojatnošću donosi bolji rezultat nego investicija u nerizičnu imovinu izložena je riziku. Matematički se to iskazuje ovako:

Lema 1.4 *Sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(a) Model tržišta dopušta arbitražu.

(b) Postoji vektor $(\phi^1, \ldots, \phi^d) \in \mathbb{R}^d$ takav da je

$$\sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i \geq (1+r) \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_0^i \ \mathbb{P} g.s. \quad i \quad \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i > (1+r) \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_0^i] > 0\,.$$

Dokaz: (a)$\Rightarrow$(b): Neka je ϕ arbitraža. Tada je $0 = \phi \cdot S_0 = \phi^0 + \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_0^i$. Slijedi,

$$\sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i - (1+r) \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_0^i = \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i + (1+r)\phi^0 = \phi \cdot S^1\,.$$

Budući da je $\phi \cdot S_1$ $\mathbb{P}$-g.s. nenegativno i strogo pozitivno s pozitivnom vjerojatnošću, isto mora vrijediti i za lijevu stranu $\sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i - (1+r)\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i$.

(b)$\Rightarrow$(a): Neka je $(\phi^1, \dots, \phi^d)$ kao u pretpostavci (b). Definiramo $\phi^0 := -\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i$. Tvrdimo da je portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ arbitraža. Po definiciji je $\phi \cdot S_0 = \phi^0 + \sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i = 0$. Nadalje, $\phi \cdot S_1 = (1+r)\phi^0 + \sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i = -(1+r)\sum_{i=1}^d \phi^i S_0^i + \sum_{i=1}^d \phi^i S_1^i$ što je $\mathbb{P}$-g.s. nenegativno i strogo pozitivno s pozitivnom vjerojatnošću. □

1.2 Nepostojanje arbitraže i martingalna mjera

U prethodnom odjeljku uveli smo pojam arbitraže pomoću ekonomskog uvjeta - nerizičan profit nije moguć, te smo komentirali da je na stvarnim financijskom tržištima teško pronaći mogućnost arbitraže. Zato ćemo nadalje modelirati samo tržišta koja ne dopuštaju arbitražu. Kako možemo provjeriti da model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu? Po definiciji bismo trebali provjeriti da niti jedan portfelj nije arbitraža. To nije tako jednostavno, te ćemo u ovom odjeljku dati operativniji uvjet nepostojanja arbitraže.

Definicija 1.5 *Vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *naziva se* martingalna mjera *ili* mjera neutralna na rizik*, ako vrijedi*

$$S_0^i = \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right], \quad i = 0, 1, \dots, d\,. \tag{1.1}$$

Primjetimo da je $S_1^i/(1+r)$ diskontirana vrijednost i-te financijske imovine u $t = 1$. Definicija kaže da je očekivanje te diskontirane vrijednosti po martingalnoj mjeri $\mathbb{P}^*$ jednako cijeni imovine u trenutku $t = 0$. Na formulu (1.1) možemo gledati kao na formulu određivanja cijene imovine - cijena je očekivanje diskontirane vrijednosti, ali ne uz objektivnu mjeru $\mathbb{P}$, nego uz martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. U sljedećem poglavlju objasnit ćemo naziv *martingalna mjera*. Zašto $\mathbb{P}^*$ zovemo mjerom neutralnom na rizik vidimo ovako: diskontirana vrijednost nerizične imovine S^0 u $t = 1$ jednaka je $S_1^0/(1+r) = 1$, te je formula (1.1) trivijalno ispunjena. Uz $\mathbb{P}^*$ očekivana vrijednost rizične imovine jednaka je očekivanoj vrijednosti nerizične imovine. Dakle, ta mjera je neutralna na rizik, za razliku od objektivne mjere $\mathbb{P}$ uz koju diskontiran rizična imovina ima veće očekivanje od nerizične (ako već preuzimamo rizik, očekujemo veći povrat).

Za vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ kažemo da je ekvivalentna s $\mathbb{P}$ i pišemo $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$, ako, za $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}^*[A] = 0$ ako i samo ako $\mathbb{P}[A] = 0$. Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru Ω na kojem je $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$, vrijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ ako i samo ako je $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Uvedimo familiju svih martingalnih mjera ekvivalentnih s $\mathbb{P}$:

$$\mathcal{P} := \{\mathbb{P}^* \,:\, \mathbb{P}^* \text{ je martingalna mjera i } \mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}\}\,.$$

Sljedeći osnovni rezultat je najednostavniji oblik tzv. *fundamentalnog teorema određivanja cijena imovine.*

Teorem 1.6 *Model tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (tj. ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera).*

Dokaz: $\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbb{P}^*$. Neka je $\phi \in \mathbb{R}^{d+1}$ portfelj takav da je $\phi \cdot S_1 \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s. i $\mathbb{P}[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$. Budući da je $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$, vrijedi $\phi \cdot S_1 \geq 0$ $\mathbb{P}^*$-g.s. i $\mathbb{P}^*[\phi \cdot S_1 > 0] > 0$. Slijedi da je $\mathbb{E}^*[\phi \cdot S_1] > 0$. Uočimo da je po pretpostavci

$$\phi^i S_0^i = \phi^i \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{\phi^i S_1^i}{1+r}\right],$$

otkud

$$\phi \cdot S_0 = \sum_{i=0}^d \phi^i S_0^i = \sum_{i=0}^d \mathbb{E}^*\left[\frac{\phi^i S_1^i}{1+r}\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r}\right] > 0\,.$$

Stoga ϕ nije arbitraža. □

Dokaz drugog smjera je nešto složeniji, i trebat će nam sljedeći pomoćni rezultati iz linearne algebre.

