

EKSTREMI POTENCIJALA I KARAKTERISTIČNE TOČKE TROKUTA

Vjekoslav Kovač (zajednički rad s Hrvojem Abrahamom)

23. ožujka 2015.

Seminar za geometriju

Glavni problem

Ravninski trokut T je kontinuirani izvor naboja, ravnomjerno raspoređenog po njegovoj površini. U kojoj točki ravnine elektrostatski potencijal trokuta poprima najveću vrijednost?

Motivacija:

- *Robin Hood Solver*
 - Abraham, Lazić, Štefančić (2003)
 - Artes Calculi d.o.o. (2010)
- Metoda konačnih elemenata
 - trokuti igraju istaknutu ulogu
 - potrebno je brzo i precizno locirati traženu točku

Elektrostatski potencijal točkastog izvora s nabojem q :

$$V(r) = \frac{kq}{r}$$

r = udaljenost točke mjerenja od izvora

Princip superpozicije:

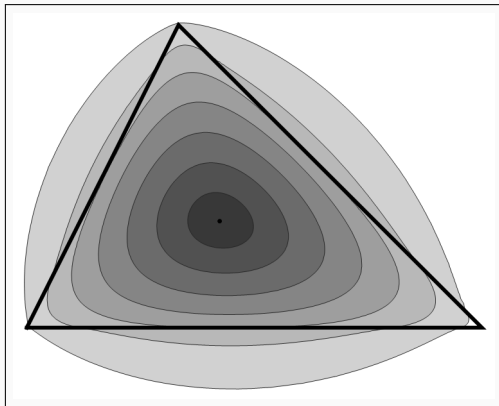
$$V(P) = \iint_T \frac{d\lambda(Q)}{|PQ|}$$

λ = Lebesgueova mjera (površina)

P = točka ravnine

U Kartezijevim koordinatama:

$$V(x, y) = \iint_T \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$$



Slika: Konturni graf potencijala V

UVOD: POTENCIJAL I POLJE

Zapravo tražimo točku u kojoj se stabilizira *elektrostatsko polje*:

$$\vec{E} = -\nabla V = \vec{0}$$

Za točkasti izvor:

$$\vec{E} = \frac{kq\vec{r}}{r^3}$$

\vec{r} = usmjerena dužina od izvora do točke mjerenja

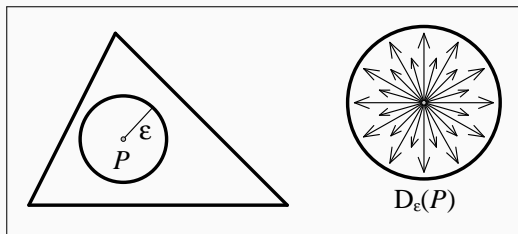
Princip superpozicije ili formalno deriviranje bi dali

$$\vec{E}(P) = - \iint_T \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3} d\lambda(Q),$$

ali taj integral divergira za svaku $P \in T$!

Naime,

$$\iint_{D_\varepsilon(P)} \frac{|\vec{PQ}|}{|PQ|^3} d\lambda(Q) = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^3} r dr d\varphi = +\infty$$



Slika: Poništavanje u singularnom dijelu integrala

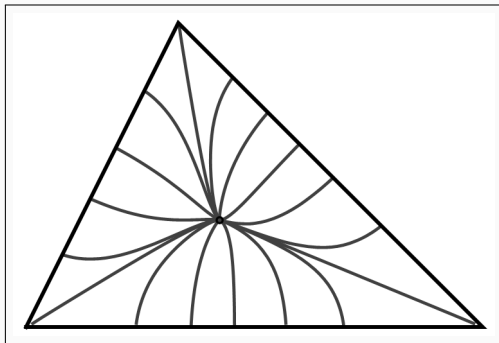
Prava formula je:

$$\vec{E}(P) = - \iint_{T \setminus D_\varepsilon(P)} \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3} d\lambda(Q) = -\text{p.v.} \iint_T \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3} d\lambda(Q)$$

