

Singularni integrali

Vjekoslav Kovač

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Skripta kolegija *Singularni integrali* na sveučilišnom poslijediplomskom doktorskom studiju matematike u ak. god. 2014./2015.

Sadržaj

Sadržaj	iii
Pregled oznaka	v
Predgovor	1
1. Kvantitativne formulacije kvalitativnih rezultata	7
1.1. Kvalitativni i kvantitativni rezultati	7
1.2. Dva općenita principa konvergencije	10
1.3. Hardy-Vinogradovljeva i Bachmann-Landauova notacija	24
2. Multilinearna interpolacija L^p prostora	31
2.1. Dualnost	31
2.2. Realna metoda interpolacije	39
2.3. Kompleksna metoda interpolacije	59
3. Pozitivni i apsolutno dominirani integralni operatori	65
3.1. Dilatacijske simetrije i raspon L^p ocjena	65
3.2. Translacijske simetrije i raspon L^p ocjena	72
3.3. Dominirane i okrnjene jezgre	76
4. Ograničeni Calderón-Zygmundovi operatori	89
4.1. Definicija Calderón-Zygmundovog operatora	89
4.2. Omeđenost na L^p prostorima	94
4.3. Hilbertova transformacija	100
4.4. Poissonov integral	110
4.5. Fourierovi množitelji	113
4.6. Omeđenost na prostorima H^1 i BMO	121
4.7. Hinčinova nejednakost i Littlewood-Paleyeva teorija	124
5. $T(1)$ teorem	133
5.1. Iskaz $T(1)$ teorema i neki primjeri	133
5.2. Postojanje valićnih baza	136
5.3. Diskretna Schurova lema	140
5.4. Dokaz $T(1)$ teorema u posebnom slučaju	141
5.5. Paraproducti i dokaz općenitog slučaja	147

5.6. Cauchyjev integral duž Lipschitzovog grafa	150
6. Maksimalne ocjene	155
6.1. Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija	155
6.2. Ocjene i konvergencija martingala	161
6.3. Calderónov princip prijenosa	176
6.4. Maksimalni singularni integrali	178
6.5. Steinov maksimalni princip	183
7. Vremensko-frekvencijska analiza	191
7.1. Fazna ravnina	191
7.2. Princip neodređenosti	192
7.3. Fazni portret	196
7.4. Valićna karakterizacija L^p normi	202
7.5. Fourierova analiza na abelovim grupama	207
7.6. Vremensko-frekvencijska analiza u konačnim karakteristikama	212
7.7. Modeli linearne i bilinearne Hilbertove transformacije	219
8. Tehnika Bellmanovih funkcija	229
8.1. Dijadski Carlesonov teorem ulaganja	230
8.2. Dijadska maksimalna funkcija	233
8.3. Dijadski paraproduct	236
8.4. Ocjena za dijadske A_∞ težine	241
8.5. Bellmanova funkcija u faznoj ravnini	243
Bibliografija	247

Pregled oznaka

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	redom skupovi prirodnih brojeva, prirodnih brojeva s nulom, cijelih brojeva, realnih brojeva, kompleksnih brojeva
$\mathbb{T}^d$	d -dimenzionalni euklidski torus, tj. $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$
$\mathcal{P}(S)$	partitivni skup skupa S , tj. skup svih podskupova od S
$\mathbb{1}_S$	karakteristična funkcija skupa S ; $\mathbb{1}_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{za } x \in S \\ 0 & \text{za } x \notin S \end{cases}$
id_X ili I_X	identiteta na skupu X ; $\text{id}_X(x) := x$; drugu oznaku preferiramo kada je X vektorski prostor
$\text{Re } z, \text{Im } z, \text{sgn } z$	redom realni dio, imaginarni dio i predznak kompleksnog broja z ; $\text{sgn } z := \begin{cases} z/ z & \text{za } z \neq 0 \\ 0 & \text{za } z = 0 \end{cases}$
$\ \cdot\ _X$	norma na normiranom ili kvazi-normiranom prostoru X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	skalarni produkt na unitarnom prostoru H
$\mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	vektorski prostor svih μ -g.s. klasa kompleksnih $\mathcal{X}$ -izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$
$\mathcal{M}^+(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	familija svih μ -g.s. klasa $\mathcal{X}$ -izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$ s vrijednostima u $[0, +\infty]$
$\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	vektorski prostor svih μ -g.s. klasa jednostavnih $\mathcal{X}$ -izmjerivih kompleksnih funkcija na $\mathbb{X}$ koje iščezavaju izvan skupa konačne mjere
$L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	Lebesgueov prostor μ -g.s. klasa $\mathcal{X}$ -izmjerivih p -sumabilnih kompleksnih funkcija na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, $0 < p \leq \infty$
$L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	slabi Lebesgueov prostor na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, $0 < p \leq \infty$; vidjeti definiciju u odjeljku 1.2
$\mathcal{B}(X)$	Borelova σ -algebra na topološkom prostoru X ; $\mathcal{B}(X)$ je najmanja σ -algebra koja sadrži sve otvorene skupove u X
λ ili $ \cdot $	Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$; općenitije Haarova mjera na lokalno kompaktnoj abelovoj grupi $\mathbb{A}$; piše se bez oznake kada se podrazumijeva
$L^p(E), L^p_{\text{slabi}}(E)$	prostori $L^p(E, \mathcal{B}(E), \lambda _{\mathcal{B}(E)})$, $L^p_{\text{slabi}}(E, \mathcal{B}(E), \lambda _{\mathcal{B}(E)})$ za $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
$L^p_{\text{lok}}(U)$	prostor g.s. klasa izmjerivih kompleksnih funkcija na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$ koje su p -sumabilne na kompaktima u U

$[f]_Q$	prosjeak lokalno integrabilne funkcije f po skupu Q obzirom na Lebesgueovu mjeru; vidjeti definiciju u odjeljku 4.2
$ S $ ili $\text{card } S$	broj elemenata konačnog skupa S ; uzima se $+\infty$ za beskonačni skup S ; skupovna funkcija $ \cdot $ je mjera prebrajanja
$\ell^p(E)$	Lebesgueov prostor $L^p(E, \mathcal{P}(E), \cdot)$ obzirom na mjeru prebrajanja
$C_c(X)$	prostor neprekidnih kompleksnih funkcija s kompaktnim nosačem na topološkom prostoru X
∂_x ili $\frac{\partial}{\partial x}$ ili ∂_j	parcijalna derivacija po varijabli x , odnosno po j -toj varijabli
∇, ∇_x	gradijent, odnosno parcijalni gradijent po vektorskoj varijabli x
$C_c^k(U)$	prostor k puta neprekidno diferencijabilnih kompleksnih funkcija s kompaktnim nosačem na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$ v $	euklidska norma vektora $v \in \mathbb{R}^d$; $ (v_1, \dots, v_d) := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_d^2}$
$B(x_0, r)$	otvorena kugla sa središtem x_0 i radijusom $r > 0$ u metričkom ili kvazi-metričkom prostoru (X, d) ; $B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$; na $\mathbb{R}^d$ se podrazumijeva euklidska metrika
$\text{Cl } S, \text{Int } S, \text{Bd } S$	redom zatvarač, unutrašnjost i rub skupa S u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$; na $\mathbb{R}^d$ se podrazumijeva euklidska topologija
$\mathbf{0}_V$ ili $\mathbf{0}$	nul-vektor u vektorskom prostoru V
$\text{Ker } T, \text{Im } T$	redom jezgra i slika linearnog operatora T
$\ T\ _{X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y}$	operatorska norma multilinearog operatora $T: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$; vidjeti definiciju u odjeljku 2.1
$\text{span } S$	linearna ljuska skupa S u odgovarajućem vektorskom prostoru; najmanji vektorski potprostor koji sadrži S
$L \oplus M$	ortogonalna suma potprostora L i M nekog unitarnog prostora; $L \oplus M := \{x + y : x \in L, y \in M\}$ i pretpostavlja se $L \perp M$
$f(x) \lesssim_P g(x)$	postoji konačna konstanta C_P takva da za svaki x vrijedi $ f(x) \leq C_P g(x) $; vidjeti definiciju u odjeljku 1.3
$f(x) \sim_P g(x)$	vrijedi $f(x) \lesssim_P g(x)$ i $g(x) \lesssim_P f(x)$
$f(x) = O_P(g(x)),$ $x \rightarrow c$	postoji konačna konstanta C_P takva da $ f(x) \leq C_P g(x) $ vrijedi na nekoj okolini točke c ; vidjeti definiciju u odjeljku 1.3
$D_a^{(p)}, M_b, T_c$	redom operatori p -normalizirane dilatacije s faktorom $a > 0$, modulacije za $b \in \mathbb{R}^d$ i translacije za $c \in \mathbb{R}^d$; vidjeti definicije u odjeljku 3.2

Predgovor

Kad pišeš knjigu, gradivo trebaš posložiti
upravo onako kako bi volio da si ga naučio.

Elias Menachem Stein (1931–2018)

prilikom jednog ručka na MFO u Oberwolfachu

Što su singularni integrali i kakvim temama ćemo se baviti?

Pojam singularnog integrala nema strogo određene granice. On obuhvaća klasu integralnih operatora koja se postupno proširivala tijekom 20. stoljeća, zbog stalne motivacije iz raznolikih grana matematike i zbog razvoja dostupnih tehnika. Ipak, pokušajmo opisati što podrazumijevamo pod tim pojmom.

Linearni singularni integral je integralni operator $f \mapsto Tf$ koji se shematski može prikazati kao

$$(Tf)(x) := \int K(x, y)f(y)d\mu(y),$$

pri čemu se f uzima iz nekog pogodnog prostora funkcija, μ je neka mjera na ambijentnom prostoru, a K je tzv. *jezgra*, koja je na neki način singularna. Ta “singularnost” od K ne može biti baš proizvoljna. Tako npr. za funkcije na $\mathbb{R}$ i ako je μ Lebesgueova¹ mjera, formula

$$(Tf)(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)dy}{|x - y|^\alpha}$$

daje smisleni operator s dobrim svojstvima kada je $0 < \alpha < 1$, tzv. *Rieszov² potencijal*, kojeg ćemo proučavati u odjeljku 3.1, dok je za $\alpha \geq 1$ jezgra $K(x, y) = |x - y|^{-\alpha}$ naprosto “previše singularna”. Granični slučaj $\alpha = 1$ postaje zanimljiv nakon što se izostave apsolutne vrijednosti, ali je i dalje problem što podintegralna funkcija ne mora biti integrabilna, čak ni za jedan $x \in \mathbb{R}$. Stvari se mogu popraviti tako da se integral shvati u smislu glavne vrijednosti (označene “p.v.”), tj. kod integracije se isključi simetrična okolina oko singulariteta pa se potom ta okolina “stegne” prema samom singularitetu. Tada dolazi do suptilnog poništavanja prilikom integriranja, zahvaljujući

¹Henri Léon Lebesgue (1875–1941), francuski matematičar.

²Marcel Riesz (1886–1969), mađarsko-švedski matematičar.

antisimetričnosti jezgre $K(x, y)$. Vidjet ćemo da za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji limes

$$(Tf)(x) := \text{p.v.} \int \frac{f(y)dy}{x-y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R} : |x-y| > \varepsilon\}} \frac{f(y)dy}{x-y} \quad (0.1)$$

i da je na taj način dobro definiran linearni operator $T: C_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R})$, koji se čak proširuje po neprekidnosti do ograničenog operatora $L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Ipak, još uvijek neće biti očigledno da za proizvoljnu $f \in L^p(\mathbb{R})$ limes u (0.1) postoji makar za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$ i ta će činjenica biti nešto složenija za dokazati. Operator definiran sa (0.1) pomnožen s $1/\pi$ (radi pogodnije normalizacije) zvat ćemo *Hilbertova³ transformacija* i sustavno proučavati u odjeljku 4.3, a ona će biti i osnovni primjer tzv. množitelja (vidjeti odjeljak 4.5) i najjednostavniji primjer tzv. Calderón⁴-Zygmundovog⁵ operatora (vidjeti poglavlja 4 i 5).

Ako označimo

$$K_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-y} & \text{kada je } |x-y| > \varepsilon, \\ 0 & \text{kada je } |x-y| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

tada jednakost (0.1) možemo zapisati

$$(Tf)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x, y) f(y) dy. \quad (0.2)$$

Zapravo su te jezgre međuovisne:

$$K_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} K_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \quad \text{za } \varepsilon > 0. \quad (0.3)$$

Već u idućem poglavlju ćemo vidjeti da je konvergencija u (0.2) za proizvoljnu funkciju $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ zapravo pitanje omeđenosti *maksimalnog operatora*

$$(Mf)(x) := \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} \left| \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x, y) f(y) dy \right|. \quad (0.4)$$

Čak i ako uzmemo jezgru koja nije singularna, npr. naprosto

$$K_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{kada je } |x-y| > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{kada je } |x-y| \leq 1, \end{cases}$$

i potom definiramo K_ε pomoću (0.3), formula (0.4) će dati netrivialni objekt

$$(Mf)(x) := \sup_{\varepsilon > 0} \left| \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y) dy \right|, \quad (0.5)$$

zvan *Hardy⁶-Littlewoodova⁷ maksimalna funkcija*, kojeg ćemo proučiti u odjeljku 6.1.

³David Hilbert (1862–1943), njemački matematičar.

⁴Alberto Pedro Calderón (1920–1998), argentinsko-američki matematičar.

⁵Antoni Zygmund (1900–1992), poljsko-američki matematičar.

⁶Godfrey Harold Hardy (1877–1947), engleski matematičar.

⁷John Edensor Littlewood (1885–1977), engleski matematičar.

Linearne singularne integrale su sustavno proučavali Calderón i Zygmund te kasnije Stein⁸ i Weiss.⁹ Prvotno su bili izučavani operatori “invarijantni na translacije”, kod kojih jezgra poprima oblik $K(x, y) = \tilde{K}(x - y)$ za $x, y \in \mathbb{R}^d$ i za neku funkciju $\tilde{K}$, a kasnije su dobiveni rezultati za operatore mnogo općenitijeg oblika. Jedno od najosnovnijih pitanja za singularni integralni operator T zadan na nekom pogodnom gustom potprostoru od $L^2(\mathbb{R}^d)$ je: Može li se T proširiti do ograničenog linearnog operatora na cijelom prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$, tj. vrijedi li ocjena

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

za neku konačnu konstantu $C \geq 0$? Svojevrsan vrhunac teorije linearnih singularnih integrala je tzv. *T(1) teorem*, koji daje jednu karakterizaciju upravo takvog tipa, a doživio je i veliki broj modifikacija potaknutih primjenama. Mi ćemo ga iskazati i dokazati kroz poglavlje 5. Nakon Hilbertovog prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ prirodno je promatrati i ostale Lebesgueove prostore $L^p(\mathbb{R}^d)$ (pogledajte odjeljak 4.2), potom tzv. Hardyjev prostor $H^1(\mathbb{R}^d)$ (pogledajte odjeljak 4.6) te još mnoge druge funkcijske prostore.

* * *

Čak i ako se zadržimo u ambijentu euklidskog prostora $\mathbb{R}^d$ i Lebesgueove mjere te niti ne promatramo “zakrivljene” objekte (tj. krivulje i plohe), još uvijek nismo spomenuli sve vrste operatora koje je moguće promatrati. *Multilinearini singularni integral* je operator koji se shematski može predstaviti

$$T(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) := \int_{\Sigma_x} K(x, y_1, y_2, \dots, y_n) f_1(y_1) f_2(y_2) \cdots f_n(y_n) d\mu(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Pritom Σ_x predstavlja neku višedimenzionalnu ravninu u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n}$ u kojem se nalazi vektor varijabli $(y_1, \dots, y_n)$, a μ je neka Borelova¹⁰ mjera na Σ_x , najčešće mjera invarijantna na translacije unutar Σ_x . Na ovaj način želimo dozvoliti mogućnost da se varijable funkcija $f_1, f_2, \dots, f_n$ ne uzimaju “nezavisno”, već mogu biti povezane linearnim uvjetima. Navedimo nekoliko bilinearnih primjera.

$$\begin{aligned} (1) \quad T(f, g)(x) &:= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(x+t) \frac{dt}{t} = \text{p.v.} \int_{\Sigma_x} f(y_1)g(y_2) \frac{2d\mu(y_1, y_2)}{y_2 - y_1}, \\ &\quad \Sigma_x = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 2x\}. \\ (2) \quad T(f, g)(x, y) &:= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^2} f(x+s, y)g(x, y+t) \frac{sdsdt}{(s^2 + t^2)^{3/2}} \\ &= \text{p.v.} \int_{\Sigma_x} f(u_1, v_1)g(u_2, v_2) \frac{(u_1 - x)d\mu(u_1, v_1, u_2, v_2)}{((u_1 - x)^2 + (v_2 - y)^2)^{3/2}}, \\ &\quad \Sigma_x = \{(u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathbb{R}^4 : v_1 = y, u_2 = x\}. \end{aligned}$$

⁸Elias Menachem Stein (1931–2018), američki matematičar belgijskog porijekla.

⁹Guido Leopold Weiss (1928), američki matematičar talijanskog porijekla.

¹⁰Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956), francuski matematičar i političar.

$$\begin{aligned}
(3) \quad T(f, g)(x, y) &:= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x+t, y)g(x, y+t) \frac{dt}{t} \\
&= \text{p.v.} \int_{\Sigma_x} f(u_1, v_1)g(u_2, v_2) \frac{d\mu(u_1, v_1, u_2, v_2)}{u_1 - x}, \\
\Sigma_x &= \{(u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathbb{R}^4 : v_1 = y, u_2 = x, u_1 - v_2 = x - y\}.
\end{aligned}$$

Opet “p.v.” označava da izostavljamo i stežemo simetričnu okolinu oko ravnine na kojoj je jezgra K singularna, što ovdje znači da je nazivnik jednak 0.

Opet nam je najprirodnije prvo promatrati omeđenost operatora T u nekom rasponu Lebesgueovih prostora,

$$\|T(f_1, f_2, \dots, f_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^{d_j})}.$$

Multilinearne operatori, za razliku od svojih linearnih varijanti, mogu imati vrlo složenu strukturu, koja ne mora biti vidljiva na prvi pogled i koja zahtijeva pronalaženje posebnih analitičkih tehnika, prilagođenih upravo tom operatoru. Tako je npr. omeđenost operatora pod (1), nazvanog *bilinearna Hilbertova transformacija*, bila otvoreno pitanje čak tridesetak godina i pokazana je u radovima [LT97] i [LT99] (pogledajte odjeljak 7.7), prve L^p ocjene za operator (2) dokazane su nedavno u radu [Kov12], dok je još uvijek neriješen problem vrijedi li ikoja L^p ocjena za operator (3). Teoriju su uvelike obogatili Coifman¹¹ i Meyer¹² promatrajući multilinearne varijante Calderón-Zygmundovih operatora, dok su Lacey¹³ i Thiele¹⁴ riješili neke važne otvorene probleme (između ostalog omeđenost bilinearne Hilbertove transformacije i omeđenost bilinearne maksimalne funkcije u netrivialnom rasponu eksponenata) i razvili danas neizostavne tehnike vremensko-frekvencijske analize.

* * *

Proučavati singularne integrale radi sebe samih svakako ne bi bilo dovoljno zanimljivo i uskratilo bi nam upoznavanje s nekim vrlo lijepim idejama i elegantnim argumentima. Danas je češće pravilo nego sporadični primjer da poznati matematičari povezuju tehnike iz analize integralnih operatora s drugim granama matematike. Među ostalima to neprestano dokazuju Fieldsovi medaljisti Bourgain¹⁵ i Tao,¹⁶ koji se obično primarno predstavljaju kao “analitičari”. Zapravo je i način izlaganja gradiva ovog kolegija uvelike inspiriran brojnim ekspozitornim zabilješkama i predavanjima Taoa i Thielea: [Tao], [Tao01], [Tao07], [Thi06], [Thi11].

Očekivane su veze integralnih operatora s Fourierovom¹⁷ analizom (konvergencija Fourierovih redova i integrala) i diferencijalnim jednadžbama (toplinska proširenja), no

¹¹Ronald Raphael Coifman (1941), američki matematičar.

¹²Yves Meyer (1939), francuski matematičar.

¹³Michael Thoreau Lacey (1959), američki matematičar.

¹⁴Christoph Martin Thiele (1968), njemački matematičar.

¹⁵Jean Bourgain (1954–2018), belgijsko-američki matematičar.

¹⁶Terence Chi-Shen Tao (1975), australsko-američki matematičar.

¹⁷Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), francuski matematičar i fizičar.

neke isprva iznenađujuće veze koje ćemo komentirati će biti s ergodičkom teorijom (ergodički teoremi) i teorijom vjerojatnosti (martingali). Spominjanje raznorodnih matematičkih grana može ostaviti dojam pretencioznog odabira gradiva, ali mi ćemo se u stvari baviti samo manjim brojem vrlo specifičnih tipova problema, koje ćemo opetovano uočavati u raznolikim kontekstima. Usmjerujući naše preferencije prema određenim pitanjima moći ćemo se koncentrirati samo na uske dijelove opsežnih teorija. Objasnit ćemo to primjerima već na samom početku idućeg poglavlja.

U skladu s prethodno rečenim, gradivo ovog kolegija i skripte bit će posloženo tako da ćemo u prvi plan staviti tehnike i ideje, dovoljno generalne da imaju brojne primjene, često u vrlo različitim matematičkim granama. U drugom planu će se nalaziti specifičnosti pojedinih teorija, a kad god je moguće izložiti ćemo i međusobni odnos rezultata u tim različitim područjima. Mnogi odjelci bit će posvećeni samo po jednoj tehnici ili samo po jednoj matematičkoj ideji.

Poglavlje 1 diskutirat će osnovne principe dokazivanja konvergencije kod raznolikih problema iz matematičke analize. Poglavlje 2 će dati osnovne rezultate o interpolaciji Lebesgueovih prostora, moćnoj apstraktnoj tehnici koja često znatno olakšava dokazivanje konkretnih ocjena. U poglavlju 3 započinjemo sistematično proučavanje integralnih operatora i za početak ostajemo na klasi kod koje si, neformalno rečeno, možemo priuštiti da apsolutne vrijednosti ulaze pod integrale. Tim poglavljem će dominirati diskutiranje odnosa simetrija operatora i mogućeg raspona L^p ocjena. Poglavlja 4 i 5 bavit će se klasom Calderón-Zygmundovih operatora, koja se s vremenom izdvojila kao najprirodnija klasa linearnih integralnih operatora sa suptilnim poništavanjem. Shodno tome, trebat ćemo razviti specifične tehnike koje uzimaju u obzir to poništavanje. Usput će se fundirati osnove teorije Fourierovih množitelja i osnove Littlewood-Paleyev¹⁸ teorije. U poglavlju 6 bavit ćemo se tehnikama za dokazivanje maksimalnih ocjena te, posljedično, omeđenošću maksimalnih varijanti integralnih operatora. Poglavlje 7 bit će posvećeno osnovnim idejama i sofisticiranim tehnikama vremensko-frekvencijske analize te primjenom na bilinearnu Hilbertovu transformaciju. Usput ćemo naučiti kako konstruirati idealizirani model (u konačnoj karakteristici) teškog problema iz analize, da bismo lakše razvili potrebne tehnike za polazni problem. Konačno, u poglavlju 8 predstaviti ćemo vrlo inovativnu tehniku Bellmanovih funkcija, koja dokaz izvjesne ocjene zamjenjuje potragom za jednim jedinim objektom: funkcijom s odgovarajućim svojstvima konveksnosti.

Svih 8 poglavlja iz prethodnog pregleda (i njihovih 39 odjeljaka) isprepleteno je međusobnim referencama, kako bi se istaknule sličnosti pristupa raznolikim temama. Zbog ograničenog vremena mnoge zanimljive teme neće biti obrađene, što ćemo pokušati kompenzirati s 90 zadataka za vježbu i nadopunu gradiva te 107 smjernica na napredniju literaturu. Tekst smo ilustrirali s 14 slika (grafova, dijagrama i sl.).

Zahvaljujem studentima koji su upisali, polazili i položili kolegij *Singularni integrali* na doktorskom studiju matematike u akademskoj godini 2014./2015. Također zahvaljujem Aleksandru Bulju i Mariju Stipčiću na brojnim i korisnim ispravcima teksta. Konačno, zahvalan sam Hrvoju Šikiću što me je, prije dosta godina, uveo u osnove harmonijske analize mentorirajući moj diplomski i magistarski rad.

¹⁸Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907–1933), engleski matematičar.

Poglavlje 1

Kvantitativne formulacije kvalitativnih rezultata

Integralnim operatorima se bavi *harmonijska analiza* i ona je načelno “kvantitativna” disciplina. To znači da se većina dokaza provodi uspostavljanjem ocjena (tj. nejednakosti) za uvedene veličine, a potom se interpretira koje je značenje njihove konačnosti, pozitivnosti, ograničenosti i sl. Obično su te veličine pogodno odabrane norme na funkcijskim prostorima. Ponekad je to jedini put prema rješenju problema, makar nam može izgledati kao nepotrebno kompliciranje. U svakom slučaju, kvantitativni dokazi daju više informacija naspram “čisto kvalitativnih”. Pokušajmo najprije na nekim jednostavnijim primjerima objasniti razliku između “kvalitativnog” i “kvantitativnog” gledišta na problem, dok ćemo efektivne primjene kvantitativne metode susretati kroz većinu gradiva ove skripte.

1.1. Kvalitativni i kvantitativni rezultati

Pretpostavimo da želimo dokazati konvergenciju nekog danog niza kompleksnih brojeva $(z_n)_{n=0}^\infty$. Ako nemamo očitog kandidata za limes, onda je jedini način pokušati dokazati da je niz Cauchyjev¹, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N}_0)(\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \cap [k, +\infty))(|z_m - z_n| < \varepsilon). \quad (1.1)$$

Za fiksirani $\varepsilon > 0$ uvodimo *broj ε -skokova* niza $(z_n)_{n=0}^\infty$ kao najveći broj $N \in \mathbb{N}_0$ za koji postoje indeksi

$$m_1 < n_1 \leq m_2 < n_2 \leq \cdots \leq m_N < n_N$$

takvi da vrijedi $|z_{m_j} - z_{n_j}| \geq \varepsilon$ za $j = 1, 2, \dots, N$. Ako pak postoje po volji veliki takvi brojevi N , tada uzimamo da je broj ε -skokova jednak ∞ . Primijetimo da također dozvoljavamo $N = 0$, u kojem slučaju uopće nema indeksâ s traženim svojstvom. Nije teško vidjeti da se uz ovu terminologiju tvrdnja (1.1) može zapisati:

$$\text{Za svaki } \varepsilon > 0 \text{ niz } (z_n)_{n=0}^\infty \text{ ima konačno mnogo } \varepsilon\text{-skokova.} \quad (1.2)$$

¹Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francuski matematičar.

Ova preformulacija otvara mogućnost jednom kvantitativnom načinu dokazivanja konvergencije: fiksiramo $\varepsilon > 0$ i naprosto brojimo ε -skokove niza.

Ipak, ne moramo ovdje stati. Za fiksirani parametar $\varrho \in [1, \infty)$ definiramo ϱ -varijaciju niza $(z_n)_{n=0}^\infty$ kao broj

$$\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\varrho} := \left(|z_0|^\varrho + \sup_{\substack{N \in \mathbb{N} \\ 0 \leq m_1 < n_1 \leq \dots \leq m_N < n_N}} \sum_{j=1}^N |z_{m_j} - z_{n_j}|^\varrho \right)^{1/\varrho} \in [0, +\infty].$$

Dakle, ovdje promatramo bilo kojih N skokova niza i objedinimo ih ℓ^ϱ normom. Taj supremum se neće promijeniti ako dodamo i eventualne “međuskokove”

$$|z_0 - z_{m_1}|, |z_{n_1} - z_{m_2}|, \dots, |z_{n_{N-1}} - z_{m_N}|$$

pa se ista definicija može zapisati malo elegantnije:

$$\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\varrho} := \left(|z_0|^\varrho + \sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_M}} \sum_{j=1}^M |z_{n_{j-1}} - z_{n_j}|^\varrho \right)^{1/\varrho}. \quad (1.3)$$

Član $|z_0|^\varrho$ je bilo nužno pridodati kako bi gornja veličina imala svojstvo norme; vidjeti zadatak 1.1(a). Nama je ključna opservacija da ako niz zadovoljava $A := \|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\varrho} < +\infty$, tada on ima najviše $(A/\varepsilon)^\varrho$ ε -skokova za svaki $\varepsilon > 0$, što je preciznija verzija od (1.2). Naime, ako je $|z_{m_j} - z_{n_j}| \geq \varepsilon$ za $j = 1, 2, \dots, N$ i indeksi su kao i ranije, tada imamo

$$N\varepsilon^\varrho \leq \sum_{j=1}^N |z_{m_j} - z_{n_j}|^\varrho \leq \|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\varrho}^\varrho = A^\varrho.$$

U ovom slučaju imamo čak i vrlo konkretnu gornju ocjenu na broj ε -skokova niza.

Definicija ϱ -varijacije se lako prilagođava funkcijama realne varijable. Naprimjer, ϱ -varijacija funkcije $z: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ se definira kao

$$\|z\|_{V^\varrho} := \left(|z(0)|^\varrho + \sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M}} \sum_{j=1}^M |z(t_{j-1}) - z(t_j)|^\varrho \right)^{1/\varrho}. \quad (1.4)$$

Čitatelj se zasigurno već susreo s 1-varijacijom funkcije, tj. $\|z\|_{V^1}$, čija interpretacija je duljina parametrizirane krivulje z . Razlog uvođenja općenitijih veličina je u činjenici da V^ϱ -norme padaju po ϱ pa klasa nizova ili funkcija za koje su konačne raste. To znači da je umjesto $\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^1} < +\infty$ lakše dokazati npr. $\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^3} < +\infty$, što je još uvijek dovoljno za konvergenciju. Ponekad je moguće kontrolirati samo varijacijske norme za $\varrho > 2$; pogledajte napomenu 6.15. Napomenimo još kako V^ϱ -norme nisu sasvim intuitivne za $\varrho > 1$, jer kod njih doista moramo promatрати supremum po svim konačnim podnizovima, vidjeti zadatak 1.1(b).

* * *

Prilično često niz čiju konvergenciju želimo provjeriti nije sasvim proizvoljan, već se pojavljuje u nekom složenijem kontekstu. Osim toga, moguće je promatrati točkovnu konvergenciju niza funkcija $z_n: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}$ na nekom prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, tj. konvergenciju nizova $(z_n(x))_{n=0}^{\infty}$ za razne vrijednosti varijable $x \in \mathbb{X}$.

Iskazat ćemo sada nekoliko rezultata koji će biti detaljno dokazani i komentirani tek u poglavlju 6. Neka čitatelj pokuša privremeno zanemariti detalje, pogotovo pojmove koje još nismo uveli, i neka se koncentrira na uočavanje njihove formalne sličnosti. U svakom od tih rezultata tvrdi se konvergencija g.s. nekog niza ili indeksirane familije kompleksnih funkcija.

- (1) Za svaku funkciju $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$ i za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

i jednak je $f(x)$.

- (2) Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$ sustav koji čuva mjeru; precizna definicija će biti dana u idućem odjeljku. Tada za svaku funkciju $f \in L^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i za μ -gotovo svaki $x \in \mathbb{X}$ postoji limes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x).$$

- (3) Fundamentalno rješenje jednadžbe provođenja $\partial_t h(x, t) = \Delta h(x, t)$ u $\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty \rangle$ uz početni uvjet $h(x, 0) = f(x)$ dano je formulom

$$h(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy; \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0.$$

Ako je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 \leq p < \infty$, tada za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(x, t)$ i iznosi $f(x)$.

- (4) Poissonov² integral funkcije f dan je formulom

$$u(x, y) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{y}{\pi((x-t)^2 + y^2)} dt; \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Ako je $f \in L^p(\mathbb{R})$ za $1 \leq p < \infty$, tada za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji limes $\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y)$ i iznosi $f(x)$.

- (5) Ako je $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, tada za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji limes

$$(Hf)(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \varepsilon\}} f(x-t) \frac{dt}{t}.$$

Na taj način definirana funkcija Hf zove se Hilbertov transformat od f .

²Siméon Denis Poisson (1781–1840), francuski matematičar, fizičar i inženjer.

Još jednom napomenimo kako je jedini razlog preuranjenog navođenja ovih rezultata ukazati na njihovu sličnost, premda oni pripadaju raznolikim granama matematike. Znači li to da su njihovi dokazi u nekoj mjeri analogni, ili možda čak neki od rezultata logički impliciraju ostale? Zapravo je to uvelike točno. Barem prvi korak u dokazima tvrdnji (1)–(5) je uvijek formalno isti. U svakom od njih će nam biti očigledno kako tvrdnja vrijedi za funkcije iz nekog prirodnog gustog potprostora. Potom ćemo tvrdnju za općenite funkcije svesti na dokazivanje kvantitativne ocjene za po jedan maksimalni operator, redom definiran sa

$$\begin{aligned}(M_1 f)(x) &:= \sup_{r \in \langle 0, +\infty \rangle} \frac{1}{|B(x, r)|} \left| \int_{B(x, r)} f(y) dy \right|, \\(M_2 f)(x) &:= \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x) \right|, \\(M_3 f)(x) &:= \sup_{t \in \langle 0, +\infty \rangle} |h(x, t)|, \\(M_4 f)(x) &:= \sup_{y \in \langle 0, +\infty \rangle} |u(x, y)|, \\(M_5 f)(x) &:= \sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} \frac{1}{\pi} \left| \int_{\{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \varepsilon\}} f(x - t) \frac{dt}{t} \right|.\end{aligned}$$

Zato ćemo taj zajednički dio dokaza apstrahirati i formulirati kao općenite teoreme 1.6 i 1.7 u idućem odjeljku.

Još je zanimljivija činjenica da su i ocjene za gornjih pet maksimalnih operatora M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 međusobno povezane. Npr. trik kojim ćemo iz ocjena za M_1 izvesti ocjene za M_2 prezentirat ćemo u odjeljku 6.3, a ocjene za M_5 ćemo također svesti na M_1 u odjeljku 6.4.