Lema 1.7 *(a) Neka je $C \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i konveksan skup takav da $0 \notin C$. Tada postoje linearan funkcional $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\alpha > 0$ takvi da je $\xi(x) \geq \alpha$ za sve $x \in C$. Specijalno, hiperravnina $\{x \,:\, \xi(x) = 0\}$ ne presijeca C.*

(b) (teorem separacije) Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan i konveksan, te neka je $V \subset \mathbb{R}^n$ vektorski potprostor takav da je $K \cap V = \emptyset$. Tada postoji linearan funkcional $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\xi(x) > 0$ za sve $x \in K$, i $\xi(x) = 0$ za sve $x \in V$.

Dokaz: (a) Neka je $r > 0$ takav da je $B(r) \cap C \neq \emptyset$. Ovdje $B(r)$ označava zatvorenu kuglu radijusa r sa središtem u ishodištu. Norma $\| \| : B(r) \cap C \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija i postiže minimum u $x_0 \in B(r) \cap C$. Specijalno, $\|x\| \geq \|x_0\|$ za svaki $x \in C$. Budući da je C konveksan, za svaki $s \in [0, 1]$ vrijedi $x_0 + s(x - x_0) = sx + (1 - s)x_0 \in C$. Stoga je $\|x_0 + s(x - x_0)\| \geq \|x_0\|$, odnosno $s^2\|x - x_0\|^2 + 2sx_0 \cdot (x - x_0) \geq 0$ za sve $s \in [0, 1]$. Odavde slijedi $x_0 \cdot x \geq \|x_0\|^2$ za sve $x \in C$. Definiramo $\xi(x) := x_0 \cdot x$ i $\alpha := \|x_0\|^2$.
(b) Definiramo skup $C := K - V = \{x \in \mathbb{R}^n : x = y - z, y \in K, z \in V\}$. Tada je C konveksan i zatvoren. Po (a) postoje linearan funkcional ξ i $\alpha > 0$ takvi da je $\xi(x) \geq \alpha$ za sve $x \in C$. To znači $\xi(y) - \xi(z) \geq \alpha$ za sve $y \in K$ i sve $z \in V$. Fiksirajmo $y \in K$. Tada je $\xi(z) \leq \xi(y) - \alpha$ za sve $z \in V$. Budući da je V vektorski prostor, to povlači $\xi(z) = 0$ za sve $z \in V$ $(z \in V \Rightarrow -z \in V)$. Slijedi $\xi(y) \geq \alpha > 0$ za sve $y \in K$. □

Primjetimo, nadalje, da se skup svih slučajnih varijabli na $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ može identificirati s vektorskim prostorom $\mathbb{R}^K$. Zaista, ako je X slučajna varijabla na Ω, možemo je identificirati s K-torkom $(X(\omega_1), \ldots, X(\omega_K)) \in \mathbb{R}^K$.
Dokaz: (nastavak dokaza Teorema 1.6)
Neka je $\mathcal{V} := \{\phi \cdot S_1 : \phi \text{ portfelj takav da je } \phi \cdot S_0 = 0\}$. Tada je $\mathcal{V}$ vektorski potprostor prostora svih slučajnih varijabli na Ω, te ga shvaćamo kao vektorski potprostor od $\mathbb{R}^K$. Neka je, nadalje, Γ skup svih pozitivnih slučajnih varijabli na Ω (X je pozitivna ako je $X(\omega) \geq 0$ za sve $\omega \in \Omega$ i postoji ω' takav da je $X(\omega') > 0$). Primjetimo da je Γ konveksan podskup od $\mathbb{R}^K$. Iz pretpostavke da tržište ne dopušta arbitražu slijedi da je $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$. Zaista, ako je ϕ portfelj takav da je $\phi \cdot S_1 \in \mathcal{V} \cap \Gamma$, tada je ϕ arbitraža. Definirajmo $K := \{X \in \Gamma : \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1\}$. Tada je $K \subset \Gamma$ konveksan i kompaktan skup za koji vrijedi $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 1.7 (b)), postoji $\lambda = (\lambda(\omega) : \omega \in \Omega)$ takav da vrijedi:

(i) $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$ za sve $X \in K$,

(ii) $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)(\phi \cdot S_1)(\omega) = 0$ za svaki portfelj ϕ takav da je $\phi \cdot S_0 = 0$.