U Kartezijevim koordinatama:

$$\vec{E}(x, y) = -\text{p.v.} \iint_T \frac{(x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{3/2}} dx' dy'$$

\vec{i}, \vec{j} = standardni jedinični koordinatni vektori



Slika: Integralne krivulje (silnice) od \vec{E}

Matematički nazivi (tzv. *singularni integrali*):

- $V = I_{-1}(f) =$ Rieszov potencijal od $f = \mathbf{1}_T$
- $\vec{E} = R_1(f)\vec{i} + R_2(f)\vec{j}$, $R_1, R_2 =$ Rieszove transformacije

Općenitije imamo tzv. *razlomljeni integral*:

$$(I_p f)(x, y) = \iint \left((x' - x)^2 + (y' - y)^2 \right)^{p/2} f(x', y') dx' dy'$$

Za $p > -2$ ima smisla potencijal (integral konvergira):

$$V_p(P) = \iint_T |PQ|^p d\lambda(Q)$$

Ako je $p \leq -2$, ima smisla razlika potencijala za P, P' unutar T :

$$V_p(P) - V_p(P') = \iint_{T \setminus D_\epsilon(P)} |PQ|^p d\lambda(Q) - \iint_{T \setminus D_\epsilon(P')} |P'Q|^p d\lambda(Q)$$

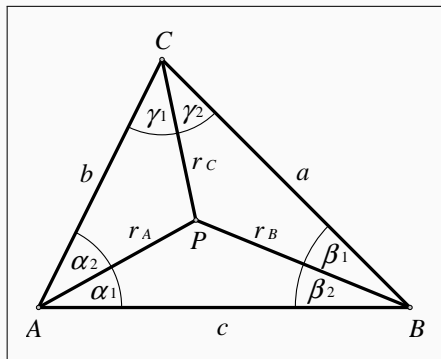
Kratki pregled literature:

- Proučavane su ekstremne točke od $I_p f$,
 $f = \mathbf{1}_K$, $K =$ konveksan skup u \mathbb{R}^n
- Naš slučaj je $p = -1$, $K = T =$ trokut u \mathbb{R}^2
- Moszyńska (2000) dokazuje egzistenciju i jedinstvenost za
 $-2 < p \leq 1$, naziva ih *radijalni centri*
- Herburt (2007) i O'Hara (2012) promatraju jedinstvenost za
ostale p , nazivaju ih još r^p centri i *generalizirani centri*

- Herburt, Moszyńska, Peradzyński (2005) spominju gravitacijski i elektrostatski potencijal ($p = -1$)
- Herburt (2008) dokazuje da točka ekstrema leži u nutrini od K ako K ima po dijelovima gladak rub
- Shibata (2009)
 - promatra potencijal za $p = -2$ na trokutu T , heuristički izvodi geometrijske relacije za točku ekstrema
 - heuristički promatra ponašanje točke ekstrema kada p prolazi kroz \mathbb{R} , krivulju naziva *potencijalni luk*, identificira limese kada $p \rightarrow -\infty$ i $p \rightarrow +\infty$

Ostaje problem planimetrijskih relacija i praktičnog lociranja ekstrema elektrostatskog potencijala ($p = -1$) na trokutu T

GEOMETRIJSKE RELACIJE



Slika: Standardna notacija

Teorem (Abraham i K. (2013))

Ako je $\vec{E}(P) = \vec{0}$, tada vrijedi

$$\left(\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a} \right)^{1/a} = \left(\frac{r_C + r_A - b}{r_C + r_A + b} \right)^{1/b} = \left(\frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c} \right)^{1/c}$$

$$\left(\tan \frac{\beta_1}{2} \tan \frac{\gamma_2}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \alpha}} = \left(\tan \frac{\gamma_1}{2} \tan \frac{\alpha_2}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \beta}} = \left(\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_2}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \gamma}}$$

