Polugrupe generirane kompleksnim eliptičkim operatorima i ocjene u Orliczevim prostorima

Vjekoslav Kovač (PMF–MO)
zajednički rad[*] s Kristinom Anom Škreb (Građevinski fakultet)

Seminar za funkcionalnu analizu

20. siječnja 2022.

[*] Financiran s HRZZ projekta UIP-2017-05-4129 (MUNHANAP)

Polugrupe

Jako neprekidne polugrupe

X Banachov prostor, $\mathrm{B}(X)$ ograničeni linearni operatori na X

Funkcija

$$[0,\infty\rangle \to \mathrm{B}(X), \quad t \mapsto T_t$$

je *jako neprekidna jednoparametarska operatorska polugrupa* ako:

- $T_0 = I$;
- za svake $s, t \in [0,\infty\rangle$ vrijedi $T_{s+t} = T_s T_t$;
- za svaki $f \in X$ je funkcija $[0,\infty\rangle \to X$, $t \mapsto T_t f$ neprekidna.

Infinitezimalni generator polugrupe je

$$Lf := \lim_{t\to 0+} \frac{T_t f - f}{t}.$$

Njegova domena $\mathcal{D}(L) \subseteq X$ je gusta u X i njegov graf je zatvoreni podskup od $X \times X$.

Jako neprekidne polugrupe

Obratno, operator L jednoznačno određuje polugrupu i pišemo

$$T_t = \exp(tL) = e^{tL}.$$

Za svaki $f \in \mathcal{D}(L)$ funkcija

$$u(t) := T_t f$$

predstavlja klasično rješenje diferencijalne jednadžbe (u prostoru X)

$$u'(t) = Lu(t)$$

(“dokaz” je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tL} = Le^{tL}$) s početnim uvjetom

$$u(0) = f.$$

Za $f \in X$ je istom formulom dano “blago” rješenje istog problema:

$$u(t) = f + L \int_0^t u(s) \, \mathrm{d}s.$$

Primjeri klasičnih pitanja: Generiranje

Uz koje uvjete operator L doista generira jako neprekidnu operatorsku polugrupu?

Hille–Yosida–Feller–Miyadera–Phillips teorem:
ako i samo ako

- $\mathcal{D}(L)$ je gusta u X,
- graf od L je zatvoreni podskup od $X \times X$,
- postoje $\omega \in [0, \infty\rangle$, $M \in [1, \infty\rangle$ t.d. za $\lambda \in \langle\omega, \infty\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|(\lambda I - L)^{-n}\|_{X \to X} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Štoviše, tada polugrupa zadovoljava ocjenu

$$\|T_t\|_{X \to X} \leqslant M e^{\omega t}.$$

PRIMJERI KLASIČNIH PITANJA: KONTRAKTIVNOST

Uz koje uvjete je polugrupa kontraktivna, tj.

$$\|T_t f\|_X \leqslant \|f\|_X$$

za svaki $t \in [0, \infty\rangle$ i svaki $f \in X$?

Hille–Yosida teorem:
ako i samo ako za svaki $\lambda > 0$ vrijedi $\|(\lambda I - L)^{-1}\|_{X \to X} \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Lumer–Phillips teorem:
ako i samo ako za svaki $f \in \mathcal{D}(L) \subseteq X$ postoji $g \in X^*$ takav da je $g(f) = \|f\|_X^2 = \|g\|_{X^*}^2$ i vrijedi $\operatorname{Re} g(Lf) \leqslant 0$.

Moguće je to pitanje za "istu" polugrupu postaviti u raznim normama $\|\cdot\|$. Npr., $X = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, ali mi gledamo $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$ za neki $1 < p < \infty$.

PRIMJERI KLASIČNIH PITANJA: BILINEARNO ULAGANJE

Neka su sada $t \mapsto T_t$ i $t \mapsto \widetilde{T}_t$ operatorske polugrupe na nekom prostoru fja na $\mathbb{R}^d$. Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|^*$ međusobno dualne norme.