Iz svojstva (i) slijedi da je $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ (zaista, dovoljno je uzeti X tako da je $X(\omega) = 1$ i $X(\omega') = 0$ za sve ostale ω'). Definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ formulom:

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} .$$

Zbog $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ slijedi $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$. Nadalje, neka je $\phi = (\phi^0, \phi^1, 0, \ldots, 0)$ portfelj takav da je $0 = \phi \cdot S_0 = \phi^0 + \phi^1 S_0^1$. Uočimo da je tada $S_0^1 = -\phi^0/\phi^1$. Po (ii) imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)(\phi \cdot S_1)(\omega) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) \left(\phi^0(1+r) + \phi^1 S_1^1(\omega)\right) \\ &= \phi^0(1+r) \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) + \phi^1 \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) S_1^1(\omega) \end{aligned}$$

Podijelimo sa $\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')$. Slijedi:

$$0 = \phi^0(1+r) + \phi^1 \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}^*(\{\omega\}) S_1^1(\omega)\,.$$

Odavde dobivamo

$$\frac{1}{1+r} \sum_{\omega\in\Omega} S_1^1(\omega) \mathbb{P}^*(\{\omega\}) = -\frac{\phi^0}{\phi^1} = S_0^1\,,$$

odnosno

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^1}{1+r}\right] = S_0^1\,.$$

Na isti način odabirom odgovarajućeg portfelja pokaže se da je

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] = S_0^i\,,\ i = 1, \ldots, d\,.$$

Dakle, $\mathbb{P}^*$ je martingalna mjera. □

U dokazu smo uveli linearni prostor $\mathcal{V} := \{\phi \cdot S_1 \,:\, \phi \text{ portfelj takav da je } \phi \cdot S_0 = 0\}$. Neka je

$$\mathcal{W} := \{\phi \cdot S_1 \,:\, \phi \text{ portfelj}\}$$

linearni prostor svih isplata koje se mogu generirati pomoću nekog portfelja. Uočimo da je $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Slučajne varijable iz $\mathcal{W}$ nazivat ćemo *dostižnim isplatama*. Definirajmo preslikavanje $\pi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: za $W = \phi \cdot S_1 \in \mathcal{W}$ neka je

$$\pi(W) := \mathbb{E}^*\left[\frac{W}{1+r}\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r}\right]\,.$$

Ovdje je $\mathbb{E}^*$ očekivanje s obzirom na $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$. Realan broj $\pi(W)$ zovemo *cijena* od W. Uočimo da je π linearan funkcional na potprostoru $\mathcal{W}$: ako su $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$, te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tada je

$$\pi(\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2) = \alpha_1 \pi(W_1) + \alpha_2 \pi(W_2) .$$

Primjetimo nadalje da ako je $W = \phi \cdot S_1$, tada je $\pi(W) = \phi \cdot S_0$. Zaista, to slijedi iz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left[\frac{\phi \cdot S_1}{1+r}\right] &= \mathbb{E}^*\left[\frac{\sum_{i=0}^d \phi^i S_1^i}{1+r}\right] \\ &= \sum_{i=0}^d \phi^i \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] \\ &= \sum_{i=0}^d \phi^i S_0^1 , \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (1.1). Specijalno, cijena od W ne ovisi o portfelju koji generira W (u principu može biti više takvih portfelja). Štoviše, cijena $\pi(W)$ ne ovisi o martingalnoj mjeri $\mathbb{P}^*$ po kojoj se računa očekivanje.

Uočimo da su $S_1^i \in \mathcal{W}$. Zaista, dovoljno je izabrati portfelj ϕ takav da je $\phi^i = 1$, te $\phi^j = 0$ za sve $j \neq i$. U tom slučaju imamo da je cijena od S_1^i jednaka

$$\pi(S_1^i) = \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] = S_0^i .$$

1.3 Izvedene vrijednosnice

Na stvarnim financijskim tržištima se uz primarne financijske imovine još trži i vrijednosnicama čija isplata ovisi na nelinearan način o primarnim imovinama $S^0, S^1, \ldots, S^d$. Takve vrijednosnice nazivaju se *izvedenim vrijednosnicama*, *opcijama* ili *slučajnim zahtjevima.*

Primjer 1.8 U *forward* ugovoru jedan agent pristaje prodati drugom agentu neku financijsku imovinu u trenutku $t = 1$ po cijeni K koja je specificirana u trenutku 0. Prema tome, vlasnik forward ugovora na i-tu financijsku imovinu dobiva razliku između stvarne tržišne cijene S_1^i i *dostavne cijene* (*delivery price*) K u slučaju da je $S_1^i > K$. Obratno, ako je $S_1^i < K$, tada vlasnik forward ugovora gubi iznos $K - S_1^i$. Prema tome, forward ugovor odogovara slučajnoj isplati

$$C^{\mathrm{fw}} = S_1^i - K\,.$$

Primjer 1.9 *Call opcija* na i-tu imovinu je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne obavezu, na kupovinu i-te imovine u trenutku 1 za fiksnu cijenu K, koja se naziva *cijena izvršenja.* To odgovara slučajnoj isplati oblika