GEOMETRIJSKE RELACIJE

Dokaz. Neka je P u ishodištu koordinatnog sustava

M_φ = presjek polarnog polupravca određenog kutom $\varphi \in [0, 2\pi)$ s rubom trokuta

$$R(\varphi) = |PM_\varphi|$$

Računamo:

$$\begin{aligned}\vec{E}(P) &= - \int_\varepsilon^{R(\varphi)} \int_0^{2\pi} \frac{r(\cos \varphi)\vec{i} + r(\sin \varphi)\vec{j}}{r^3} r dr d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} (\log R(\varphi) - \log \varepsilon) ((\cos \varphi)\vec{i} + (\sin \varphi)\vec{j}) d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} \log R(\varphi) ((\cos \varphi)\vec{i} + (\sin \varphi)\vec{j}) d\varphi\end{aligned}$$

Prelazimo u kompleksnu ravninu:

$$\int_0^{2\pi} \log R(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

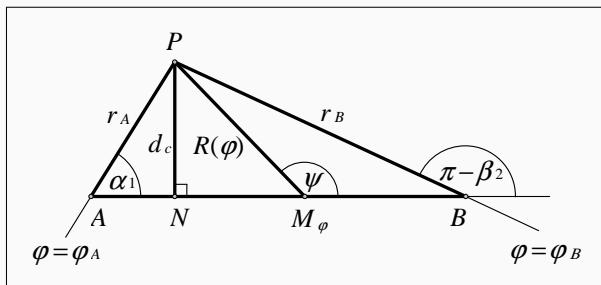
Vrhovi:

$$A = r_A e^{i\varphi_A}, \quad B = r_B e^{i\varphi_B}, \quad C = r_C e^{i\varphi_C}$$

Vektori stranica:

$$\vec{CB} = a e^{i\theta_a}, \quad \vec{AC} = b e^{i\theta_b}, \quad \vec{BA} = c e^{i\theta_c}$$

GEOMETRIJSKE RELACIJE



Slika: Integriranje po $\varphi_A < \varphi < \varphi_B$

$$\psi = \varphi - \varphi_A + \alpha_1, \quad R(\varphi) = d_c / \sin \psi$$

$$\varphi_A < \varphi < \varphi_B \quad \implies \quad \alpha_1 < \psi < \pi - \beta_2$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \log R(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi \\
 &= \log d_c \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} e^{i\varphi} d\varphi - \int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} (\log \sin \psi) e^{i(\psi+\varphi_A-\alpha_1)} d\psi \\
 &= -i \log d_c e^{i\varphi_B} + i \log d_c e^{i\varphi_A} \\
 &\quad + ie^{i(\varphi_A-\alpha_1+\pi-\beta_2)} (\log \sin \beta_2 - 1) - ie^{i\varphi_A} (\log \sin \alpha_1 - 1) \\
 &\quad - ie^{i(\varphi_A-\alpha_1)} \log \tan \frac{\pi-\beta_2}{2} + ie^{i(\varphi_A-\alpha_1)} \log \tan \frac{\alpha_1}{2} \\
 &= -ie^{i\varphi_B} (\log r_B - 1) + ie^{i\varphi_A} (\log r_A - 1) \\
 &\quad + ie^{i\theta_c} \left(\log \tan \frac{\alpha_1}{2} - \log \cot \frac{\beta_2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Zbrajanjem i kraćenjem dobivamo prvu formulu:

$$e^{i\theta_c} \log(\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_2}{2}) + e^{i\theta_a} \log(\tan \frac{\beta_1}{2} \tan \frac{\gamma_2}{2}) + e^{i\theta_b} \log(\tan \frac{\gamma_1}{2} \tan \frac{\alpha_2}{2}) = 0$$