Bi-sub-linearne ocjene oblika

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla T_t f(x)\right| \left|\nabla \widetilde{T}_t g(x)\right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leqslant C\|f\|\|g\|^*$$

zovemo *bilinearna ulaganja*.

Iz literature:

- Petermichl i Volberg (2002),
- Nazarov i Volberg (2003),
- Dragičević i Volberg (2005, 2006, 2011, 2012),
- Carbonaro i Dragičević (2013, 2017, 2020).

Dosad su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|^*$ uvijek bile neke (eventualno težinske) L^p norme.

Eliptički operatori

MATRIČNE FUNKCIJE S KOMPLEKSNIM L^∞ KOEFICIJENTIMA

$A\colon \mathbb{R}^d \to \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ matrična funkcija

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,d} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$$

(Mi nećemo raditi na domenama $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.)

Kažemo da je A *uniformno eliptička (akretivna)* ako vrijedi:

$$\Lambda(A) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \max_{\substack{\zeta,\eta\in\mathbb{C}^d \\ |\zeta|=|\eta|=1}} \left|\langle A(x)\zeta, \eta\rangle_{\mathbb{C}^d}\right| < \infty,$$

$$\lambda(A) := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} \min_{\substack{\xi\in\mathbb{C}^d \\ |\xi|=1}} \mathrm{Re}\,\big\langle A(x)\xi, \xi\big\rangle_{\mathbb{C}^d} > 0.$$

Eliptički operatori u divergencijskoj formi

Eliptički operator u divergencijskoj formi (kompleksni i ne-glatki) pridružen A je formalno definiran:

$$L_A f := -\operatorname{div}(A\nabla f),$$

tj.

$$(L_A f)(x) := -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\big(a_{i,j}(x)\partial_j f(x)\big).$$

(Neki autori dodaju i članove s nultom i prvim derivacijama.)

Ovo je klasično smisleno samo ako su koeficijenti od A glatki. Općenito je od interesa slučaj kada su oni samo izmjerivi.

Ako je A baš konstantno jednaka I, onda je $L_I = -\operatorname{div}\nabla = -\Delta$.

ELIPTIČKI OPERATORI U DIVERGENCIJSKOJ FORMI

Sasvim rigorozno, L_A je definiran pomoću dualnosti:

$$\langle L_A f, g\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle_{\mathbb{C}^d}\, \mathrm{d}x$$

(formalno smo napravili parcijalnu integraciju) i domena $\mathcal{D}(L_A) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ mu je skup svih $f \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ za koje se antilinearni funkcional u varijabli $g \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ na desnoj strani neprekidno proširuje na cijeli $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Mi ćemo ionako raditi samo s $f, g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Gledat ćemo operatorsku polugrupu na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ generiranu s $-L_A$:

$$T_t^A := \exp(-tL_A).$$

ELIPTIČKI OPERATORI U DIVERGENCIJSKOJ FORMI

Zašto je ovaj koncept važan/zanimljiv?

Za svaku $f \in \mathcal{D}(L_A)$ funkcija

$$u\colon [0,\infty\rangle \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},$$

$$u(t,x) := (T_t f)(x)$$

predstavlja klasično rješenje (generalne evolucijske) parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -L_A(x) u(t,x)$$

s početnim uvjetom

$$u(0,x) = f(x).$$

Npr. za $A \equiv I$ dobijemo jednadžbu provođenja (topline):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \Delta u(t,x).$$

Primjer zanimljivog pitanja: Kontraktivnost

Uz koje uvjete na A je polugrupa kontraktivna na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$, tj.

$$\|T_t^A f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

za svaki $t \in [0, \infty\rangle$ i svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$?

Uz dodatni zahtjev da je $\mathrm{Im}\, A$ simetrična, Cialdea i Maz'ya (2005) pokazali su da je kontraktivnost na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ekvivalentna s

$$|p-2| \left| \langle \mathrm{Im}\, A(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d} \right| \leqslant 2(p-1)^{1/2} \langle \mathrm{Re}\, A(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^d}$$

za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ i svaki $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Općenita karakterizacija je otvoren problem.