$$C^{\mathrm{call}} = (S_1^i - K)^+ = \begin{cases} S_1^i - K & \text{ako je } S_1^i > K\,, \\ 0 & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Obratno, *put opcija* daje pravo, ali ne obavezu, na prodaju imovine u trenutku 1 po cijeni izvršenja K. To odgovara slučajnoj isplati oblika

$$C^{\mathrm{put}} = (K - S_1^i)^+ = \begin{cases} K - S_1^i & \text{ako je } K > S_1^i\,, \\ 0 & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Call i put opcija s istom cijenom izvršenja K povezani su relacijom

$$C^{\mathrm{call}} - C^{\mathrm{put}} = S_1^i - K\,.$$

Iz linearnosti funkcionala cijene π i iz gornje relacije slijedi da je

$$\pi(C^{\mathrm{call}}) - \pi(C^{\mathrm{put}}) = S_0^i - \frac{K}{1+r}\,. \tag{1.2}$$

Ta jednakost naziva se *call - put paritet.*

Primjer 1.10 Opcija na vrijednost $W = \phi \cdot S_1 \in \mathcal{W}$ portfelja nekoliko rizičnih imovina se ponekad naziva *košara* (*basket option*). Na primjer, košara može biti oblika $(W - K)^+$.

Definicija 1.11 Slučajni zahtjev (contingent claim) *je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je*

$$0 \le C < \infty \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Slučajni zahtjev C zove se izvedenica (derivative) *primarnih imovina $S^0, S^1, \ldots, S^d$ ako je C funkcija od S_1. Preciznije, postoji (Borelova) funkcija $f : \mathbb{R}^{d+1} \to [0, \infty)$ takva da je*

$$C = f(S_1^0, S_1^1, \ldots, S_1^d)\,.$$

Call i put opcija su primjeri izvedenica.

Sada nam je cilj odrediti cijenu slučajnog zahtjeva C. Ponovimo, naše financijsko tržište sastoji se od $d+1$ financijske imovine. Njihove cijene u trenutku 0 čine sustav cijena $S_0^0, S_0^1, \dots, S_0^d$. Taj sustav cijena možemo zapisati pomoću funkcionala π kao $\pi(S_1^0), \pi(S_1^1), \dots, \pi(S_1^d)$. Fundamentalna pretpostavka je da model tržišta ne dopušta arbitražu. Uočimo da na slučajni zahtjev C možemo gledati kao na novi financijski instrument na tržištu koji se u trenutku $t=0$ prodaje za neku cijenu π^C. Preciznije, na C gledamo kao na $d+2$-gu imovinu S^{d+1} za koju vrijedi

$$S_0^{d+1} = \pi^C \quad \text{i} \quad S_1^{d+1} = C\,. \tag{1.3}$$

Cijenu π^C tog novog instrumenta određujemo tako da na tržište *ne* uvodimo arbitražu. Drugim riječima, želimo da model tržišta koji se sastoji od $d+1$ primarne imovine i slučajnog zahtjeva C i dalje bude bez arbitraže.

Definicija 1.12 *Realni broj $\pi^C \geq 0$ zove se* ne-arbitražna cijena (arbitrage-free price) *slučajnog zahtjeva C ako je model tržišta proširen pomoću (1.3) bez arbitraže. Skup svih ne-arbitražnih cijena od C označava se sa $\Pi(C)$. Donju i gornju među od $\Pi(C)$ označavamo sa*

$$\pi^{\downarrow}(C) := \inf \Pi(C) \quad i \quad \pi^{\uparrow}(C) := \sup \Pi(C)\,.$$

Napomena 1.13 *Implicitna pretpostavka prethodne definicije je da uvođenje slučajnog zatjeva C na tržište kao nove imovine* ne *utječe na cijenu postojećih primarnih imovina.*

Teorem 1.14 *Pretpostavimo da je skup $\mathcal{P}$ ekvivalentnih martingalnih mjera za originalno tržište neprazan. Tada su ne-arbitražne cijene slučajnog zahtjeva C dane s*

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] \,:\, \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \right\}\,. \tag{1.4}$$

Nadalje, donja i gornja ograda od $\Pi(C)$ dane su sa

$$\pi^{\downarrow}(C) = \inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] \quad i \quad \pi^{\uparrow}(C) = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right]\,.$$

Dokaz: Neka je $\pi^C \in \Pi(C)$ ne-arbitražna cijena od C u proširenom modelu tržišta. Po Teoremu (1.6) postoji ekvivalentna martingalna mjera $\hat{\mathbb{P}}$ za model proširen sa (1.3), t.j. vrijedi

$$S_0^i = \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{S_1^i}{1+r}\right] \quad \text{za } i = 0, 1, \ldots, d \quad \text{i} \quad \pi^C = \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right].$$

Odavde je očito $\hat{P} \in \mathcal{P}$, pa je π^C sadržani u desnoj strani od (1.4). Na taj način smo pokazali inkluziju $\subset$ u (1.4). Obratno, ako vrijedi

$$\pi^C = \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right]$$

za neki $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$, tada je po definiciji $\mathbb{P}^*$ martingalna mjera i za prošireno tržište (definicijska jednakost zadovoljena je za imovinu C).