$$\frac{\log(\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_2}{2})}{c} \vec{BA} + \frac{\log(\tan \frac{\beta_1}{2} \tan \frac{\gamma_2}{2})}{a} \vec{CB} + \frac{\log(\tan \frac{\gamma_1}{2} \tan \frac{\alpha_2}{2})}{b} \vec{AC} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{c} \log(\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_2}{2}) = \frac{1}{a} \log(\tan \frac{\beta_1}{2} \tan \frac{\gamma_2}{2}) = \frac{1}{b} \log(\tan \frac{\gamma_1}{2} \tan \frac{\alpha_2}{2})$$

$$\frac{1}{\sin \gamma} \log(\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_2}{2}) = \frac{1}{\sin \alpha} \log(\tan \frac{\beta_1}{2} \tan \frac{\gamma_2}{2}) = \frac{1}{\sin \beta} \log(\tan \frac{\gamma_1}{2} \tan \frac{\alpha_2}{2})$$

Korištenjem

$$\tan^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1 - \cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1} = \frac{1 - (r_A^2 + c^2 - r_B^2)/2r_{AC}}{1 + (r_A^2 + c^2 - r_B^2)/2r_{AC}} = \frac{(r_A + r_B - c)(r_B - r_A + c)}{(r_A + r_B + c)(r_A - r_B + c)}$$

$$\tan \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\beta_2}{2} = \frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c}$$

dobivamo i drugu formulu:

$$\frac{1}{c} \log \left(\frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c} \right) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a} \right) = \frac{1}{b} \log \left(\frac{r_C + r_A - b}{r_C + r_A + b} \right)$$

KARTEZIJEVE KOORDINATE

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \text{poluopseg}$$

$$-\frac{s}{a} \log\left(\frac{r_B+r_C-a}{r_B+r_C+a}\right) = -\frac{s}{b} \log\left(\frac{r_C+r_A-b}{r_C+r_A+b}\right) = -\frac{s}{c} \log\left(\frac{r_A+r_B-c}{r_A+r_B+c}\right) = \lambda$$

$\lambda > 0$ je neki "bezdimenzijski" parametar

Odavde slijedi:

$$r_B + r_C = \underbrace{\coth \frac{a\lambda}{2s}}_u, \quad r_C + r_A = \underbrace{b \coth \frac{b\lambda}{2s}}_v, \quad r_A + r_B = \underbrace{c \coth \frac{c\lambda}{2s}}_w$$

pa je

$$r_A = \frac{1}{2}(v + w - u), \quad r_B = \frac{1}{2}(w + u - v), \quad r_C = \frac{1}{2}(u + v - w)$$

KARTEZIJEVE KOORDINATE

Udaljenosti r_A, r_B, r_C nisu “nezavisne”!

$$P(\triangle PBC) + P(\triangle PCA) + P(\triangle PAB) = P(\triangle ABC)$$

Heronova formula:

$$\begin{aligned} & \sqrt{s_a(s_a - a)(s_a - r_B)(s_a - r_C)} + \sqrt{s_b(s_b - b)(s_b - r_C)(s_b - r_A)} \\ & + \sqrt{s_c(s_c - c)(s_c - r_A)(s_c - r_B)} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(u^2 - a^2)(a^2 - (v - w)^2)} + \sqrt{(v^2 - b^2)(b^2 - (w - u)^2)} \\ & + \sqrt{(w^2 - c^2)(c^2 - (u - v)^2)} = \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)} \end{aligned}$$

Ovo je nelinearna jednačba za λ

Želimo izraziti koordinate od $P(x_P, y_P)$ pomoću A, B, C

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = r_A^2$$

$$(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 = r_B^2$$

$$(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 = r_C^2$$

Oduzimanjem treće jednadžbe od prve dvije i uvrštavanje r_A, r_B, r_C u terminima u, v, w :

$$2(x_C - x_A)x_P + 2(y_C - y_A)y_P = x_C^2 - x_A^2 + y_C^2 - y_A^2 + v(w - u)$$

$$2(x_C - x_B)x_P + 2(y_C - y_B)y_P = x_C^2 - x_B^2 + y_C^2 - y_B^2 + u(w - v)$$

Lako je riješiti taj linearni sustav

Teorem (Abraham i K. (2013))