Carbonaro i Dragičević (2016) su pokazali: dovoljno je $\Delta_p(A) \geq 0$, a nužno je $\Delta_p\left(\frac{A+A^*}{2}\right) \geq 0$. (Definicija od Δ_p slijedi.)

p-ELIPTIČNOST

Carbonaro i Dragičević (2016) definirali su da je A *p-eliptička* za $p \in [1, \infty]$ ako, uz eliptičnost, još dodatno vrijedi:

$$\Delta_p(A) := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \min_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^d \\ |\xi|=1}} \mathrm{Re} \left\langle A(x)\xi,\ \xi + \left|1 - \frac{2}{p}\right| \bar{\xi} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} > 0.$$

Za $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$ vrijedi

$$\lambda(A) = \Delta_2(A) \geqslant \Delta_{p_1}(A) \geqslant \Delta_{p_2}(A)$$

i imamo inkluzije

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{2-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} p_1\text{-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} p_2\text{-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\}$$

$$\supseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{matrice koje su } p\text{-eliptičke} \\ \text{za svaki } 1 < p < \infty \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{realne eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\}.$$

Orliczevi prostori

ORLICZEVI PROSTORI

Njihova ideja je poopćiti koncept L^p norme.

Motivacija su uglavnom funkcijski prostori "blizu" L^1 ili L^∞, ali i (kao ovdje) "finija skala" funkcijskih prostora između L^1 i L^∞.

$\Phi\colon [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ je *Youngova funkcija* ako vrijedi

$$\Phi \text{ je konveksna}, \quad \Phi(0)=0, \quad \lim_{s\to 0+}\frac{\Phi(s)}{s}=0, \quad \lim_{s\to\infty}\frac{\Phi(s)}{s}=\infty.$$

Konjugirana Youngova funkcija je $\Psi\colon [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$,

$$\Psi(t) := \sup_{s\in\langle 0,\infty\rangle}\big(st-\Phi(s)\big) = \int_0^t (\Phi')^{-1}(r)\,\mathrm{d}r.$$

Youngova nejednakost:

$$st \leqslant \Phi(s)+\Psi(t) \quad \text{za svake } s,t\in[0,\infty\rangle.$$

ORLICZEVI PROSTORI

Luksemburška norma $\|\cdot\|_\Phi$ definirana je za (klase g.s. jednakih) izmjerivih funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ kao

$$\|f\|_\Phi := \inf \left\{\alpha \in \langle 0, \infty\rangle : \int_{\mathbb{R}^d} \Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\alpha}\Big)\, \mathrm{d}x \leqslant 1\right\}.$$

Time dolazimo i do *Orliczevog prostora* $\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^d)$.

Za neku konačnu konstantu K uvjet

$$\Phi(2s) \leqslant K\Phi(s) \quad \text{za svaki } s \in [0, \infty\rangle$$

garantira da je

$$\|\cdot\|_\Phi^* \sim \|\cdot\|_\Psi$$

i

$$\mathrm{L}^\Phi(\mathbb{R}^d)^* \cong \mathrm{L}^\Psi(\mathbb{R}^d).$$

Naše dodatne pretpostavke

Mi dodatno pretpostavljamo (da su Φ i Ψ "poput" potencija):

- Φ i Ψ su međusobno konjugirane Youngove funkcije,
- Φ i Ψ su C^1 na $[0,\infty\rangle$ i C^2 na $\langle 0,\infty\rangle$,
- $\Phi''(s), \Psi''(s) > 0$ za svaki $s \in \langle 0,\infty\rangle$,
- Φ' je strogo konveksna na $\langle 0,\infty\rangle$ i $\displaystyle\lim_{s\to 0+} \frac{\Phi'(s)}{s} = 0$,
- $\displaystyle\sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi'(s)}{\Phi(s)} < \infty$,
- $\displaystyle 1 < \inf_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} \leqslant \sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} < \infty$.

NAŠE DODATNE PRETPOSTAVKE

Posljedično:

Φ' i Ψ' su međusobno inverzne rastuće bijekcije na $[0, \infty\rangle$.