Formule za $\pi^{\downarrow}(C)$ i $\pi^{\uparrow}(C)$ slijede direktno iz (1.4). $\square$

Neka je ϕ portfelj. Tada $W = \phi \cdot S_1$ možemo shvaćati kao slučajan zahtjev (ukoliko je $W \geq 0$), i specijalno, kao izvedenicu: $W = f(S_1^0, S_1^1, \ldots, S_1^d)$ gdje je $f(x) := \phi \cdot x$ linearna funkcija.

Definicija 1.15 *Slučajni zahtjev C zove se* dostižan *ako postoji portfelj $\phi \in \mathbb{R}^{d+1}$ takav da vrijedi*

$$C = \phi \cdot S_1 = \phi^0(1+r) + \sum_{i=1}^{d} \phi^i S_1^i.$$

Takav portfelj ϕ zove se replicirajući portfelj.

Uočimo da je slučajan zahtjev C dostižan ako i samo ako je $C \in \mathcal{W}$.

Ako je slučajan zahtjev dostižan, $C = \phi \cdot S_1$, tada je rješenje problema cijene od C jednostavno: cijena od C je cijena repliciranja $\phi \cdot S_0$.

Teorem 1.16 *Pretpostavimo da model tržišta ne dopušta arbitražu, te neka je C slučajan zahtjev.*

(a) Ako je C dostižan, tada se skup $\Pi(C)$ ne-arbitražnih cijena od C sastoji od jedinstvenog elementa $\phi \cdot S_0$, gdje je ϕ bilo koji replicirajući portfelj za C.

(b) Ako C nije dostižan, tada je $\pi^{\downarrow}(C) < \pi^{\uparrow}(C)$ i vrijedi

$$\Pi(C) = (\pi^{\downarrow}(C), \pi^{\uparrow}(C)) .$$

Dokaz: (a) Pretpostavimo da je ϕ replicirajući portfelj za C, te neka je $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$. Tada je

$$\phi \cdot S_0 = \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] .$$

Ta jednakost nam govori sljedeće: (1) ako je $\psi \in \mathbb{R}^{d+1}$ neki drugi replicirajući portfelj za C, tada gornja formula vrijedi i za ψ. Specijalno, $\phi \cdot S_0 = \psi \cdot S_0$, što znači da lijeva strana u gornjoj jednakosti ne ovisi o replicirajućem portfelju. (2) budući da lijeva strana u gornjoj formuli ne ovisi o $\mathbb{P}^*$, to ta formula vrijedi za sve $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$. To znači da se skup na desnoj strani jednakosti (1.4) Teorema 1.14 sastoji od samo jednog elementa. Dakle, $\Pi(C) = \phi \cdot S_0$.
(b) Primjetimo da je skup $\mathcal{P}$ ekvivalentih martingalnih mjera konveksan: ako su $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^* \in \mathcal{P}$ i $\lambda \in [0,1]$, tada je $\mathbb{P}^* := \lambda \mathbb{P}_1^* + (1-\lambda)\mathbb{P}_2^* \in \mathcal{P}$. Zbog

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] = \lambda \mathbb{E}_1^* \left[\frac{C}{1+r} \right] + (1-\lambda)\mathbb{E}_2^* \left[\frac{C}{1+r} \right]$$

slijedi da je skup

$$\Pi(C) = \left\{ \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] \, : \, \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \right\}$$

konveksan. Jasno je da je $\Pi(C)$ omeđen i neprazan. Neprazan, konveksan i omeđen podskup od $\mathbb{R}$ je nužno interval. Preostaje, stoga, pokazati da je to otvoren interval. Neka je $\pi \in \Pi(C)$. Tvrdimo da postoje $\breve{\pi}$ i $\hat{\pi}$ u $\Pi(C)$ takvi da je $\breve{\pi} < \pi < \hat{\pi}$. Neka je $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ takva da je

$$\pi = \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{1+r} \right] .$$

Po pretpostavi C nije dostižan, te je stoga $\{C\} \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 1.7 (b)) postoji linearan funkcional $\xi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ takav da je

$$\xi(W) = 0 \text{ za sve } W \in \mathcal{W} , \quad \xi(C) > 0 . \tag{1.5}$$

Funkcional ξ je oblika $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K) \in \mathbb{R}^K$. Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$|\xi_j| \le \frac{1}{2} \min\{\mathbb{P}^*(\{\omega_j\} \, , j = 1, 2, \ldots, K\} \tag{1.6}$$

(zaista, pomnožimo li ξ pozitivnom konstantom, (1.5) ostaje istinito). Primjetimo također da je zbog $1 \in \mathcal{W}$, $\sum_{i=1}^{K} \xi_i = \xi(1) = 0$.

Definirajmo mjeru $\hat{\mathbb{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ formulom:

$$\hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) := \mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) + \xi_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, K \,.$$

Iz (1.6) slijedi da je $\hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) > 0$ za sve $j = 1, 2, \ldots, K$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K} \hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) &= \sum_{j=1}^{K} (\mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) + \xi_j) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{K} \xi_j = 1 \,. \end{aligned}$$

Dakle, $\hat{\mathbb{P}}$ je vjerojatnosna mjera za koju vrijedi $\hat{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$.