Ako je $\vec{E}(P) = \vec{0}$, tada su Kartezijeve koordinate x_P, y_P dane formulama

$$x_P = \frac{(x_A^2 + y_A^2 - vw)(y_B - y_C) + (x_B^2 + y_B^2 - wu)(y_C - y_A) + (x_C^2 + y_C^2 - uv)(y_A - y_B)}{2x_A(y_B - y_C) + 2x_B(y_C - y_A) + 2x_C(y_A - y_B)},$$
$$y_P = \frac{(x_A^2 + y_A^2 - vw)(x_B - x_C) + (x_B^2 + y_B^2 - wu)(x_C - x_A) + (x_C^2 + y_C^2 - uv)(x_A - x_B)}{2y_A(x_B - x_C) + 2y_B(x_C - x_A) + 2y_C(x_A - x_B)},$$

pri čemu su $u = a \coth \frac{a\lambda}{2S}$, $v = b \coth \frac{b\lambda}{2S}$, $w = c \coth \frac{c\lambda}{2S}$,
 $a \lambda > 0$ je jedinstveno pozitivno rješenje jednadžbe

$$\sqrt{(u^2 - a^2)(a^2 - (v-w)^2)} + \sqrt{(v^2 - b^2)(b^2 - (w-u)^2)} \\ + \sqrt{(w^2 - c^2)(c^2 - (u-v)^2)} = \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

Kao posljedica slijedi jedinstvenost takve točke $P = P_{\max}$

Nelinearna jednadžba u jednoj varijabli se lako riješi npr. Newtonovom metodom. Npr. za $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$:

$$\lambda_{\max} = 4.010297202743007522718690055346 \dots$$

$$x_{\max} = 0.272557906914867702024319226991 \dots$$

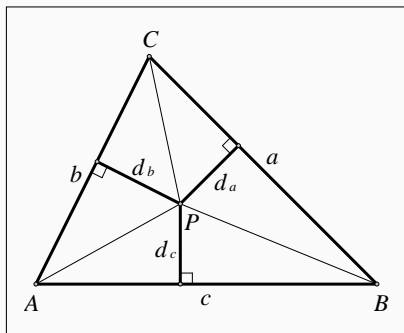
$$y_{\max} = 0.704148189723077020171531030875 \dots$$

Otvoreni problem

Je li moguće izraziti Kartezijeve koordinate od P_{\max} kao elementarne funkcije vrhova i duljina stranica trokuta?

TRILINEARNE KOORDINATE

Trilinearne koordinate točke P su homogene koordinate $\tau_a : \tau_b : \tau_c$ takve da je $\tau_a/d_a = \tau_b/d_b = \tau_c/d_c$
 d_a, d_b, d_c = usmjerene udaljenosti od P do BC, CA, AB



Slika: Trilinearne koordinate

Kimberling (1994) – strogo definirao pojam centra (tj. karakteristične točke) trokuta

Funkcija centra trokuta je realna funkcija definirana na svim trojkama duljina stranica (a, b, c) sa svojstvima:

- Postoji $\nu \in \mathbb{R}$ t.d. je $f(ta, tb, tc) = t^\nu f(a, b, c)$ za $t > 0$
- $f(a, c, b) = f(a, b, c)$
- f nije identički jednaka 0

Centar trokuta pridružen f je točka s trilinearnim koordinatama

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

Isti centar može dolaziti od više funkcija f

Za maksimum elektrostatskog potencijala imamo

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{P(\Delta PBC)/a}{P(\Delta PCA)/b} = \frac{\sqrt{((u/a)^2 - 1)(a^2 - (v - w)^2)}}{\sqrt{((v/b)^2 - 1)(b^2 - (w - u)^2)}}$$

pa je on centar trokuta s funkcijom ($\nu = 1$):

$$f(a, b, c) = \sqrt{\left(\coth^2 \frac{a\lambda_{\max}}{a+b+c} - 1\right) \left(a^2 - \left(b \coth \frac{b\lambda_{\max}}{a+b+c} - c \coth \frac{c\lambda_{\max}}{a+b+c}\right)^2\right)},$$

pri čemu je $\lambda_{\max} > 0$ rješenje nelinearne jednačbe od ranije

Otvoreni problem

Je li P_{\max} algebarski ili transcendentni centar trokuta, tj. ima li trilinearne koordinate pridružene nekoj algebarskoj funkciji f (u duljinama stranica a, b, c)?