* * *

Zadatak 1.1.

- (a) Fiksirajmo $\varrho \in [1, \infty)$. Dokažite da familija kompleksnih nizova za koje je $\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\varrho} < +\infty$ čini vektorski prostor i da je formulom (1.3) na njemu definirana norma.
- (b) Pokažite da je zapravo $\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^1} = |z_0| + \sum_{n=1}^\infty |z_{n-1} - z_n|$, a protuprimjerom opovrgnite tvrdnju $\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\varrho}^\varrho = |z_0|^\varrho + \sum_{n=1}^\infty |z_{n-1} - z_n|^\varrho$ za $\varrho > 1$.

1.2. Dva općenita principa konvergencije

Za početak ćemo formulirati jednostavni, ali često korišteni princip konvergencije po normi u Banachovim³ prostorima. Obzirom da će to uglavnom biti neki prostori funkcija, njihove elemente ćemo označavati f, g , itd.

³Stefan Banach (1892–1945), poljski matematičar.

Teorem 1.1. (Princip konvergencije po normi) *Neka su X, Y Banachovi prostori i S gusti podskup od X te neka su $T_n: X \rightarrow Y$; $n \in \mathbb{N}$ linearni operatori. Pretpostavimo sljedeće:*

- (1) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C_n \geq 0$ takva da za svaki $f \in X$ vrijedi $\|T_n f\|_Y \leq C_n \|f\|_X$.*
- (2) *Postoji konstanta $C \geq 0$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $g \in S$ vrijedi $\|T_n g\|_Y \leq C \|g\|_X$.*
- (3) *Za svaki $g \in S$ postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n g \in Y$.*

Tada za svaki $f \in X$ postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f \in Y$.

Uvjet (1) znači individualnu ograničenost svakog od operatora T_n na cijelom prostoru X , dok uvjet (2) znači uniformnu ograničenost svih operatora na gustom podskupu S . Ovako smo ih formulirali kako bismo naglasili da zapravo ne trebamo pretpostaviti uniformnu ograničenost na cijelom prostoru, već će ona biti jednostavna posljedica.

Dokaz. Uzmimo $f \in X$ i $\varepsilon > 0$. Zbog gustoće od S postoji $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} \|T_n f\|_Y &\leq \|T_n g\|_Y + \|T_n(f - g)\|_Y \stackrel{(1),(2)}{\leq} C \|g\|_X + C_n \|f - g\|_X \\ &\leq C \|f\|_X + C \|g - f\|_X + C_n \|f - g\|_X < C \|f\|_X + (C + C_n)\varepsilon. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall f \in X)(\|T_n f\|_Y \leq C \|f\|_X). \quad (1.5)$$

Uzmimo opet $f \in X$ i $\varepsilon > 0$. Postoji $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \frac{\varepsilon}{3(C+1)}$. Nadalje, zbog Cauchyjevosti niza $(T_n g)_{n=1}^\infty$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za $m, n \in \mathbb{N} \cap [k, \infty)$ vrijedi

$$\|T_m g - T_n g\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada za prirodne brojeve m, n takve da je $m, n \geq k$ imamo

$$\begin{aligned} \|T_m f - T_n f\|_Y &\leq \|T_m(f - g)\|_Y + \|T_m g - T_n g\|_Y + \|T_n(g - f)\|_Y \\ &\stackrel{(1.5)}{\leq} C \|f - g\|_X + \frac{\varepsilon}{3} + C \|g - f\|_X < 2C \frac{\varepsilon}{3(C+1)} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(T_n f)_{n=1}^\infty$ Cauchyjev niz u Y pa on i konvergira. $\square$

Uz gornje pretpostavke sada znamo da je formulom $T_\infty f := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f$ dobro definiran linearni operator $T_\infty: X \rightarrow Y$, a iz (1.5) odmah slijedi da za svaki $f \in X$ imamo $\|T_\infty f\|_Y \leq C \|f\|_X$.

Napomena 1.2. Obrat teorema 1.1 je također istinit zahvaljujući potpunosti prostora X i Y . Naime, ukoliko za svaki $f \in X$ postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f$, onda posebno znamo da je taj niz ograničen, tj.

$$(\forall f \in X) \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n f\|_Y < +\infty \right).$$

Princip uniformne ograničenosti daje

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X \rightarrow Y} < +\infty,$$

pri čemu $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$ označava operatorsku normu. Stoga za $n \in \mathbb{N}$ i $f \in X$ imamo $\|T_n f\|_Y \leq C \|f\|_X$, što povlači (1) i (2).

* * *

Dajmo jednostavni primjer primjene teorema 1.1. To su jedan klasični rezultat J. von Neumanna⁴ i njegov elegantni dokaz F. Riesz⁵.

Propozicija 1.3. *Neka je U unitarni operator na Hilbertovom prostoru H . Za svaki vektor $v \in H$ postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k v \in H$.*

Dokaz. Očigledno za operatore $T_n: H \rightarrow H$; $n \in \mathbb{N}$ uzimamo

$$T_n v := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k v. \quad (1.6)$$

Primijetimo da su uvjeti (1) i (2) ispunjeni po nejednakosti trokuta i korištenjem izometričnosti od U :

$$\|T_n v\|_H \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|U^k v\|_H = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|v\|_H = \|v\|_H.$$

Čak za konstante C_n i C možemo uzeti 1. Preostaje provjeriti (3), tj. konvergenciju na gustom podskupu od H .

Tvrdimo da se H može prikazati kao ortogonalna suma jezgre i zatvarača slike od $U - I$, tj.

$$H = \text{Ker}(U - I) \oplus \text{Cl}(\text{Im}(U - I)).$$

Naime, vektor $v \in H$ je ortogonalan na cijeli potprostor $\text{Im}(U - I)$ ako i samo ako za svaki $w \in H$ imamo

$$0 = \langle (U - I)w, v \rangle_H = \langle w, (U^* - I)v \rangle_H = \langle w, U^{-1}v - v \rangle_H,$$

što pak vrijedi samo kada je $Uv = v$, tj. $(U - I)v = \mathbf{0}$. Dakle, ortogonalni komplement od $\text{Im}(U - I)$ je upravo $\text{Ker}(U - I)$, a ortogonalni komplement zatvarača potprostora je isti kao i ortogonalni komplement samog tog potprostora.

⁴John von Neumann (1903–1957), mađarsko-američki matematičar.

⁵Frigyes Riesz (1880–1956), mađarski matematičar.

Sada vidimo da je $\text{Ker}(U - I) \oplus \text{Im}(U - I)$ gusti potprostor od H . Svaki vektor iz te sume potprostora je oblika $v = v_1 + v_2$, pri čemu je $v_1 \in \text{Ker}(U - I)$ i $v_2 \in \text{Im}(U - I)$. Za v_1 po konstrukciji imamo $Uv_1 = v_1$. Nadalje, po definiciji slike postoji $w \in H$ takav da je $v_2 = (U - I)w = Uw - w$. Konačno možemo računati:

$$T_nv = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{U^k v_1}_{=v_1} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U^{k+1}w - U^k w) = v_1 + \frac{1}{n}(U^n w - w),$$

pri čemu je u drugoj sumi došlo do teleskopiranja, tj. kraćenja većine članova. Posljednji izraz očigledno konvergira po normi prema vektoru v_1 . $\square$

Primijetimo da smo usput dokazali i da operatori T_n konvergiraju u jakoj operatorskoj topologiji prema operatoru $H \rightarrow H$, $v \mapsto v_1$, što je ortogonalni projektor na zatvoreni potprostor $\text{Ker}(U - I)$; vidjeti zadatak 1.7(a).

Premda smo u argumentu aproksimacije kod propozicije 1.3 koristili kvantitativnu ocjenu normi operatora (tj. njihovu uniformnu ograničenost), rezultat koji smo dobili je još uvijek kvalitativan, jer ne govori ništa o “brzini” konvergencije ergodičkih usrednjenja (1.6). Možemo kao i u prethodnom odjeljku brojati skokove niza $(T_nv)_{n=1}^\infty$, ovog puta u normi prostora H , odnosno formirati odgovarajuću varijacijsku veličinu. Takav rezultat su dali R. L. Jones, I. V. Ostrovskii i J. M. Rosenblatt [JOR96].

Propozicija 1.4. *Neka je U unitarni operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru H . Za dani vektor $v \in H$ i za $n \in \mathbb{N}$ definiramo T_nv formulom (1.6). Tada vrijedi ocjena*

$$\left(\sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ 1 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_M}} \sum_{j=1}^M \|T_{n_{j-1}}v - T_{n_j}v\|_H^2 \right)^{1/2} \leq 10\|v\|_H. \quad (1.7)$$

Dokaz. Glavni dio dokaza će se odvijati u jednodimenzionalnom prostoru H , tj. naprosto u skupu kompleksnih brojeva. Dakle, najprije tvrdnju pokazujemo u posebnom slučaju kada je $H = \mathbb{C}$, $v = 1$, a unitarni operator $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je dan sa $Uz = e^{i\theta}z$ za neki $\theta \in [0, 2\pi)$. Ako je $\theta = 0$, tada je $T_n 1 = 1$ pa je lijeva strana od (1.7) jednaka 0. Zato pretpostavimo $\theta \neq 0$ pa je

$$T_n 1 = \frac{1}{n}(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{(n-1)i\theta}) = \frac{1 - e^{ni\theta}}{n(1 - e^{i\theta})}$$

i vidimo da trebamo dokazati

$$\sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ 1 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_M}} \sum_{j=1}^M \left| \frac{1 - e^{n_{j-1}i\theta}}{n_{j-1}(1 - e^{i\theta})} - \frac{1 - e^{n_j i\theta}}{n_j(1 - e^{i\theta})} \right|^2 \leq 100.$$

Dostatno je promatrati $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ i tada je zbog

$$|1 - e^{i\theta}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 4 \left(\frac{2}{\pi} \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \theta^2$$

i zbog $\frac{\pi^2}{4} < \frac{5}{2}$ dovoljno pokazati

$$\sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ 1 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_M}} \sum_{j=1}^M |F(n_{j-1}\theta) - F(n_j\theta)|^2 \leq 40, \quad (1.8)$$

pri čemu smo označili $F(\vartheta) := (1 - e^{i\vartheta})/\vartheta$. Također primijetimo da je

$$|F(\vartheta)| = \frac{2|\sin \frac{\vartheta}{2}|}{|\vartheta|} \leq 1. \quad (1.9)$$

Fiksirat ćemo indekse $n_0, n_1, \dots, n_M$ i lijevu stranu u (1.8) rastaviti na dvije sume: Σ_1 će biti suma po indeksima j takvima da je $n_j - n_{j-1} < \theta^{-1}$, a Σ_2 će biti suma po indeksima j takvima da je $n_j - n_{j-1} \geq \theta^{-1}$. Za ocjenu prve sume pribrojnik omeđujemo korištenjem Cauchy-Schwarzove⁶ nejednakosti kao

$$|F(n_j\theta) - F(n_{j-1}\theta)|^2 = \left| \int_{n_{j-1}\theta}^{n_j\theta} F'(\vartheta) d\vartheta \right|^2 \leq \underbrace{(n_j\theta - n_{j-1}\theta)}_{<1} \int_{n_{j-1}\theta}^{n_j\theta} |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta$$

pa imamo

$$\Sigma_1 \leq \sum_j \int_{n_{j-1}\theta}^{n_j\theta} |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta \leq \int_0^\infty |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta.$$

Iz izraza $F'(\vartheta) = -(1 - e^{i\vartheta} + i\vartheta e^{i\vartheta})/\vartheta^2$ je lako vidjeti da je posljednji integral konačan, a ako baš marimo za eksplicitne konstante, tada konturnom integracijom možemo izračunati

$$\int_0^\infty |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta = \int_0^\infty \frac{(1 - \cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta)^2 + (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta)^2}{\vartheta^4} d\vartheta = \frac{\pi}{3} < 2.$$

U drugoj sumi naprosto ocijenimo

$$|F(n_j\theta) - F(n_{j-1}\theta)|^2 \leq 2|F(n_j\theta)|^2 + 2|F(n_{j-1}\theta)|^2.$$

Ako su odgovarajući indeksi $j_1 < j_2 < \dots < j_L$, tada iz očigledne indukcije proizlazi $n_{j_l} \geq l/\theta$ za $l = 1, 2, \dots, L$. Kako je

$$\begin{aligned} |F(n_{j_l}\theta)| &\leq \frac{2}{n_{j_l}\theta} \leq \frac{2}{l}, \quad l = 1, 2, \dots, L, \\ |F(n_{j_{l-1}}\theta)| &\leq \frac{2}{n_{j_{l-1}}\theta} \leq \frac{2}{n_{j_{l-1}}\theta} \leq \frac{2}{l-1}, \quad l = 2, \dots, L, \\ |F(n_{j_1}\theta)| &\stackrel{(1.9)}{\leq} 1, \end{aligned}$$

⁶Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), njemački matematičar.

možemo pisati

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leq 2 \sum_{l=1}^L (|F(n_{j_l}\theta)|^2 + |F(n_{j_l-1}\theta)|^2) \leq 8 \sum_{l=1}^L \frac{1}{l^2} + 8 \sum_{l=2}^L \frac{1}{(l-1)^2} + 2 \\ &\leq 16 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} + 2 = 16 \cdot \frac{\pi^2}{6} + 2 < 29.\end{aligned}$$

Sveukupno imamo $\Sigma_1 + \Sigma_2 < 2 + 29 < 40$, što je i trebalo dokazati.

Radi jednostavnosti izlaganja sada ćemo tvrdnju dokazati za konačno-dimenzionalni unitarni prostor H . Svaki unitarni operator se može dijagonalizirati i svojstvene vrijednosti su mu po modulu jednake 1. Preciznije, možemo naći ortonormiranu bazu $(v_1, v_2, \dots, v_d)$ od H takvu da za svaki $m \in \{1, 2, \dots, d\}$ postoji $\theta_m \in [0, 2\pi)$ za kojeg vrijedi $Uv_m = e^{i\theta_m}v_m$. Raspišimo i vektor v u toj bazi kao $v = \sum_{m=1}^d \alpha_m v_m$ za neke koeficijente $\alpha_m \in \mathbb{C}$. Fiksirajmo indekse $n_0, n_1, \dots, n_M \in \mathbb{N}$ takve da je $n_0 < n_1 < \dots < n_M$. Primijetimo da je

$$T_nv = \sum_{m=1}^d \alpha_m T_nv_m = \sum_{m=1}^d \alpha_m \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ki\theta_m} \right) v_m$$

i da za bilo koji $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ vrijedi

$$\|T_{n_{j-1}}v - T_{n_j}v\|_H^2 = \sum_{m=1}^d |\alpha_m|^2 \left| \frac{1}{n_{j-1}} \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} e^{ki\theta_m} - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} e^{ki\theta_m} \right|^2. \quad (1.10)$$

Po prethodno dokazanom jednodimenzionalnom slučaju slijedi

$$\sum_{j=1}^M \left| \frac{1}{n_{j-1}} \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} e^{ki\theta} - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} e^{ki\theta} \right|^2 \leq 100 \quad \text{za svaki } \theta \in [0, 2\pi). \quad (1.11)$$

Kombiniranje (1.10) i (1.11) daje

$$\sum_{j=1}^M \|T_{n_{j-1}}v - T_{n_j}v\|_H^2 \leq 100 \sum_{m=1}^d |\alpha_m|^2 = 100 \|v\|_H^2,$$

čime je dokaz završen.

Konačno, za čitatelja koji poznaje osnove spektralne teorije možemo dovršiti dokaz na općenitom (beskonačno-dimenzionalnom) Hilbertovom prostoru H . Prema spektralnom teoremu za unitarni operator postoji regularna Borelova projektorska mjera P na jediničnoj kružnici $S^1 = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\gamma| = 1\}$ takva da je

$$U = \int_{S^1} \gamma dP(\gamma),$$

a posljedično vrijedi i

$$U^n = \int_{S^1} \gamma^n dP(\gamma), \quad (U^n)^* = \int_{S^1} \overline{\gamma^n} dP(\gamma)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Za dani $v \in H$ i indekse $n_0 < n_1 < \dots < n_M$ traženu nejednakost (1.7) možemo zapisati

$$\left\langle \left(100I - \sum_{j=1}^M (T_{n_{j-1}} - T_{n_j})^* (T_{n_{j-1}} - T_{n_j}) \right) v, v \right\rangle_H \geq 0,$$

i ona postaje

$$\int_{S^1} \underbrace{\left(100 - \sum_{j=1}^M \left| \frac{1}{n_{j-1}} \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} \gamma^k - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} \gamma^k \right|^2 \right)}_{\geq 0 \text{ zbog (1.11)}} d\langle Pv, v \rangle(\gamma) \geq 0$$

te je opet direktna posljedica ključne ocjene (1.11). Čitatelj može pronaći tehničke detalje o spektralnom teoremu u knjizi [Fol95]. $\square$

Iz ocjene (1.7) posebno vidimo da niz $(T_n v)_{n=1}^\infty$ ima najviše $100\varepsilon^{-2}\|v\|_H^2$ skokova veličine barem $\varepsilon > 0$ po normi od H . Dakle, propozicija 1.4 je “ultimativno kvantitativna” verzija propozicije 1.3.

* * *

Uglavnom ćemo Teorem 1.1 primjenjivati na Lebesgueove prostore. Prisjetimo se da za prostor mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i za eksponent $p \in \langle 0, \infty \rangle$ definiramo $\|\cdot\|_{L^p}$ formulom

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

za svaku $\mathcal{X}$ -izmjerivu funkciju $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$. Ovu definiciju upotpunjujemo slučajem $p = \infty$, kada stavljamo

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &:= \inf \left\{ \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus Z} |f(x)| : Z \in \mathcal{X}, \mu(Z) = 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \alpha \in [0, +\infty] : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu kratko pišemo $\{|f| > \alpha\}$ umjesto $\{x \in \mathbb{X} : |f(x)| > \alpha\}$. Uvodimo relaciju ekvivalencije $\stackrel{\text{g.s.}}{=}$ na familiji $\mathcal{X}$ -izmjerivih kompleksnih funkcija na $\mathbb{X}$ tako da stavimo $f_1 \stackrel{\text{g.s.}}{=} f_2$ ako i samo ako je $\mu(\{x \in \mathbb{X} : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$. Ako klasu ekvivalencije kojoj pripada funkcija f označimo sa $[f]_{\text{g.s.}}$, tada

$$L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \{[f]_{\text{g.s.}} : \|f\|_{L^p} < +\infty\}, \quad p \in \langle 0, \infty \rangle$$

nazivamo *Lebesgueov L^p prostor* i to je kompleksni vektorski prostor. U literaturi postoje manja odstupanja u definicijama prostora L^∞ i pripadne L^∞ norme, ali sve se te definicije podudaraju kada je prostor mjere σ -konačan ili čak samo semikonačan (taj pojam ćemo definirati u odjeljku 2.1), što će kod nas uglavnom biti ispunjeno. U slučaju $p \in [1, \infty]$

je $L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ čak Banachov prostor s normom $\|\cdot\|_{L^p}$. Za $p \in \langle 0, 1 \rangle$ je veličina $\|\cdot\|_{L^p}$ samo *kvazinorma*, što znači da umjesto nejednakosti trokuta postoji konačna konstanta $C_p > 0$ takva da za svake $f_1, f_2 \in L^p$ vrijedi

$$\|f_1 + f_2\|_{L^p} \leq C_p(\|f_1\|_{L^p} + \|f_2\|_{L^p});$$

vidjeti zadatak 1.4(a). Obično elemente L^p prostora naprosto zovemo funkcijama te tako s njima i postupamo, imajući na umu da zapravo radimo s predstavnicima klase gornje relacije ekvivalencije.

Sustav koji čuva mjeru je uređena četvorka $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$, pri čemu je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ vjerojatnosni prostor, tj. $\mu(\mathbb{X}) = 1$, a $S: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ je bijekcija takva da za svaki $A \in \mathcal{X}$ vrijedi $S^{-1}(A), S(A) \in \mathcal{X}$ i $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(S(A))$. Kratko kažemo da su S i S^{-1} *izmjerive* i da *čuvaju mjeru*. Preslikavanje S možemo iterirati,

$$S^0 := \text{id}_{\mathbb{X}}, \quad S^n := \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_n \text{ za } n \in \mathbb{N}, \quad S^{-n} := (S^{-1})^n \text{ za } n \in \mathbb{N},$$

te za svaku točku $x \in \mathbb{X}$ ima smisla gledati njenu *orbitu* $(S^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$ i duž nje evaluirati razne funkcije. Tako npr. prosjeke

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x)$$

zovemo *ergodička usrednjenja*. Takvim sustavima se bavi *ergodička teorija*, a u njoj se često promatraju i neinvertibilna preslikavanja S , no mi ćemo ostati kod naše manje generalne definicije. Samo ćemo napomenuti da postoje izvjesni trikovi (npr. tzv. trik podizanja) kojima se, uz nešto topološke strukture na $\mathbb{X}$, neinvertibilni slučaj može svesti na gore navedenu situaciju.

Korolar 1.5. (Von Neumannov ergodički teorem po normi) *Ako je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$ sustav koji čuva mjeru i $f \in L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ za $p \in [1, \infty)$, tada niz funkcija $(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n)_{N=1}^{\infty}$ konvergira u $L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, tj. po L^p normi.*

Dokaz. Označimo $T_N f := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n$. Slučaj $p = 2$ je direktna posljedica propozicije 1.3. Uzmimo $H = L^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i promotrimo linearni operator $U: H \rightarrow H$ definiran sa $Uf := f \circ S$, čiji inverz je dan sa $U^{-1}f = f \circ S^{-1}$. Činjenica da je U izometrija slijedi iz općenitog teorema o integriranju po slici mjere μ obzirom na izmjerivu transformaciju S ,

$$\int g d(\mu \circ S^{-1}) = \int (g \circ S) d\mu, \tag{1.12}$$

primijenjenog na $g = |f|^2$ i uz važeću pretpostavku $\mu \circ S^{-1} = \mu$. Dakle, U je unitarni operator pa niz usrednjenja $(T_N f)_{N=1}^{\infty}$ konvergira po L^2 normi.

Uzmimo sada općeniti $p \in [1, \infty)$. Opet se iz nejednakosti trokuta i primjenom (1.12) odmah vidi da su operatori T_N ; $N \in \mathbb{N}$ uniformno ograničeni, tj. $\|T_N f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ za svaku $f \in L^p$ i svaki $N \in \mathbb{N}$. Time su ispunjene pretpostavke (1) i (2) teorema 1.1 pa za

njegovu primjenu još treba provjeriti uvjet (3). Zbog konačnosti mjere je $L^\infty(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ gusti potprostor od $L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ pa preostaje dokazati da za svaku $f \in L^\infty$ vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall M, N \geq K)(\|T_M f - T_N f\|_{L^p} < \varepsilon). \quad (1.13)$$

Po prethodnom dijelu dokaza već znamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall M, N \geq K)(\|T_M f - T_N f\|_{L^2} < \varepsilon).$$

Zato za $p < 2$ tvrdnja (1.13) naprosto slijedi iz

$$\|T_M f - T_N f\|_{L^p} \leq \|T_M f - T_N f\|_{L^2}.$$

Ako je pak $p > 2$, tada imamo

$$\begin{aligned} \|T_M f - T_N f\|_{L^p} &\leq \|T_M f - T_N f\|_{L^\infty}^{1-2/p} \|T_M f - T_N f\|_{L^2}^{2/p} \\ &\leq (2\|f\|_{L^\infty})^{1-2/p} \|T_M f - T_N f\|_{L^2}^{2/p}, \end{aligned}$$

što opet povlači (1.13). □

Iz propozicije 1.4 pak dobivamo kvantitativnu ocjenu konvergencije ergodičkih usrednjenja po L^2 normi:

$$\sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ 1 \leq N_0 < N_1 < \dots < N_M}} \sum_{j=1}^M \left\| \frac{1}{N_{j-1}} \sum_{n=0}^{N_{j-1}-1} f \circ S^n - \frac{1}{N_j} \sum_{n=0}^{N_j-1} f \circ S^n \right\|_{L^2}^2 \leq 100 \|f\|_{L^2}^2.$$

Time je dan još jedan dokaz korolara 1.5 u slučaju $p = 2$.

* * *

Dokazivanje konvergencije po točkama je u pravilu teže i u tu svrhu navodimo drugi općeniti princip. Prije toga se još prisjetimo slabih Lebesgueovih prostora i normi. Neka je opet $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ općeniti prostor mjere i uzmimo $p \in \langle 0, \infty \rangle$. Definiramo $\|\cdot\|_{L^p_{\text{slabi}}}$ formulom

$$\|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} := \left(\sup_{\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle} \alpha^p \mu(\{|f| > \alpha\}) \right)^{1/p}$$

za svaku $\mathcal{X}$ -izmjerivu funkciju $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$. Osim toga, za $p = \infty$ dogovorno uzimamo $\|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} := \|f\|_{L^p}$. *Slabi Lebesgueov L^p prostor* je kompleksni vektorski prostor

$$L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \{[f]_{\text{g.s.}} : \|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} < +\infty\}, \quad p \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Veličina $\|\cdot\|_{L^p_{\text{slabi}}}$ je kvazinorma (vidjeti zadatak 1.4(b)), a direktna posljedica tzv. *Markov-Čebiševljeve nejednakosti*

$$\mu(\{|f| > \alpha\}) \leq \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\alpha^p}, \quad \alpha \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad p \in \langle 0, \infty \rangle \quad (1.14)$$

je

$$\|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq \|f\|_{L^p} \quad \text{ i } \quad L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \subseteq L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu).$$

Formalna sličnost između uobičajene (jake) i slabe L^p kvazinorme je poznati identitet

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\langle 0, +\infty \rangle} p\alpha^{p-1} \mu(\{|f| > \alpha\}) d\alpha \right)^{1/p} \quad (1.15)$$

za $p \in \langle 0, \infty \rangle$, kojeg ćemo često koristiti, a ostavljen je kao zadatak 1.3.

Za operator T definiran na nekom Banachovom prostoru X , koji poprima vrijednosti u skupu $\mathcal{X}$ -izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$ i koji zadovoljava ocjenu

$$\|Tf\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq C\|f\|_X, \quad \text{ tj. } (\forall \alpha > 0) \left(\mu(\{|Tf| > \alpha\}) \leq \frac{C^p \|f\|_X^p}{\alpha^p} \right)$$

za neku konačnu konstantu $C \geq 0$, neki eksponent $p \in \langle 0, \infty \rangle$ i sve $f \in X$ često neformalno kažemo da je *slabo ograničen*. Uobičajena ograničenost sa X u L^p svakako povlači slabu ograničenost, a obrat općenito ne vrijedi. Ako je baš $X = L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, tada slabu ograničenost sa L^p u L^p_{slabi} naprosto zovemo *slaba L^p ograničenost*.

Teorem 1.6. (Princip konvergencije gotovo svuda) *Neka su X Banachov prostor, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$ prostor mjere, $p \in \langle 0, \infty \rangle$ eksponent i S gusti podskup od X te neka su $T_n: X \rightarrow L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$; $n \in \mathbb{N}$ linearni operatori. Pretpostavimo sljedeće:*

(1) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C_n \geq 0$ takva da za svaki $f \in X$ vrijedi $\|T_n f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq C_n \|f\|_X$.*

(2) *Postoji konstanta $C \geq 0$ takva da za svaki $g \in S$ vrijedi*

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n g| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq C \|g\|_X.$$

(3) *Za svaki $g \in S$ za μ -gotovo svaki $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n g)(y) \in \mathbb{C}$.*

Tada za svaki $f \in X$ za μ -gotovo svaki $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(y) \in \mathbb{C}$.

Uvjet (1) znači individualnu slabu ograničenost svakog of operatora T_n na cijeloj domeni. Uvjet (2) znači slabu ograničenost maksimalnog operatora

$$T_* f := \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n f| \quad (1.16)$$

na gustom podskupu S . U primjenama su često uvjeti (1) i (3) očigledni pa trud treba usmjeriti prema dokazivanju maksimalne ocjene (2), a činjenica da radimo samo s elementima gustog podskupa nam može tehnički olakšati rezoniranje. Naravno da bismo u teoremu slabu ograničenost mogli zamijeniti uobičajenom (jakom), ali time bi rezultat postao nešto slabiji i manje primjenjiv.

Dokaz. Uzmimo $f \in X$, $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Postoji $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Koristit ćemo zadatak 1.4(b) kao nadomjestak za nejednakost trokuta za kvazinormu $\|\cdot\|_{L^p_{\text{slabi}}}$,

$$\begin{aligned}
 \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |T_n f| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p &\leq \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |T_n g| + \max_{1 \leq n \leq N} |T_n(f - g)| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p \\
 &\stackrel{(1.18)}{\leq} 2^p \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |T_n g| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p + 2^p \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |T_n(f - g)| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p \\
 &\leq 2^p \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |T_n g| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p + 2^p \left\| \sum_{n=1}^N |T_n(f - g)| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p \\
 &\stackrel{(1.18)}{\leq} 2^p \left\| \max_{n \in \mathbb{N}} |T_n g| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p + 2^p N^p \sum_{n=1}^N \|T_n(f - g)\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p \\
 &\stackrel{(1),(2)}{\leq} 2^p C^p \|g\|_X^p + 2^p N^p (C_1^p + \dots + C_N^p) \|f - g\|_X^p \\
 &\leq 2^p C^p (\|f\|_X + \varepsilon)^p + 2^p N^p (C_1^p + \dots + C_N^p) \varepsilon^p.
 \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo

$$\left\| \max_{1 \leq n \leq N} |T_n f| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq 2C \|f\|_X,$$

tj.

$$(\forall \alpha > 0) \left(\mu \left(\left\{ \max_{1 \leq n \leq N} |T_n f| > \alpha \right\} \right) \leq \left(\frac{2C \|f\|_X}{\alpha} \right)^p \right),$$

a puštanjem $N \rightarrow \infty$ potom dobivamo ocjenu

$$(\forall \alpha > 0) \left(\mu(\{T_* f > \alpha\}) \leq \left(\frac{2C \|f\|_X}{\alpha} \right)^p \right),$$

tj.

$$(\forall f \in X) (\|T_* f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq 2C \|f\|_X) \tag{1.17}$$

za maksimalni operator (1.16).

Uzmimo $f \in X$ i proizvoljni $\delta > 0$. Označimo

$$E_\delta := \left\{ y \in \mathbb{Y} : \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m, n \geq k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| > \delta \right\}.$$

Za neki $\varepsilon > 0$ odaberimo $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Iz

$$|(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| \leq |T_m(f - g)(y)| + |(T_m g)(y) - (T_n g)(y)| + |T_n(g - f)(y)|$$

slijedi

$$\sup_{m, n \geq k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| \leq 2 \sup_{n \geq k} |T_n(f - g)(y)| + \sup_{m, n \geq k} |(T_m g)(y) - (T_n g)(y)|.$$

Po pretpostavci (3) i $g \in S$ postoji $F \in \mathcal{Y}$, $\mu(F) = 0$ takav da za svaki $y \in \mathbb{Y} \setminus F$ imamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m, n \geq k} |(T_m g)(y) - (T_n g)(y)| = 0$$

te posljedično

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m, n \geq k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f - g)(y)|.$$

Dakle, $E_\delta \subseteq \{T_\star(f - g) > \frac{\delta}{2}\} \cup F$ pa radi ocjene (1.17) vrijedi

$$\mu(E_\delta) \leq \frac{\|T_\star(f - g)\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p}{(\delta/2)^p} \stackrel{(1.17)}{\leq} \frac{2^p C^p \|f - g\|_X^p}{(\delta/2)^p} < \frac{4^p C^p \varepsilon^p}{\delta^p}.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo $\mu(E_\delta) = 0$ za svaki $\delta > 0$. Zbog monotonosti skupova E_δ i σ -subaditivnosti mjere μ je $\mu(\bigcup_{\delta > 0} E_\delta) = \mu(\bigcup_{l=1}^\infty E_{1/l}) = 0$. Konačno primijetimo da za svaki $y \in \mathbb{Y} \setminus (\bigcup_{\delta > 0} E_\delta)$ vrijedi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m, n \geq k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| = 0,$$

tj. postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(y)$. □

Napomenimo da smo usput dokazali kako su maksimalni operator $T_\star$ i limes T_∞ , koji je μ -g.s. definiran sa $T_\infty f := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n f$, slabo ograničeni operatori sa X u $L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$.

Zanimljivo je i ovog puta se zapitati vrijedi li obrat teorema 1.6; tj. ako je $(T_n)_{n=1}^\infty$ niz slabo ograničenih linearnih operatora sa X u L^p_{slabi} takav da za svaki $f \in X$ za μ -g.s. $y \in \mathbb{Y}$ postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(y)$, mora li nužno maksimalni operator (1.16) biti slabo ograničen? Nažalost, ta tvrdnja općenito nije točna (vidjeti zadatak 1.6); čak ni uniformna jaka ograničenost niza sa X u L^p ne može pomoći. U jednom od kasnijih poglavlja ćemo ipak dokazati jedan rezultat tog tipa, koji govori da spomenuti obrat vrijedi u određenim zanimljivim situacijama.

Za familiju operatora indeksiranu neprekidnim parametrom, npr. $(T_r)_{r \in (0, +\infty)}$ i ako nas zanima konvergencija kada $r \rightarrow 0^+$ ili $r \rightarrow +\infty$, oba teorema ostaju vrijediti uz očigledne modifikacije. Navedimo jednu takvu varijantu teorema 1.6.