Zadnja tri uvjeta su ekvivalentna s:

- Ψ' je strogo konkavna na $\langle 0, \infty\rangle$ i $\lim_{s\to 0^+} \frac{\Psi'(s)}{s} = \infty$,
- $\inf_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Psi'(s)}{\Psi(s)} > 1$,
- $0 < \inf_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Psi''(s)}{\Psi'(s)} \leqslant \sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Psi''(s)}{\Psi'(s)} < 1$.

Posljedično:

$$\|\cdot\|_{\Phi}^{*} \sim \|\cdot\|_{\Psi}.$$

Primjeri

Primjer 1. Lebesgueovi prostori L^p.

$$\Phi(s) = \frac{s^p}{p}, \quad \Psi(s) = \frac{s^q}{q} \quad \text{za } p \in \langle 2, \infty \rangle,\ q \in \langle 1, 2 \rangle,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\|\cdot\|_\Phi \sim \|\cdot\|_{\mathsf{L}^p}, \qquad \|\cdot\|_\Psi \sim \|\cdot\|_{\mathsf{L}^q}.$$

Primjer 2. Zygmundovi prostori $\mathsf{L}^r \log \mathsf{L}$.

$$\Phi(s) = s^r \log(s + e) \quad \text{za } r \in \langle 2, \infty \rangle.$$

PRIMJERI

Primjer 3. Superpozicija potencija s eksponentima iz $\langle 2, \infty\rangle$.

$$\Phi(s) = s^p + s^r \quad \text{za } 2 < r < p < \infty.$$

$$\Phi(s) = \int s^t \, \mathrm{d}\mu(t)$$

za pozitivnu Borelovu mjeru μ s kompaktnim nosačem u $\langle 2, \infty\rangle$.

Primjer 4. Superpozicija potencija s eksponentima iz $\langle 1, 2\rangle$.

$$\Psi(s) = s^q + s^r \quad \text{za } 1 < q < r < 2.$$

$$\Psi(s) = \int s^t \, \mathrm{d}\mu(t)$$

za pozitivnu Borelovu mjeru μ s kompaktnim nosačem u $\langle 1, 2\rangle$.

Glavni rezultat

Bilinearna ulaganja za eliptičke operatore

U daljnjem pretpostavljamo da su $A, B \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ eliptičke matrične funkcije s L^∞ koeficijentima.

Teorem [Carbonaro i Dragičević (2016)]. Ako su $A, B \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ p-eliptičke, tada vrijedi ocjena

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)|\, |(\nabla T_t^B g)(x)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \leqslant 20\, C_p(A,B)\, \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

Pritom je

$$C_p(A,B) := \frac{\max\{\Lambda(A), \Lambda(B)\}}{\min\{\Delta_p(A), \Delta_p(B)\}\, \min\{\lambda(A), \lambda(B)\}}.$$

Što bi bila Φ-eliptičnost?

Za Youngovu funkciju Φ ima smisla definirati:

$$\Delta_\Phi(A) := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} \inf_{\substack{\xi\in\mathbb{C}^d,\, |\xi|=1 \\ s\in(0,\infty)}} \mathrm{Re} \left\langle A(x)\xi,\ \xi + \frac{s\Phi''(s) - \Phi'(s)}{s\Phi''(s) + \Phi'(s)}\,\bar{\xi} \right\rangle_{\mathbb{C}^d}.$$

U posebnom slučaju $\Phi(s) = s^p/p$ izraz postaje $\Delta_p(A)$.

Ipak, kod nas je naprosto

$$\Delta_\Phi(A) = \Delta_p(A)$$

za $p \in [2,\infty]$ t.d. je

$$\sup_{s\in(0,\infty)} \left| \frac{s\Phi''(s) - \Phi'(s)}{s\Phi''(s) + \Phi'(s)} \right| = 1 - \frac{2}{p}, \quad \text{tj. } p = \sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} + 1.$$

Veza s nedavnom literaturom

Cialdea i Maz'ya (2021) uveli su pojam izvjesne Φ-disipativnosti, kao pokušaj u smjeru karakterizacije L^{Φ}-kontraktivnosti.