“Zanimljivi” centri trokuta se sustavno prikupljaju na:

Encyclopedia of Triangle Centers

<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

- X_1 = središte upisane kružnice (1 : 1 : 1)
- X_2 = težište ($1/a$: $1/b$: $1/c$)
- X_3 = središte opisane kružnice ($\cos \alpha$: $\cos \beta$: $\cos \gamma$)
- X_4 = ortocentar ($\cos^{-1} \alpha$: $\cos^{-1} \beta$: $\cos^{-1} \gamma$)
-
- X_{5626} = centar elektrostatskog potencijala (20.12.2013.)
-
- X_{6802} (19.3.2015.)

Kako provjeriti da novodobiveni centar već nije u enciklopediji?
ETC nudi pretraživanje po numeričkoj vrijednosti od

$$d_a = d(P, BC) = \frac{2\tau_a P(\triangle ABC)}{a\tau_a + b\tau_b + c\tau_c}$$

za trokut sa stranicama duljina $a = 6$, $b = 9$, $c = 13$

Za točku P_{\max} lako izračunamo:

$$d_a = 2.110731796690289177459836888182 \dots$$

i provjerimo da se ne pojavljuje ranije na popisu

APROKSIMACIJA PARAMETRA

Za jednakostranični trokut nelinearna jednačba za λ postaje

$$3a^2 \sqrt{\coth^2 \frac{\lambda}{3} - 1} = a^2 \sqrt{3}$$

i ima rješenje $\lambda_0 = 3 \log(2 + \sqrt{3})$

Za općeniti trokut jednačbu rješavamo nekom iterativnom numeričkom metodom

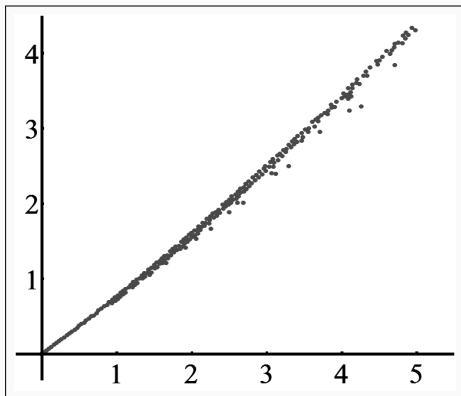
Kako odabrati “dobru” početnu aproksimaciju?

Heuristički se daje primijetiti da λ_{\max} “korelira” s veličinom

$$t = \log \frac{s^2}{27\rho^2} = \log \frac{s^3}{27(s-a)(s-b)(s-c)} \geq 0$$

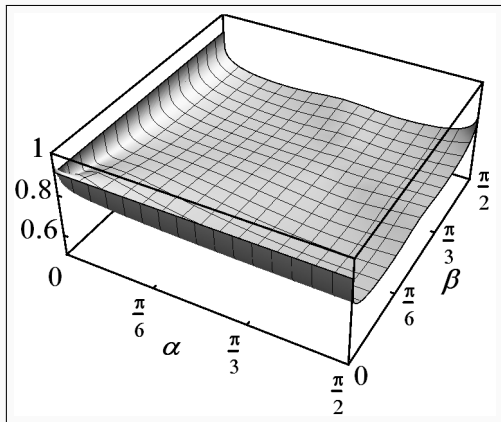
ρ = polumjer upisane kružnice

APROKSIMACIJA PARAMETRA



Slika: Točke $(t, \lambda_{\max} - \lambda_0)$ za mnogo “slučajnih” trokutova

APROKSIMACIJA PARAMETRA



Slika: Omjer $(\lambda_{\max} - \lambda_0)/t$

OPĆENITIJI POTENCIJALI

Možemo promatrati točke ekstrema od V_p za $p \neq -1, 0$

P je ishodište koordinatnog sustava u kompleksnoj ravnini

Analogni račun daje:

$$\int_0^{2\pi} R(\varphi)^{p+1} e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