Teorem 1.7. *Neka su X Banachov prostor, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$ prostor mjere, $p \in \langle 0, \infty \rangle$ eksponent i S gusti podskup od X te neka su $T_r: X \rightarrow L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$; $r \in \langle 0, +\infty \rangle$ linearni operatori takvi da je za svaki $f \in X$ i za μ -g.s. $y \in \mathbb{Y}$ funkcija $r \mapsto (T_r f)(y)$ neprekidna. Pretpostavimo sljedeće:*

- (1) *Za svaki $r \in \langle 0, +\infty \rangle$ postoji konstanta $C_r \geq 0$ takva da za svaki $f \in X$ vrijedi $\|T_r f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq C_r \|f\|_X$.*
- (2) *Postoji konstanta $C \geq 0$ takva da za svaki $g \in S$ vrijedi*

$$\left\| \sup_{r \in \langle 0, +\infty \rangle} |T_r g| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}} \leq C \|g\|_X.$$

(3) Za svaki $g \in S$ za μ -g.s. $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{r \rightarrow 0^+} (T_r g)(y) \in \mathbb{C}$.

Tada za svaki $f \in X$ za μ -g.s. $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{r \rightarrow 0^+} (T_r f)(y) \in \mathbb{C}$. (Analogna tvrdnja vrijedi za limese kada $r \rightarrow +\infty$.)

Neprekidnost od $(T_r f)(y)$ po parametru r nam je korisna već radi same izmjerivosti u definiciji maksimalnog operatora, jer se supremum efektivno uzima po prebrojivom skupu:

$$(T_* f)(y) := \sup_{r \in (0, +\infty)} |(T_r f)(y)| = \sup_{r \in (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}} |(T_r f)(y)|.$$

Primjeri primjena teorema 1.6 i 1.7 su pet rezultata navedenih u prethodnom odjeljku, ali da bismo mogli dovršiti njihove dokaze, morat ćemo u jednom od kasnijih poglavlja naučiti dokazivati maksimalne ocjene.

Teoremi 1.1 i 1.6 su doradene verzije rezultata iz knjige [Kra99], u kojoj ih autor naziva “dva fundamentalna principa funkcionalne analize”. Neke varijante se mogu naći u [Fol99].

Inspirirani propozicijom 1.4 mogli bismo poželjeti dati kvantitativniji opis konvergenције gotovo svuda. Jedna mogućnost je za neke $\varrho, p \in [1, \infty)$ dokazati ocjenu

$$\| \| (T_n f)_{n=1}^\infty \|_{V^{\varrho}} \|_{L^p} \leq C \| f \|_X$$

za niz operatora $(T_n)_{n=1}^\infty$ i za svaki $f \in X$. U tom slučaju je

$$\| ((T_n f)(y))_{n=1}^\infty \|_{V^{\varrho}} < +\infty$$

za μ -g.s. $y \in \mathbb{Y}$ pa opet postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(y)$.

* * *

Zadatak 1.2. Dokažite jednostavni posebni slučaj nejednakosti iz propozicije 1.4 uz bolju konstantu:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| T_{2^{j-1}} v - T_{2^j} v \|_H^2 \leq \| v \|_H^2.$$

Uputa: Najprije dokažite da za linearni operator $V: H \rightarrow H$ norme $\|V\|_{H \rightarrow H} \leq 1$ i za svaki $u \in H$ vrijedi

$$\| u - \frac{1}{2}(u + Vu) \|_H^2 \leq \| u \|_H^2 - \left\| \frac{1}{2}(u + Vu) \right\|_H^2.$$

Zadatak 1.3. Dokažite identitet (1.15) za $p \in \langle 0, \infty \rangle$ i za $\mathcal{X}$ -izmjerivu kompleksnu funkciju f .

Uputa: Ako je prostor mjere σ -konačan, zamijenite integrale po $\mathbb{X}$ i po $\langle 0, +\infty \rangle$. U općenitom slučaju koristite da je za $f \in L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ skup $\{f \neq 0\}$ uvijek σ -konačne mjere μ .

Zadatak 1.4.

- (a) Dokažite da za $p \in \langle 0, 1 \rangle$ i za funkcije $f_1, f_2, \dots, f_N \in L^p$ vrijedi nejednakost

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_N\|_{L^p} \leq N^{\frac{1}{p}-1} (\|f_1\|_{L^p} + \|f_2\|_{L^p} + \dots + \|f_N\|_{L^p})$$

pa je posebno $\|\cdot\|_{L^p}$ kvazinorma. Osim toga, pokažite primjerom da je konstanta na desnoj strani najbolja moguća. Usput primijetimo da se konstante na desnoj strani približavaju 1 kada $p \rightarrow 1^-$.

- (b) Dokažite da za $p \in \langle 0, \infty \rangle$ i za svake $f_1, f_2, \dots, f_N \in L^p_{\text{slabi}}$ vrijedi nejednakost

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_N\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p \leq N^p (\|f_1\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p + \|f_2\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p + \dots + \|f_N\|_{L^p_{\text{slabi}}}^p). \quad (1.18)$$

Nadalje, pokažite da je $\|\cdot\|_{L^p_{\text{slabi}}}$ kvazinorma za svaki $p \in \langle 0, \infty \rangle$.

Zadatak 1.5. Neka je $K: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija koja za neke konstante $C \geq 0$ i $\gamma > 0$ zadovoljava:

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{(1 + |x - y|)^{d+\gamma}} \quad \text{za svake } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) dy = 1 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}^d.$$

Definirajmo linearne operatore $(T_r)_{r \in \langle 0, +\infty \rangle}$ formulom

$$(T_r f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{r^d} K\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) f(y) dy; \quad r \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Dokažite da za svaki $p \in [1, \infty)$ i za svaku $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\lim_{r \rightarrow 0^+} \|T_r f - f\|_{L^p} = 0$.

Zadatak 1.6. Dokažite da je formulom

$$(T_n f)(x) := \int_{[x+n-1, x+n)} f(y) dy, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiran uniformno ograničeni niz linearnih operatora na $L^1(\mathbb{R})$ takav da za svaku $f \in L^1(\mathbb{R})$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(x) = 0$. Nadalje pokažite da maksimalni operator T_* definiran sa (1.16) ipak nije slabo L^1 ograničen.

Zadatak 1.7. Dokažite sljedeće varijante teorema iz ovog odjeljka.

- (a) Ako u teoremu 1.1 uz operatore $(T_n)_{n=1}^\infty$ imamo još jedan ograničeni linearni operator $T: X \rightarrow Y$ te ako uz (1) i (2) pretpostavimo

$$(3') \text{ Za svaki } g \in S \text{ vrijedi } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n g = Tg.$$

tada za svaki $f \in X$ mora biti $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f = T f$.

Uputa: Ne morate ponavljati dokaz, već samo koristite argument jednakosti ograničenih linearnih operatora na gustom podskupu.

- (b) Ako u teoremu 1.6 uz operatore $(T_n)_{n=1}^\infty$ imamo još jedan slabo ograničeni linearni operator $T: X \rightarrow L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$ te ako uz (1) i (2) pretpostavimo

$$(3') \text{ Za svaki } g \in S \text{ za } \mu\text{-g.s. } y \in \mathbb{Y} \text{ vrijedi } \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n g)(y) = (Tg)(y).$$

tada za svaki $f \in X$ za μ -gotovo svaki $y \in \mathbb{Y}$ mora biti $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(y) = (Tf)(y)$.

- (c) Dokažite teorem 1.7.

Uputa: Ovdje ipak imitirajte dokaz teorema 1.6, umjesto da ga pokušate direktno iskoristiti. Time ćete izbjeći poteškoće s neprebrojivo mnogo skupova mjere nula.

1.3. Hardy-Vinogradovljeva i Bachmann-Landauova notacija

Poznati matematičar Terence Tao je jednom prilikom ustvrdio kako je matematička analiza 20. stoljeća naglo počela ostvarivati veliki napredak djelimice zato što je prestala mariti za konstante. Naime, mnogi argumenti postaju tehnički jednostavniji i čitljiviji ako u njima ne spominjemo eksplicitne numeričke vrijednosti. Tako se naprimjer dokaz tvrdnje u propoziciji 1.4 može nešto pojednostaviti ako konstantu 10 zamijenimo neodređenom konstantom C , čija točna vrijednost ionako nije važna. Najbolju moguću takvu konstantu C ionako teško možemo naći.

Za dvije funkcije $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ definirane na istom skupu X pisat ćemo

$$f(x) \lesssim g(x)$$

ako postoji konačna konstanta $C \geq 0$ takva da za svaki $x \in X$ vrijedi $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Ukoliko skup X nije jasan iz konteksta, onda ga posebno naglašavamo. Pretpostavimo sada da još imamo neku kolekciju P varijabli koje sve ovise o nezavisnoj varijabli x ; najčešće ih doživljavamo kao svojevrzne “parametre”. Ako implicitna veličina C zapravo nije konstanta, već ovisi o parametrima iz P i samo o njima, tada ćemo to notacijski naglasiti:

$$f(x) \lesssim_P g(x).$$

Tako naprimjer za trojke pozitivnih brojeva (a, b, p) možemo pisati

$$(a + b)^p \lesssim_p a^p + b^p,$$

jer vrijedi

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p \text{ za } p \in \langle 0, 1], \quad (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \text{ za } p \in \langle 1, \infty),$$

a ovisnost o p smo morali istaknuti jer najbolja moguća implicitna “konstanta” $C_p = \max\{2^{p-1}, 1\}$ neograničeno raste kada $p \rightarrow \infty$. Ukoliko za funkcije f i g istovremeno vrijedi $f(x) \lesssim_P g(x)$ i $g(x) \lesssim_P f(x)$, tada pišemo

$$f(x) \sim_P g(x).$$

Zapravo za pozitivne brojeve a, b, p imamo $2(a+b)^p \geq a^p + b^p$ pa je štoviše

$$(a+b)^p \sim_p a^p + b^p.$$

Postoje razni simboli koji se ponekad koriste umjesto $\lesssim$. Hardy je pisao $\preceq$, a Vinogradov⁷ je uveo $\ll$. Još jedna alternativa koja se često nalazi u knjigama je naprosto pisati C kao generičku oznaku za konstantu koja se može mijenjati iz retka u redak, ali tada je teže istaknuti kada doista marimo za neku određenu konstantu. Umjesto znaka $\sim$ u mnogim granama matematike se koristi $\asymp$, a valja biti i oprezan jer $\sim$ ponekad ima drukčije značenje. Odlučili smo se za kombinaciju $\lesssim$ i $\sim$ jer se ona često koristi u novijoj literaturi iz harmonijske analize.

Svojstva relacije $\lesssim$ su krajnje očigledna, a navodimo ih radi potpunosti.

- Ako je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in X$, tada vrijedi: $f(x) \lesssim g(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in X} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < +\infty$.
- $f(x) \lesssim_f 1 \Leftrightarrow f$ je omeđena.
- $f_1(x) \lesssim g(x), f_2(x) \lesssim g(x), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \lesssim g(x)$.
- $f_1(x) \lesssim g_1(x), f_2(x) \lesssim g_2(x) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) \lesssim g_1(x)g_2(x)$.
- $f(x) \lesssim g(x), g(x) \lesssim h(x) \Rightarrow f(x) \lesssim h(x)$.
- Ako je $f(y) \lesssim g(y)$, tada vrijedi $f(h(x)) \lesssim g(h(x))$ kad god kompozicija ima smisla.

Drugi tip notacije koju koristimo je lokalna, tj. on govori o dominaciji na nekoj okolini (konačne ili beskonačne) točke. Za funkcije $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ na nekom topološkom prostoru X i za točku $c \in X$ pišemo

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow c$$

ako postoje $C \geq 0$ i okolina U točke c tako da za svaki $x \in U \setminus \{c\}$ vrijedi $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Ako želimo naglasiti da implicitna veličina C ovisi o nekom skupu parametara P , tada taj skup parametara navodimo u donjem indeksu:

$$f(x) = O_P(g(x)), x \rightarrow c.$$

Ponekad se točka c podrazumijeva pa izostavljamo dodatak “ $x \rightarrow c$ ”, ali truditi ćemo se biti precizni. Oznaku “ O ” prvi je predložio P. Bachmann,⁸ a E. Landau⁹ je još uveo i simbol “ o ”, kojeg nećemo koristiti.

⁷Ivan Matvejevič Vinogradov (1891–1983), ruski matematičar.

⁸Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837–1920), njemački matematičar.

⁹Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938), njemački matematičar.

Kod korištenja ove notacije često dozvoljavamo sljedeću nepreciznost u svrhu elegantnijeg zapisa. U izrazima pišemo samo $O(g(x))$ na mjestu neke (možda nepoznate) funkcije $f(x)$ koja zadovoljava $f(x) = O(g(x))$. Tako naprimjer pišemo:

- $f(x) = e^x(3x + 2 + O(\frac{1}{x}))$, $x \rightarrow +\infty$ sa značenjem $f(x) = e^x(3x + 2 + g(x))$, $g(x) = O(\frac{1}{x})$, $x \rightarrow +\infty$.
- $O(2^n) + O(n!) + O(n^n) = O(n^n)$, $n \rightarrow \infty$ sa značenjem: ako je $f(n) = O(2^n)$, $g(n) = O(n!)$, $h(n) = O(n^n)$, $n \rightarrow \infty$, tada vrijedi $f(n) + g(n) + h(n) = O(n^n)$, $n \rightarrow \infty$.

Svojstva simbola O su također evidentna.

- Ako postoji okolina U od c takva da je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi: $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow c \Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < +\infty$.
- $f(x) = O_f(1)$, $x \rightarrow c \Leftrightarrow f$ je omeđena na nekoj okolini od c .
- $f_1(x) = O(g(x))$, $f_2(x) = O(g(x))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = O(g(x))$.
- $f_1(x) = O(g_1(x))$, $f_2(x) = O(g_2(x)) \Rightarrow f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$.
- $f(x) = O(g(x))$, $g(x) = O(h(x)) \Rightarrow f(x) = O(h(x))$.
- $f \in C^{n+1}(\langle c - \delta, c + \delta \rangle)$, $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + O_f((x - c)^{n+1})$, $x \rightarrow c$.
- Ako je $f(y) = O(g(y))$, $y \rightarrow d$, zatim $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = d$ te još postoji okolina U od c takva da je $h(x) \neq d$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi $f(h(x)) = O(g(h(x)))$, $x \rightarrow c$. (Kao da smo supstituirali $y = h(x)$.)

Zanimljivo je da nam lokalne ocjene uz određena kvalitativna svojstva mogu dati kvantitativne ocjene na cijeloj domeni. Dajmo dva jednostavna primjera.

Primjer 1.8. Ako je $f : \langle 1, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da vrijedi

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad x \rightarrow 1^+ \quad \text{i} \quad f(x) = O(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

pokažimo da vrijedi $f(x) \lesssim \frac{x}{x-1}$ za svaki $x \in \langle 1, +\infty \rangle$.

Dokaz. Po definiciji simbola “ O ” postoje $1 < \alpha < \beta$ i $C_1, C_2 > 0$ takvi da vrijedi

$$|f(x)| \leq \frac{C_1}{x-1} \quad \text{za } x \in \langle 1, \alpha \rangle \quad \text{i} \quad |f(x)| \leq C_2 \quad \text{za } x \in \langle \beta, +\infty \rangle.$$

Na segmentu $[\alpha, \beta]$ je funkcija f neprekidna pa je i ograničena, tj. postoji konstanta $C_3 > 0$ takva da je $|f(x)| \leq C_3$ za $x \in [\alpha, \beta]$. Primijetimo konačno da za svaki $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ zbog $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x-1}$ i $\frac{x}{x-1} > 1$ imamo

$$|f(x)| \leq \max\{C_1, C_2, C_3\} \frac{x}{x-1}. \quad \square$$

Primjer 1.9. Dokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vrijedi

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} \lesssim \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

Dokaz. Najprije ocijenimo gornju sumu odozgo integralom

$$I(n) := \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x \ln x}}.$$

Supstitucijom $t = \sqrt{\frac{\ln x}{2}}$, tj. $x = e^{2t^2}$ dobivamo

$$I(n) = \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} \frac{e^{2t^2} 4t dt}{e^{t^2} \sqrt{2} t} = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} e^{t^2} dt = \sqrt{2\pi} \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{2}}\right),$$

pri čemu je

$$\operatorname{erfi}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

tzv. *imaginarna funkcija greške*. Koristeći poznatu asimptotiku

$$\begin{aligned} \operatorname{erfi}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty \\ &= O\left(\frac{e^{z^2}}{z}\right), \quad z \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

dobivamo

$$I(n) = O\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Posebno je

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} = O\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

pa tvrdnja slijedi za dovoljno velike n , dok je za prvih konačno mnogo vrijednosti od n trivijalna. $\square$

* * *

Zadatak 1.8. Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite da za svaki $p \in \langle 0, \infty \rangle$ i za svaku $\mathcal{X}$ -izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi

$$\|f\|_{L^p}^p \sim_p \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} \mu(\{|f| > 2^k\}).$$

Napomena: Ovdje $\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, f$ smatramo “varijablama” pa implicitne konstante ne ovise o njima, već samo o eksponentu p .

Zadatak 1.9. Lako je vidjeti da za svaki $x \in \mathbb{R}$ jednažba $t + \ln t = x$ ima jedinstveno rješenje $t = f(x) > 0$. Dokažite:

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Zadatak 1.10. Koristeći literaturu za fiksirani parametar $\beta > 1$ izračunajte prva tri člana asimptotskog razvoja funkcije $I_\beta(R) := \int_R^{+\infty} \frac{dx}{(x \ln x)^\beta}$ kada $R \rightarrow +\infty$.

Uputa: Pronađite asimptotski razvoj tzv. *nepotpune gamma funkcije*

$$\Gamma(s, z) := \int_z^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

kada $z \rightarrow +\infty$.

Zadatak 1.11. Neka je $\|\cdot\|$ općenita *kvazinorma* na nekom kompleksnom vektorskom prostoru X , tj.

$$\|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}, \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|, \quad \|f + g\| \lesssim \|f\| + \|g\|$$

za sve $f, g \in X$ i $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (a) Ako su $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ i $f_1, f_2, \dots, f_N \in X$ takvi da vrijedi $\|f_n\| \lesssim e^{-\varepsilon n}$ za $n = 1, 2, \dots, N$, dokažite $\|\sum_{n=1}^N f_n\| \lesssim_\varepsilon 1$.
- (b) Pokažite da postoji dovoljno veliki broj $A \in \langle 0, +\infty \rangle$ takav da ako su $N \in \mathbb{N}$ i $f_1, f_2, \dots, f_N \in X$ takvi da vrijedi $\|f_n\| \lesssim n^{-A}$ za $n = 1, 2, \dots, N$, tada je $\|\sum_{n=1}^N f_n\| \lesssim_A 1$.

Napomena: Poanta gornjih ocjena je da ne ovise o broju vektora N . Implicitnu konstantu u definiciji kvazinorme smatramo apsolutnom, tj. o njoj smiju ovisiti broj A i implicitne konstante u (a) i (b).

Zadatak 1.12. Dokažite sljedeću *nejednakost Steina i Weissa*: Za $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i funkcije $f_1, f_2, \dots, f_N \in L^1_{\text{slabi}}$ na nekom prostoru mjere vrijedi

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_N\|_{L^1_{\text{slabi}}} \lesssim (\ln N) (\|f_1\|_{L^1_{\text{slabi}}} + \|f_2\|_{L^1_{\text{slabi}}} + \dots + \|f_N\|_{L^1_{\text{slabi}}}).$$

Osim toga, pokažite primjerom da se faktor $\ln N$ ne smije izostaviti.

Napomena: Implicitna konstanta je univerzalna, tj. ne ovisi niti o prostoru mjere niti o funkcijama. Ova nejednakost pokazuje da kvazinorma $\|\cdot\|_{L^1_{\text{slabi}}}$ samo “logaritamski odstupa” od norme, što možemo usporediti s “potencijskim odstupanjem” $N^{1/p-1}$ kvazinorme $\|\cdot\|_{L^p}$ za $p < 1$; vidjeti zadatak 1.4.

Uputa: Odgovarajućom normalizacijom svedite nejednakost na ocjenu od $\mu(\{|f_1 + f_2 + \dots + f_N| > 1\})$. Potom svedite na slučaj kada za svaki j vrijedi $\frac{1}{2N} \leq |f_j| \leq 1$. Za takve funkcije f_j je jaka L^1 norma najviše $O(\ln N)$ puta veća od slabe L^1 kvazinorme.

Zadatak 1.13. Posebni slučaj tzv. Birnbaum¹⁰-Orliczove¹¹ norme na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ je $\|\cdot\|_{e^L}$ definirana sa

$$\|f\|_{e^L} := \inf \left\{ a \in \langle 0, +\infty \rangle : \int_{\mathbb{X}} (e^{|f|/a} - 1) d\mu \leq 1 \right\},$$

pri čemu smatramo $\inf \emptyset = +\infty$. Pripadni funkcijski prostor je

$$e^L(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \{f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ je } \mathcal{X}\text{-izmjeriva, } \|f\|_{e^L} < +\infty\}.$$

- (a) Provjerite da je $\|\cdot\|_{e^L}$ doista norma na $e^L(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.

Napomena: Opet identificiramo funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0.

- (b) Dokažite da za vjerojatnosni prostor $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $\mathcal{X}$ -izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi

$$\|f\|_{e^L} \sim \sup_{p \in [1, \infty)} (p^{-1} \|f\|_{L^p})$$

te da imamo

$$f \in e^L \Leftrightarrow \|f\|_{L^p} = O(p), \quad p \rightarrow \infty.$$

Uputa: Razvijte eksponencijalnu funkciju u Taylorov¹² red i pomoću Stirlingove¹³ formule ocijenite faktorijske.

¹⁰Zygmunt Wilhelm Birnbaum (1903–2000), poljsko-američki matematičar.

¹¹Władysław Roman Orlicz (1903–1990), poljski matematičar.

¹²Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar. Još ranije ga je otkrio James Gregory (1638–1675), škotski matematičar i astronom.

¹³James Stirling (1692–1770), škotski matematičar.

Poglavlje 2

Multilinearna interpolacija L^p prostora

Interpolacija je vrlo korisna tehnika koja omogućava da iz ocjena u svojevrsnim “rubnim” slučajevima zaključimo kako odgovarajuće ocjene vrijede i u čitavom rasponu funkcijskih prostora. Ovdje ćemo se baviti isključivo interpolacijom Lebesgueovih L^p prostora. (Općenitiji koncept interpolacije, ali samo u linearnom ili sublinearnom slučaju, čitatelj može naći u knjizi [BL76].) Dvije su metode interpolacije: realna i kompleksna. Mi ćemo dati malu prednost prvoj od njih; formulirat ćemo je elegantnije i općenitije nego je predstavljena u većini klasične literature, uvelike inspirirani pristupom iz [Thi06] i [Tao07]. Pokušat ćemo realnu interpolaciju dočarati kao jednostavnu posljedicu općenitog načela: “dekomponiraj, ocijeni, pozbroji”. Kod kompleksne interpolacije ćemo pokazati praktičnost multilinearog pristupa. Usporedo s glavnom linijom razmatranja u ovom poglavlju, pokazat ćemo i neke trikove za baratanje funkcijama iz prostora L^p i L^p_{slabi} , koje će čitatelj potom moći iskušati na zadacima 2.8 i 2.9, koji bi inače bili prilično teški.

2.1. Dualnost

Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ zasad sasvim proizvoljni prostor mjere, koji se podrazumijeva u daljnjem tekstu. Radi potpunosti najprije navodimo osnovne nejednakosti za L^p norme.

Lema 2.1.

- (a) (Hölderova nejednakost) *Ako su $p, q, r \in \langle 0, +\infty \rangle$ eksponenti takvi da je $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, tada da svake izmjerive kompleksne funkcije f i g vrijedi*

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

- (b) (Log-konveksnost L^p normi) *Ako su $p, q, r \in \langle 0, +\infty \rangle$ eksponenti takvi da je $0 < p < r < q \leq \infty$ i ako je $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ određen sa $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$, tada za svaku izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{1-\theta} \|f\|_{L^q}^{\theta}.$$

- (c) (Nejednakost Minkowskog) Za $p \in [1, \infty]$ i za svake izmjerive kompleksne funkcije f i g vrijedi

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Dokaz. Dat ćemo vrlo kratke (i ponešto nestandardne) dokaze ovih tvrdnji. Pretpostavimo da su u svakoj od njih spomenuti eksponenti konačni, jer su u protivnom dokazi još jednostavniji.

(a) Možemo pretpostaviti $0 < \|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^q} < +\infty$, jer je inače tvrdnja trivijalna, a zbog homogenosti tražene nejednakosti zasebno u f i g čak smijemo normalizirati $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Označimo $\vartheta = \frac{r}{p}$, tako da je $1 - \vartheta = \frac{r}{p}$. Nejednakost

$$a^{1-\vartheta}b^\vartheta \leq (1-\vartheta)a + \vartheta b; \quad a, b \in [0, +\infty) \quad (2.1)$$

očigledno slijedi logaritmiranjem i korištenjem konkavnosti logaritamske funkcije. Uvrštavanje $a = |f(x)|^p$, $b = |g(x)|^q$ i integriranje po mjeri μ u varijabli x daju traženu nejednakost.

- (b) Naprosto primijenimo dio (a) na funkcije $|f|^{1-\theta}$, $|f|^\theta$ i eksponente $\frac{p}{1-\theta}$, $\frac{q}{\theta}$, r :

$$\|f\|_{L^r} \leq \| |f|^{1-\theta} \|_{L^{p/(1-\theta)}} \| |f|^\theta \|_{L^{q/\theta}}.$$

(c) Opet smijemo pretpostaviti $0 < \|f\|_{L^p}, \|g\|_{L^p} < +\infty$. Ovog puta ćemo korištenjem istovremene homogenosti u f i g normalizirati $\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} = 1$ te označiti $\vartheta = \|g\|_{L^p}$, tako da je $1 - \vartheta = \|f\|_{L^p}$. Nejednakost

$$((1-\vartheta)a + \vartheta b)^p \leq (1-\vartheta)a^p + \vartheta b^p; \quad a, b \in [0, +\infty)$$

je posljedica konveksnosti opće potencije s eksponentom $p \geq 1$. Uvrštavanjem $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}$, $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^p}}$ i integriranjem po μ dobivamo traženu tvrdnju. $\square$

U literaturi se nejednakost Minkowskog najčešće dokazuje pomoću Hölderove nejednakosti. Instrukтивно je pokušati dokazati dio (b) prethodne leme dvostrukim deriviranjem funkcije $t \mapsto \ln \|f\|_{L^{1/t}}$ i uočiti koje komplikacije se pojavljuju. Ocjena (2.1) se ponekad naziva i *težinska (ponderirana) geometrijsko-aritmetička nejednakost*.

U posebnim slučajevima prostora mjere imamo još jednostavnije, također često korištene ocjene.

Lema 2.2.

- (a) Ako je mjera μ vjerojatnosna (tj. $\mu(\mathbb{X}) = 1$), tada za eksponente p, q takve da je $0 < p < q \leq \infty$ vrijedi $\|f\|_{L^p(\mathbb{X}, \mu)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{X}, \mu)}$.
- (b) Ako je μ mjera prebrajanja na nekom skupu $\mathbb{X}$, tada za eksponente p, q takve da je $0 < p < q \leq \infty$ vrijedi $\|f\|_{\ell^p(\mathbb{X})} \geq \|f\|_{\ell^q(\mathbb{X})}$.

Dokaz. Opet možemo pretpostaviti $q < \infty$, jer je slučaj $q = \infty$ trivijalan.

- (a) Iz leme 2.1(a) primijenjene na funkcije f i $\mathbb{1}_{\mathbb{X}}$ te eksponente $q, \frac{pq}{q-p}, p$ imamo

$$\|f\|_{L^p} = \|f\mathbb{1}_{\mathbb{X}}\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} \|\mathbb{1}_{\mathbb{X}}\|_{L^{pq/(q-p)}} = \|f\|_{L^q}.$$

(b) Zbog homogenosti smijemo normalizirati $\|f\|_{\ell^p} = 1$, a očigledna posljedica je $|f(x)| \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{X}$. Kako za $\vartheta \in [0, 1]$ vrijedi $\vartheta^q \leq \vartheta^p$, možemo ocijeniti

$$\|f\|_{\ell^q}^q = \sum_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|^q \leq \sum_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|^p = \|f\|_{\ell^p}^p = 1$$

pa doista imamo $\|f\|_{\ell^q} \leq 1$. □

Dogovorimo se da ćemo za svaki $q \in [1, \infty]$ sa q' označavati njemu *konjugirani eksponent*, tj. jedinstveni $q' \in [1, \infty]$ takav da je $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Pritom uzimamo $\frac{1}{\infty} = 0$. Eksplicitno,

$$q' := \begin{cases} \infty & \text{za } q = 1, \\ \frac{q}{q-1} & \text{za } 1 < q < \infty, \\ 1 & \text{za } q = \infty. \end{cases}$$

Za prostor mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ neka $\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ označava vektorski prostor svih μ -g.s. klasa jednostavnih $\mathcal{X}$ -izmjerivih kompleksnih funkcija na $\mathbb{X}$ koje iščezavaju izvan skupa konačne mjere. Dakle, $\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ se sastoji od funkcija oblika

$$f = \sum_{l=1}^M \alpha_l \mathbb{1}_{F_l}; \quad M \in \mathbb{N}, \quad F_1, \dots, F_M \in \mathcal{X}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_M \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Nadalje, $\mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ će nam označavati prostor svih μ -g.s. klasa kompleksnih $\mathcal{X}$ -izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$, a $\mathcal{M}^+(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ familiju svih μ -g.s. klasa $\mathcal{X}$ -izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$ s vrijednostima u $[0, +\infty]$.

Vektorski prostor $\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ će nam u ovom poglavlju služiti kao pogodni “testni prostor” ili kao prirodna “polazna domena” raznih operatora, jer još uvijek nemamo na raspolaganju nikakvu diferencijabilnu ili makar topološku strukturu; usporedite npr. narednu lemu sa zadatkom 2.2. Pretpostavka da radimo s jednostavnim funkcijama je samo kvalitativne naravi te nam pomaže kako bi svi argumenti koji slijede bili smisleni, a sve operacije opravdane. Premda znamo da se svaka funkcija $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ može zapisati u obliku (2.2), ne želimo o brojevima $M, \alpha_1, \dots, \alpha_M$ i skupovima $F_1, \dots, F_M$ pretpostavljati ništa što ne bi slijedilo iz ocjena veličina $\|f\|_{L^p}$. Samo tako ćemo moći uspješno koristiti poznatu činjenicu da je $\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ gusti potprostor od $L^p(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ za svaki $p \in [1, +\infty)$; vidjeti [Coh13] ili [Fol99].

Ponekad moramo dodati blage tehničke pretpostavke na mjeru s kojom radimo, koje u praksi gotovo nikad ne predstavljaju problem. Prostor mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ je σ -konačan kada postoji niz $(F_n)_{n=1}^\infty$ u $\mathcal{X}$ takav da je $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ i $\mu(F_n) < +\infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je prostor mjere *semikonačan* ako za svaki $E \in \mathcal{X}$ mjere $\mu(E) = +\infty$ postoji skup $F \in \mathcal{X}$ takav da je $F \subseteq E$ i $0 < \mu(F) < +\infty$.

Lema 2.3. (Obrat Hölderove nejednakosti) *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor semikonačne mjere i uzmimo $q \in [1, \infty]$. Pretpostavimo da $\mathcal{X}$ -izmjeriva funkcija $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ zadovoljava:*

- *Za svaku $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ je $fg \in L^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.*

- $M := \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{X}} f g d\mu \right| : f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu), \|f\|_{L^{q'}} = 1 \right\} < +\infty.$

Tada vrijedi $g \in L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $\|g\|_{L^q} = M$.

Dokaz. Najprije ćemo konstruirati niz funkcija $(\operatorname{sgn}_k)_{k=1}^\infty$ sa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ koje uniformno aproksimiraju kompleksnu funkciju signum (tj. funkciju predznaka), a jednostavne su i Borelove. Za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ postoji jedinstveni $\vartheta \in [0, 1)$ takav da je $z = |z|e^{2\pi i\vartheta}$. Tada je $\operatorname{sgn} z = e^{2\pi i\vartheta}$, a mi za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$\operatorname{sgn}_k z := e^{2\pi i \lfloor k\vartheta \rfloor / k},$$

pri čemu $\lfloor \cdot \rfloor$ označava funkciju “najveće cijelo”. Dakle, $\frac{\lfloor k\vartheta \rfloor}{k}$ zapravo zaokružuje ϑ na prvi manji ili jednaki broj iz skupa $\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}\}$. Osim toga je $\operatorname{sgn} 0 = 0$ pa i mi stavimo $\operatorname{sgn}_k 0 = 0$. Ocjenjujući duljinu tetive duljinom pripadnog luka, odmah se vidi da za svaki $z \in \mathbb{C}$ imamo

$$|\operatorname{sgn}_k z - \operatorname{sgn} z| \leq \frac{2\pi}{k}.$$

Odavde pak kvadriranjem slijedi

$$\operatorname{Re}(\overline{\operatorname{sgn}_k z} \operatorname{sgn} z) = 1 - \frac{1}{2} |\operatorname{sgn}_k z - \operatorname{sgn} z|^2 \geq 1 - \frac{2\pi^2}{k^2}. \quad (2.3)$$

Razlikovat ćemo dva slučaja. Neka je prvo $q < \infty$. Trebat će nam zaključiti da je uopće skup $\{g \neq 0\}$ σ -konačan. Preciznije, tvrdimo da skup $\{|g| > \frac{1}{n}\}$ ima konačnu mjeru za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(\{|g| > \frac{1}{n}\}) = +\infty$. Definirajmo

$$\alpha := \sup \left\{ \mu(F) : F \in \mathcal{X}, F \subseteq \{|g| > \frac{1}{n}\}, \mu(F) < +\infty \right\}.$$

Želimo pokazati da je $\alpha = +\infty$ pa pretpostavimo $\alpha < +\infty$. Tada postoji niz $(F_k)_{k=1}^\infty$ $\mathcal{X}$ -izmjerivih podskupova od $\{|g| > \frac{1}{n}\}$ koji imaju konačnu mjeru i zadovoljavaju $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k) = \alpha$. Stavimo $F_\infty := \bigcup_{k=1}^\infty F_k$. Tada je $F_\infty \in \mathcal{X}$, $F_\infty \subseteq \{|g| > \frac{1}{n}\}$ i zbog monotonosti mjere vrijedi $\mu(F_\infty) \geq \alpha$. S druge strane, kako se konačne unije $\bigcup_{k=1}^K F_k$ nalaze u gornjoj porodici, imamo

$$\mu(F_\infty) = \lim_{K \rightarrow \infty} \underbrace{\mu\left(\bigcup_{k=1}^K F_k\right)}_{\leq \alpha} \leq \alpha$$

pa zaključujemo da mora biti $\mu(F_\infty) = \alpha < +\infty$. Sada imamo

$$\mu(\{|g| > \frac{1}{n}\} \setminus F_\infty) = +\infty$$

pa zbog semikonačnosti mjere μ postoji $G \in \mathcal{X}$ takav da je $G \subseteq \{|g| > \frac{1}{n}\} \setminus F_\infty$ i $0 < \mu(G) < +\infty$. Tada je $F_\infty \cup G$ izmjerivi podskup od $\{|g| > \frac{1}{n}\}$ takav da je

$$\alpha < \mu(F_\infty \cup G) = \alpha + \mu(G) < +\infty,$$

što je u kontradikciji s definicijom od α . Timo smo pokazali $\alpha = +\infty$ pa zapravo postoji niz $(F_k)_{k=1}^\infty$ podskupova od $\{|g| > \frac{1}{n}\}$ koji imaju pozitivnu i konačnu mjeru i za koje vrijedi $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k) = +\infty$. Promotrimo funkcije

$$h_k := \mu(F_k)^{-1/q'} \overline{\operatorname{sgn}_{10} \circ g} \mathbb{1}_{F_k}.$$

Za njih odmah vidimo $\|h_k\|_{L^{q'}} = 1$ te

$$\operatorname{Re}(h_k g) \stackrel{(2.3)}{\geq} \left(1 - \frac{\pi^2}{50}\right) \mu(F_k)^{-1/q'} |g| \mathbb{1}_{F_k} \gtrsim \frac{1}{n} \mu(F_k)^{-1/q'} \mathbb{1}_{F_k}$$

pa zbog pretpostavke iz iskaza leme imamo

$$M \geq \left| \int_{\mathbb{X}} h_k g d\mu \right| \geq \operatorname{Re} \int_{\mathbb{X}} h_k g d\mu = \int_{\mathbb{X}} \operatorname{Re}(h_k g) d\mu \gtrsim \frac{1}{n} \mu(F_k)^{1/q}.$$

Puštanjem $k \rightarrow \infty$ dobivamo kontradikciju s $M < +\infty$, iz koje potom zaključujemo $\mu(\{|g| > \frac{1}{n}\}) < +\infty$.