Neka je Z slučajna varijabla na Ω. Tada je

$$\hat{\mathbb{E}}[Z] = \sum_{j=1}^{K} Z(\omega_j) \hat{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) = \mathbb{E}^*[Z] + \sum_{j=1}^{K} \xi_j Z(\omega_j) = \mathbb{E}^*[Z] + \xi(Z) \,. \quad (1.7)$$

Specijalno vrijedi $\hat{\mathbb{E}}[W] = \mathbb{E}^*[W]$ za sve $W \in \mathcal{W}$. Uzimanjem $W = S_1^i$, $i = 0, 1, \ldots, d$, zaključujemo da je $\hat{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$, t.j., $\hat{\mathbb{P}}$ je ekvivalentna martingalna mjera. Primjenimo (1.7) sa $Z = C$. Slijedi:

$$\hat{\pi} := \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{\mathbb{E}^*[C] + \xi(C)}{1+r} > \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \pi \,.$$

To znači da je $\hat{\pi}$ ne-arbitražna cijena strogo veća od π.

Definirajmo sada mjeru $\check{\mathbb{P}}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ formulom:

$$\check{\mathbb{P}}(\{\omega_j\}) := \mathbb{P}^*(\{\omega_j\}) - \xi_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, K \,.$$

Na isti način kao gore provjeri se da je $\check{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}$, te da je

$$\check{\pi} := \hat{\mathbb{E}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{\mathbb{E}^*[C] - \xi(C)}{1+r} < \mathbb{E}^*\left[\frac{C}{1+r}\right] = \pi \,,$$

odnosno $\check{\pi}$ je ne-arbitražna cijena strogo manja od π. $\square$

1.4 Potpuni modeli tržišta

Najjednostavniji modeli tržišta bez arbitraže su oni u kojima su svi slučajni zahtjevi dostižni.

Definicija 1.17 *Model tržišta bez arbitraže je* potpun *ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Teorem 1.18 *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera, t.j. ako je $|\mathcal{P}| = 1$. U tom slučaju vrijedi $K \leq d+1$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je model potpun. Tada je za svaki $A \in \mathcal{F}$, indikator 1_A dostižan slučajan zahtjev. Tada je po Teoremu 1.16, $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}^*[1_A]$ neovisno o $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$. Specijalno, uz $A = \{\omega\}$, $\mathbb{P}^*(\{\omega\})$ je jednako za sve $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$, za sve $\omega \in \Omega$. Ali to je moguće samo ako $\mathcal{P}$ sadrži jedinstven element.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^*\}$. Neka je C slučajan zahtjev. Po Teoremu 1.14, C ima jedinstvenu arbitražnu cijenu danu sa $\mathbb{E}^*[C/(1+r)]$. Sada iz Teorema 1.16 (b) slijedi da je C dostižan (u suprotnom bi $\Pi(C)$ bio otvoren interval što je u suprotnosti s činjenicom da je $\Pi(C)$ točka).

Sada dokazujemo da je $K \leq d+1$. Slučajni zahtjev je slučajna varijabla na $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$. Slučajne varijable na Ω tvore vektorski prostor koji identificiramo s $\mathbb{R}^K$. Budući da je svaki slučajni zahtjev dostižan, to je vektorski prostor slučajnih zahtjeva jednak vektorskom prostoru $\mathcal{W}$ svih dostižnih isplata. Svaka dostižna isplata generirana je nekim portfeljom $\phi \in \mathbb{R}^{d+1}$. Preslikavanje koje portfelju ϕ pridružuje dostižnu isplatu $\phi \cdot S_1$ je linearno preslikavanje na koje gledamo kao na preslikavanje sa $\mathbb{R}^{d+1}$ na $\mathbb{R}^K$. Po pretpostavci da je svaki slučajni zahtjev dostižan, to preslikavanje je surjekcija. Stoga je dimenzija vektorskog prostora portfelja veća ili jednaka dimenziji vektorskog prostora slučajnih zahtjeva. Dakle, $d+1 \geq K$. □

1.5 Rizik i povrat

Definicija 1.19 *Neka je $W \in \mathcal{W}$ dostižna isplata takva da je $\pi(W) \neq 0$. Tada se* povrat *od W definira kao*

$$R(W) := \frac{W - \pi(W)}{\pi(W)}\,.$$

Izračunajmo povrat nerizične imovine S^0:

$$R(S_1^0) = \frac{S_1^0 - \pi(S_1^0)}{\pi(S_1^0)} = \frac{(1+r)-1}{1} = r\,,$$

što je kamatna stopa na nerizičnu imovinu. Nadalje računamo očekivani povrat rizičnih imovina uz $\mathbb{P}^*$ - mjeru neutralnu na rizik:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[R(S_1^i)] &= \mathbb{E}^*\left[\frac{S_1^i - \pi(S_1^i)}{\pi(S_1^i)}\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}^*[S_1^i]}{S_0^i} - 1 \\
&= (1+r) - 1 = r\,,
\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz (1.1). Ovaj račun daje još jedno objašnjenje naziva mjera neutralna na rizik. Primjetimo da bi očekivani povrat rizične imovine uz objektivnu mjeru $\mathbb{P}$ trebao biti veći od r - povrata na nerizičnu imovinu.