$R(\varphi)$ = duljina na polarnoj zruci od P do ruba trokuta

Za koje p ova jednakost poprima elementarni oblik ili ima elementarnu interpretaciju?

Dobiveni centri trokuta se u pravilu ne nalaze u ETC

Upravo zato ima “ugodnih iznenađenja”!

OPĆENITJI POTENCIJALI

$$p = 2 \implies \int_0^{2\pi} R(\varphi)^3 e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\varphi)} r e^{i\varphi} r dr d\varphi = 0$$

$$\iint_T \vec{PQ} d\lambda(Q) = \vec{0}$$

$P = X_2 =$ težište (centar mase)

OPĆENITJI POTENCIJALI

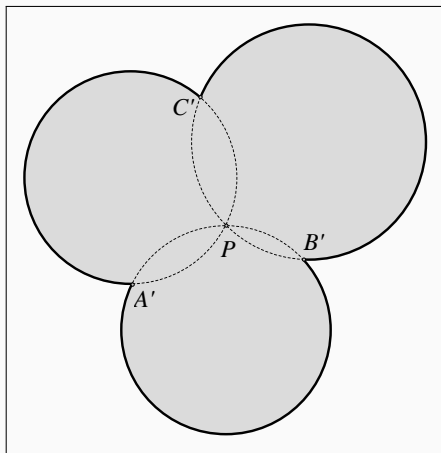
$$p = -4 \quad \implies \quad \int_0^{2\pi} R(\varphi)^{-3} e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/R(\varphi)} r e^{i\varphi} r dr d\varphi = 0$$

Planarna inverzija obzirom na jediničnu kružnicu oko P preslikava ∂T u zatvorenu krivulju koja određuje područje S

$$\iint_S \vec{PQ} d\lambda(Q) = \vec{0}$$

P = težište (centar mase) lika S



Slika: Područje S ograničeno invertiranom slikom ruba trokuta

OPĆENITJI POTENCIJALI

$$p = -2 \implies \int_0^{2\pi} R(\varphi)^{-1} e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} R(\varphi)^{-1} e^{i\varphi} d\varphi &= \int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \frac{\sin \psi}{d_c} e^{i(\psi+\varphi_A-\alpha_1)} d\psi \\ &= -\frac{ie^{i\varphi_B}}{4r_B} + \frac{ie^{i\varphi_A}}{4r_A} + \frac{e^{i\varphi_B} \cot \beta_2}{4r_B} + \frac{e^{i\varphi_A} \cot \alpha_1}{4r_A} - \frac{\angle APB}{2id_c} e^{i\theta_c} \end{aligned}$$

Zbrajanje i kraćenje daju:

$$\frac{\angle BPC}{d_a} e^{i\theta_a} + \frac{\angle CPA}{d_b} e^{i\theta_b} + \frac{\angle APB}{d_c} e^{i\theta_c} = 0$$

$$\frac{\angle BPC}{P(\triangle BPC)} = \frac{\angle CPA}{P(\triangle CPA)} = \frac{\angle APB}{P(\triangle APB)}$$

Izveo još Shibata (2009), ali bez dokaza

OPĆENITJI POTENCIJALI

$$p = -3 \implies \int_0^{2\pi} R(\varphi)^{-2} e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