Uz dodatnu pretpostavku da je $\operatorname{Im} A$ simetrična potom su pokazali da je taj koncept ekvivalentan s uvjetom

$$\left|\Phi''(s) - \frac{\Phi'(s)}{s}\right| \left|\langle \operatorname{Im} A(x)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\right| \leqslant 2\left(\frac{\Phi'(s)\Phi''(s)}{s}\right)^{1/2} \langle \operatorname{Re} A(x)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}$$

za svaki $s \in (0, \infty)$, g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ i svaki $\xi \in \mathbb{R}^d$.

U posebnom slučaju $\Phi(s) = s^p/p$ taj uvjet postaje njihova prethodno spomenuta karakterizacija L^p-disipativnosti, tj. L^p-kontraktivnosti.

Bilinearno ulaganje u Orliczevim prostorima

U daljnjem pretpostavljamo da Φ i Ψ zadovoljavaju sve pretpostavke iz prethodnog odjeljka te da je

$$p = \sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)} + 1.$$

Teorem [K. i Škreb (2021)]. Ako su $A, B\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ p-eliptičke, tada vrijedi ocjena

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)|\,|(\nabla T_t^B g)(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant 40\, C_p(A,B)\, D(\Phi,\Psi)\, \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi .$$

Pritom je $C_p(A,B)$ ista kao ranije te

$$D(\Phi,\Psi) := \max\left\{1, \frac{M}{\tilde{m}}\right\}\left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{M}}\,\frac{\tilde{M}-1}{\tilde{m}-1}\right)^{1/2}$$

uz

$$M := \sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi'(s)}{\Phi(s)}, \quad \tilde{m} := \inf_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}, \quad \tilde{M} := \sup_{s\in(0,\infty)} \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}.$$

Dokaz

Generalizirani Hessijan

Definiramo *generalizirani Hessijan* funkcije $\mathfrak{X}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ obzirom na matrice $A, B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, u oznaci

$$H_{\mathfrak{X}}^{A,B}[(u,v);(\zeta,\eta)],$$

kao skalarni produkt vektora

$$\left(\mathrm{Hess}(\mathfrak{X};(u,v)) \otimes I_d\right) \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\zeta \\ \mathrm{Im}\,\zeta \\ \mathrm{Re}\,\eta \\ \mathrm{Im}\,\eta \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^4$$

i

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,A & -\mathrm{Im}\,A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathrm{Im}\,A & \mathrm{Re}\,A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{Re}\,B & -\mathrm{Im}\,B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{Im}\,B & \mathrm{Re}\,B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\zeta \\ \mathrm{Im}\,\zeta \\ \mathrm{Re}\,\eta \\ \mathrm{Im}\,\eta \end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^4.$$

Skica dokaza

Neka je $\mathfrak{X}\colon \mathbb{C}^2 \to [0,\infty)$ zasad nepoznata funkcija.
Za $R > 0$ označimo $\psi_R(x) := \psi(x/R)$ i definirajmo

$$\mathcal{E}_R(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \mathfrak{X}\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big)\, \mathrm{d}x.$$

S jedne strane:

$$\mathcal{E}_R(0) - \mathcal{E}_R(\tau) \leqslant \mathcal{E}_R(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \mathfrak{X}\big(f(x), g(x)\big)\, \mathrm{d}x$$

$$\lesssim_{\Phi,\Psi} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \big(\Phi(|f(x)|) + \Psi(|g(x)|)\big)\, \mathrm{d}x.$$

S druge strane:

$$-\int_0^\tau \mathcal{E}_R'(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{X}\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