Postoji niz $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ $\mathcal{X}$ -izmjerivih jednostavnih funkcija sa $\mathbb{X}$ u $\mathbb{C}$ koji po točkama konvergira prema g i takav je da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|\varphi_n| \leq |g|$. Nadalje stavimo $g_n := \varphi_n \mathbb{1}_{\{|g| > 1/n\}}$, tako da je po prethodno dokazanom $(g_n)_{n=1}^\infty$ niz u $\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ s istim svojstvima. Konačno definirajmo

$$f_n := \frac{|g_n|^{q-1} \overline{\operatorname{sgn}_n \circ g}}{\|g_n\|_{L^q}^{q-1}} \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velike da je nazivnik strogo pozitivan, pri čemu izraz 0^0 (koji se može pojaviti u brojniku kod $q = 1$) shvaćamo kao 0. Primijetimo

$$\|f_n\|_{L^{q'}} = 1, \quad \|f_n g_n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{X}} |f_n g_n| d\mu = \|g_n\|_{L^q}$$

i

$$\operatorname{Re}(f_n g) = \frac{|g_n|^{q-1} |g|}{\|g_n\|_{L^q}^{q-1}} \operatorname{Re}(\overline{\operatorname{sgn}_n \circ g} \operatorname{sgn} \circ g) \stackrel{(2.3)}{\geq} \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\right) |f_n g|,$$

odakle je

$$\int_{\mathbb{X}} \operatorname{Re}(f_n g) d\mu \geq \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\right) \|f_n g\|_{L^1}.$$

Prema Fatouovoj¹ lemi konačno imamo:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q} &\leq \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} |g_n|^q d\mu \right)^{1/q} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L^q} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n g_n\|_{L^1} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n g\|_{L^1} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\right) \|f_n g\|_{L^1} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} \operatorname{Re}(f_n g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{X}} f_n g d\mu \right| \leq M. \end{aligned}$$

¹Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929), francuski matematičar i astronom.

Zato je $g \in L^q$ i $\|g\|_{L^q} \leq M$. Obratna nejednakost je direktna posljedica leme 2.1(a).

Dokažimo sada slučaj $q = \infty$. Za fiksirani $\varepsilon > 0$ označimo $A_\varepsilon := \{|g| > M + \varepsilon\}$. Želimo dokazati $\mu(A_\varepsilon) = 0$ pa pretpostavimo $\mu(A_\varepsilon) > 0$. Postoji $B \in \mathcal{X}$, $B \subseteq A_\varepsilon$ takav da je $0 < \mu(B) < +\infty$. Naime, to slijedi iz semikonačnosti mjere μ ako je $\mu(A_\varepsilon) = +\infty$, a očigledno je ako je $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$. Definirajmo

$$f_n := \frac{\overline{\operatorname{sgn}_n \circ g} \mathbb{1}_B}{\mu(B)} \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očigledno je $\|f_n\|_{L^1} = 1$ te

$$\operatorname{Re}(f_n g) = \frac{|g| \mathbb{1}_B}{\mu(B)} \operatorname{Re}(\overline{\operatorname{sgn}_n \circ g} \operatorname{sgn} \circ g) \geq \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\right) \frac{|g| \mathbb{1}_B}{\mu(B)}$$

pa imamo

$$M \geq \left| \int_{\mathbb{X}} f_n g d\mu \right| \geq \int_{\mathbb{X}} \operatorname{Re}(f_n g) d\mu \geq \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\right) \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geq \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\right) (M + \varepsilon).$$

Prelaskom na limes kada $n \rightarrow \infty$ dobivamo kontradikciju i zaključujemo $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Dakle, $g \in L^\infty$ i $\|g\|_{L^\infty} \leq M + \varepsilon$ pa puštanjem $\varepsilon \rightarrow 0$ slijedi jedna nejednakost, dok je druga opet trivijalna posljedica leme 2.1(a). $\square$

Pripomenimo da lema 2.3 ostaje vrijediti (uz čak nešto jednostavniji dokaz) i za funkciju $g: \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty]$, pri čemu izraz $|\int f g d\mu|$ treba zamijeniti sa $\int |f| g d\mu$. Ova varijanta nam može koristiti dok još uopće ne znamo da je kompleksna funkcija g dobro definirana i konačna u gotovo svakoj točki. Osim toga primijetimo da se dokaz pojednostavljuje ako je prostor mjere σ -konačan, što je obično slučaj.

Lema 2.3 je korisna jer nam pomaže da “dualiziramo” ocjene. Neka su $X_1, \dots, X_n$ kompleksni normirani prostori, $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor semikonačne mjere i $q \in [1, \infty]$. Pretpostavimo da za dani operator $T: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ želimo dokazati ocjenu

$$\|T(f_1, \dots, f_n)\|_{L^q} \lesssim \|f_1\|_{X_1} \cdots \|f_n\|_{X_n} \quad (2.4)$$

za svake $f_1 \in X_1, \dots, f_n \in X_n$. Zahvaljujući lemi 2.3 dovoljno je provjeriti da je forma

$$\Lambda: \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \times X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n) := \int_{\mathbb{X}} f_0 T(f_1, \dots, f_n) d\mu$$

dobro definirana (u smislu da je podintegralna funkcija uvijek apsolutno integrabilna) i da zadovoljava ocjenu

$$|\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| \lesssim \|f_0\|_{L^{q'}} \|f_1\|_{X_1} \cdots \|f_n\|_{X_n}.$$

Za operator T koji zadovoljava nejednakost (2.4) kažemo da je *ograničen*, a najmanju konstantu koja može stajati na desnoj strani te nejednakosti zovemo *operatorska norma* od T i označavamo $\|T\|_{X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow L^q}$. Analogno se definira *norma forme* te u prethodnom slučaju čak imamo

$$\|\Lambda\|_{L^{q'} \times X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{C}} = \|T\|_{X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow L^q}.$$

Ukoliko je T još i multilinearan (tj. linearan u svakoj od n koordinata), tada je T neprekidan, pri čemu na $X_1 \times \cdots \times X_n$ pretpostavljamo produkt topologija generiranih pripadnim normama. Ukoliko dodatno pretpostavimo da su dani eksponenti $p_1, p_2, \dots, p_n \in [1, \infty)$ i neki prostori mjera $(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 1, 2, \dots, n$ te da je upravo $X_j = (\mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j), \|\cdot\|_{L^{p_j}})$, tada po argumentu gustoće T ima jedinstveno ograničeno multilinearano proširenje

$$\tilde{T}: \prod_{j=1}^n L^{p_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \rightarrow L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu),$$

koje čak ima istu operatorsku normu, tj.

$$\|\tilde{T}\|_{L^{p_1} \times \cdots \times L^{p_n} \rightarrow L^q} = \|T\|_{X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow L^q}.$$

Slična napomena vrijedi i za formu Λ .

Za kraj ovog odjeljka spomenimo da nam multilinearana forma može biti i polazni objekt te generirati multilinearani operator. Radi jednostavnosti formuliramo samo bilinearni slučaj.

Lema 2.4. *Neka su X kompleksni normirani prostor i $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor mjere. Pretpostavimo da je $p \in (1, \infty)$ i μ bilo kakva mjera ili da je $p = 1$ i mjera μ σ -konačna. Za svaku ograničenu bilinearnu formu $\Lambda: X \times L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ postoji jedinstveni ograničeni linearni operator $T: X \rightarrow L^{p'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ takav da je*

$$\int_{\mathbb{X}} (Tf)gd\mu = \Lambda(f, g) \quad (2.5)$$

za svake $f \in X$ i $g \in L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$. Štoviše, tada je $\|\Lambda\|_{X \times L^p \rightarrow \mathbb{C}} = \|T\|_{X \rightarrow L^{p'}}$.

Dokaz. Poznata je činjenica (vidjeti [Coh13]) da uz uvjete leme vrijedi

$$L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)^* \cong L^{p'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu), \quad (2.6)$$

tj. preciznije, da je svaki ograničeni linearni funkcional na L^p oblika $g \mapsto \int_{\mathbb{X}} gh d\mu$ za jedinstvenu $h \in L^{p'}$. Iz spomenute jedinstvenosti odmah slijedi i da postoji najviše jedan operator T kao u iskazu leme.

Dokažimo sada egzistenciju traženog operatora T . Za svaki $f \in X$ je $L^p \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \Lambda(f, g)$ neprekidni linearni funkcional pa zbog (2.6) postoji jedinstvena funkcija iz $L^{p'}$, označimo je sa Tf , takva da vrijedi (2.5) za svaku $g \in L^p$. Na taj način je definiran operator $T: X \rightarrow L^{p'}$ koji već zadovoljava traženu jednakost. On je linearan jer za svaku $g \in L^p$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)gd\mu &= \Lambda(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) \\ &= \alpha_1 \Lambda(f_1, g) + \alpha_2 \Lambda(f_2, g) = \int_{\mathbb{X}} (\alpha_1 Tf_1 + \alpha_2 Tf_2)gd\mu \end{aligned}$$

pa opet možemo primijeniti jedinstvenost iz prikaza (2.6). Kako imamo

$$\left| \int_{\mathbb{X}} (Tf)g d\mu \right| = |\Lambda(f, g)| \leq \|\Lambda\|_{X \times L^p \rightarrow \mathbb{C}} \|f\|_X \|g\|_{L^p},$$

iz leme 2.3 slijedi da je T ograničen i $\|T\|_{X \rightarrow L^{p'}} \leq \|\Lambda\|_{X \times L^p \rightarrow \mathbb{C}}$. Obratna nejednakost je opet očigledna po lemi 2.1. $\square$

Jedna primjena posljednje leme je da se krene od ograničenog linearnog operatora

$$T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu), \quad p, q \in \langle 1, \infty \rangle,$$

prijeđe na ograničenu bilinearnu formu

$$\Lambda: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \times L^{q'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{X}} (Tf)g d\mu$$

pa lema 2.4 primijenjena na $(g, f) \mapsto \Lambda(f, g)$ generira jedinstveni ograničeni linearni operator

$$T^\tau: L^{q'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$$

takav da je

$$\int_{\mathbb{Y}} f(y)(T^\tau g)(y) d\nu(y) = \Lambda(f, g) = \int_{\mathbb{X}} (Tf)(x)g(x) d\mu(x).$$

Takav operator T^τ zove se *dualni* ili *transponirani* ili *adjungirani operator* od T i iz svega navedenog se odmah vidi da T i T^τ imaju iste operatorske norme. U slučaju $p = q = 2$ on nije baš jednak hermitski adjungiranom operatoru obzirom na standardne L^2 skalarne produkte, već je hermitski adjungirani operator od T zapravo $g \mapsto \overline{T^\tau g}$.

Analogna konstrukcija je moguća i za ograničeni multiliniarni operator, uz napomenu da tada n -linearni operator ima n adjungiranih operatora.

* * *

Zadatak 2.1. Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ σ -konačni prostori mjera. Za funkciju $f \in \mathcal{M}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ i eksponente $p, q \in [1, \infty]$ ima smisla promatrati tzv. *mješovite Lebesgueove norme*:

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_{L_x^p(L_y^q)} &:= \left\| \|f(x, y)\|_{L_y^q} \right\|_{L_x^p}, \\ \|f(x, y)\|_{L_y^q(L_x^p)} &:= \left\| \|f(x, y)\|_{L_x^p} \right\|_{L_y^q}. \end{aligned}$$

Ovdje u indeksima označavamo po kojoj varijabli se uzima uobičajena L^p norma. Te dvije mješovite norme općenito ne moraju biti jednake pa moramo pripaziti kako čitamo oznake i kojim redoslijedom računamo. Pokažite da ipak vrijedi sljedeće.

- (a) Ako je $p = q$, tada je $\|f(x, y)\|_{L_x^p(L_y^q)} = \|f(x, y)\|_{L_y^q(L_x^p)}$.
- (b) Ako je $p < q$, tada je $\|f(x, y)\|_{L_x^p(L_y^q)} \geq \|f(x, y)\|_{L_y^q(L_x^p)}$.

(c) Ako je $p > q$, tada je $\|f(x, y)\|_{L_x^p(L_y^q)} \leq \|f(x, y)\|_{L_y^q(L_x^p)}$.

Zadatak 2.2. Dokažite glatku varijantu obrata Hölderove nejednakosti: Neka je U otvoreni podskup od $\mathbb{R}^d$ te neka je $q \in [1, \infty]$. Pretpostavimo da je $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ Borel-izmjeriva funkcija koja zadovoljava:

- Za svaku $f \in C_c^\infty(U)$ je $fg \in L^1(U)$.
- $M := \sup \left\{ \left| \int_U f(x)g(x)dx \right| : f \in C_c^\infty(U), \|f\|_{L^{q'}} = 1 \right\} < +\infty$.

Tada vrijedi $g \in L^q(U)$ i $\|g\|_{L^q} = M$.

2.2. Realna metoda interpolacije

Neka su $(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \dots, n$ prostori mjera. Reći ćemo da je

$$\Lambda: \prod_{j=0}^n \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \rightarrow [0, +\infty] \text{ ili } \mathbb{C}$$

multisublinearna forma ako vrijedi

$$|\Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, \alpha f_j, f_{j+1}, \dots, f_n)| = |\alpha| |\Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, \dots, f_n)|$$

i

$$\begin{aligned} & |\Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, g + h, f_{j+1}, \dots, f_n)| \\ & \leq |\Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, g, f_{j+1}, \dots, f_n)| + |\Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, h, f_{j+1}, \dots, f_n)| \end{aligned}$$

za svaki $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, svaki $\alpha \in [0, +\infty]$ ili $\mathbb{C}$ i svake jednostavne funkcije $f_1, \dots, f_n$, g, h koncentrirane na skupovima konačnih mjera. Primjer bisublinearne forme koja nije bilinearna se dobije dualizacijom Hardy-Littlewoodove maksimalne funkcije (0.5):

$$\Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{R}} \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} \left| \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f(y)dy \right| |g(x)|dx. \quad (2.7)$$

U daljnjem promatramo isključivo eksponente $p_0, p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$. Multisublinearna forma Λ je *jakog tipa* $P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n})$ ako za svaki izbor funkcija $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \dots, n$ vrijedi ocjena

$$|\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| \lesssim_{p_0, p_1, \dots, p_n} \prod_{j=0}^n \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)}. \quad (2.8)$$

Multisublinearna forma Λ je *restringiranog tipa* $P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n})$ ako za svaki izbor skupova $E_j \in \mathcal{X}_j$ takvih da je $\mu_j(E_j) < +\infty$; $j = 0, 1, \dots, n$ vrijedi ocjena

$$|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})| \lesssim_{p_0, p_1, \dots, p_n} \prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{\frac{1}{p_j}}. \quad (2.9)$$

Pritom podrazumijevamo $\frac{1}{\infty} = 0$ i dogovorno uzimamo

$$\mu_j(E_j)^0 = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \mu_j(E_j) > 0, \\ 0 & \text{ako je } \mu_j(E_j) = 0. \end{cases}$$

Premda se u ovim definicijama pojavljuje samo jedna $(n+1)$ -torka eksponenata, želimo notacijski naglasiti da sve buduće implicitne konstante smiju ovisiti o eksponentima. Očigledno je svojstvo (2.9) slabije od svojstva (2.8), naprosto jer je $\|\mathbb{1}_{E_j}\|_{L^{p_j}} = \mu_j(E_j)^{1/p_j}$. Naravno da obrat ne vrijedi (pogledajte zadatak 2.3), ali važno je upozoriti na sljedeću moguću grešku u rasuđivanju. Raspisujući svaku od jednostavnih funkcija $f_0, f_1, \dots, f_n$ kao linearnu kombinaciju karakterističnih funkcija izmjerivih skupova mogli bismo pomisliti kako nejednakost (2.8) slijedi iz nekoliko primjena nejednakosti (2.9), ali to nije točno! Kod spomenutog raspisa ne bismo imali nikakvu kontrolu broja karakterističnih funkcija koje se pojavljuju niti veličina koeficijenata koji uz njih dolaze. Glavni rezultat ovog odjeljka će reći kako nekad ipak možemo iz nekoliko ocjena (2.9) zaključiti jake ocjene (2.8) u čitavom rasponu Lebesgueovih prostora.

Iz zadatka 2.4 se vidi da ne bi imalo smisla promatrati multisublinearne forme koje su restringiranog tipa P ako bi za neki j vrijedilo $0 < p_j < 1$. Zanimljivo je pripomenuti da je ipak moguće i korisno modificirati definiciju restringirane omeđenosti čak i kada za neki eksponent vrijedi $p_j < 0$, vidjeti [GT03] ili [Thi06], ali mi ćemo ostati samo kod eksponenata $p_j \geq 1$.

Odlučili smo raspon ocjena (2.8) ili (2.9) za formu Λ opisivati $(n+1)$ -torkama

$$P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n}) \in [0, 1]^{n+1}$$

pa ponekad naprosto kažemo da je Λ jakog ili restringiranog tipa u točki P . Da je promatrati recipročne vrijednosti eksponenata bio dobar izbor pokazuje već sljedeća vrlo jednostavna opservacija.

Lema 2.5. *Skup točaka u kojima je multisublinearne forma Λ restringiranog tipa je uvijek konveksan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Λ restringiranog tipa

$$Q = (\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n}) \text{ i } R = (\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_n})$$

te neka je $(n+1)$ -torka eksponenata $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ definirana pomoću

$$(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n}) = (1 - \theta)(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n}) + \theta(\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_n})$$

za neki $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$. Uzmimo skupove $E_j \in \mathcal{X}_j$; $j = 0, 1, \dots, n$ konačnih mjera. Za svaki j imamo

$$\mu_j(E_j)^{\frac{1}{p_j}} = \left(\mu_j(E_j)^{\frac{1}{q_j}} \right)^{1-\theta} \left(\mu_j(E_j)^{\frac{1}{r_j}} \right)^{\theta}$$

pa množenje daje

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{\frac{1}{p_j}} &= \left(\prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{\frac{1}{q_j}} \right)^{1-\theta} \left(\prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{\frac{1}{r_j}} \right)^{\theta} \\ &\gtrsim_{Q,R,\theta} |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})|^{1-\theta} |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})|^{\theta} \\ &= |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})|. \end{aligned}$$

□

Sljedeća lema govori o dekompozicijama funkcija i bit će prvi korak prema jakim ocjenama.

Lema 2.6. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor mjere.*

- (a) *Dana je realna funkcija $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ koja zadovoljava $\mathbf{0} \leq f \leq \mathbb{1}_F$ za neki skup $F \in \mathcal{X}$ takav da je $\mu(F) < +\infty$. Tada se f može prikazati kao konačna konveksna kombinacija*

$$f = \sum_{l=1}^N \alpha_l \mathbb{1}_{F_l}$$

za neki $N \in \mathbb{N}$, za neke $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{X}$ podskupove od F i za neke koeficijente $\alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0$ takve da je $\sum_{l=1}^N \alpha_l = 1$.

- (b) *Svaka funkcija $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ se može dekomponirati kao*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k f_k, \quad (2.10)$$

pri čemu su f_k jednostavne $\mathcal{X}$ -izmjerive funkcije takve da vrijedi

$$|f_k| \leq \mathbb{1}_{F_k} \text{ za neki } F_k \in \mathcal{X} \text{ takav da je } \mu(F_k) \leq 2^k,$$

a koeficijenti $\beta_k \in [0, +\infty)$ zadovoljavaju

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \beta_k^p \leq 4 \|f\|_{L^p}^p \text{ za svaki } p \in [1, +\infty).$$

Štoviše, suma (2.10) je efektivno konačna, tj. samo konačno mnogo njenih pribrojnika je različito od 0.

Dokaz. (a) Označimo

$$\begin{aligned} G_1 &:= \{f \geq \tfrac{1}{2}\} \in \mathcal{X}, \\ G_2 &:= \{f - \tfrac{1}{2} \mathbb{1}_{G_1} \geq \tfrac{1}{4}\} \in \mathcal{X}, \\ G_3 &:= \{f - \tfrac{1}{2} \mathbb{1}_{G_1} - \tfrac{1}{4} \mathbb{1}_{G_2} \geq \tfrac{1}{8}\} \in \mathcal{X}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

tj. rekursivno

$$G_m := \left\{ f - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k} \mathbb{1}_{G_k} \geq 2^{-m} \right\}.$$

Po konstrukciji vidimo da za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$0 \leq f - \sum_{k=1}^m 2^{-k} \mathbb{1}_{G_k} \leq 2^{-m},$$

tako da imamo $f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mathbb{1}_{G_k}$.

Neka funkcija f poprima M različitih ne-nul vrijednosti i to na skupovima $H_1, H_2, \dots, H_M \in \mathcal{X}$. Svaki skup G_k je unija nekih od skupova $H_1, \dots, H_M$. Zato među njima ima samo konačno mnogo različitih; nazovimo ih $F_1, \dots, F_N$. Tvrdnja slijedi ako definiramo

$$\alpha_l := \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ G_k = F_l}} 2^{-k}; \quad l = 1, 2, \dots, N$$

i primijetimo $\sum_{l=1}^N \alpha_l = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} = 1$.

(b) Definirajmo

$$\beta_k := \min \{ \alpha \in [0, +\infty) : \mu(\{|f| > \alpha\}) \leq 2^{k-1} \}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Gornji skup je svakako neprazan (jer je f ograničena) te je oblika $\langle \gamma, +\infty \rangle$ ili $[\gamma, +\infty)$ za neki $\gamma \geq 0$. Ako je $(\gamma_m)_{m=1}^\infty$ strogo padajući niz koji konvergira prema γ , tada zbog neprekidnosti mjere u odnosu na rastuće nizove skupova imamo

$$\mu(\{|f| > \gamma\}) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^\infty \{|f| > \gamma_m\}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\{|f| > \gamma_m\}) \leq 2^{k-1}$$

pa zaključujemo da se i γ nalazi u tom skupu, što znači da se gornji minimum doista postiže. Primijetimo da se brojevi β_k smanjuju (ne nužno strogo) kako indeks $k \in \mathbb{Z}$ raste. Obzirom da f iščezava izvan skupa konačne mjere, za dovoljno velike $k \in \mathbb{Z}$ imamo $\beta_k = 0$. S druge strane, za dovoljno male $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\beta_k = \|f\|_{L^\infty}$.

Nadalje uzmimo

$$F_k := \{\beta_{k+1} < |f| \leq \beta_k\}$$

tako da i za dovoljno velike i za dovoljno male $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $F_k = \emptyset$ te skupovi $(F_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ čine particiju od $\{f \neq 0\}$. Po konstrukciji je

$$\mu(F_k) \leq \mu(\{|f| > \beta_{k+1}\}) \leq 2^k.$$

Također definirajmo

$$f_k := \begin{cases} \beta_k^{-1} f \mathbb{1}_{F_k} & \text{ako je } \beta_k > 0, \\ \mathbf{0} & \text{ako je } \beta_k = 0. \end{cases}$$

Na taj način zasigurno vrijedi $|f_k| \leq \mathbb{1}_{F_k}$ i tražena dekompozicija (2.10). Ako je $K \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je $\beta_K = 0$, tada imamo

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &\stackrel{(1.15)}{\geq} \sum_{k=-K}^{K-1} \int_{[\beta_{k+1}, \beta_k)} p \alpha^{p-1} \mu(\{|f| > \alpha\}) d\alpha \geq \sum_{k=-K}^{K-1} 2^{k-1} \int_{[\beta_{k+1}, \beta_k)} p \alpha^{p-1} d\alpha \\ &= \sum_{k=-K}^{K-1} 2^{k-1} (\beta_k^p - \beta_{k+1}^p) = \sum_{k=-K+1}^{K-1} 2^{k-2} \beta_k^p + \underbrace{2^{-K-1} \beta_{-K}^p}_{\geq 0} - \underbrace{2^{K-2} \beta_K^p}_{=0}. \end{aligned}$$

Preostaje pustiti $K \rightarrow \infty$ kako bismo dobili traženu ocjenu za koeficijente. $\square$

Pogledajte zadatak 2.5 za geometrijski dokaz leme 2.6(a). Ipak, dali smo prednost dokazu kojeg smo naveli jer on ima smisla i za funkcije koje nisu jednostavne, samo što onda konveksna kombinacija iz prikaza od f ne mora biti konačna. Primijetimo usput da su funkcije f_k iz leme 2.6(b) čak koncentrirane na međusobno disjunktним skupovima F_k .

Lema 2.7. *Ako je $\kappa: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow [0, +\infty)$ diskretna funkcija koja za svaki $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ zadovoljava*

$$\sup_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ k_j = l}} \kappa(k_0, k_1, \dots, k_n) \lesssim 1 \quad (2.11)$$

i ako su $p_0, p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$ eksponenti takvi da je $\sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} \geq 1$, tada vrijedi

$$\sum_{k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} \kappa(k_0, k_1, \dots, k_n) |\gamma_{k_0}^{(0)}| |\gamma_{k_1}^{(1)}| \cdots |\gamma_{k_n}^{(n)}| \lesssim \prod_{j=0}^n \|(\gamma_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z})} \quad (2.12)$$

za proizvoljne dvostrane nizove kompleksnih brojeva $(\gamma_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}$; $j = 0, 1, \dots, n$.

Dokaz. Označimo

$$f_j: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_j(k_0, k_1, \dots, k_n) := \kappa(k_0, k_1, \dots, k_n)^{1/p_j} \gamma_{k_j}^{(j)}; \quad j = 0, 1, \dots, n$$

uz interpretaciju $\kappa^{1/\infty} = \kappa^0 = 1$ te stavimo $f := f_0 f_1 \cdots f_n$. Lijevu stranu od (2.12) možemo interpretirati kao $\ell^1(\mathbb{Z}^{n+1})$ normu funkcije f pa ako je $p \in (0, 1]$ eksponent takav da je $\frac{1}{p} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j}$, tada zbog leme 2.2(b) i leme 2.1(a) imamo

$$\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^{n+1})} \leq \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^{n+1})} \leq \prod_{j=0}^n \|f_j\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z}^{n+1})}.$$

Za $p_j < \infty$ po pretpostavci vrijedi

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z}^{n+1})}^{p_j} &= \sum_{(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \kappa(k_0, k_1, \dots, k_n) |\gamma_{k_j}^{(j)}|^{p_j} \\ &\leq \left(\sup_{k_j \in \mathbb{Z}} \sum_{(\dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots) \in \mathbb{Z}^n} \kappa(k_0, k_1, \dots, k_n) \right) \left(\sum_{k_j \in \mathbb{Z}} |\gamma_{k_j}^{(j)}|^{p_j} \right) \lesssim \|(\gamma_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z})}^{p_j}, \end{aligned}$$

dok je za $p_j = \infty$ upravo $\|f_j\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^{n+1})} = \|(\gamma_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$. □

Alternativni dokaz leme 2.7 u slučaju konačnih eksponenata p_j i $\sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} = 1$ se može provesti tako da zbog homogenosti normaliziramo $\|(\gamma_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z})} = 1$, primijetimo očiglednu posljedicu ocjene (2.1),

$$|\gamma_{k_0}^{(0)}| |\gamma_{k_1}^{(1)}| \cdots |\gamma_{k_n}^{(n)}| \leq \sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} |\gamma_{k_j}^{(j)}|^{p_j},$$

pomnožimo je sa $\kappa(k_0, k_1, \dots, k_n)$, prosumiramo po $k_0, k_1, \dots, k_n$ te iskoristimo pretpostavku.

Konačno raspoložemo svim pripremnim rezultatima potrebnima za dokaz glavnog teorema ovog odjeljka. Prije njegovog iskaza fiksirajmo jednu hiperravninu $\mathcal{H}$ u $\mathbb{R}^{n+1}$ koja nije paralelna niti s jednom koordinatnom osi. To znači da je $\mathcal{H}$ oblika

$$\mathcal{H} = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \dots + \tau_n t_n = \tau\}$$

za neke $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\tau \in \mathbb{R}$. Osim toga možemo pretpostaviti da $\mathcal{H}$ siječe unutrašnjost kocke $[0, 1]^{n+1}$, jer bi inače tvrdnja teorema bila isprazna.

Teorem 2.8. (*Marcinkiewicz² teorem interpolacije*) *Ako je multisublinearna forma restringiranog tipa u svim točkama nekog podskupa $\mathcal{P}$ hiperravnine $\mathcal{H}$, tada je ona jakog tipa u svim točkama $P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n})$ koje se nalaze u unutrašnjosti (obzirom na $\mathcal{H}$) konveksne ljuske od $\mathcal{P}$ i zadovoljavaju $\sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} \geq 1$. Implicitne konstante u (2.8) ovise samo o eksponentima i o implicitnim konstantama iz (2.9).*

Napomenimo još jednom da se unutrašnjost uzima u relativnoj topologiji hiperavnine $\mathcal{H}$. Iz teorema će slijediti kako je dovoljno provjeriti da je forma restringiranog tipa u samo $n + 1$ točaka ravnine $\mathcal{H}$ koje su u općenitom položaju (tj. nisu sve sadržane u manje-dimenzionalnoj ravnini) kako bismo mogli zaključiti da je ona jakog tipa za čitavi odgovarajući neprazni raspon eksponenata.

Dokaz. Najprije po lemi 2.5 znamo da je ta forma, nazovimo je Λ , restringiranog tipa u svim točkama konveksne ljuske od $\mathcal{P}$. Uzmimo dakle točku $P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n})$ iz unutrašnjosti te konveksne ljuske koja još zadovoljava $\sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} \geq 1$. Iz činjenice da je Λ restringiranog tipa na nekoj okolini od P slijedi $1 < p_j < \infty$; $j = 0, 1, \dots, n$ te da postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$ takav da je Λ restringiranog tipa u svim točkama Q takvim da vektor $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ima barem n (od ukupno $n + 1$) koordinata u skupu $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$. Preostala koordinata je određena sa n spomenutih. Označimo sa $\mathcal{Q}$ kolekciju tih točaka $Q = (\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n})$; ona je konačna jer ima najviše $(n + 1)2^n$ elemenata.

Krenimo od proizvoljnih funkcija $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ i rastavimo ih koristeći lemu 2.6(b):

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} f_{j,k}, \quad |f_{j,k}| \leq \mathbb{1}_{F_{j,k}}, \quad \mu_j(F_{j,k}) \leq 2^k, \quad (2.13)$$

$$\beta_{j,k} \in [0, +\infty), \quad \|(\beta_{j,k} 2^{k/p_j})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^{p_j}} \lesssim \|f_j\|_{L^{p_j}}. \quad (2.14)$$

Koristeći multisublinearnost od Λ i (2.13) možemo pisati

$$|\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| \leq \sum_{k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} \beta_{0,k_0} \beta_{1,k_1} \dots \beta_{n,k_n} |\Lambda(f_{0,k_0}, f_{1,k_1}, \dots, f_{n,k_n})|. \quad (2.15)$$

Prisjetimo se da se svaka kompleksna funkcija g može rastaviti

$$g = (g_1 - g_2) + i(g_3 - g_4),$$

²Józef Marcinkiewicz (1910–1940), poljski matematičar.

pri čemu su

$$\begin{aligned} g_1 &= (\operatorname{Re} g)_+ = \max\{\operatorname{Re} g, 0\}, & g_2 &= (\operatorname{Re} g)_- = \max\{-\operatorname{Re} g, 0\}, \\ g_3 &= (\operatorname{Im} g)_+ = \max\{\operatorname{Im} g, 0\}, & g_4 &= (\operatorname{Im} g)_- = \max\{-\operatorname{Im} g, 0\}. \end{aligned}$$

Primjenjujući taj rastav na funkcije f_{j,k_j} pa potom koristeći lemu 2.6(a) vidimo da iz restringirane ocjene tipa $Q = (\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n})$ slijedi

$$|\Lambda(f_{0,k_0}, f_{1,k_1}, \dots, f_{n,k_n})| \lesssim_Q \prod_{j=0}^n \mu_j(F_{j,k_j})^{1/q_j}, \quad (2.16)$$

uz povećanje implicitne konstante na desnoj strani od (2.9) najviše 4^{n+1} puta. Variranjem točke $Q \in \mathcal{Q}$ i kombiniranjem (2.13), (2.15), (2.16) zaključujemo

$$\begin{aligned} |\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| &\lesssim_{\mathcal{Q}} \sum_{k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{j=0}^n \beta_{j,k_j} \right) \left(\min_{Q \in \mathcal{Q}} \prod_{j=0}^n 2^{\frac{k_j}{q_j}} \right) \\ &= \sum_{k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} \min_{Q \in \mathcal{Q}} 2^{\sum_{j=0}^n (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}) k_j} \prod_{j=0}^n \beta_{j,k_j} 2^{\frac{k_j}{p_j}}. \end{aligned}$$

Ako još provjerimo da

$$\kappa(k_0, k_1, \dots, k_n) := \min_{Q \in \mathcal{Q}} 2^{\sum_{j=0}^n (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}) k_j}$$

zadovoljava uvjet (2.11), tada će iz leme 2.7 i nejednakosti za koeficijente (2.14) slijediti jaka ocjena tipa P za formu Λ .