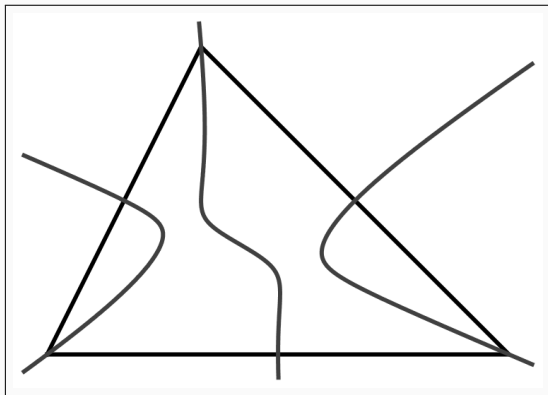
Uz pomoć numerike i *PSLQ algoritma* za pronalaženje linearnih relacija s cjelobrojnim koeficijentima (Bailey i Ferguson (1992), Arno, Bailey, Ferguson (1999)) nalazimo čak dvije relacije:

$$\frac{P(\triangle BCP)}{|BP| + |CP|} = \frac{P(\triangle CAP)}{|CP| + |AP|} = \frac{P(\triangle ABP)}{|AP| + |BP|}$$
$$\frac{|AP| |BD| |CD|}{|BP| + |CP|} = \frac{|BP| |CE| |AE|}{|CP| + |AP|} = \frac{|CP| |AF| |BF|}{|AP| + |BP|}$$

D, E, F = redom točke u kojima kružnice upisane $\triangle BCP$, $\triangle CAP$, $\triangle ABP$ diraju stranice $\triangle ABC$

Također se čini da P leži na Thomsonovoj kubici:

$$bc \tau_a(\tau_b^2 - \tau_c^2) + ca \tau_b(\tau_c^2 - \tau_a^2) + ab \tau_c(\tau_a^2 - \tau_b^2) = 0$$



Slika: Thomsonova kubika

$p = -\infty$ (granični slučaj kada $p \rightarrow -\infty$)

$\implies \min_{\varphi \in [0, 2\pi)} R(\varphi)$ je maksimalno

Naći P tako da je $\min_{Q \in \partial T} |PQ|$ maksimalno

Problem najvećeg kruga sadržanog u trokutu T

$P = X_1 =$ središte upisane kružnice

$p = +\infty$ (granični slučaj kada $p \rightarrow +\infty$)

$\implies \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} R(\varphi)$ je minimalno

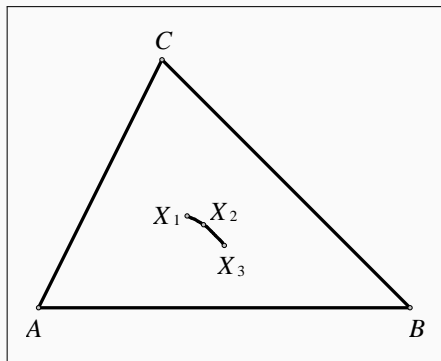
Naći P tako da je $\max_{Q \in \partial T} |PQ|$ minimalno

Problem najmanjeg kruga koji sadrži trokut T

$P = \begin{cases} \text{središte opisane kružnice } X_3 \text{ za šiljastokutan trokut} \\ \text{polovište najdulje stranice za tupokutan trokut} \end{cases}$

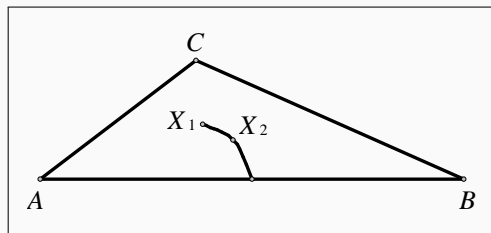
OPĆENITJI POTENCIJALI

Potencijalni luk (Shibata (2009)) za šiljastokutan trokut



Slika: Ekstremne točke potencijala V_p za razne p

Potencijalni luk (Shibata (2009)) za tupokutan trokut



Slika: Ekstremne točke potencijala V_p za razne p

HVALA VAM NA PAŽNJI!