Pretpostavimo sada da je dostižna isplata $W \in \mathcal{W}$ linearna kombinacija $W = \sum_{k=1}^n \alpha_k W_k$ (ne-nul) dostižnih isplata W_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Želimo izračunati povrat od W. Prvo uočimo da je $\pi(W) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \pi(W_k)$ zbog linearnosti od π. Zato je

$$\begin{aligned}
R(W) &= \frac{W - \pi(W)}{\pi(W)} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k W_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k \pi(W_k)}{\pi(W)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k (W_k - \pi(W_k))}{\pi(W)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \pi(W_k)}{\pi(W)} \frac{W_k - \pi(W_k)}{\pi(W_k)} \\
&= \sum_{k=1}^n \beta_k R(W_k)\,,
\end{aligned}$$

gdje smo uveli koeficijente

$$\beta_k = \frac{\alpha_k \pi(W_k)}{\pi(W)} = \frac{\alpha_k \pi(W_k)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(W_i)}\,, k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Koeficijente β_k interpretiramo kao omjer koji je investiran u W_k.

Specijalan slučaj gornje formule dobijemo za $W = \phi \cdot S_1 = \sum_{i=0}^d \phi^i S_1^i$. Tada je

$$R(W) = \sum_{i=0}^{d} \frac{\phi^i S_0^i}{\phi \cdot S_0} R(S_1^i) .$$

Neka je $\mathbb{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera. Definiramo slučajnu varijablu L formulom

$$L(\omega) := \frac{\mathbb{P}^*(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}, \quad \omega \in \Omega .$$

Slučajna varijable L naziva se *state price density*. Primjetimo da vrijedi sljedeća jednostavna formula: neka je Z slučajna varijabla na Ω. Tada je

$$\mathbb{E}^*[Z] = \sum_\omega Z(\omega)\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \sum_\omega Z(\omega)L(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}[LZ] . \tag{1.8}$$

Jednostavna posljedica je formula $\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}^*[1] = 1$. Pomoću formule (1.8) računamo kovarijancu slučajnih varijabli $R(W)$ i L:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(L, R(W)) &= \mathbb{E}[LR(W)] - \mathbb{E}[L]\mathbb{E}[R(W)] \\ &= \mathbb{E}^*[R(W)] - \mathbb{E}[R(W)] \\ &= r - \mathbb{E}[R(W)] . \end{aligned}$$

Formulirajmo gornja razmatranja u sljedeću propoziciju:

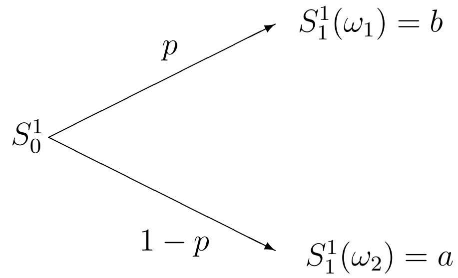
Propozicija 1.20 *Pretpostavimo da je $\mathbb{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera, te neka je $W \in \mathcal{W}$ dostižna isplata takva da je $\pi(W) \neq 0$. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[R(W)] &= r \\ \mathbb{E}[R(W)] &= r - \mathrm{Cov}(L, R(W)) . \end{aligned}$$

Primjer 1.21 Najjednostavniji model koji smo već susreli ima samo dva elementarna događaja: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Vjerojatnost $\mathbb{P}$ dana je s $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = p \in (0,1)$. Pretpostavljamo da tržište ima jednu rizičnu imovinu, te da vrijedi

$$\mathbb{P}(S_1^1 = b) = p , \qquad \mathbb{P}(S_1^1 = a) = 1 - p ,$$

gdje je $0 \le a < b$.



Za nerizičnu imovinu vrijedi $S_0^0 = 1$, $S_1^0 = 1 + r$. Za martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ ($\mathbb{P}^*(S_1^1 = b) = p^*$) mora vrijediti

$$S_0^1(1+r) = \mathbb{E}^*[S_1^1] = p^*b + (1-p^*)a\,.$$

Odavde slijedi

$$p^* = \frac{S_0^1(1+r) - a}{b-a}\,.$$

Budući da p^* mora biti u intervalu $(0,1)$, zaključujemo $0 \le S_0^1(1+r) - a \le b - a$, t.j., $a \le S_0^1(1+r) < b$. Prema tome, uvjet

$$\frac{a}{S_0^1} < 1 + r < \frac{b}{S_0^1} \tag{1.9}$$

je nužan i dovoljan za postojanje ekvivalentne martingalne mjere. Ako je taj uvjet ispunjen, tada je ekvivalentna mjera jedinstvena. Dakle, model tržišta je potpun.