Zbog simetrije je dovoljno pokazati

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \kappa(l, k_1, \dots, k_n) \lesssim_{P, \mathcal{Q}, \varepsilon} 1 \quad (2.17)$$

za svaki $l \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem formule za hiperravninu $\mathcal{H}$ slijedi

$$\left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_0} \right) l + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} \right) k_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} \right) \left(k_j - \frac{\tau_j}{\tau_0} l \right).$$

Rastavit ćemo n -terostruku sumu na 2^n dijelova, ovisno o tome je li $k_j \leq \frac{\tau_j}{\tau_0} l$ ili $k_j > \frac{\tau_j}{\tau_0} l$ za svaki pojedini indeks j . Bez smanjenja općenitosti neka je prvi slučaj ispunjen za $j = 1, \dots, s$, a drugi za $j = s+1, \dots, n$. Odaberimo $Q \in \mathcal{Q}$ tako da je

$$\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} = \begin{cases} \varepsilon & \text{za } j = 1, \dots, s, \\ -\varepsilon & \text{za } j = s+1, \dots, n. \end{cases}$$

Odgovarajući dio sume iz (2.17) je tada ocijenjen sa

$$\prod_{j=1}^s \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{Z} \\ k_j \leq \frac{\tau_j}{\tau_0} l}} 2^{\varepsilon(k_j - \frac{\tau_j}{\tau_0} l)} \prod_{j=s+1}^n \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{Z} \\ k_j > \frac{\tau_j}{\tau_0} l}} 2^{-\varepsilon(k_j - \frac{\tau_j}{\tau_0} l)}.$$

Na taj smo način dobili produkt od n geometrijskih redova; početni član svakog je najviše 1, a svima im je kvocijent $2^{-\varepsilon}$. Dakle, posljednji izraz je najviše

$$(1 + 2^{-\varepsilon} + 2^{-2\varepsilon} + \dots)^n = \frac{1}{(1 - 2^{-\varepsilon})^n} \lesssim_{n,\varepsilon} 1. \quad \square$$

* * *

Bilo nam je praktično raditi s formama koje su definirane samo na jednostavnim funkcijama, dok u praksi često želimo dobiti ocjene koje vrijede za sve izmjerive funkcije. Želimo naglasiti da to nipošto ne smanjuje općenitost i primjenjivost interpolacijskog argumenta, jer konkretne forme obično zadovoljavaju barem nekakvu vrstu neprekidnosti koja omogućava aproksimaciju jednostavnim funkcijama. U narednoj napomeni ćemo dati tri takva argumenta, koji u raznim situacijama automatski pojačavaju zaključak teorema 2.8. U kasnijim poglavljima ćemo često takva rezoniranja podrazumijevati bez posebnog isticanja.

Napomena 2.9. (a) Ponekad o formi Λ na koju želimo primijeniti interpolaciju imamo više podataka, npr. znamo da je Λ definirana i ograničena na Kartezijevom produktu cijelih Lebesgueovih prostora $\prod_{j=0}^n L^{q_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ za barem jedan izbor eksponenata $q_0, \dots, q_n \in [1, \infty)$ te da je čak multilinearna (a ne samo multisublinearna). Uspijemo li iskoristiti realnu interpolaciju, za neki raspon eksponenata $p_0, \dots, p_n \in [1, \infty]$ ćemo zaključiti da je jaka ocjena (2.8) ispunjena, ali samo za funkcije $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, \dots, n$. Obzirom da je Λ inicijalno bila definirana na većem prostoru, željeli bismo raspolagati istom ocjenom za sve funkcije $f_j \in L^{q_j}$; $j = 0, \dots, n$. (Zapravo, zanimljive su jedino $f_j \in L^{q_j} \cap L^{p_j}$, jer je inače desna strana u (2.8) beskonačna.) To doista možemo, a za dokaz naprosto treba iskoristiti neprekidnost od Λ na $\prod_{j=0}^n L^{q_j}$ te gustoću od $\mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ u $L^{q_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$.

(b) Isti zaključak kao u (a) vrijedi i za sublinearnu formu

$$\Lambda: \prod_{j=0}^n \mathcal{M}^+(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \rightarrow [0, +\infty]$$

kod koje (umjesto ograničenosti) zahtijevamo svojevrsnu “monotonu neprekidnost” u smislu da za svaki $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ vrijedi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, f_{j,k}, f_{j+1}, \dots, f_n) = \Lambda(f_0, \dots, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, \dots, f_n)$$

kad god je $(f_{j,k})_{k=1}^\infty$ rastući niz u $\mathcal{M}^+(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ koji po točkama konvergira prema f_j .

Kao primjer promotrimo formu (2.7) koja je upravo tog tipa ako se ograničimo na funkcije $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$. Naime, ukoliko je $(f_k)_{k=1}^\infty$ rastući niz u $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ koji μ_j -g.s. konvergira prema f , tada zahvaljujući mogućoj zamjeni $\lim_{k \rightarrow \infty}$ sa $\sup_{k \in \mathbb{N}}$ i teoremu o monotonj konvergenciji za fiksirani $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f_k(y) dy &= \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f_k(y) dy \\ &= \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f(y) dy \end{aligned}$$

pa još jednom primjenom teorema o monotonij konvergenciji dobivamo

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda(f_k, g) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f_k(y) dy \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f(y) dy \right) g(x) dx = \Lambda(f, g).\end{aligned}$$

Još lakše se provjeri isti uvjet u drugoj koordinati. Ako na kraju želimo neku ocjenu proširiti na kompleksne funkcije f i g , onda jedino trebamo primijetiti $\Lambda(f, g) \leq \Lambda(|f|, |g|)$.

Još jedan takav primjer su tzv. *pozitivne forme* oblika

$$\Lambda(f_0, \dots, f_n) := \int_{\mathbb{X}_0 \times \dots \times \mathbb{X}_n} K(x_0, \dots, x_n) f_0(x_0) \cdots f_n(x_n) d(\mu_0 \times \dots \times \mu_n)(x_0, \dots, x_n),$$

pri čemu je funkcija $K: \mathbb{X}_0 \times \dots \times \mathbb{X}_n \rightarrow [0, +\infty]$ izmjeriva u paru σ -algebri $\mathcal{X}_0 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ i $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Ovdje dodatno pretpostavljamo da su prostori mjera σ -konačni, kako bismo mogli koristiti Fubini³-Tonellijev⁴ teorem o integriranju u odnosu na produktnu mjeru:

$$\Lambda(f_0, \dots, f_n) = \int_{\mathbb{X}_0} \cdots \left(\int_{\mathbb{X}_n} K(x_0, \dots, x_n) f_0(x_0) d\mu_0(x_0) \right) \cdots f_n(x_n) d\mu_n(x_n).$$

(c) U iskazu teorema 2.8 smo naglasili o čemu ovise implicitne konstante za ocjene jakog tipa. Posebno primijetimo da one ne zavise o samoj multisublinearnoj formi. U praksi je ponekad forma Λ dana kao limes $\lim_{r \rightarrow 0^+} \Lambda_r$ ili supremum $\sup_{r > 0} |\Lambda_r|$ “jednostavnijih” formi Λ_r , koje zadovoljavaju restringirane ocjene s istim konstantama (neovisnima o r). Obično je svaka od formi Λ_r nekog od gornja dva tipa pa na nju možemo primijeniti i interpolaciju i aproksimacijske argumente. Puštanjem $r \rightarrow 0^+$ ili uzimanjem supremuma potom dobivamo ocjene i za formu Λ . Nekoliko primjera ovog načina zaključivanja ćemo imati u kasnijim poglavljima; usporedite i s napomenom nakon korolara 2.16.

Dajmo jedan jednostavni primjer na kojem ćemo efektno ilustrirati prednosti testiranja restringirane ograničenosti i korištenja realne interpolacije.

Primjer 2.10. *Hardyjeve operator* je definiran formulom

$$(Tf)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt; \quad f \in L^1_{\text{lok}}(\langle 0, +\infty \rangle), \quad x \in \langle 0, +\infty \rangle. \quad (2.18)$$

Dokažimo da je on ograničen na $L^p(\langle 0, +\infty \rangle)$ za svaki $p \in \langle 1, +\infty \rangle$, ali nije ograničen na $L^1(\langle 0, +\infty \rangle)$.

Dokaz. Ograničenost na $L^\infty(\langle 0, +\infty \rangle)$ je očigledna. Za eksponente $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ zapravo trebamo pokazati da je bisublinearna forma

$$\Lambda(f, g) := \int_0^{+\infty} \int_0^x \frac{1}{x} |f(t)| |g(x)| dt dx, \quad (2.19)$$

³Guido Fubini (1879–1943), talijanski matematičar.

⁴Leonida Tonelli (1885–1946), talijanski matematičar.

koja dominira $\int_{\langle 0, +\infty \rangle} |(Tf)(x)| |g(x)| dx$, jakog tipa $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$, a zbog teorema 2.8 je ustvari dovoljno provjeriti da je Λ restringiranog tipa $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$ za svaki takav p .

Uzmimo proizvoljne izmjerive skupove $F, G \subseteq \langle 0, +\infty \rangle$ koji imaju konačnu i strogo pozitivnu Lebesgueovu mjeru. Zapišemo li

$$\Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) = \int_F \left(\int_{G \cap [t, +\infty)} \frac{dx}{x} \right) dt$$

i primijetimo da je podintegralna funkcija $t \mapsto \int_{G \cap [t, +\infty)} \frac{dx}{x}$ padajuća, možemo iskoristiti zadatak 2.6. Na taj način dobivamo

$$\Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) \leq \int_{\langle 0, |F| \rangle} \left(\int_{G \cap [t, +\infty)} \frac{dx}{x} \right) dt = \int_G \frac{\min\{|F|, x\}}{x} dx.$$

Sada pak uočimo da je funkcija $x \mapsto \frac{\min\{|F|, x\}}{x}$ također padajuća pa opet po zadatku 2.6 imamo

$$\Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) \leq \int_{\langle 0, |G| \rangle} \frac{\min\{|F|, x\}}{x} dx,$$

a računanje integrala s desne strane daje

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) &\leq |G| && \text{za } |F| \geq |G|, \\ \Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) &\leq |F| + |F| \ln(|G|/|F|) && \text{za } |F| < |G|. \end{aligned}$$

Korištenjem poznate nejednakosti $\ln s \leq s - 1$ za $s > 0$ možemo ocijeniti

$$|F| + |F| \ln \frac{|G|}{|F|} = |F| + p'|F| \ln \frac{|G|^{1/p'}}{|F|^{1/p'}} \leq p'|F|^{1/p'} |G|^{1/p'}$$

pa je doista $\Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) \lesssim_p |F|^{1/p} |G|^{1/p'}$ za svaki $p \in \langle 1, +\infty \rangle$.

Što se tiče neograničenosti na L^1 , promotrimo funkcije $f_n(x) := \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1, n]}(x)$; $n \in \mathbb{N}$. Za $x \in [1, n]$ računamo

$$(Tf_n)(x) = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{\ln x}{x},$$

tako da je

$$\|Tf_n\|_{L^1} \geq \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln n)^2.$$

S druge strane imamo $\|f_n\|_{L^1} = \ln n$, a nejednakost $\frac{1}{2} (\ln n)^2 \lesssim \ln n$ je lako opovrgnuti dijeljenjem s desnom stranom i puštanjem $n \rightarrow \infty$. $\square$

Naravno, omeđenost Hardyjevog operatora nije težak rezultat pa su mogući i razni direktni dokazi; vidjeti zadatak 2.7.

Nešto općenitije i primjenjivije su sljedeće posljedice realne interpolacije. Najprije navedimo jednu karakterizaciju slabe L^p norme funkcije $f \geq 0$ u terminima integrala njenih produkata s karakterističnim funkcijama $\mathbb{1}_E$. U nekom smislu će ta karakterizacija biti analogon leme 2.3.

Lema 2.11. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljni prostor mjere. Za svaki eksponent $p \in \langle 1, \infty \rangle$, svaku $\mathcal{X}$ -izmjerivu funkciju $f: \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty]$ i svaki $E \in \mathcal{X}$ vrijedi*

$$\int_E f d\mu \lesssim_p \|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \mu(E)^{1/p'}. \quad (2.20)$$

Ako je prostor mjere semikonačan, tada štoviše imamo

$$\|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \sim_p \sup \left\{ \mu(E)^{-\frac{1}{p'}} \int_E f d\mu : E \in \mathcal{X}, 0 < \mu(E) < +\infty \right\}.$$

Usput primijetimo da se (2.20) može još “logičnije” zapisati

$$\int_{\mathbb{X}} f \mathbb{1}_E d\mu \lesssim_p \|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} \|\mathbb{1}_E\|_{L^{p'}},$$

čime donekle slični na Hölderovu nejednakost. Osim toga pripomenimo da ocjena tipa (2.20) nije moguća za $p = 1$. To pokazuje primjer $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) = (\langle 0, +\infty \rangle, \mathcal{B}(\langle 0, +\infty \rangle), \lambda)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $E = \langle 0, 1 \rangle$, kod kojeg imamo $\|f\|_{L^1_{\text{slabi}}} = 1$, ali je lijeva strana beskonačna.

Dokaz. Najprije dokažimo ocjenu (2.20) za $1 < p < \infty$. Fiksirajmo skup $E \in \mathcal{X}$ takav da je $0 < \mu(E) < +\infty$. Primijetimo da je ta nejednakost homogena i u funkciji f i u mjeri μ . Naime, ako zamijenimo mjeru μ njenim višekratnikom $c\mu$ za neki $c > 0$, tada se $\|f\|_{L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)}$ poveća $c^{1/p}$ puta, dok se $\mu(E)^{1/p'}$ poveća $c^{1/p'}$ puta. To ukupno množi desnu stranu sa c , a i lijeva strana se poveća s istim faktorom. Homogenost u f je trivijalna. Zato smijemo normalizirati $\|f\|_{L^p_{\text{slabi}}} = 1$ i $\mu(E) = 1$. Skup $\{f = +\infty\}$ ima mjeru 0, a skup $\{f = 0\}$ možemo ignorirati kod ocjenjivanja integrala $\int_E f d\mu$. Imamo

$$E \cap \{0 < f < +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (E \cap \{2^k < f \leq 2^{k+1}\}),$$

a po definiciji slabe L^p norme je $\mu(\{f > 2^k\}) \leq 2^{-pk}$. Stoga možemo ocijeniti

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{E \cap \{2^k < f \leq 2^{k+1}\}} f d\mu \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k+1} \underbrace{\min\{\mu(E), 2^{-pk}\}}_{=1} \\ &= 2 \sum_{k=-1}^{-\infty} 2^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(p-1)k} \lesssim_p 1. \end{aligned}$$

Ako je pak $p = \infty$, onda je po definiciji $\|f\|_{L^\infty_{\text{slabi}}} = \|f\|_{L^\infty}$ pa je nejednakost trivijalna.

Za dokaz druge tvrdnje u slučaju $p < \infty$ je dovoljno još dokazati ocjenu

$$\sup_{\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle} \alpha \mu(\{f > \alpha\})^{1/p} \leq \sup_{\substack{E \in \mathcal{X} \\ 0 < \mu(E) < +\infty}} \mu(E)^{-1/p'} \int_E f d\mu. \quad (2.21)$$

Fiksirajmo $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ takav da je $\mu(\{f > \alpha\}) > 0$ i definirajmo

$$\beta := \sup \{ \mu(E) : E \in \mathcal{X}, E \subseteq \{f > \alpha\}, \mu(E) < +\infty \}.$$

Po definiciji supremuma postoji niz $(E_n)_{n=1}^\infty$ izmjerivih podskupova od $\{f > \alpha\}$ takvih da je $\mu(E_n) < +\infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \beta$.

Tvrdimo da je $\beta = \mu(\{f > \alpha\})$. To je svakako očigledno kada je $\mu(\{f > \alpha\}) < +\infty$ ili $\beta = +\infty$ pa jedino trebamo dobiti kontradikciju u slučaju $\mu(\{f > \alpha\}) = +\infty$, $\beta < +\infty$. Za uniju $E_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ zbog monotonosti mjere svakako mora vrijediti $\mu(E_\infty) \geq \beta$. S druge strane, za svaki $N \in \mathbb{N}$ je $\bigcup_{n=1}^N E_n$ izmjerivi podskup od $\{f > \alpha\}$ konačne mjere pa imamo

$$\mu(E_\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^N E_n\right)}_{\leq \beta} \leq \beta.$$

Prema tome je $\mu(E_\infty) = \beta < +\infty$ i posljedično $\mu(\{f > \alpha\} \setminus E_\infty) = +\infty$. Zbog semikonačnosti mjere μ postoji skup $F \in \mathcal{X}$ takav da je $F \subseteq \{f > \alpha\} \setminus E_\infty$ i $0 < \mu(F) < +\infty$. Za skup $E_\infty \cup F$ vrijedi $E_\infty \cup F \in \mathcal{X}$, $E_\infty \cup F \subseteq \{f > \alpha\}$ i $\beta < \mu(E_\infty \cup F) < +\infty$, što je u kontradikciji s definicijom od β .

Za dovoljno velike n da je $0 < \mu(E_n) < +\infty$ naprosto iz $E_n \subseteq \{f > \alpha\}$ slijedi

$$\int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \alpha d\mu = \alpha \mu(E_n),$$

što se može zapisati

$$\alpha \mu(E_n)^{1/p} \leq \mu(E_n)^{-1/p'} \int_{E_n} f d\mu \leq \sup_{\substack{E \in \mathcal{X} \\ 0 < \mu(E) < +\infty}} \mu(E)^{-1/p'} \int_E f d\mu.$$

Puštanjem $n \rightarrow \infty$ lijeva strana konvergira prema $\alpha \beta^{1/p} = \alpha \mu(\{f > \alpha\})^{1/p}$ i to završava dokaz od (2.21).

U slučaju $p = \infty$ umjesto (2.21) trebamo

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sup_{\substack{E \in \mathcal{X} \\ 0 < \mu(E) < +\infty}} \mu(E)^{-1} \int_E f d\mu.$$

Označimo desnu stranu s γ i pretpostavimo $\gamma < +\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da je $\mu(\{f > \gamma + \varepsilon\}) = 0$. U protivnom bi zbog semikonačnosti mjere μ postojao $E \in \mathcal{X}$ takav da je $E \subseteq \{f > \gamma + \varepsilon\}$ i $0 < \mu(E) < +\infty$ pa bismo s jedne strane po definiciji od γ imali $\int_E f d\mu \leq \gamma \mu(E)$, a s druge strane bi bilo

$$\int_E f d\mu \geq \int_E (\gamma + \varepsilon) d\mu \geq (\gamma + \varepsilon) \mu(E) > \gamma \mu(E).$$

Zbog proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$ zaključujemo $\mu(\{f > \gamma\}) = 0$, tj. $\|f\|_{L^\infty} \leq \gamma$. $\square$

Korolar 2.12. (Schurov⁵ test slabog tipa) *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ dva σ -konačna prostora mjera i pretpostavimo da je $K: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija izmjeriva u paru*

⁵Issai Schur (1875–1941), njemački matematičar.

$(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ koja zadovoljava

$$\|K(x, \cdot)\|_{L^{q'}_{\text{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)} \lesssim_q 1 \quad \text{za } \mu\text{-g.s. } x \in \mathbb{X},$$

$$\|K(\cdot, y)\|_{L^{p'}_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \lesssim_p 1 \quad \text{za } \nu\text{-g.s. } y \in \mathbb{Y},$$

pri čemu su p, q eksponenti takvi da je $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Tada je formulom

$$\Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} K(x, y) f(x) g(y) d(\mu \times \nu)(x, y)$$

dobro definirana bilinearna forma na $L^{p_\theta}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \times L^{q_\theta}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ za koju vrijedi

$$|\Lambda(f, g)| \lesssim_{p, q, \theta} \|f\|_{L^{p_\theta}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \|g\|_{L^{q_\theta}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)}$$

za svaki $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ i eksponente p_θ, q_θ definirane sa $p_\theta = \frac{p}{p-(p-1)\theta}$, $q_\theta = \frac{q}{1+(q-1)\theta}$, tj. ekvivalentno određene sa

$$1 < p_\theta, q_\theta < \infty, \quad \frac{1}{q' p_\theta} + \frac{1}{p' q_\theta} = 1 - \frac{1}{pq}.$$

Ovdje nam $K(x, \cdot)$ označava funkciju dobivenu fiksiranjem prve varijable, tj. funkciju $y \mapsto K(x, y)$, te slično tumačimo $K(\cdot, y)$.

Dokaz. Ako označimo $p_0 = 1$, $p_1 = p$, $q_0 = q$, $q_1 = 1$, tada za svaki $0 < \theta < 1$ imamo

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Kao u napomeni 2.9 promatramo bisublinearnu formu

$$\tilde{\Lambda}(f, g) := \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} |K(x, y)| |f(x)| |g(y)| d(\mu \times \nu)(x, y).$$

Zbog teorema 2.8 je jedino potrebno provjeriti da je $\tilde{\Lambda}$ restringiranog tipa $(1, \frac{1}{q})$ i $(\frac{1}{p}, 1)$. Naime, ovdje je hiperravnina $\mathcal{H}$ zapravo pravac koji prolazi tim dvjema točkama, prikazan na slici 2.1.

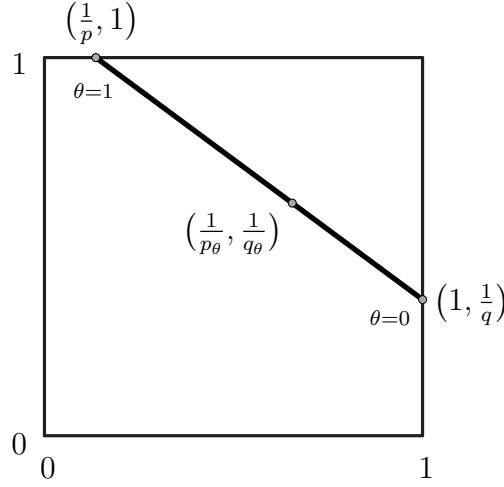
Uzmimo skupove $F \in \mathcal{X}$ i $G \in \mathcal{Y}$ takve da je $\mu(F) < +\infty$, $\nu(G) < +\infty$. Korištenjem nejednakosti (2.20) za funkciju $|K(x, \cdot)|$ i prve pretpostavke na K dobivamo

$$\int_{\mathbb{Y}} |K(x, y)| \mathbb{1}_G(y) d\nu(y) \leq \|K(x, \cdot)\|_{L^{q'}_{\text{slabi}}} \nu(G)^{1/q} \lesssim_q \nu(G)^{1/q}$$

za μ -g.s. $x \in \mathbb{X}$, a množenje s $\mathbb{1}_F(x)$ i integriranje po x zajedno s Fubini-Tonellijevim teoremom daju

$$\tilde{\Lambda}(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) = \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} |K(x, y)| \mathbb{1}_G(y) d\nu(y) \right) \mathbb{1}_F(x) d\mu(x) \lesssim_q \mu(F) \nu(G)^{1/q}.$$

To upravo znači da je $\tilde{\Lambda}$ restringiranog tipa $(1, \frac{1}{q})$. Analogno se korištenjem druge pretpostavke na K pokazuje da je $\tilde{\Lambda}$ i restringiranog tipa $(\frac{1}{p}, 1)$. $\square$



Slika 2.1: Raspon eksponenata iz korolara 2.12.

Ponekad želimo interpolirati slabe L^p ocjene za sami operator i to nam opet omogućuje kombinacija teorema 2.8 i leme 2.11. Formulirajmo jedan takav rezultat koji je varijanta interpolacijskih teorema iz klasičnih udžbenika [SW71] i [Fol99]. Kažemo da je operator T *sublinearan* ako za svaki skalar α i za svake funkcije iz domene f i g vrijedi

$$|T(\alpha f)| = |\alpha||Tf| \quad \text{i} \quad |T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg|.$$

Korolar 2.13. (Marcinkiewiczov teorem interpolacije za sublinearni operator) *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ prostori mjera i neka su $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ eksponenti takvi da je $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. Neka je $T: \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ sublinearni operator takav da vrijedi*

$$\|T\mathbb{1}_F\|_{L_{\text{slabi}}^{q_0}} \lesssim_{p_0, q_0} \|\mathbb{1}_F\|_{L^{p_0}} \quad \text{i} \quad \|T\mathbb{1}_F\|_{L_{\text{slabi}}^{q_1}} \lesssim_{p_1, q_1} \|\mathbb{1}_F\|_{L^{p_1}}$$

za svaki skup $F \in \mathcal{Y}$ konačne mjere ν . Tada T zadovoljava i ocjenu

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \lesssim_{p_0, p_1, q_0, q_1, \theta} \|f\|_{L^{p_\theta}}$$

za svaku $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$, svaki $\theta \in (0, 1)$ i eksponente p_θ, q_θ određene sa $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Dokaz. U slučaju $\min\{q_0, q_1\} > 1$ dokaz je direktna posljedica prethodnih razmatranja. Naime, radi leme 2.11 i pretpostavki na T imamo

$$\int_{\mathbb{X}} |T\mathbb{1}_F| \mathbb{1}_G d\mu \lesssim_{q_i} \|T\mathbb{1}_F\|_{L_{\text{slabi}}^{q_i}} \mu(G)^{1/q'_i} \lesssim_{p_i, q_i} \nu(F)^{1/p_i} \mu(G)^{1/q'_i}; \quad i = 0, 1$$

pa je pripadna bisublinearna forma

$$\Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{X}} |Tf| |g| d\mu$$

restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q'_0})$ i $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q'_1})$. Primijetimo

$$\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{q'_\theta} = 1 + (1 - \theta) \underbrace{\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q'_0} \right)}_{\geq 0} + \theta \underbrace{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q'_1} \right)}_{\geq 0} \geq 1.$$

Iz teorema 2.8 znamo da je Λ jakog tipa $(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q'_\theta})$ za sve $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$, a lema 2.3 tada daje traženu ocjenu za T .

Pretpostavimo sada da je recimo $q_0 = 1$, što znači da je $1 < q_1 \leq \infty$. Dovoljno nam je pokazati da za svaki $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ i svaki $F \in \mathcal{Y}$ konačne mjere vrijedi

$$\|T\mathbb{1}_F\|_{L^{q_\theta}_{\text{slabi}}} \lesssim_{p_0, p_1, q_1} \|\mathbb{1}_F\|_{L^{p_\theta}},$$

tj.

$$\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_\theta} \lesssim_{p_0, p_1, q_1} \alpha^{-1} \nu(F)^{1/p_\theta} \quad \text{za } \alpha > 0. \quad (2.22)$$

Nakon toga ćemo moći primijeniti interpolaciju kao u prethodnom slučaju, ali na točke $(\frac{1}{p_\delta}, \frac{1}{q'_\delta})$ i $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q'_1})$, pri čemu je $0 < \delta < 1$ po volji blizu nuli.

Ako je $q_1 < \infty$, tada za dokaz od (2.22) naprosto iskoristimo pretpostavke na T :

$$\begin{aligned} \mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_\theta} &= (\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_0})^{1-\theta} (\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_1})^\theta \\ &\lesssim_{p_0, p_1, q_1} (\alpha^{-1} \nu(F)^{1/p_0})^{1-\theta} (\alpha^{-1} \nu(F)^{1/p_1})^\theta = \alpha^{-1} \nu(F)^{1/p_\theta}. \end{aligned}$$

Ako je pak $q_1 = \infty$, tada je (2.22) netrivialno samo za $\alpha < \|T\mathbb{1}_F\|_{L^\infty}$, kada imamo:

$$\begin{aligned} \mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_\theta} &= (\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_0})^{1-\theta} \lesssim_{p_0} (\alpha^{-1} \nu(F)^{1/p_0})^{1-\theta} \\ &= \alpha^{-1} \nu(F)^{(1-\theta)/p_0} \alpha^\theta \leq \alpha^{-1} \nu(F)^{(1-\theta)/p_0} \|T\mathbb{1}_F\|_{L^\infty}^\theta \lesssim_{p_1} \alpha^{-1} \nu(F)^{(1-\theta)/p_0} \nu(F)^{\theta/p_1}. \quad \square \end{aligned}$$

Napomena 2.14. Slično kao u napomeni 2.9 istaknimo da, ako za neke $p, q \in [1, \infty)$ zapravo imamo linearni operator $T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^q_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ koji zadovoljava slabu ocjenu

$$\|Tf\|_{L^q_{\text{slabi}}} \lesssim_{p, q} \|f\|_{L^p}; \quad \text{za } f \in L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \quad (2.23)$$

te ako interpolacijom kao u korolaru 2.13 zaključimo da još vrijedi

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \lesssim_{p_\theta, q_\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}}; \quad \text{za } f \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu), \quad (2.24)$$

tada se posljednja ocjena automatski proširuje na sve $f \in L^p \cap L^{p_\theta}$. Naime, za uzmemo li niz $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ funkcija iz $\mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ koji ν -g.s. konvergira prema nekoj $g \in L^p \cap L^{p_\theta}$ i zadovoljava $|\varphi_k| \leq |g|$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada po teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo $\varphi_k \rightarrow g$ u normama od L^p i L^{p_θ} . Iz (2.24) slijedi da je niz $(T\varphi_k)_{k=1}^\infty$ Cauchyjev u prostoru L^{q_θ} pa onda i konvergira prema nekoj funkciji $h \in L^{q_\theta}$. Zbog (1.14) ta ista kongvergencija mora vrijediti i po mjeri, tj.

$$(\forall \alpha > 0) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{|T\varphi_k - h| > \alpha\}) = 0 \right).$$

S druge strane, radi ocjene (2.23) imamo

$$(\forall \alpha > 0) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{|T\varphi_k - Tg| > \alpha\}) = 0 \right).$$

Odavde lako slijedi $Tg = h$ μ -g.s. pa je

$$\|Tg\|_{L^{q_\theta}} = \|h\|_{L^{q_\theta}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T\varphi_k\|_{L^{q_\theta}} \lesssim_{p_\theta, q_\theta} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_{L^{p_\theta}} = \|g\|_{L^{p_\theta}}.$$

* * *

U dokazu korolara 2.13 vidi se jedan mali nedostatak naše interpolacijske metode. Eksponenti q_0 i q_1 su morali biti strogo veći od 1 kako bismo mogli primijeniti lemu 2.11, a u ekstremnom slučaju $\min\{q_0, q_1\} = 1$ smo se morali snaći i “pomaknuti” rubne točke interpolacije malo prema unutrašnjosti kvadrata $[0, 1]^2$. Primjer Hardyjevog operatora pokazuje da je to doista bilo nužno. Kasnije ćemo vidjeti da on slabo L^1 ograničen, ali već sada nam je jasno da pripadna forma (2.19) nije restringiranog tipa $(1, 0)$. Naime,

$$\Lambda(\mathbb{1}_{\langle 0, 1 \rangle}, \mathbb{1}_{\langle 1, n \rangle}) = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

ne može biti dominirano sa

$$|\langle 0, 1 \rangle|^1 |\langle 1, n \rangle|^0 = 1.$$

Iz toga možemo zaključiti kako teorem 2.8 odlično funkcionira kada interpoliramo ocjene za eksponente u otvorenom intervalu $\langle 1, \infty \rangle$, ali nije uvijek lako primjenjiv kada nam pretpostavke garantiraju npr. samo slabe L^1 ocjene. Pokazat ćemo zato još jedan trik kojim se može nadomjestiti spomenuti nedostatak, tj. lema 2.11 za eksponent $p = 1$.