Skica dokaza

Nastavak:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \mathcal{E}_R'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, H_{\mathfrak{X}}^{A(x),B(x)}\big[\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big); \big((\nabla T_t^A f)(x), (\nabla T_t^B g)(x)\big)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mathcal{R}_{R,\tau} \\
&\gtrsim_{A,B,\Phi,\Psi} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\,\big|(\nabla T_t^A f)(x)\big|\,\big|(\nabla T_t^B g)(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mathcal{R}_{R,\tau},
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{R,\tau} = 2\,\mathrm{Re} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \Big(&(\partial_{\bar{u}}\mathfrak{X})\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big)\,\big\langle (\nabla\psi_R)(x), A(x)(\nabla T_t^A f)(x)\big\rangle_{\mathbb{C}^d} \\
&+ (\partial_{\bar{v}}\mathfrak{X})\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big)\,\big\langle (\nabla\psi_R)(x), B(x)(\nabla T_t^B g)(x)\big\rangle_{\mathbb{C}^d}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Želimo

$$
\lim_{R\to\infty} \mathcal{R}_{R,\tau} = 0.
$$

SKICA DOKAZA

Imamo

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\,\big|(\nabla T_t^A f)(x)\big|\,\big|(\nabla T_t^B g)(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mathcal{R}_{R,\tau}$$
$$\lesssim_{A,B,\Phi,\Psi} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\,\big(\Phi(|f(x)|) + \Psi(|g(x)|)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Puštanjem $R \to \infty$ dobivamo

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \big|(\nabla T_t^A f)(x)\big|\,\big|(\nabla T_t^B g)(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \lesssim_{A,B,\Phi,\Psi} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(|f(x)|)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(|g(x)|)\,\mathrm{d}x.$$

Konačno, puštanjem $\tau \to \infty$ pa "homogenizacijom"

$$f \to \alpha f, \quad g \to g/\alpha$$

slijedi

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \big|(\nabla T_t^A f)(x)\big|\,\big|(\nabla T_t^B g)(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \lesssim_{A,B,\Phi,\Psi} \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi.$$

Svojstva tražene Bellmanove funkcije

Dokaz je “gotov” ako postoji funkcija $\mathfrak{X}\colon \mathbb{C}^2 \to [0,\infty\rangle$ sa sljedećim svojstvima (tzv. *Bellmanova funkcija* za taj dokaz):

- $\mathfrak{X}$ je klase C^1 na $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ i “po dijelovima” klase C^2 s lokalno integrabilnim drugim parcijalnim derivacijama;
- $\mathfrak{X}(u,v) \lesssim_{\Phi,\Psi} \Phi(|u|) + \Psi(|v|)$;
- $H_{\mathfrak{X}}^{A(x),B(x)}[(u,v);(\zeta,\eta)] \gtrsim_{\Phi,\Psi} |\zeta||\eta|$;
- $|\partial_{\bar{u}}\mathfrak{X}(u,v)| \leqslant \max\{\Phi'(|u|),|v|\}$,
  $|\partial_{\bar{v}}\mathfrak{X}(u,v)| \leqslant \Psi'(|v|)$,
  pri čemu je $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$.

Postojanje tražene Bellmanove funkcije

Možemo $\mathfrak{X}$ definirati formulom

$$\mathfrak{X}(u,v) := \begin{cases} (1+\delta)\big(\Phi(|u|)+\Psi(|v|)\big) + \delta|u|^2 \displaystyle\int_0^{|u|} \frac{\Phi'(s)\,\mathrm{d}s}{s^2} & \text{za } |v| \le \Phi'(|u|), \\ \Phi(|u|)+\Psi(|v|) + \delta|u|^2 \displaystyle\int_0^{|v|} \frac{\mathrm{d}s}{\Psi'(s)} & \text{za } |v| > \Phi'(|u|), \end{cases}$$

za pogodni $\delta > 0$.

Dobar izbor je

$$\delta := \frac{\tilde{m}-1}{\tilde{m}} \min\left\{ \frac{\Delta_p(A)}{8\Lambda(A)}, \frac{\Delta_p(B)}{4\Lambda(B)}, \frac{\lambda(A)\Delta_p(B)}{100\max\{\Lambda(A)^2, \Lambda(B)^2\}} \right\}.$$

Provjera svojstava je mukotrpna.

Hvala vam na pažnji!