Neka je $C : \Omega \to \mathbb{R}_+$ slučajni zahtjev. Za replicirajući portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ vrijedi

$$C(\omega) = \phi^0 S_1^0(\omega) + \phi^1 S_1^1(\omega) = \phi^0(1+r) + \phi^1 S_1^1(\omega) \quad \text{za sve } \omega \in \Omega\,.$$

To je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, ϕ^0 i ϕ^1. Rješenje sustava dano je s

$$\phi^0 = \frac{C(\omega_2)b - C(\omega_1)a}{(b-a)(1+r)} \quad \text{i} \quad \phi^1 = \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{b-a}\,.$$

Slijedi da je jedinstvena ne-arbitražna cijena slučajnog zahtjeva C dana s

$$\begin{aligned}\pi(C) = \phi \cdot S_0 &= \frac{C(\omega_2)b - C(\omega_1)a}{(b-a)(1+r)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{b-a} S_0^1 \\ &= \frac{C(\omega_1)}{1+r} \cdot \frac{S_0^1(1+r) - a}{b-a} + \frac{C(\omega_2)}{1+r} \cdot \frac{b - S_0^1(1+r)}{b-a}\,.\end{aligned}$$

Primjetimo da to daje drugi dokaz potpunosti tržišta.

Neka je $C = (S_1^1 - K)^+$ call-opcija sa cijenom izvršenja $K \in [a, b]$. Slijedi da je cijena te call opcije jednaka

$$\pi((S_1^1 - K)^+) = \frac{b-K}{1+r} \cdot \frac{S_0^1(1+r) - a}{b-a} = \frac{b-K}{b-a} \cdot S_0^1 - \frac{(b-K)a}{b-a} \cdot \frac{1}{1+r}. \tag{1.10}$$

Uočimo da cijena opcije *ne* ovisi o p, te da je rastuća funkcija kamatne stope r. S druge strane, očekivanje (uz vjerojatnost $\mathbb{P}$) diskontirane vrijednosti opcije jednako je

$$\mathbb{E}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{b-K}{1+r} \cdot p\,,$$

što je padajuća funkcija od r, i rastuća funkcija od p.

Sada ćemo ilustrirati kako opcije mogu modificirati rizik financijske pozicije. Pretpostavimo da je $S_0^1 = 100$, $S_1^1(\omega_1) = 120$, $S_1^1(\omega_2) = 90$, te $r = 0.03$. Povrati na rizičnu imovinu iznose

$$R(S_1^1)(\omega_1) = +20\% \quad \text{ili} \quad R(S_1^1)(\omega_2) = -10\%\,.$$

Pogledajmo sada call opciju $C = (S_1^1 - K)^+$ sa cijenom izvršenja $K = 100$. Po formuli 1.10, cijena te opcije je

$$\pi(C) = \frac{120-100}{120-90} \times 100 - \frac{(120-100) \times 90}{120-90} \times \frac{1}{1.03} = 8.41\,.$$

Stoga je povrat

$$R(C) = \frac{(S_1^1 - K)^+ - \pi(C)}{\pi(C)}$$

na početnu investiciju $\pi(C) = 8.41$ jednak

$$R(C)(\omega_1) = \frac{20 - \pi(C)}{\pi(C)} = +138\%\,,$$
$$R(C)(\omega_2) = \frac{0 - \pi(C)}{\pi(C)} = -100\%\,.$$

U usporedbi sa +20% i -10%, to je izuzetno velik porast i mogućnosti profit i rizika. To se ponekad zove *efekt poluge* (engl. *leverage effect*).

Pretpostavimo da investitor posjeduje u trenutku $t = 0$ dionice, te želi smanjiti rizik od potencijalnog pada cijena dionice. To može učiniti tako da kupi određen broj put opcija (s cijenom izvršenja $K = 100$) na tu dionicu. Ako je ψ taj broj put opcija (po dionici) tada je nova pozicija u trenutku $t = 1$ jednaka

$$\tilde{C} := \psi \cdot (K - S_1^1)^+ + S_1^1 .$$

Odredimo cijenu takvog portfelja. Cijena put opcije u trenutku $t = 0$ je po put call paritetu (1.2) jednaka

$$\pi(C^{\text{put}}) = \pi(C^{\text{call}}) - S_0^1 + \frac{K}{1+r} = 5.50 .$$

Stoga je $\pi(\tilde{C}) = 5.50\psi + 100$. Izračunajmo povrat na $\tilde{C}$:

$$R(\tilde{C})(\omega_1) = \frac{0 + 120 - 5.50\psi - 100}{5.50\psi + 100} = \frac{20 - 5.50\psi}{5.50\psi + 100} ,$$
$$R(\tilde{C})(\omega_2) = \frac{10\psi + 90 - 5.50\psi - 100}{5.50\psi + 100} = \frac{4.50\psi - 10}{5.50\psi + 100} .$$

Za $\psi = 1$ (jedna put opcija) dobijemo:

$$R(\tilde{C})(\omega_1) = +13.7\% , \quad \text{i} \quad R(\tilde{C})(\omega_2) = -5.2\% .$$

Za $\psi = 2$ (dvije put opcije) dobijemo:

$$R(\tilde{C})(\omega_1) = +8.1\% , \quad \text{i} \quad R(\tilde{C})(\omega_2) = -0.9\% .$$