Lema 2.15. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljni prostor mjere. Za svaku $\mathcal{X}$ -izmjerivu funkciju $f: \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty]$ i svaki $E \in \mathcal{X}$ takav da je $\mu(E) < +\infty$ postoji skup $\tilde{E} \in \mathcal{X}$ sa svojstvima $\tilde{E} \subseteq E$, $\mu(\tilde{E}) \geq \frac{1}{2}\mu(E)$ i*

$$\int_{\tilde{E}} f d\mu \leq 2\|f\|_{L^1_{\text{slabi}}}. \quad (2.25)$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti $0 < \mu(E) < +\infty$ i $0 < \|f\|_{L^1_{\text{slabi}}} < +\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Označimo $\alpha := 2\mu(E)^{-1}\|f\|_{L^1_{\text{slabi}}}$ i stavimo $\tilde{E} := E \setminus \{f > \alpha\}$. Po definiciji slabe L^1 norme je

$$\mu(\{f > \alpha\}) \leq \alpha^{-1}\|f\|_{L^1_{\text{slabi}}} = \frac{1}{2}\mu(E)$$

pa zbilja vrijedi $\mu(\tilde{E}) \geq \frac{1}{2}\mu(E)$. Konačno, zbog $\tilde{E} \subseteq \{f \leq \alpha\}$ imamo

$$\int_{\tilde{E}} f d\mu \leq \alpha\mu(\tilde{E}) \leq \alpha\mu(E) = 2\|f\|_{L^1_{\text{slabi}}}. \quad \square$$

Posljednja lema je gotovo trivijalna, ali ipak ima zanimljive posljedice. Neka su $(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \dots, n$ neki σ -konačni prostori mjera i pretpostavimo da je $K: \prod_{j=0}^n \mathbb{X}_j \rightarrow \mathbb{C}$ ograničena $(\prod_{j=0}^n \mathcal{X}_j)$ -izmjeriva funkcija koja iščezava izvan Kartezijevog produkta skupova konačnih mjera. Tada su dobro definirani $(n+1)$ -linearna forma

$$\Lambda: \prod_{j=0}^n \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n) := \int_{\prod_{j=0}^n \mathbb{X}_j} K(x_0, x_1, \dots, x_n) \prod_{j=0}^n f_j(x_j) \prod_{j=0}^n d\mu_j(x_j)$$

i pripadni n -linearni operatori $T_0, T_1, \dots, T_n$ takvi da vrijedi

$$\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n) = \int_{\mathbb{X}_j} T_j(f_0, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_n) f_j d\mu_j; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Kažemo da su operatori $T_0, T_1, \dots, T_n$ međusobno adjungirani.

Korolar 2.16. *Ako operatori $T_0, T_1, \dots, T_n$ zadovoljavaju ocjene*

$$\|T_j(\mathbb{1}_{E_0}, \dots, \mathbb{1}_{E_{j-1}}, \mathbb{1}_{E_{j+1}}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})\|_{L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)} \lesssim \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \mu_k(E_k)^{1/n} \quad (2.26)$$

za $j = 0, 1, \dots, n$ i za svake skupove konačnih mjera $E_0, E_1, \dots, E_n$, tada vrijedi

$$|\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| \lesssim_{p_0, \dots, p_n} \prod_{j=0}^n \|f_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)}$$

za svake eksponente $p_0, \dots, p_n \in \langle n, \infty \rangle$, $\sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} = 1$ i svake funkcije $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \dots, n$.

Zahtjevi na K su samo tehničke prirode i u iskazu korolara se nigdje eksplicitno ne spominje $\|K\|_{L^\infty}$ ili mjera od $\{K \neq 0\}$. U praksi se operatorima s ovakvim jezgrama zapravo samo aproksimiraju zanimljiviji operatori, tako da konstante ne smiju kvantitativno ovisiti o dodatnim pretpostavkama na K . Dualizacijom jake ocjene za Λ se naravno odmah dobivaju i odgovarajuće L^p ocjene za $T_0, T_1, \dots, T_n$.

Dokaz. Zbog teorema 2.8 je dovoljno dokazati da je Λ restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \dots, \frac{1}{p_n})$ za eksponente kao iz iskaza i to s implicitnom konstantom koja ovisi samo o eksponentima i o konstantama iz (2.26). Fiksirajmo eksponente i definirajmo

$$C := \sup \left\{ \frac{|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})|}{\prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{1/p_j}} : E_j \in \mathcal{X}_j, \quad 0 < \mu_j(E_j) < +\infty; \quad j = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

Dakle, C je najbolja moguća konstanta za restringiranu ocjenu tipa $(\frac{1}{p_0}, \dots, \frac{1}{p_n})$. Radi naše pretpostavke na K i $(n+1)$ -linearnog analogona korolara 2.12 znamo da je C

konačna. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i odaberimo skupove $E_0, \dots, E_n$ tako da gornji razlomak bude veći od $C - \varepsilon$. Označimo neke moguće konstante u (2.26) sa B_j . Zapišimo

$$\left(\frac{1}{p_0}, \dots, \frac{1}{p_n}\right) = \sum_{j=0}^n \theta_j \left(\underbrace{\dots, \frac{1}{n}}_{j-1}, 0, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots}_{n-j+1}\right)$$

za neke $\theta_0, \dots, \theta_n > 0$ takve da je $\sum_{j=0}^n \theta_j = 1$. Kako je broj

$$\prod_{j=0}^n B_j^{\theta_j} \prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{1/p_j}$$

geometrijska sredina brojeva $B_j \prod_{k \neq j} \mu_k(E_k)^{1/n}$ s težinama $\theta_0, \dots, \theta_n$, zaključujemo da je veći ili jednak od barem jednog od njih, bez smanjenja općenitosti od $B_0 \prod_{k=1}^n \mu_k(E_k)^{1/n}$.

Po lemi 2.15 postoji skup $\tilde{E}_0 \in \mathcal{X}_0$ takav da je $\tilde{E}_0 \subseteq E_0$, $\mu_0(\tilde{E}_0) \geq \frac{1}{2} \mu_0(E_0)$ te

$$\begin{aligned} |\Lambda(\mathbb{1}_{\tilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})| &\leq \int_{\mathbb{X}_0} |T_0(\mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})| \mathbb{1}_{\tilde{E}_0} d\mu_0 \\ &\leq 2 |T_0(\mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})|_{L^1_{\text{slabi}}} \leq 2 B_0 \prod_{k=1}^n \mu_k(E_k)^{1/n} \leq 2 \prod_{j=0}^n B_j^{\theta_j} \prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{1/p_j}. \end{aligned}$$

S druge pak strane, po definiciji od C imamo

$$|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0 \setminus \tilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})| \leq C \mu_0(E_0 \setminus \tilde{E}_0)^{1/p_0} \prod_{j=1}^n \mu_j(E_j)^{1/p_j} \leq C 2^{-1/p_0} \prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{1/p_j}.$$

Konačno, zbog multisublinearnosti od $|\Lambda|$ imamo

$$|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})| \leq |\Lambda(\mathbb{1}_{\tilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})| + |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0 \setminus \tilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \dots, \mathbb{1}_{E_n})|,$$

što nakon dijeljenja s $\prod_{j=0}^n \mu_j(E_j)^{1/p_j}$ možemo zapisati

$$C - \varepsilon \leq 2 \prod_{j=0}^n B_j^{\theta_j} + C 2^{-1/p_0}$$

pa puštanjem $\varepsilon \rightarrow 0$ slijedi

$$C \leq 2(1 - 2^{-1/p_0})^{-1} \prod_{j=0}^n B_j^{\theta_j} \lesssim_{p_0, \dots, p_n} 1. \quad \square$$

Posebni slučaj korolara 2.16 za $n = 1$ je *Wolffov⁶ teorem interpolacije* [Wol82]. Razlog zašto taj rezultat nije bio odavno poznat leži u činjenici da isprva ne posjedujemo nikakve ocjene za eksponente u rasponu $\langle 1, \infty \rangle$ s kojima bismo mogli interpolirati dane rubne ocjene.

⁶Thomas Wolff (1954–2000), američki matematičar.

* * *

Zadatak 2.3. Neka je $1 < p < \infty$. Pokažite da je bilinearna forma

$$(f, g) \mapsto \left(\int_0^{+\infty} f(x) \frac{dx}{x^{1/p'}} \right) \left(\int_0^{+\infty} g(x) \frac{dx}{x^{1/p}} \right)$$

restringiranog, ali ne i jakog tipa $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$.

Zadatak 2.4. Uzmimo da su svi prostori mjere upravo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ i da su eksponenti $p_0, p_1, \dots, p_n \in (0, \infty]$ takvi da je $p_j < 1$ za barem jedan indeks j . Dokažite da ne postoji multisublinearna forma Λ koja je restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_n})$ i netrivialna (tj. nije identički jednaka 0).

Zadatak 2.5. Dokažite da se svaka točka iz d -dimenzionalne jedinične kocke $[0, 1]^d$ može prikazati kao konveksna kombinacija od najviše $d + 1$ njenih vrhova. (Ovo je posebni slučaj Carathéodoryjevog⁷ teorema iz konveksne geometrije.) Potom iskoristite tu tvrdnju kako biste dali drugi dokaz leme 2.6(a).

Zadatak 2.6. Neka je $\varphi: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow [0, +\infty]$ padajuća funkcija. Ako je $E \subseteq \langle 0, +\infty \rangle$ izmjerivi skup takav da je $0 < |E| < +\infty$, dokažite da vrijedi

$$\int_E \varphi(x) dx \leq \int_{\langle 0, |E| \rangle} \varphi(x) dx.$$

Zadatak 2.7.

(a) Dokažite pojačanu verziju *Hardyjeve nejednakosti* na ograničenom intervalu $[0, R]$:

$$\int_0^R \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^R |f(x)|^p \left(1 - \left(\frac{x}{R} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right) dx$$

za izmjerivu funkciju $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{C}$, $p > 1$ i $R > 0$.

(b) Puštanjem $R \rightarrow +\infty$ zaključite da Hardyjev operator (2.18) za $1 < p < \infty$ zadovoljava

$$\|Tf\|_{L^p(\langle 0, +\infty \rangle)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\langle 0, +\infty \rangle)}$$

to potom dokažite da je konstanta $\frac{p}{p-1}$ najbolja moguća, tj. da je norma od T na $L^p(\langle 0, +\infty \rangle)$ upravo jednaka $\frac{p}{p-1}$.

Zadatak 2.8. Dokažite da za $N \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i funkcije $f_1, f_2, \dots, f_N \in L^p_{\text{slabi}}$ na nekom semikonačnom prostoru mjere vrijedi

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_N\|_{L^p_{\text{slabi}}} \lesssim_p \|f_1\|_{L^p_{\text{slabi}}} + \|f_2\|_{L^p_{\text{slabi}}} + \dots + \|f_N\|_{L^p_{\text{slabi}}}.$$

Uputa: Iskoristite drugu tvrdnju leme 2.11.

Napomena: Implicitna konstanta ovisi samo o eksponentu p , ali ne i o broju funkcija N . U tom smislu se kvazinorme $\|\cdot\|_{L^p_{\text{slabi}}}$; $p > 1$ praktično ponašaju kao norme. U zadatku 1.12 smo vidjeli da takva nejednakost ne može vrijediti za $p = 1$.

⁷Constantin Carathéodory (1873–1950), grčko-njemački matematičar.

Zadatak 2.9. (*Lorentzove⁸ kvazinorme*) Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor mjere. Za $p, q \in \langle 0, \infty \rangle$ definiramo *Lorentzovu kvazinormu* $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ formulom

$$\|f\|_{L^{p,q}} := \left(\int_0^{+\infty} p\alpha^{q-1} \mu(\{|f| > \alpha\})^{q/p} d\alpha \right)^{1/q}.$$

Primijetimo da je $\|\cdot\|_{L^{p,p}} = \|\cdot\|_{L^p}$ radi formule (1.15), a također je razumno staviti $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}} := \|\cdot\|_{L^p_{\text{slabi}}}$. *Lorentzov prostor* $L^{p,q}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ definiramo kao skup svih μ -g.s. klasa funkcija za koje je $\|f\|_{L^{p,q}} < +\infty$.

(a) Dokažite da je $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ doista kvazinorma na vektorskom prostoru $L^{p,q}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.

(b) Neka su $a, b, p, q \in \langle 0, \infty \rangle$ i promotrimo funkciju

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(t) := \frac{1}{t^a (\ln t)^b} \mathbb{1}_{[e, +\infty)}(t).$$

Radi stjecanja intuicije pokažite da je $f_{a,b} \in L^{p,q}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ako i samo ako je $a > \frac{1}{p}$ ili $a = \frac{1}{p}$, $b > \frac{1}{q}$.

Napomena: Ovaj podzadatak ilustrira da je eksponent p na neki način “dominantan”, dok eksponent q čini suptilnu razliku za prostore s istim p .

(c) Dokažite da dekompozicija (2.10) iz dokaza leme 2.6 ima još i svojstvo da koeficijenti β_k zadovoljavaju

$$\|(2^{k/p} \beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^q(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} \|f\|_{L^{p,q}}$$

za $0 < p < \infty$ i $0 < q \leq \infty$.

Napomena: Ova činjenica nam omogućava da teorem 2.8 proširimo i na Lorentzove prostore, ali takvo poopćenje nećemo trebati.

(d) Dokažite *Hölderovu nejednakost za Lorentzove kvazinorme*:

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \lesssim_{p_1, p_2, q_1, q_2} \|f\|_{L^{p_1, q_1}} \|g\|_{L^{p_2, q_2}}$$

za eksponente $p, p_1, p_2 \in \langle 0, \infty \rangle$, $q, q_1, q_2 \in \langle 0, \infty \rangle$ takve da je $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ i $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

Uputa: Koristite (c) dio ovog zadatka i zadatak 1.11(a).

Zadatak 2.10. Dokažite *Yanov teorem ekstrapolacije* [Yan51]: Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ vjerojatnosni prostori i neka je $T: \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ sublinearni operator takav da vrijedi

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \lesssim \frac{1}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)}$$

za svaki $p \in \langle 1, 2 \rangle$. Dokažite da tada T zadovoljava i ocjenu

$$\|Tf\|_{L^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \lesssim \|f\|_{L \log L(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)},$$

pri čemu je $\|\cdot\|_{L \log L}$ posebni slučaj Birnbaum-Orliczove norme definiran sa

$$\|f\|_{L \log L} := \inf \left\{ a \in \langle 0, +\infty \rangle : \int_{\mathbb{Y}} \frac{|f|}{a} \ln \left(e + \frac{|f|}{a} \right) d\nu \leq 1 \right\}.$$

⁸George Lorentz (1910–2006), rusko-njemački matematičar.

2.3. Kompleksna metoda interpolacije

Do kraja poglavlja ćemo promatrati isključivo multilinearne forme

$$\Lambda: \prod_{j=0}^n \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \rightarrow \mathbb{C}$$

za proizvoljne prostore mjera.

Teorem 2.17. (*Riesz⁹-Thorin¹⁰ teorem interpolacije*) *Ako je multilinearne forma Λ jakog tipa u svim točkama nekog skupa $\mathcal{P} \subseteq [0, 1]^{n+1}$, tada je ona jakog tipa i u svim točkama njegove konveksne ljuske $\text{conv } \mathcal{P}$. Nadalje, pripadne norme $\|\Lambda\|_P$ (definirane kao najmanja moguća konstanta na desnoj strani od (2.8)) su log-konveksna funkcija u varijabli $P \in \text{conv } \mathcal{P}$.*

Primijetimo da teorem 2.17 ima često korištenu posljedicu:

$$(\forall P \in \mathcal{P})(\|\Lambda\|_P \leq C) \Rightarrow (\forall P \in \text{conv } \mathcal{P})(\|\Lambda\|_P \leq C)$$

za bilo koju konstantu $C \geq 0$.

Dokaz. Ako za točke $P_0, P_1 \in [0, 1]^{n+1}$ i $\theta \in [0, 1]$ stavimo $P_\theta = (1 - \theta)P_0 + \theta P_1$, trebamo dokazati $\|\Lambda\|_{P_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$, uz pretpostavku da je $M_i := \|\Lambda\|_{P_i} < +\infty$ za $i \in \{1, 2\}$. Smijemo pretpostaviti da $(n + 1)$ -torke P_0 i P_1 nemaju jednakih koordinata, jer inače funkcije na tim mjestima možemo fiksirati i interpolirati multilinearne formu koja ovisi o preostalim funkcijama. Posljedica toga je $P_\theta \in \langle 0, 1 \rangle^{n+1}$ za $0 < \theta < 1$. Uz to neka su $M_0, M_1 > 0$, jer je u slučaju $\min\{M_0, M_1\} = 0$ riječ o nul-formi.

Fiksirajmo $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ te neka je $P_\theta = \left(\frac{1}{p_0^{(\theta)}}, \dots, \frac{1}{p_n^{(\theta)}}\right)$ i $P_i = \left(\frac{1}{p_0^{(i)}}, \dots, \frac{1}{p_n^{(i)}}\right)$ za $i \in \{1, 2\}$. Uzmimo funkcije $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \dots, n$ i raspišimo ih kao

$$f_j = \sum_{k=1}^{M_j} \alpha_{j,k} \mathbb{1}_{E_{j,k}}$$

za $M_j \in \mathbb{N}$, disjunktne skupove $E_{j,1}, \dots, E_{j,M_j} \in \mathcal{X}_j$ i koeficijente $\alpha_{j,1}, \dots, \alpha_{j,M_j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zahvaljujući homogenosti možemo ih normalizirati $\|f_j\|_{L^{p_j^\theta}} = 1$; $j = 0, 1, \dots, n$. Označimo

$$\tau_j(z) := \frac{1-z}{p_j^{(0)}} + \frac{z}{p_j^{(1)}}; \quad z \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

potom

$$f_j^{(z)} := \sum_{k=1}^{M_j} |\alpha_{j,k}|^{\tau_j(z)/\tau_j(\theta)} \text{sgn } \alpha_{j,k} \mathbb{1}_{E_{j,k}}; \quad z \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

⁹Ovdje je opet riječ o mlađem bratu, Marcelu Rieszu.

¹⁰Olof Thorin (1912–2004), švedski matematičar.

te još

$$\Phi(z) := \frac{\Lambda(f_0^{(z)}, f_1^{(z)}, \dots, f_n^{(z)})}{M_0^{1-z} M_1^z}.$$

Zbog multilinearnosti od Λ imamo

$$\begin{aligned} \Phi(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} \sum_{k_0=1}^{M_0} \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{M_n} \left(\prod_{j=0}^n |\alpha_{j,k}|^{\tau_j(z)/\tau_j(\theta)} \right) \left(\prod_{j=0}^n \operatorname{sgn} \alpha_{j,k} \right) \\ \Lambda(\mathbb{1}_{E_{0,k_0}}, \mathbb{1}_{E_{1,k_1}}, \dots, \mathbb{1}_{E_{n,k_n}}), \end{aligned}$$

što je očigledno cijela funkcija, tj. holomorfnja funkcija na cijeloj kompleksnoj ravnini. Za $a \in \langle 0, +\infty \rangle$ i $w \in \mathbb{C}$ imamo $|a^w| = a^{\operatorname{Re} w}$ pa je

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| \leq M_0^{\operatorname{Re} z-1} M_1^{-\operatorname{Re} z} \sum_{k_0=1}^{M_0} \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{M_n} \left(\prod_{j=0}^n |\alpha_{j,k}|^{\operatorname{Re} \tau_j(z)/\tau_j(\theta)} \right) \\ |\Lambda(\mathbb{1}_{E_{0,k_0}}, \mathbb{1}_{E_{1,k_1}}, \dots, \mathbb{1}_{E_{n,k_n}})|, \end{aligned}$$

iz čega se vidi da je Φ omeđena na pruzi $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. Primijetimo da za svaki $\beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$|f_j^{(i\beta)}| = |f_j|^{\tau_j(0)/\tau_j(\theta)} = |f_j|^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(0)}}, \quad |f_j^{(1+i\beta)}| = |f_j|^{\tau_j(1)/\tau_j(\theta)} = |f_j|^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(1)}}$$

pa je po pretpostavci teorema

$$\begin{aligned} |\Phi(i\beta)| = M_0^{-1} |\Lambda(f_0^{(i\beta)}, \dots, f_n^{(i\beta)})| \leq \prod_{j=0}^n \|f_j^{(i\beta)}\|_{L^{p_j^{(0)}}} = \prod_{j=0}^n \|f_j\|_{L^{p_j^{(\theta)}}}^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(0)}} = 1, \\ |\Phi(1+i\beta)| = M_1^{-1} |\Lambda(f_0^{(1+i\beta)}, \dots, f_n^{(1+i\beta)})| \leq \prod_{j=0}^n \|f_j^{(1+i\beta)}\|_{L^{p_j^{(1)}}} = \prod_{j=0}^n \|f_j\|_{L^{p_j^{(\theta)}}}^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(1)}} = 1. \end{aligned}$$

Po principu maksimuma modula za prugu (vidjeti [Rud87] ili [Fol99]) zaključujemo da je $|\Phi(z)| \leq 1$ za svaki $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Posebno uzimajući $z = \theta$ dobivamo

$$|\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| = |\Lambda(f_0^{(\theta)}, f_1^{(\theta)}, \dots, f_n^{(\theta)})| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

a upravo to je trebalo dokazati. □

Primjer 2.18. Operacija konvolucije je za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definirana formulom

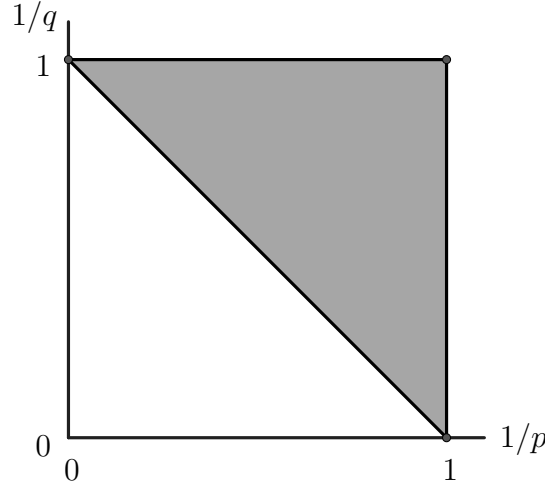
$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pokažimo da vrijedi tzv. Youngova¹¹ nejednakost:

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}, \quad (2.27)$$

kad god eksponenti $p, q, r \in [1, \infty]$ zadovoljavaju $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

¹¹William Henry Young (1863–1942), engleski matematičar.



Slika 2.2: Raspon eksponenata iz primjera 2.18.

Dokaz. Definiramo trilinearnu formu

$$\Lambda(f, g, h) := \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) h(x) dx$$

i za nju, zbog dualnosti iz odjeljka 2.1, želimo dokazati jake ocjene

$$|\Lambda(f, g, h)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^{r'}} \quad (2.28)$$

u spomenutom rasponu eksponenata. Promatramo skup svih odgovarajućih točaka $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r'})$, a na slici 2.2 smo skicirali njegovu projekciju na prve dvije koordinate, tj. na $(1/p, 1/q)$ -ravninu. Vidimo da je riječ o trokutu s vrhovima $(1, 1)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$ pa je radi teorema 2.17 dovoljno provjeriti (2.28) odnosno (2.27) u tri ekstremna slučaja.

(a) $p = 1, q = 1, r = 1$

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |g(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dx \right) |g(y)| dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

(b) $p = \infty, q = 1, r = \infty$

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_{L^\infty} |g(y)| dy = \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$$

(c) $p = 1, q = \infty, r = \infty$

Postupamo analogno kao u (b).

Time je dokaz završen. □

Naravno da se sada konvolucija po neprekidnosti proširuje na $L^p(\mathbb{R}^d) \times L^q(\mathbb{R}^d)$ za $p, q \in [1, \infty]$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$.

Primjer 2.19. Najklasičnija primjena teorema 2.17 je na L^p ocjene za *Fourierovu transformaciju*, koja je inicijalno definirana za $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ formulom

$$\hat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx; \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Ovdje $x \cdot \xi$ označava standardni skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$. Ocjenjujući $|\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx$ odmah vidimo da vrijedi

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.29)$$

Poznata tvrdnja (čiji dokaz čitatelj može naći u [Fol99] ili [SW71]) je *Plancherelov¹² identitet*,

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (2.30)$$

za svaku $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Zato možemo primjeniti kompleksnu interpolaciju na linearni operator $f \mapsto \hat{f}$ (zapravo na bilinearnu formu dobivenu dualizacijom), iz čega će slijedi tzv. *Hausdorff¹³-Youngova nejednakost*,

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.31)$$

za $p \in [1, 2]$ i $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$. Vidimo da se za svaki $p \in [1, 2]$ Fourierova transformacija $f \mapsto \hat{f}$ proširuje do ograničenog linearnog operatora na $L^p(\mathbb{R}^d)$, za kojeg zadržavamo istu oznaku.

Zanimljivo je napomenuti da konstanta 1 na desnoj strani od (2.31) nije optimalna. Za $1 < p < 2$ vrijedi *Babenko¹⁴-Becknerova¹⁵ nejednakost* [Bec75],

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \left(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} \right)^{d/2} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.32)$$

u kojoj se jednakost postiže za Gaussove¹⁶ funkcije, npr. $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, za koju nije teško izračunati $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Od literature na hrvatskom jeziku, dokaz nejednakosti (2.32) može se naći u diplomskom radu [Per15]. Poznata je i činjenica da je Fourierova transformacija injektivna te da je njezin inverz $\hat{f} \mapsto f$ dan gotovo istom formulom. Preciznije, *inverzna Fourierova transformacija* se definira integralom

$$\check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi; \quad x \in \mathbb{R}^d$$

¹²Michel Plancherel (1885–1967), švicarski matematičar.

¹³Felix Hausdorff (1868–1942), njemački matematičar.

¹⁴Ivan Konstantinovič Babenko, ruski matematičar.

¹⁵William Beckner (1941), američki matematičar.

¹⁶Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), njemački matematičar.

za $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ te je sasvim jasno da $g \mapsto \check{g}$ zadržava sva navedena svojstva. Za svaku funkciju f takvu da su $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ vrijedi *Fourierova formula inverzije*,

$$(\hat{f})^\sim = (\check{f})^\sim = f \text{ g.s.}, \quad (2.33)$$

a ista formula se po neprekidnosti proširuje npr. na $f \in L^2(\mathbb{R})$. Iz navedenoga slijedi i

$$\|f\|_{L^{p'}} \leq \left(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} \right)^{d/2} \|\hat{f}\|_{L^p}, \quad (2.34)$$

također za $1 < p < 2$.

Zanimljivo je napomenuti da nam jača ocjena (2.32) zapravo pojačava i Youngovu nejednakost za konvoluciju iz Primjera (2.18), barem u izvjesnom rasponu eksponenata. Naime, ako označimo $C_p := \left(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} \right)^{d/2}$, tada za $p, q \in \langle 1, 2 \rangle$, $r \in \langle 2, \infty \rangle$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ vrijedi

$$\|f * g\|_{L^r} \leq C_p C_q C_{r'} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (2.35)$$

Za dokaz od (2.35) trebamo poznatu formulu

$$(f * g)^\sim = \hat{f} \hat{g}, \quad (2.36)$$

koja za $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ slijedi iz

$$\begin{aligned} (f * g)^\sim(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} dx \right) g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

pri čemu su se integrali smjeli zamijeniti zahvaljujući Fubini-Tonellijevom teoremu i

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dx dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

Ako redom iskoristimo (2.34), (2.36), Hölderovu nejednakost (uz $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$) i (2.32), dobivamo

$$\|f * g\|_{L^r} \leq C_{r'} \|(f * g)^\sim\|_{L^{r'}} \leq C_{r'} \|\hat{f}\|_{L^{p'}} \|\hat{g}\|_{L^{q'}} \leq C_{r'} C_p C_q \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Pripomenimo da je konstanta na desnoj strani od (2.35) optimalna te da ista nejednakost vrijedi i za sve $p, q, r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. To je također rezultat Becknera [Bec75].

Imat ćemo još primjena kompleksne interpolacije u kasnijim poglavljima.

* * *

Zadatak 2.11. Dokažite da za kompleksne $n \times n$ matrice $A = [a_{i,j}]$ i $B = [b_{i,j}]$ vrijedi nejednakost

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j} b_{i,j}|^{2/3} \right)^{3/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \right) \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |b_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \right).$$

Zadatak 2.12. Pokažite da za $p \in \langle 1, 2 \rangle$ i $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ imamo nejednakost

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \right|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \left(\sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^p \right)^{1/p}.$$

Zadatak 2.13. (*Schurov test jakog tipa*) Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ dva σ -konačna prostora mjera i pretpostavimo da je $K: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija izmjeriva u paru $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ koja zadovoljava

$$\begin{aligned} \|K(x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)} &\leq C \quad \text{za } \mu\text{-g.s. } x \in \mathbb{X}, \\ \|K(\cdot, y)\|_{L^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} &\leq C \quad \text{za } \nu\text{-g.s. } y \in \mathbb{Y} \end{aligned}$$

za neku konstantu $C \in [0, +\infty)$. Tada je formulom

$$\Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} K(x, y) f(x) g(y) d(\mu \times \nu)(x, y)$$

dobro definirana bilinearna forma na $L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \times L^{p'}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ takva da vrijedi

$$|\Lambda(f, g)| \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)}$$

za svaki $p \in [1, \infty]$.

Zadatak 2.14. Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ vjerojatnosni prostori. *Gowersova pravokutna norma* funkcije $f \in \mathcal{M}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ je definirana sa

$$\|f\|_{\square} := \left(\int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Y}} f(x, y) \overline{f(x, y')} \overline{f(x', y)} f(x', y') d\mu(x) d\mu(x') d\nu(y) d\nu(y') \right)^{1/4}.$$

Dokažite da je doista riječ o normi i da vrijedi

$$\|f\|_{\square} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)}.$$

Uputa: Ukoliko zadatak želite riješiti interpolacijom, korisno je definirati kvadrilinearnu formu

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3, f_4) := \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Y}} f_1(x, y) f_2(x, y') f_3(x', y) f_4(x', y') d\mu(x) d\mu(x') d\nu(y) d\nu(y').$$

Zadatak 2.15. (*Stein-Weissov teorem interpolacije*) Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ σ -konačni prostori mjera te neka su $u_0, u_1: \mathbb{X} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ i $v_0, v_1: \mathbb{Y} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ izmjerive funkcije koje su integrabilne na svim skupovima konačnih mjera. Ako je $\Lambda: \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \times \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow \mathbb{C}$ bilinearna forma koja zadovoljava

$$|\Lambda(f, g)| \leq M_i \|f\|_{L^{p_i}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, u_i d\mu)} \|g\|_{L^{q_i}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, v_i d\nu)}; \quad i = 0, 1$$

za neke $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$, $M_0, M_1 \in \langle 0, +\infty \rangle$, tada za svaki $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi

$$|\Lambda(f, g)| \leq M_{\theta} \|f\|_{L^{p_{\theta}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, u_{\theta} d\mu)} \|g\|_{L^{q_{\theta}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, v_{\theta} d\nu)},$$

pri čemu je $u_{\theta} = u_0^{1-\theta} u_1^{\theta}$, $v_{\theta} = v_0^{1-\theta} v_1^{\theta}$, $M_{\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, $\frac{1}{p_{\theta}} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q_{\theta}} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Napomena: Ovdje $u d\mu$ označava mjeru $E \mapsto \int_E u d\mu$.

Uputa: Pokušajte imitirati dokaz teorema 2.17.

Poglavlje 3

Pozitivni i apsolutno dominirani integralni operatori

U ovom poglavlju ćemo se baviti integralnim operatorima koje je moguće ograničiti u apsolutnom smislu. To znači da ne posjedujemo (ili da zanemarujemo) bilo kakve “oscilacije” ili “ponišćavanja” u definiciji operatora, već od njegove jezgre K odmah uzimamo apsolutnu vrijednost $|K|$. Za dokazivanje pozitivnih rezultata (tj. ograničenosti) koristit ćemo tehnike interpolacije (i njihove direktne posljedice) iz prethodnog poglavlja. Upućeni čitatelj može primijetiti da zasad namjerno izbjegavamo metode vremensko-frekvencijske analize i ostavljamo ih za suptilnije objekte u kasnijim poglavljima. S druge strane, već i kod tehnika apsolutne dominacije postoje neki neočekivano generalni principi; prezentirat ćemo jednu takvu prilično novu i iznimno primjenjivu ideju Christa¹ i Kiseleva² [CK01a], [CK01b]. Usporedit ćemo je i s klasičnim rezultatom Rademachera³ i Menšova⁴. Za dokazivanje negativnih rezultata (tj. neograničenosti u nekom rasponu eksponenata) proučavat ćemo simetrije danog operatora, tj. simetrije željenih ocjena.

3.1. Dilatacijske simetrije i raspon L^p ocjena

Prva stvar koju je korisno uočiti kod dane integralne forme su vrste simetrija obzirom na koje je invarijantna. Ako je riječ o dilatacijskim simetrijama, tada one mogu znatno suziti raspon eksponenata za koje ima smisla pokušati dokazati L^p ocjene. Pokazat ćemo to na nekoliko primjera.

Primjer 3.1. Fiksirajmo parametre $d \in \mathbb{N}$ i $0 < s < d$. *Razlomljeni integral* ili *Rieszov⁵ potencijal* je integralni operator I_s definiran na d -dimenzionalnim funkcijama formulom

$$(I_s f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x - y|^{d-s}} dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

¹Michael Christ, američki matematičar.

²Alexander Kiselev, rusko-američki matematičar.

³Hans Adolph Rademacher (1892–1969), njemačko-američki matematičar.

⁴Dmitrij Evgenevič Menšov (1892–1988), ruski matematičar.

⁵Nazvan je po Marcelu Riesz.

Prirodno je zapitati se za koje sve eksponente $p, q \in [1, \infty]$ je taj operator ograničen sa $L^p(\mathbb{R}^d)$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$, tj. vrijedi ocjena

$$\|I_s f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.1)$$

Svakako je dovoljno promatrati samo nenegativne funkcije f i g pa je tražena ocjena ekvivalentna s nejednakosti

$$\Lambda_I(f, g) \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}} \quad (3.2)$$

za bisublinearnu formu

$$\Lambda_I(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)||g(x)|}{|x-y|^{d-s}} dx dy.$$

Za bilo koji $a > 0$ označimo sa D_a *operator dilatacije* koji na funkcije djeluje po formuli

$$(D_a f)(x) := f(a^{-1}x); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ukoliko ocjena (3.2) vrijedi za svake izmjerive funkcije f i g , tada uvrštavanjem $D_a f$ i $D_a g$ na njihova mjesta zaključujemo da još i za svaki $a > 0$ mora biti

$$\Lambda_I(D_a f, D_a g) \lesssim_{d,p,q,s} \|D_a f\|_{L^p} \|D_a g\|_{L^{q'}}. \quad (3.3)$$

Proučit ćemo kako se “skaliraju” obje strane u (3.3). Jednostavnom zamjenom varijabli lijeva strana postaje

$$\begin{aligned} \Lambda_I(D_a f, D_a g) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(a^{-1}y)||g(a^{-1}x)|}{|x-y|^{d-s}} dx dy = [\tilde{x} = a^{-1}x, \tilde{y} = a^{-1}y] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(\tilde{y})||g(\tilde{x})|}{a^{d-s}|\tilde{x}-\tilde{y}|^{d-s}} a^{2d} d\tilde{x} d\tilde{y} = a^{d+s} \Lambda_I(f, g). \end{aligned}$$

Potom primijetimo da za svaki $p \in [1, \infty]$ vrijedi formula

$$\|D_a f\|_{L^p} = a^{d/p} \|f\|_{L^p},$$

koja je očigledna za $p = \infty$, a za $p < \infty$ slijedi iz

$$\|D_a f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(a^{-1}x)|^p dx = [\tilde{x} = a^{-1}x] = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\tilde{x})|^p a^d d\tilde{x} = a^d \|f\|_{L^p}^p.$$

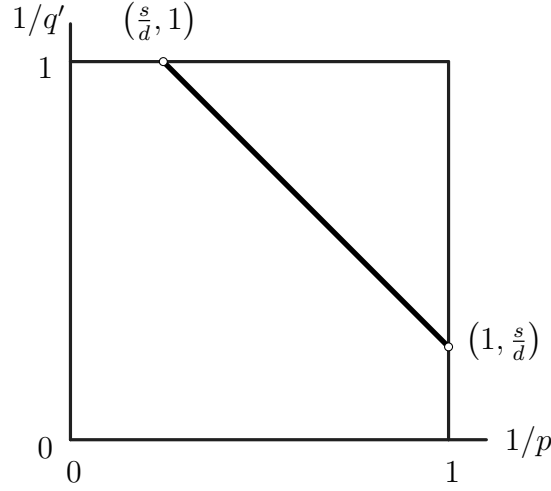
Zato je desna strana zapravo

$$\|D_a f\|_{L^p} \|D_a g\|_{L^{q'}} = a^{d/p+d/q'} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}.$$

Prema tome, dijeljenjem nejednakosti (3.3) sa a^{d+s} dobivamo

$$\Lambda_I(f, g) \lesssim_{d,p,q,s} a^{d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}. \quad (3.4)$$

Tvrdimo da zbog proizvoljnosti od $a > 0$ mora biti $d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s = 0$.



Slika 3.1: Raspon eksponenata iz primjera 3.1.

- Ako bi bilo $d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s < 0$, tada bismo za fiksirane f i g mogli u (3.4) pustiti limes kada $a \rightarrow +\infty$. Slijedilo bi da je forma Λ_I identički jednaka 0, što očigledno nije slučaj.
- Ako bi bilo $d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s > 0$, tada bismo za fiksirane f i g mogli pustiti limes $a \rightarrow 0^+$ i opet dobiti da je Λ_I identički 0.

Iz ovoga zaključujemo da je ocjena (3.1) moguća jedino za $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1 + \frac{s}{d}$, tj.

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{s}{d}. \quad (3.5)$$

Provjerimo sada da jezgra $K(x, y) := |x - y|^{-d+s}$ zadovoljava

$$\|K(x, \cdot)\|_{L_{\text{slabi}}^{d/(d-s)}} \lesssim_d 1 \quad \text{ i } \quad \|K(\cdot, y)\|_{L_{\text{slabi}}^{d/(d-s)}} \lesssim_d 1$$

za svake $x, y \in \mathbb{R}^d$. Dovoljno je provjeriti prvi uvjet jer je drugi analogan zbog simetrije;

$$\begin{aligned} \|K(x, \cdot)\|_{L_{\text{slabi}}^{d/(d-s)}} & \sup_{\alpha > 0} \alpha \left| \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y|^{-d+s} > \alpha\} \right|^{(d-s)/d} \\ & = \sup_{\alpha > 0} \alpha \left| B(x, \alpha^{-1/(d-s)}) \right|^{(d-s)/d} \\ & = |B(\mathbf{0}, 1)| \sup_{\alpha > 0} \underbrace{\alpha \left(\alpha^{-d/(d-s)} \right)^{(d-s)/d}}_{=1} \lesssim_d 1. \end{aligned}$$

Prema Schurovom testu slabog tipa (korolar 2.12) znamo da ocjena (3.2) vrijedi kad god je $1 < p, q' < \infty$ i $\frac{d-s}{d}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) = 1 - (\frac{s}{d})^2$, tj. nejednakost (3.1) je ispunjena za $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$ koji zadovoljavaju (3.5). Čitatelju ostavljamo da u sklopu zadatka 3.1 sam nađe protuprimjere za ograničenost kada je $p = 1$ ili $q = \infty$, čime je potpuno

okarakteriziran skup parova eksponenata p, q za koje vrijedi (3.1). Ta ocjena se naziva *Hardy-Littlewood-Soboljeva*⁶ *nejednakost*.

Rieszov potencijal se prirodno pojavljuje npr. u elektrostatici. Potencijal točkastog izvora s nabojem q je dan formulom $V_q(r) = \frac{Cq}{r}$, pri čemu je r udaljenost od izvora do mjesta gdje ga mjerimo, a C je neka (za nas nebitna) konstanta. To je naprosto jedna od formulacija *Coulombovog*⁷ *zakona*. Ako pak imamo ravnu ploču $S \subseteq \mathbb{R}^2$ nejednoliko nabijenu nabojem s površinskom gustoćom f , tada po tzv. principu superpozicije elektrostatski potencijal cijele ploče izmjeren u točki x iznosi upravo

$$\int_S V_{f(y)}(|x - y|) dy = \int_S \frac{Cf(y)}{|x - y|} dy = C I_1(f \mathbb{1}_S)(x).$$

Ukoliko je S (općeniti, npr. raznostranični) trokut, a f je konstantna (tj. trokut je homogeno nabijen), elementarno ali zanimljivo pitanje je: U kojoj karakterističnoj točki trokuta potencijal poprima najveću vrijednost? Pokazuje se da uvijek postoji jedinstvena točka maksimuma, ali da ona nije niti jedan od klasično poznatih centara trokuta, već se samo može opisati izvjesnim implicitnim relacijama; vidjeti [AK15].

Primjer 3.2. Opet fiksirajmo $d \in \mathbb{N}$ i $0 < s < d$. *Nehomogeni razlomljeni integral* možemo definirati kao integralni operator

$$(J_s f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{(1 + |x - y|)^{d-s}} dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Kao i ranije, želimo naći sve eksponente $p, q \in [1, \infty]$ za koje vrijedi

$$\|J_s f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.6)$$

Opet prvo tražimo nužne uvjete na p i q . Uvodimo bisublinearnu formu

$$\Lambda_J(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)||g(x)|}{(1 + |x - y|)^{d-s}} dx dy$$

te umjesto f i g uvrštavamo $D_a f$ i $D_a g$ za proizvoljni $a > 0$. Nažalost, ovog puta nemamo savršeno skaliranje, ali za $a \geq 1$ još uvijek možemo ocijeniti

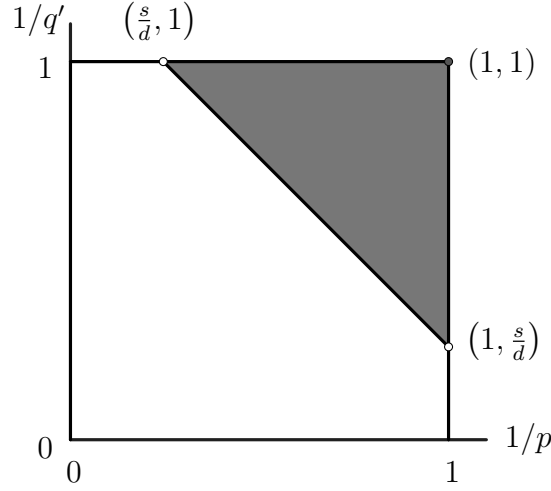
$$\begin{aligned} \Lambda_J(D_a f, D_a g) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(a^{-1}y)||g(a^{-1}x)|}{(1 + |x - y|)^{d-s}} dx dy = [\tilde{x} = a^{-1}x, \tilde{y} = a^{-1}y] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(\tilde{y})||g(\tilde{x})|}{(1 + a|\tilde{x} - \tilde{y}|)^{d-s}} a^{2d} d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(\tilde{y})||g(\tilde{x})|}{(a + a|\tilde{x} - \tilde{y}|)^{d-s}} a^{2d} d\tilde{x} d\tilde{y} = a^{d+s} \Lambda_J(f, g), \end{aligned}$$

iz čega analogno slijedi

$$\Lambda_J(f, g) \lesssim_{d,p,q,s} a^{d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}.$$

⁶Sergej Lavovič Soboljev (1908–1989), ruski matematičar.

⁷Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806), francuski fizičar.



Slika 3.2: Raspon eksponenata iz primjera 3.2.

Kako smo ovog puta ograničeni na $a \geq 1$, možemo jedino pustiti $a \rightarrow +\infty$, što nam daje $d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s \geq 0$, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} \geq 1 + \frac{s}{d}$, odnosno

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} + \frac{s}{d}. \quad (3.7)$$

S druge strane, pokazat ćemo da je (3.6) istinito za sve parove $(p, q) \in [1, \infty]^2$ takve da vrijedi (3.7), $(p, q) \neq (1, d/(d-s))$ i $(p, q) \neq (d/s, \infty)$. Primijetimo da vrijedi $\Lambda_J(f, g) \leq \Lambda_I(f, g)$ pa smo zahvaljujući prethodnom primjeru odmah riješili rubni slučaj (3.5). Kada bi nas zanimala samo unutrašnjost raspona (3.7), tada bismo naprosto interpolirali (3.5) s trivijalnom ocjenom tipa $(1, 1)$ za Λ_J . Ipak, kako želimo pokriti i ostatak “ruba”, postupamo malo drugačije i definiramo $h(x) := (1 + |x|)^{-d+s}$, tako da je $J_s f = f * h$. Lako je vidjeti da $\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ vrijedi ako i samo ako je $r(d-s) > d$, tj. $\frac{1}{r} < 1 - \frac{s}{d}$. Pretpostavimo $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{s}{d}$ i uzmimo r baš takav da je

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < 1 - \frac{s}{d}.$$

Korištenjem Youngove nejednakosti za konvoluciju (primjer 2.18) dobivamo

$$\|J_s f\|_{L^q} = \|f * h\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|h\|_{L^r} \lesssim_{d,r,s} \|f\|_{L^p}.$$

Diskusiju za dvije izuzete točke opet ostavljamo kao zadatak 3.1.

Primjer 3.3. Definirajmo trisublinearnu formu

$$\Lambda(f, g, h) := \int_{\mathbb{R}^3} |f(x, y)g(y, z)h(z, x)| dx dy dz.$$

i odredimo sve eksponente $p, q, r \in [1, \infty]$ za koje je ispunjena nejednakost

$$\Lambda(f, g, h) \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}.$$

Ovog puta forma Λ ima još “više simetrije” pa ćemo za $a, b > 0$ definirati *neizotropne dilatacije* $D_{a,b}$ formulom

$$(D_{a,b}f)(x, y) := f(a^{-1}x, b^{-1}y); \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Za bilo koje parametre $a, b, c > 0$ računamo:

$$\begin{aligned} \Lambda(D_{a,b}f, D_{b,c}g, D_{c,a}h) &= \int_{\mathbb{R}^3} |f(a^{-1}x, b^{-1}y)g(b^{-1}y, c^{-1}z)h(c^{-1}z, a^{-1}x)| dx dy dz \\ &= [\tilde{x} = a^{-1}x, \tilde{y} = b^{-1}y, \tilde{z} = c^{-1}z] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |f(\tilde{x}, \tilde{y})g(\tilde{y}, \tilde{z})h(\tilde{z}, \tilde{x})| abc d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = abc \Lambda(f, g, h). \end{aligned}$$

Primjenom pretpostavljene ocjene za Λ na $D_{a,b}f, D_{b,c}g, D_{c,a}h$ dobivamo

$$\Lambda(f, g, h) \lesssim_{p,q,r} a^{1/p+1/r-1} b^{1/p+1/q-1} c^{1/q+1/r-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}$$

pa zbog proizvoljnosti od a, b, c mora biti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Jedino rješenje tog sustava jednadžbi je $p = q = r = 2$.

S druge strane, vrijedi

$$\Lambda(f, g, h) \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

i to je tzv. *Loomis⁸-Whitneyeva⁹ nejednakost* [LW49] u tri dimenzije. Kako bismo je dokazali naprije primijenimo Hölderovu nejednakost u varijabli y ,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)g(y, z)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y, z)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (3.8)$$

a potom iskoristimo Hölderovu nejednakost u (x, z) ,

$$\begin{aligned} \Lambda(f, g, h) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)g(y, z)| dy \right)^2 dx dz \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |h(z, x)|^2 dx dz \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(3.8)}{\leq} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Originalna primjena Loomis-Whitneyeve nejednakosti je bila sljedeća. Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^3$ tijelo u koordinatnom xyz prostoru s glatkim rubom $\text{Bd } B$. Primijenimo gornju nejednakost na funkcije

$$f = \mathbb{1}_{B_{xy}}, \quad g = \mathbb{1}_{B_{yz}}, \quad h = \mathbb{1}_{B_{zx}},$$

⁸Lynn Harold Loomis (1915–1994), američki matematičar.

⁹Hassler Whitney (1907–1989), američki matematičar.

pri čemu su B_{xy} , B_{yz} , B_{zx} ortogonalne projekcije od B na koordinatne ravnine xy , yz , zx . Kako za svaku točku $(x, y, z) \in B$ imamo $f(x, y) = g(y, z) = h(z, x) = 1$, dobili smo nejednakost

$$|B| \leq |B_{xy}|^{1/2} |B_{yz}|^{1/2} |B_{zx}|^{1/2}.$$

Valja pripaziti jer na lijevoj strani $|\cdot|$ označava volumen, a na desnoj površinu. Brojeve $|B_{xy}|$, $|B_{yz}|$, $|B_{zx}|$ možemo vrlo grubo ocijeniti s polovinom oplošja $|\text{Bd } B|$, što nam daje tzv. *izoperimetrijsku nejednakost*

$$|B| \leq 2^{-3/2} |\text{Bd } B|^{3/2},$$

ali s neoptimalnom konstantom. Može se pokazati da je najbolja konstanta na desnoj strani $\frac{1}{6\sqrt{\pi}}$ i postiže se samo kada je B kugla.

* * *

Zadatak 3.1. Protuprimjerom pokažite da operatori I_s i J_s iz primjera 3.1 i 3.2 nisu ograničeni niti sa $L^1(\mathbb{R}^d)$ u $L^{d/(d-s)}(\mathbb{R}^d)$ niti sa $L^{d/s}(\mathbb{R}^d)$ u $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Zadatak 3.2. Ako su $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$ takvi da vrijedi (3.5), pokažite da zapravo imamo $\|I_s f\|_{L^p \rightarrow L^q} = \|J_s f\|_{L^p \rightarrow L^q}$.

Uputa: Jedna nejednakost je očigledna, a za drugu opet možete spretno iskoristiti dilatacijsku simetriju.

Zadatak 3.3. Dokažite *težinsku Hardy-Littlewood-Soboljevljevu nejednakost* u jednoj dimenziji:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^\alpha |f(x)| |y|^\beta |g(y)|}{|x - y|^{1-s}} dx dy \lesssim_{\alpha, \beta, p, q, s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})},$$

pri čemu su $1 < p, q < \infty$, $0 < s < 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$-s \leq \alpha + \beta \leq 0, \quad \frac{1}{p} < \alpha + 1, \quad \frac{1}{q} < \beta + 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \alpha + \beta + s + 1.$$

Potom pokažite da ocjena ne može vrijediti ni za koje α, β, p, q, s takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \neq \alpha + \beta + s + 1$.

Zadatak 3.4. Promotrimo sljedeću bilinearnu varijantu razlomljenog integrala (razmantranu u [Gra92]):

$$T(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) g(x + t) \frac{dt}{|t|^{d-s}}; \quad x \in \mathbb{R}^d$$

za $d \in \mathbb{N}$ i $0 < s < d$. Okarakterizirajte sve eksponente $p, q, r \in \langle 1, \infty \rangle$ za koje vrijedi ocjena $\|T(f, g)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, p, q, r, s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$.

Uputa: Nakon što utvrdite i skicirate mogući raspon ocjena za pripadnu trilinealnu formu Λ , uočite ćete da je radi realne interpolacije i svojevrsne simetrije argumenata dovoljno dokazati nejednakosti restringiranog tipa $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, 0)$. U izrazu $\Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G, \mathbb{1}_H)$ tada

možete naprosto ocijeniti $\mathbb{1}_H$ odozgo sa 1, čime zapravo dobivate bilinearnu formu iz primjera 3.1.

Napomena: Činjenica da ovaj zadatak o bilinearnom integralnom operatoru nije ništa teži od primjera 3.1 se može zahvaliti pozitivnosti jezgre $\frac{1}{|t|^{d-s}}$. Kasnije ćemo vidjeti da kod graničnog singularnog slučaja p.v. $\frac{1}{t}$ trebamo drastično složenije tehnike.

3.2. Translacijske simetrije i raspon L^p ocjena

Mnogi važni operatori u analizi posjeduju neku vrstu simetrije u odnosu na transliranje funkcija. Za bilo koji $c \in \mathbb{R}^d$ označimo s T_c operator translacije, definiran na funkcijama sa $\mathbb{R}^d$ u $\mathbb{C}$ kao

$$(T_c f)(x) := f(x - c); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Sljedeći općeniti rezultat sužava raspon mogućih L^p ocjena za operatore koji su *translacijski-invarijantni*, tj. komutiraju sa svim operatorima T_c ; $c \in \mathbb{R}^d$. Takvi su naprimjer i linearni operatori iz primjera 3.1 i 3.2.

Propozicija 3.4. (Littlewoodov princip) *Neka su dani eksponenti p, q takvi da je $1 \leq q < p < \infty$. Ako je $T: L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ ograničeni linearni operator koji komutira s translacijama, tj. $T T_c f = T_c T f$ za svaki $c \in \mathbb{R}^d$ i svaku $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, tada T mora biti nul-operator, tj. $T f = 0$ g.s. za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Princip možemo slikovito izraziti (donekle nepreciznim) uzrečicama: “zanimljivi operatori samo podižu eksponente” ili “viši eksponenti su uvijek na lijevoj strani”. Osnovna ideja dokaza je uzeti N kopija neke funkcije f i dovoljno ih “razmaknuti” da su im nosači “načelno disjunktne”, tako da norma zbroja raste kao $N^{1/p}$. Tada isti argument zbog translacijske invarijantnosti radi i za $T f$, kojoj norma zbroja translata raste “samo” kao $N^{1/q}$. Za rigorozni dokaz će nam trebati sljedeća pomoćna tvrdnja.

Lema 3.5. *Za $r \in [1, \infty)$ i $g, h \in L^r(\mathbb{R}^d)$ vrijedi*

$$\lim_{|c| \rightarrow +\infty} \|g + T_c h\|_{L^r} = (\|g\|_{L^r}^r + \|h\|_{L^r}^r)^{1/r}.$$

Dokaz leme 3.5. Tvrdnju leme treba interpretirati:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R > 0)(\forall c \in \mathbb{R}^d, |c| > R) \left(\left| \|g + T_c h\|_{L^r} - (\|g\|_{L^r}^r + \|h\|_{L^r}^r)^{1/r} \right| < \varepsilon \right).$$

Lema je trivijalna kada g i h iščezavaju izvan nekog ograničenog skupa, jer ako je $|c|$ dovoljno veliko, tada g i $T_c h$ imaju disjunktne nosače pa možemo računati:

$$\begin{aligned} \|g + T_c h\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) + (T_c h)(x)|^r dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (|g(x)|^r + |(T_c h)(x)|^r) dx = \|g\|_{L^r}^r + \|T_c h\|_{L^r}^r = \|g\|_{L^r}^r + \|h\|_{L^r}^r. \end{aligned}$$

Za općenite funkcije tvrdnju dokazujemo standardnim aproksimacijskim argumentom, poput onih iz poglavlja 1. Za dane $g, h \in L^r(\mathbb{R}^d)$ i $\varepsilon > 0$ najprije zbog gustoće od $C_c(\mathbb{R}^d)$

u $L^r(\mathbb{R}^d)$ možemo naći $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ takve da je $\|\varphi - g\|_{L^r} < \varepsilon/4$ i $\|\psi - h\|_{L^r} < \varepsilon/4$. Neka je $R > 0$ dovoljno velik da za svaki $c \in \mathbb{R}^d$ takav da je $|c| > R$ funkcije φ i $T_c\psi$ imaju disjunktne nosače. Tada znamo da je

$$\|\varphi + T_c\psi\|_{L^r} = (\|\varphi\|_{L^r}^r + \|\psi\|_{L^r}^r)^{1/r},$$

a možemo ocijeniti i

$$\left| \|\varphi + T_c\psi\|_{L^r} - \|g + T_ch\|_{L^r} \right| \leq \|\varphi - g\|_{L^r} + \|T_c\psi - T_ch\|_{L^r} < \varepsilon/2$$

te

$$\left| (\|\varphi\|_{L^r}^r + \|\psi\|_{L^r}^r)^{1/r} - (\|g\|_{L^r}^r + \|h\|_{L^r}^r)^{1/r} \right| \leq (\|\varphi - g\|_{L^r}^r + \|\psi - h\|_{L^r}^r)^{1/r} < \varepsilon/2,$$

što zajedno daje

$$\left| \|g + T_ch\|_{L^r} - (\|g\|_{L^r}^r + \|h\|_{L^r}^r)^{1/r} \right| < \varepsilon. \quad \square$$

Dokaz propozicije 3.4. Pretpostavimo da T nije nul-operator i neka je

$$C := \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Fiksirajmo $0 < \varepsilon < C$. Po definiciji operatorske norme postoji funkcija $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ takva da je

$$\|Tf\|_{L^q} > (C - \varepsilon)\|f\|_{L^p}. \quad (3.9)$$

Očigledno je $\|f\|_{L^p} > 0$ i $\|Tf\|_{L^q} > 0$. Dvostrukom primjenom leme 3.5 i pretpostavke $TT_c = T_cT$ dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{|c| \rightarrow +\infty} \|f + T_cf\|_{L^p} &= 2^{1/p}\|f\|_{L^p}, \\ \lim_{|c| \rightarrow +\infty} \|T(f + T_cf)\|_{L^q} &= \lim_{|c| \rightarrow +\infty} \|Tf + T_cTf\|_{L^q} = 2^{1/q}\|Tf\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Dakle, postoji $c \in \mathbb{R}^d$ takav da je

$$\|f + T_cf\|_{L^p} < (2^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{L^p} \quad \text{ i } \quad \|T(f + T_cf)\|_{L^q} > (2^{1/q} - \varepsilon)\|Tf\|_{L^q}.$$

S druge strane, po definiciji od C mora biti

$$\|T(f + T_cf)\|_{L^q} \leq C\|f + T_cf\|_{L^p}$$

pa kombiniranje navedenih nejednakosti i dijeljenje s $\|f\|_{L^p}$ konačno daju

$$(C - \varepsilon)(2^{1/q} - \varepsilon) < C(2^{1/p} + \varepsilon).$$

Puštanjem $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dobivamo kontradikciju s $q < p$. $\square$

Alternativni dokaz propozicije 3.4. Možda je nešto sugestivnije pokušati doći do kontradikcije s ograničenošću od T bez razmatranja njegove norme. U tom slučaju uzmemo f takvu da Tf nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$ pa potom za $N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ višestrukom primjenom leme 3.5 dolazimo do “dovoljno razmaknutih” vektora $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}^d$ za koje vrijedi

$$\|f_N\|_{L^p} < (N^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{L^p} \quad \text{ i } \quad \|Tf_N\|_{L^q} > (N^{1/q} - \varepsilon)\|Tf\|_{L^q},$$

pri čemu smo stavili $f_N := \sum_{j=1}^N T_{c_j} f$. Zbog ograničenosti od T imamo

$$(N^{1/q} - \varepsilon)\|Tf\|_{L^q} \leq \|Tf_N\|_{L^q} \lesssim_{d,p,q} \|f_N\|_{L^p} \leq (N^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{L^p}$$

pa još jedino trebamo pustiti ε da teži u 0 i podijeliti s $N^{1/q}$ te u

$$\|Tf\|_{L^q} \lesssim_{d,p,q} N^{1/p-1/q}\|f\|_{L^p}$$

pustiti $N \rightarrow \infty$. □

Napomenimo da Littlewoodov princip ne vrijedi ako $\mathbb{R}^d$ zamijenimo d -dimenzionalnim torusom $\mathbb{T}^d$. Na njemu translacije shvaćamo putem definicije $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, a mjera je Lebesgueova putem identifikacije $\mathbb{T}^d \equiv [0, 1)^d$. Zbog leme 2.2(b) je identiteta ograničeni linearni operator sa $L^p(\mathbb{T}^d)$ u $L^q(\mathbb{T}^d)$ za svake eksponente $1 \leq q \leq p \leq \infty$. S druge strane, isti argument prolazi i u općenitijim strukturama od $\mathbb{R}^d$ kod kojih imamo invarijantnost mjere na translacije i “dovoljno mjesta” da možemo “razmaknuti” funkcije.

* * *

Fourierova transformacija $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ ne komutira s translacijama, ali zato posjeduje mnoge druge simetrije. *Operator modulacije* za $b \in \mathbb{R}^d$ je dan sa

$$(M_b f)(x) := e^{2\pi i b \cdot x} f(x); \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

dok je *operator rotacije* za ortogonalnu transformaciju $S: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiran

$$(R_S f)(x) := f(S^{-1}x); \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.10)$$

Usput uočimo da za cjelobrojne vektore $b, c \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $T_c M_b = M_b T_c$. U raznim situacijama imamo potrebu različito normalizirati operator dilatacije pa za $a > 0$ i $p \in [1, \infty]$ stavimo

$$(D_a^{(p)} f)(x) := a^{-d/p} f(a^{-1}x); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Uz ovakvu normalizaciju je $\|D_a^{(p)} f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. I dalje ćemo kratko pisati D_a za $D_a^{(\infty)}$.

Lema 3.6. *Vrijedi*

$$\mathcal{F} T_c = M_{-c} \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} M_b = T_b \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} D_a^{(p)} = D_{a^{-1}}^{(p')} \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} R_S = R_S \mathcal{F},$$

tj.

$$(T_c f)^\wedge = M_{-c} \hat{f}, \quad (M_b f)^\wedge = T_b \hat{f}, \quad (D_a^{(p)} f)^\wedge = D_{a^{-1}}^{(p')} \hat{f}, \quad (R_S f)^\wedge = R_S \hat{f}$$

za svake $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty]$, ortogonalnu transformaciju S i funkciju $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ove relacije ćemo provjeriti za $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ali napomenimo da one ostaju vrijediti i za svako neprekidno proširenje od $\mathcal{F}$ na neki drugi Lebesgueov prostor, naprosto zbog očigledne ograničenosti operatora T_c, M_b, D_a, R_S .

Dokaz. U skladu s definicijama računamo:

$$\begin{aligned}
 (T_c f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-c) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i (x+c) \cdot \xi} dx \\
 &= e^{-2\pi i c \cdot \xi} \hat{f}(\xi) = (M_{-c} \hat{f})(\xi), \\
 (M_b f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i x \cdot b} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \hat{f}(\xi - b) = (T_b \hat{f})(\xi), \\
 (D_a^{(p)} f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} a^{-d/p} f(a^{-1}x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \left[\begin{array}{l} y = a^{-1}x \\ dx = a^d dy \end{array} \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} a^{-d/p} f(y) e^{-2\pi i a y \cdot \xi} a^d dy \\
 &= a^{d/p'} \hat{f}(a\xi) = (D_{a^{-1}}^{(p')} \hat{f})(\xi), \\
 (R_S f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(S^{-1}x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \left[\begin{array}{l} y = S^{-1}x \\ dx = dy \end{array} \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i S y \cdot \xi} dy = [S y \cdot \xi = y \cdot S^{-1}\xi] \\
 &= \hat{f}(S^{-1}\xi) = (R_S \hat{f})(\xi),
 \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

Neformalno rečeno, Fourierova transformacija zamjenjuje translacije i modulacije, invertira skalu dilatacija te je invarijantna na rotacije.

Propozicija 3.7. *Jedini parovi eksponenata $(p, q) \in [1, \infty]^2$ takvi da vrijedi ocjena*

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad (3.11)$$

za sve $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ su oni iz Hausdorff-Youngove nejednakosti, tj. oblika (p, p') za $p \in [1, 2]$.

Dokaz. Neka su dakle $p, q \in [1, \infty]$ za koje vrijedi (3.11) i uzmimo $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ takvu da $\hat{f}$ nije g.s. jednaka 0. Uvrštavanjem $D_a f$ na mjesto od f u (3.11) dobivamo da za svaki $a > 0$ vrijedi

$$a^{d-d/q} \|\hat{f}\|_{L^q} = \|a^d D_{a^{-1}} \hat{f}\|_{L^q} = \|(D_a f)^\wedge\|_{L^q} \lesssim_{d,p,q} \|D_a f\|_{L^p} = a^{d/p} \|f\|_{L^p},$$

tj.

$$\|\hat{f}\|_{L^q} \lesssim_{d,p,q} a^{d(1/p+1/q-1)} \|f\|_{L^p}.$$

Puštanjem $a \rightarrow 0^+$ i $a \rightarrow +\infty$ zaključujemo da mora biti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tj. $q = p'$.

Pretpostavimo $2 < p < \infty$, odakle je $p' < 2 < p$. Šada ćemo imitirati alternativni dokaz propozicije 3.4. Obzirom da moduliranje ne mijenja ni nosač ni apsolutnu

vrijednost funkcije, sasvim analogno kao kod leme 3.5 dokazuje se da za $r \in [1, \infty)$ i $g, h \in L^r(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\lim_{|c| \rightarrow +\infty} \|g + T_{cM_{\pm c}} h\|_{L^r} = (\|g\|_{L^r}^r + \|h\|_{L^r}^r)^{1/r}.$$

Uzastopnom primjenom te činjenice za dane $N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ nalazimo $k_1, k_2, \dots, k_N \in \mathbb{Z}^d$ “dovoljno razmaknute” da je

$$\|f_N\|_{L^p} < (N^{1/p} + \varepsilon) \|f\|_{L^p} \quad \text{i} \quad \|\hat{f}_N\|_{L^{p'}} > (N^{1/p'} - \varepsilon) \|\hat{f}\|_{L^{p'}},$$

pri čemu smo označili

$$f_N := \sum_{j=1}^N M_{k_j} T_{k_j} f = \sum_{j=1}^N T_{k_j} M_{k_j} f,$$

odakle je (zbog leme 3.6) i

$$\hat{f}_N = \sum_{j=1}^N T_{k_j} M_{-k_j} \hat{f}.$$

Iz pretpostavljene nejednakosti (3.11) za $q = p'$ imamo

$$(N^{1/p'} - \varepsilon) \|\hat{f}\|_{L^{p'}} \leq \|\hat{f}_N\|_{L^{p'}} \lesssim_{d,p,q} \|f_N\|_{L^p} \leq (N^{1/p} + \varepsilon) \|f\|_{L^p}$$

pa puštanjem $\varepsilon \rightarrow 0^+$ i dijeljenjem s $N^{1/p'}$ dobivamo

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \lesssim_{d,p,q} N^{1/p-1/p'} \|f\|_{L^p}$$

te konačno puštanjem $N \rightarrow \infty$ dolazimo do kontradikcije.

Preostaje još opovrgnuti ocjenu (3.11) za $p = \infty$ i $q = 1$, ali kad bi takva nejednakost vrijedila, tada bi kompleksna interpolacija s trivijalnom nejednakosti za $p = 1$, $q = \infty$ dala ocjene u cijelom rasponu $p \in \langle 2, \infty \rangle$, $q = p'$, koje smo netom opovrgnuli. $\square$

3.3. Dominirane i okrnjene jezgre

Materijal u ovom odjeljku je najvećim dijelom prilagođeno gradivo iz [Tao07].

Za potrebe daljnjeg izlaganja fiksiramo dva σ -konačna prostora mjera $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$. Pod jezgrom ćemo uvijek podrazumijevati $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ -izmjerivu kompleksnu funkciju na $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Za svaku jezgru K možemo razmatrati linearni integralni operator $T_K: \mathcal{D}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ definiran formulom

$$(T_K f)(x) := \int_{\mathbb{Y}} K(x, y) f(y) d\nu(y),$$

pri čemu je $\mathcal{D}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ neki vektorski prostor g.s.-klasa izmjerivih funkcija koji je gust u prostorima $L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$; $p \in [1, \infty)$. Mnogi zanimljivi operatori nisu tog oblika, ali mogu biti aproksimirani upravo takvim operatorima. Neke od rezultata ćemo formulirati za

sasvim apstraktne operatore, ali će nam ipak biti ilustrativno vidjeti kako se ti rezultati specijaliziraju za operatore T_K koji imaju jezgru K u gornjem smislu.

Pretpostavimo da je jezgra $\tilde{K}$ na neki način izvedena iz jezgre K . Pitamo se u kojem odnosu su operatorske norme $\|T_{\tilde{K}}\|_{L^p \rightarrow L^q}$ i $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q}$ za neke određene eksponente $p, q \in [1, \infty]$. Naša prva opservacija je gotovo sasvim trivijalna.

Propozicija 3.8. (Pozitivna dominacija)

- (a) Neka su K i $\tilde{K}$ jezgre takve da je $K \geq 0$ i $|\tilde{K}| \leq K$. Ako je operator T_K ograničen sa $\mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \subseteq L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ za neke eksponente $p, q \in [1, \infty]$, tada je ograničen i operator $T_{\tilde{K}}$ te vrijedi

$$\|T_{\tilde{K}}\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}.$$

- (b) Zaključak iz (a) dijela ostaje vrijediti i ako su jezgre K i $\tilde{K}$ takve da je samo $|\tilde{K}| \leq |K|$, ali zato dodatno pretpostavljamo $p = 1$ ili $q = \infty$.

Dokaz. (a) Ovo je direktna posljedica od $|T_{\tilde{K}}f| \leq T_{|K|}|f| = T_K|f|$.

(b) Ovaj pak dio slijedi iz zadatka 3.5. □

Za općenite kompleksne jezgre takve da je $|\tilde{K}| \leq |K|$ i ako je $p > 1$, $q < \infty$ ograničenost operatora T_K ne povlači ograničenost od $T_{\tilde{K}}$; pogledajte zadatak 3.6. Tu poteškoću ne možemo zaobići čak ni ako uzimamo $\tilde{K} = K \mathbb{1}_S$ za neki skup $S \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$; slikovito možemo reći da smo *okrnjili* jezgru K po skupu S . Ipak, neka “okrnjenja” neće povećati normu pripadnog operatora.

Propozicija 3.9. (Blok-dijagonalno okrnjenje) Neka je $N \in \mathbb{N}$, neka je $(A_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{X}$ -izmjeriva particija od $\mathbb{X}$, a $(B_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{Y}$ -izmjeriva particija od $\mathbb{Y}$ te neka eksponenti p, q zadovoljavaju $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Ako je $T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator, tada je formulom

$$\tilde{T}f := \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n} T(f \mathbb{1}_{B_n}),$$

također definiran ograničeni operator sa $L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i vrijedi

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}.$$

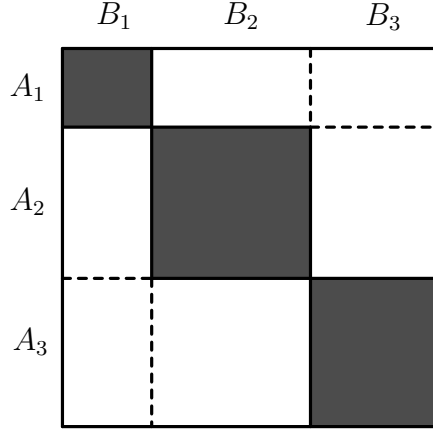
Ukoliko je $T = T_K$ operator s jezgrom K , tada je jezgra od $\tilde{T}$ naprosto

$$\tilde{K}(x, y) := \sum_{n=1}^N K(x, y) \mathbb{1}_{A_n}(x) \mathbb{1}_{B_n}(y).$$

Naime,

$$\int_{\mathbb{Y}} \tilde{K}(x, y) f(y) d\nu(y) = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n}(x) \underbrace{\int_{\mathbb{Y}} K(x, y) f(y) \mathbb{1}_{B_n}(y) d\nu(y)}_{T_K(f \mathbb{1}_{B_n})(x)}.$$

Tu “blok-dijagonalnu strukturu” od $\tilde{K}$ možemo ilustrirati kao na slici 3.3.


 Slika 3.3: Blok-dijagonalna struktura na $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Dokaz. Označimo $C = \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}$. Za proizvoljnu $f \in L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ ocjenjujemo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}f\|_{L^q} &= \left(\sum_{n=1}^N \|\mathbb{1}_{A_n} \tilde{T}f\|_{L^q}^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{n=1}^N \|\mathbb{1}_{A_n} T(f \mathbb{1}_{B_n})\|_{L^q}^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^N \|T(f \mathbb{1}_{B_n})\|_{L^q}^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^N \|f \mathbb{1}_{B_n}\|_{L^p}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^N \|f \mathbb{1}_{B_n}\|_{L^p}^p \right)^{1/p} = C \|f\|_{L^p}, \end{aligned}$$

pri čemu smo u trećoj nejednakosti iskoristili lemu 2.2(b). $\square$

Primijetimo da nam je bila bitna pretpostavka $p \leq q$, ali ona je često ispunjena, kao što smo vidjeli u prethodnom odjeljku. Ako tu pretpostavku pojačamo na $p < q$, možemo dokazati prilično iznenađujuću varijantu.

Teorem 3.10. (Blok-trokatasto okrnjenje) *Neka je $N \in \mathbb{N}$, neka je $(A_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{X}$ -izmjeriva particija od $\mathbb{X}$, a $(B_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{Y}$ -izmjeriva particija od $\mathbb{Y}$ te neka eksponenti p, q zadovoljavaju $1 \leq p < q \leq \infty$. Ako je $T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator, tada je formulom*

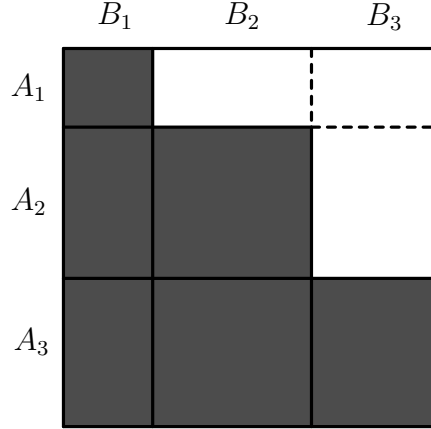
$$\tilde{T}f := \sum_{\substack{m,n \\ 1 \leq n \leq m \leq N}} \mathbb{1}_{A_m} T(f \mathbb{1}_{B_n}),$$

također definiran ograničeni operator sa $L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i vrijedi

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \rightarrow L^q} \lesssim_{p,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}. \quad (3.12)$$

Dakle, ovog puta uzimamo “donje-blok-trokatasti” dio od $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, osjenčan na slici 3.4. Ukoliko je K jezgra operatora T , tada je

$$\tilde{K}(x, y) := \sum_{1 \leq n \leq m \leq N} K(x, y) \mathbb{1}_{A_m}(x) \mathbb{1}_{B_n}(y)$$

Slika 3.4: Blok-trokutasta struktura na $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

jezgra od $\tilde{T}$. Ipak, kao i u prethodnoj propoziciji, radimo direktno s operatorom T i ne trebamo ni pretpostavljati postojanje jezgre.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati potpunom matematičkom indukcijom, ali postavljenom na vrlo pažljiv način. Preciznije, indukcijom po broju N ćemo dokazati da za svake prostore mjere, svake izmjerive particije $(A_n)_{n=1}^N$, $(B_n)_{n=1}^N$ i svake operatore $T, \tilde{T}$ kao u iskazu vrijedi nejednakost

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq C_{p,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q},$$

pri čemu je

$$C_{p,q} := (1 - 2^{1/q-1/p})^{-1}.$$

Izbor konstante $C_{p,q}$ će biti motiviran dokazom; sve do zadnjeg dijela dokaza ni ne trebamo znati ništa o njoj.

Za $N = 1$ je tvrdnja trivijalna jer je $\tilde{T} = T$. Uzimo neki prirodni broj $N \geq 2$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve strogo manje od N . Neka su $(A_n)_{n=1}^N$, $(B_n)_{n=1}^N$, $T, \tilde{T}$ kao u iskazu. Radi jednostavnije notacije smijemo normalizirati $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} = 1$, a zbog homogenosti je dovoljno dokazati

$$\|\tilde{T}f\|_{L^q} \leq C_{p,q} \quad (3.13)$$

za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ takvu da je $\|f\|_{L^p} = 1$. Fiksirajmo neku takvu funkciju f . Primijetimo da brojevi

$$\|f \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k}\|_{L^p}^p; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

rastu po k , najmanji je 0, a najveći je 1, pa postoji jedinstveni $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ takav da je

$$\|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}}\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} < \|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_k}\|_{L^p}^p.$$

Kao posljedicu od $\|f\|_{L^p}^p = 1$ tada imamo i

$$\|f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \dots \cup B_N}\|_{L^p}^p < \frac{1}{2}.$$

Iskoristimo li pretpostavku indukcije na particije $(A_n)_{n=1}^{k-1}$, $(B_n)_{n=1}^{k-1}$ i odgovarajuće restrikcije mjera i operatora, dobit ćemo

$$\|\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}})\|_{L^q} \leq C_{p,q} \|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}}\|_{L^p} \leq C_{p,q} 2^{-1/p}. \quad (3.14)$$

Na isti način primjenom pretpostavke indukcije na $(A_n)_{n=k+1}^N$, $(B_n)_{n=k+1}^N$ dobivamo

$$\|\mathbb{1}_{A_{k+1} \cup \dots \cup A_N} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \dots \cup B_N})\|_{L^q} \leq C_{p,q} \|f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \dots \cup B_N}\|_{L^p} \leq C_{p,q} 2^{-1/p}. \quad (3.15)$$

Korištenjem disjunktnosti nosača funkcija u (3.14) i (3.15) slijedi

$$\|\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}}) + \mathbb{1}_{A_{k+1} \cup \dots \cup A_N} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \dots \cup B_N})\|_{L^q} \leq C_{p,q} 2^{1/q-1/p}. \quad (3.16)$$

Osim toga je očigledno

$$\|\mathbb{1}_{A_k \cup \dots \cup A_N} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_k})\|_{L^q} = \|\mathbb{1}_{A_k \cup \dots \cup A_N} T(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_k})\|_{L^q} \leq 1. \quad (3.17)$$

Iz definicije od $\tilde{T}$ vidimo $\mathbb{1}_{A_m} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_n}) = \mathbf{0}$ za $m < n$ pa možemo dekomponirati

$$\begin{aligned} \tilde{T}f &= \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}}) + \mathbb{1}_{A_{k+1} \cup \dots \cup A_N} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \dots \cup B_N}) \\ &\quad + \mathbb{1}_{A_k \cup \dots \cup A_N} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_k}). \end{aligned}$$

Korištenjem nejednakosti Minkowskog te (3.16) i (3.17) konačno zaključujemo

$$\|\tilde{T}f\|_{L^q} \leq C_{p,q} 2^{1/q-1/p} + 1.$$

Konstanta $C_{p,q}$ je bila odabrana upravo tako da bude $C_{p,q} 2^{1/q-1/p} + 1 = C_{p,q}$, iz čega nam slijedi (3.13) i time je završen korak indukcije. $\square$

Važno je primijetiti neovisnost konstante u (3.12) o broju N , koja nam omogućuje da izvedemo brojne korisne posljedice.

Teorem 3.11. (Maksimalna ocjena Christa i Kiseleva [CK01a]) *Neka je $(J, \preceq)$ prebrojivi totalno uređeni skup i pretpostavimo da je $(E_j)_{j \in J}$ rastuća kolekcija skupova iz $\mathcal{Y}$, tj. za svake $j, j' \in J$ takve da je $j \preceq j'$ mora vrijediti $E_j \subseteq E_{j'}$. Nadalje, neka eksponenti p, q zadovoljavaju $1 \leq p < q \leq \infty$. Ako je $T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator, tada je maksimalni operator definiran formulom*

$$T_\star f := \sup_{j \in J} |T(f \mathbb{1}_{E_j})|$$

također ograničen sa $L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i vrijedi

$$\|T_\star\|_{L^p \rightarrow L^q} \lesssim_{p,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}. \quad (3.18)$$

Dokaz. Možemo fiksirati $f \in L^p$ i normalizirati $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} = 1$, $\|f\|_{L^p} = 1$. Ako je $(J_N)_{N=1}^\infty$ rastući niz konačnih podskupova od J takav da vrijedi $\bigcup_{N=1}^\infty J_N = J$ i $|J_N| = N$, tada teorem o monotonij konvergenciji daje

$$\|T_\star f\|_{L^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \max_{j \in J_N} |T(f \mathbb{1}_{E_j})| \right\|_{L^q}.$$

Osim toga, običnim preimenovanjem elemenata od J_N možemo uzeti $J_N = \{1, 2, \dots, N\}$, tako da je dovoljno dokazati

$$\left\| \max_{1 \leq m \leq N} |T(f \mathbb{1}_{E_m})| \right\|_{L^q} \lesssim_{p,q} 1$$

za neku konačnu $\mathcal{Y}$ -izmjerivu kolekciju $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_N$. Osim toga, još stavimo $E_0 := \emptyset$ i $E_{N+1} := \mathbb{Y}$. Napomenimo kako je važno da nam dobivena (implicitna) konstanta ne ovisi o broju N .

Trik koji koristimo se često zove *linearizacija maksimalnog operatora*. Za svaki $x \in \mathbb{X}$ neka je $k(x) \in \{1, 2, \dots, N+1\}$ najmanji indeks takav da vrijedi

$$\max_{1 \leq m \leq N+1} |T(f \mathbb{1}_{E_m})(x)| = |T(f \mathbb{1}_{E_{k(x)}})(x)|.$$

Označimo li

$$A_m := \{x \in \mathbb{X} : k(x) = m\}, \quad B_m := E_m \setminus E_{m-1}; \quad m = 1, 2, \dots, N+1,$$

vidimo da ustvari trebamo pokazati

$$\left\| \sum_{1 \leq m \leq N+1} \mathbb{1}_{A_m} T(f \mathbb{1}_{E_m}) \right\|_{L^q} = \left\| \sum_{\substack{m,n \\ 1 \leq n \leq m \leq N+1}} \mathbb{1}_{A_m} T(f \mathbb{1}_{B_n}) \right\|_{L^q} \lesssim_{p,q} 1,$$

ali ta nejednakost slijedi iz teorema 3.10. (Napomenimo da su skupovi A_m međusobno disjunktni pa je u sumi na lijevoj strani uvijek najviše jedan pribrojnik različit od 0 te je nebitan njegov predznak.) $\square$

Lijepa primjena teorema 3.11 je na konvergenciju integrala iz definicije Fourierove transformacije na $\mathbb{R}$. Za svaku $f \in L^1(\mathbb{R})$ definicija od $\hat{f}$ i teorem o dominiranoj konvergenciji daju

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \hat{f}(\xi) \quad (3.19)$$

za svaki $\xi \in \mathbb{R}$. Prednost formule (3.19) nad samom definicijom Fourierove transformacije je da obje strane imaju smisla i za sve $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, 2]$. Naime, funkcija f je integrabilna na svakom ograničenom intervalu $[-R, R]$ (naprimjer po lemi 2.2(a)), a i Fourierova transformacija $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ se zahvaljujući nejednakosti (2.31) može jednoznačno proširiti do ograničenog linearnog operatora sa $L^p(\mathbb{R})$ u $L^{p'}(\mathbb{R})$. Zato je sasvim prirodno zapitati se ostaje li formula (3.19) vrijediti i dalje.

Korolar 3.12. (Menšov-Paley-Zygmundov teorem) *Ako je $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, 2 \rangle$, tada za gotovo svaki $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi (3.19).*

Dokaz. Za fiksirani ξ je funkcija $R \mapsto \int_{-R}^R f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$ neprekidna pa možemo primijeniti teorem 1.7 za linearne operatore

$$\mathcal{F}_R: L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}_R f := \mathcal{F}(f \mathbb{1}_{[-R, R]}); \quad R \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

maksimalni operator

$$\mathcal{F}_* f := \sup_{R \in \langle 0, +\infty \rangle} |\mathcal{F}_R f| = \sup_{R \in \langle 0, +\infty \rangle \cap \mathbb{Q}} |\mathcal{F}_R f|$$

i gusti podskup $S = L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Provjerimo da su ispunjeni uvjeti tog teorema i to čak uz jake (a ne samo slabe) ocjene.

$$(1) \quad \|\mathcal{F}_R f\|_{L^{p'}} \stackrel{(2.31)}{\leq} \|f \mathbb{1}_{[-R, R]}\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.$$

(2) Primjenom teorema 3.11 uz $J = \langle 0, +\infty \rangle \cap \mathbb{Q}$, $E_R = [-R, R]$ i $q = p' > p$ slijedi

$$\|\mathcal{F}_*\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim_p \|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \stackrel{(2.31)}{\leq} 1.$$

(3) Za $g \in S \subseteq L^1(\mathbb{R})$ smo već bili primijetili da je (3.19) ispunjeno.

Dakle, g.s.-limes na lijevoj strani od (3.19) postoji za svaku $f \in L^p(\mathbb{R})$. Standardni argument jednakosti ograničenih linearnih operatora na gustom podskupu garantira da je taj limes baš jednak $\hat{f}(\xi)$ za g.s. $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Maksimalni operator u teoremu 3.11 se uzima po prebrojivom skupu, ali to u praksi ne predstavlja smanjenje općenitosti: vidjeli smo to u prethodnom korolaru, a pogledajte i zadatak 3.8.

Moguća je čak i varijanta teorema 3.11 formulirana pomoću varijacijskih normi nizova, koje su bile definirane u odjeljku 1.1.

Teorem 3.13. (Varijacijska varijanta ocjene Christa i Kiseleva [OSTTW12]) *Neka je $(E_n)_{n=0}^\infty$ rastući niz skupova iz $\mathcal{Y}$ i neka eksponenti $p, q, \varrho \in [1, \infty]$ zadovoljavaju $q > p$ i $\varrho > p$. Ako je $T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator, tada za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ vrijedi*

$$\left\| \left\| (T(f \mathbb{1}_{E_n}))_{n=0}^\infty \right\|_{V^{\varrho}} \right\|_{L^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \lesssim_{p, q, \varrho} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \|f\|_{L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)}. \quad (3.20)$$

Ovdje $\|(z_n)_{n=0}^\infty\|_{V^\infty}$ interpretiramo kao $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |z_n|$, tako da je ovaj rezultat zapravo poopćenje i pojačanje teorema 3.11. Dokaz je opet ostavljen čitatelju za vježbu kao zadatak 3.10 sa dovoljno detaljnom uputom. Pomoću teorema 3.13 nije teško dati nešto direktniji dokaz korolara 3.12, bez upotrebe teorema 1.7.

Alternativni dokaz korolara 3.12. Definirajmo operatore $\mathcal{F}_R$; $R \in [0, +\infty)$ kao i ranije sa $\mathcal{F}_R f := (f \mathbb{1}_{[-R, R]})^\wedge$ te opet stavimo $E_R = [-R, R]$. Primjenom teorema 3.13 (za bilo koji, ali fiksirani $\varrho \in \langle p, \infty \rangle$) dobivamo

$$\left\| \|\mathcal{F}_R f\|_{V_R^{\varrho}} \right\|_{L^{p'}} \lesssim_{p, \varrho} \|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \|f\|_{L^p}, \quad (3.21)$$

pri čemu $\|\mathcal{F}_R f\|_{V_R^{\varrho}}$ sada označava ϱ -varijaciju funkcije $R \mapsto (\mathcal{F}_R f)(\xi)$, definiranu sa (1.4). Naime, (3.20) se zapravo primjenjuje na bilo koji izbor od $M \in \mathbb{N}$ i $0 = R_0 < R_1 <$

$\dots < R_M$. Izmjerivost na lijevoj strani od (3.21) je ponovno garantirana neprekidnošću po R i mogućnošću uzimanja supremuma samo po racionalnim brojevima.

Obzirom da po Hausdorff-Youngovoj nejednakosti znamo $\|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \leq 1 < +\infty$, zaključujemo da za svaku $f \in L^p(\mathbb{R})$ i za gotovo svaki $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\|(\mathcal{F}_R f)(\xi)\|_{V_R^e} < +\infty,$$

što kao i u odjeljku 1.1 implicira postojanje limesa $\lim_{R \rightarrow +\infty} (\mathcal{F}_R f)(\xi)$. $\square$

* * *

Teoremi 3.10 i 3.11 ne vrijede kada je $p = q$ i implicitne konstante “eksplodiraju” kada se p i q približavaju jedno drugom; vidjeti zadatak 3.7 na tu temu. Zato se prirodno postavlja pitanje može li se ipak dobiti neki slabiji koristan rezultat i u graničnom slučaju $p = q$.

Teorem 3.14. *Uzmimo proizvoljni eksponent $1 \leq p \leq \infty$ i neka je $T: L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \rightarrow L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator.*

- (a) *Ako su $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(A_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{X}$ -izmjeriva particija od $\mathbb{X}$ i $(B_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{Y}$ -izmjeriva particija od $\mathbb{Y}$, tada je okrnjeni operator*

$$\tilde{T}f := \sum_{\substack{m,n \\ 1 \leq n \leq m \leq N}} \mathbb{1}_{A_m} T(f \mathbb{1}_{B_n})$$

također ograničen i vrijedi

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim (\ln N) \|T\|_{L^p \rightarrow L^p}. \quad (3.22)$$

- (b) *Ako su $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i $(E_n)_{n=1}^N$ rastuća kolekcija skupova iz $\mathcal{X}$, tada je maksimalni operator*

$$T_\star f := \max_{1 \leq n \leq N} |T(f \mathbb{1}_{E_n})|$$

također ograničen i vrijedi

$$\|T_\star\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim (\ln N) \|T\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

Dokaz. Sama ograničenost od $\tilde{T}$ i $T_\star$ je trivijalna i bitne su jedino ocjene njihovih normi. Osim toga, dio (b) slijedi iz dijela (a) na sasvim isti način kao što smo bili dokazali teorem 3.11 iz teorema 3.10. Prema tome, glavni dio teorema je ocjena (3.22). Njen dokaz može slijediti iste crte kao i dokaz od (3.12), ali je nešto direktniji, što i ne začuđuje, obzirom da je rezultat klasičan.

Dovoljno je dokazati (3.22) u slučaju $N = 2^M$; $M \in \mathbb{N}$, jer inače možemo zaokružiti N na najbližu veću potenciju od 2 i proširiti particije praznim članovima. Indukcijom po $M \in \mathbb{N}_0$ dokazujemo nejednakost

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq (M + 1) \|T\|_{L^p \rightarrow L^p}$$

za svake prostore mjere, svake izmjerive particije $(A_n)_{n=1}^{2^M}$, $(B_n)_{n=1}^{2^M}$ i svake operatore $T, \tilde{T}$ kao u iskazu (a) dijela teorema. Baza indukcije $M = 0$ je trivijalna jer imamo $\tilde{T} = T$. U koraku indukcije normalizirajmo $\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} = 1$, fiksirajmo f te pretpostavku za $M - 1$ iskoristimo kako bismo dobili

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_{2^{M-1}}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{2^{M-1}}}) \right\|_{L^p} &\leq M \|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{2^{M-1}}}\|_{L^p}, \\ \left\| \mathbb{1}_{A_{2^{M-1}+1} \cup \dots \cup A_{2^M}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{2^{M-1}+1} \cup \dots \cup B_{2^M}}) \right\|_{L^p} &\leq M \|f \mathbb{1}_{B_{2^{M-1}+1} \cup \dots \cup B_{2^M}}\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Disjunktnost nosača daje

$$\left\| \mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_{2^{M-1}}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{2^{M-1}}}) + \mathbb{1}_{A_{2^{M-1}+1} \cup \dots \cup A_{2^M}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{2^{M-1}+1} \cup \dots \cup B_{2^M}}) \right\|_{L^p} \leq M \|f\|_{L^p}.$$

Obzirom da je

$$\left\| \mathbb{1}_{A_{2^{M-1}+1} \cup \dots \cup A_{2^M}} \tilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \dots \cup B_{2^{M-1}}}) \right\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p},$$

konačno smo dobili

$$\|\tilde{T}f\|_{L^p} \leq (M + 1)\|f\|_{L^p}$$

i time završili dokaz. $\square$

U teoremu 3.14, za razliku od teorema 3.11, konstante u ocjeni norme maksimalnog operatora nažalost ipak ovise o “finoći” kolekcije $(E_n)_{n=1}^N$ (tj. o broju N), ali ponekad je i logaritamski “gubitak” zadovoljavajući. Često se teorem 3.14 primjenjuje na ortogonalne sisteme, kada poprima sljedeći oblik.

Korolar 3.15. (Maksimalna ocjena Rademachera i Menšova [Rad22], [Men23]) *Neka je $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i neka je $f_1, f_2, \dots, f_N$ ortonormirana kolekcija funkcija iz $L^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$. Tada vrijedi*

$$\left\| \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \right\|_{L^2} \lesssim N^{1/2} \ln N.$$

Dokaz. Uzmimo $p = 2$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) = (\{1, 2, \dots, N\}, \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, N\}), |\cdot|)$, skupove

$$E_n := \{1, 2, \dots, n\}; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

i linearni operator

$$T((\gamma_n)_{n=1}^N) := \sum_{n=1}^N \gamma_n f_n.$$

Iz međusobne ortogonalnosti i normiranosti funkcija f_n slijedi

$$\|T((\gamma_n)_{n=1}^N)\|_{L^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)}^2 = \sum_{n=1}^N |\gamma_n|^2 \|f_n\|_{L^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)}^2 = \sum_{n=1}^N |\gamma_n|^2 = \|(\gamma_n)_{n=1}^N\|_{\ell^2(\{1, \dots, N\})}^2,$$

tj. T je izometrija i posebno $\|T\|_{\ell^2 \rightarrow L^2} = 1$. Korištenjem teorema 3.14(b) dobivamo

$$\left\| \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k f_k \right| \right\|_{L^2} \leq (\ln N) \|(\gamma_n)_{n=1}^N\|_{\ell^2(\{1, \dots, N\})}$$

pa preostaje uzeti $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_N = 1$. $\square$

Možemo usporediti korolar 3.15 s Pitagorinim¹⁰ poučkom, koji daje

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L^2} = \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} = n^{1/2} \leq N^{1/2}$$

za svaki $n \in \{1, \dots, N\}$. Dakle, ubacivanje maksimuma unutar norme na lijevoj strani “košta” samo logaritamski faktor $\ln N$.

* * *

Zadatak 3.5. Dokažite da za $q \in [1, \infty]$ vrijedi

$$\|T_K\|_{L^1 \rightarrow L^q} = \|K(x, y)\|_{L_y^\infty(L_x^q)},$$

dok za $p \in [1, \infty]$ imamo

$$\|T_K\|_{L^p \rightarrow L^\infty} = \|K(x, y)\|_{L_x^\infty(L_y^{p'})}.$$

Na desnoj strani se pojavljuju mješovite Lebesgueove norme iz zadatka 2.1.

Napomena: Smatramo da je operatorska norma jednaka $+\infty$ ukoliko operator nije μ -g.s. dobro definiran ili je neograničen.

Zadatak 3.6. Neka su prostori mjera upravo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Stavimo

$$K(x, y) := \cos(2\pi xy), \quad \tilde{K}(x, y) := \max\{\cos(2\pi xy), 0\}.$$

Dokažite da je T_K ograničen na $L^2(\mathbb{R})$, ali da $T_{\tilde{K}}$ to nije.

Zadatak 3.7.

(a) Pokažite da nejednakost (3.12) može poprimiti malo precizniji oblik:

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \rightarrow L^q} \lesssim \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}.$$

(b) Definirajmo operator T_N na konačnim nizovima duljine N ,

$$T_N((\gamma_m)_{m=1}^N) := \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \neq m}} \frac{\gamma_n}{m - n} \right)_{m=1}^N,$$

i neka je $\tilde{T}_N$ kao u teoremu 3.10 uz $A_m = \{m\}$, $B_n = \{n\}$. Dokažite da je

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|T_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} < +\infty, \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} \|\tilde{T}_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = +\infty.$$

Uputa: Elementarni dokaz od $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|T_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \sqrt{\pi}$ može se naći u [Gra94].

¹⁰Pitagora (oko 582. pr. n. e. – oko 496. pr. n. e.), starogrčki matematičar i filozof.

(c) Za operatore iz (b) dijela zadatka dokažite

$$\lim_{q \rightarrow 2^+} \|T_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^q} = \|T_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2}, \quad \lim_{q \rightarrow 2^+} \|\tilde{T}_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^q} = \|\tilde{T}_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2},$$

odakle će slijediti

$$\sup_{\substack{q \in \langle 2, \infty \rangle \\ N \in \mathbb{N}}} \frac{\|\tilde{T}_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^q}}{\|T_N\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^q}} = +\infty.$$

Napomena: Ovaj primjer pokazuje da konstante u (3.12) ne mogu biti odabrane “uniformno” po p i q , a u kombinaciji s podzadatkom (a) vidimo da eksplodiraju upravo kada $q \rightarrow p^+$.

Zadatak 3.8. Dokažite sljedeću kontinuiranu “trokutastu” verziju teorema 3.10. Neka je $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lokalno integrabilna (tj. integrabilna na svakom omeđenom izmjerivom skupu) jezgra za koju je pripadni operator T_K ograničen sa $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ u $L^q(\mathbb{R})$ za neke eksponente p, q takve da je $1 \leq p < q \leq \infty$. Definiramo li

$$\tilde{K}(x, y) := \begin{cases} K(x, y) & \text{ako je } x \geq y, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

tada je operator $T_{\tilde{K}}$ također ograničen sa $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ u $L^q(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\|T_{\tilde{K}}\|_{L^p \rightarrow L^q} \lesssim_{p,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}.$$

Uputa: Koristite teorem 3.10 za sve “finije” blok-trokutaste aproksimacije od $\tilde{K}$.

Zadatak 3.9. Neka je $K: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lokalno integrabilna jezgra te neka su $n \in \mathbb{N}$ i $p, q \in [1, \infty]$ takvi da je $p < q$ i $q \geq 2$. Definirajmo

$$\tilde{T}(f_1, \dots, f_n)(x) := \int_{\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 \geq \dots \geq y_n\}} \left(\prod_{j=1}^n K(x, y_j) f_j(y_j) \right) dy_1 \cdots dy_n.$$

Ukoliko je T_K ograničen sa $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ u $L^q(\mathbb{R})$, tada je $\tilde{T}$ ograničen sa $C_c(\mathbb{R})^n \subseteq L^p(\mathbb{R})^n$ u $L^{q/n}(\mathbb{R})$ te vrijedi

$$\|\tilde{T}\|_{L^p \times \dots \times L^p \rightarrow L^{q/n}} \lesssim_{p,q} C^n \|T_K\|_{L^p \rightarrow L^q}^n.$$

Štoviše, u posebnom slučaju kada uzimamo n jednakih funkcija imamo

$$\|\tilde{T}(f, \dots, f)\|_{L^{q/n}} \lesssim_{p,q} \frac{1}{\sqrt{n!}} C^n \|T_K\|_{L^p \rightarrow L^q}^n \|f\|_{L^p}^n.$$

U obje nejednakosti je $C > 0$ neka univerzalna konstanta.

Uputa: Moguće je općenitije formulirati tvrdnju, više u duhu teorema 3.10, te postupiti kao u njegovom dokazu, a potom aproksimacijom dobiti kontinuirani slučaj. Malo drukčije organizirani detaljni (i prilično složeni) dokaz može se naći u [CK01a].

Zadatak 3.10. Dokažite teorem 3.13.

Uputa: Praktično je pretpostaviti $p < \varrho < q$. Kao u dokazu teorema 3.11 svedite tvrdnju na slučaj konačnih kolekcija $\emptyset = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_N = \mathbb{Y}$. Ovog puta indukcijom po $N \in \mathbb{N}_0$ dokazujete nejednakost

$$\left\| \left\| (T(f \mathbb{1}_{E_n}))_{n=0}^N \right\|_{V^{\varrho}} \right\|_{L^q} \leq D_{p,q,\varrho} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \|f\|_{L^p},$$

pri čemu je konstanta $D_{p,q,\varrho}$ dana jednadžbom

$$2^{1/\varrho-1/p} D_{p,q,\varrho} + 4C_{p,q} = D_{p,q,\varrho},$$

a $C_{p,q}$ označava implicitnu konstantu iz (3.18). Normalizirajte $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} = 1$ i $\|f\|_{L^p} = 1$ pa odaberite indeks k takav da je

$$\|f \mathbb{1}_{E_{k-1}}\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} < \|f \mathbb{1}_{E_k}\|_{L^p}^p.$$

Potom iskoristite očiglednu ocjenu

$$\|(z_n)_{n=0}^N\|_{V^{\varrho}}^{\varrho} \leq \|(z_n)_{n=0}^{k-1}\|_{V^{\varrho}}^{\varrho} + \|(z_n)_{n=k+1}^N\|_{V^{\varrho}}^{\varrho} + 2^{\varrho+1} \max_{0 \leq n \leq N} |z_n|^{\varrho}$$

uz $z_n = T(f \mathbb{1}_{E_n})(x)$, $x \in \mathbb{X}$.

Poglavlje 4

Ograničeni Calderón-Zygmundovi operatori

Teorija Calderón-Zygmundovih integralnih operatora je u više navrata poopćivana i dopunjavanja tijekom 20. stoljeća, a i sama klasa istoimenih operatora je višestruko proširivana. Npr. povijesno su se najprije proučavali translacijski invarijantni singularni integralni operatori. Standardni oblik kojeg ćemo predstaviti u ovoj skripti se već može naći u literaturi 80-tih godina prošlog stoljeća, a zainteresirani čitatelj će mnogo više detalja pronaći u opsežnoj monografiji [Ste93]. Napomenimo da ćemo se u ovom poglavlju baviti isključivo operatorima za koje unaprijed znamo da su ograničeni na prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$, a voljeli bismo ustanoviti njihovu omeđenost i na nekim drugim funkcijskim prostorima, poput $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ ili nešto zanimljivijih prostora $H^1(\mathbb{R}^d)$ i $BMO(\mathbb{R}^d)$, koje ćemo kasnije uvesti. Kod tzv. množitelja L^2 -ograničenost će biti automatska pa će tako i općeniti rezultati ovog poglavlja naći primjenu. (Karakterizacije L^2 -omeđenosti ćemo ostaviti za iduće poglavlje.) Upoznat ćemo i neke probleme kod kojih se prirodno pojavljuje Hilbertova transformacija, najjednostavniji primjer Calderón-Zygmundovog operatora. Na samom kraju poglavlja ćemo dotaknuti osnove tzv. Littlewood-Paleyve teorije.

4.1. Definicija Calderón-Zygmundovog operatora

Standardna jezgra je Borel-izmjeriva funkcija $K: \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{C}$ za koju postoji parametar $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da za svake $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$ vrijedi:

$$(K1) \quad |K(x, y)| \lesssim_{K,d} \frac{1}{|x - y|^d},$$

$$(K2) \quad |x' - x| \leq \frac{1}{2}|x - y| \Rightarrow |K(x', y) - K(x, y)| \lesssim_{K,d,\gamma} \frac{|x' - x|^\gamma}{|x - y|^{d+\gamma}},$$

$$(K3) \quad |y' - y| \leq \frac{1}{2}|x - y| \Rightarrow |K(x, y') - K(x, y)| \lesssim_{K,d,\gamma} \frac{|y' - y|^\gamma}{|x - y|^{d+\gamma}}.$$

Ako su uvjeti (K2) i (K3) zadovoljeni za neki $\gamma_0 \in \langle 0, 1 \rangle$, tada oni vrijede i za svaki $\gamma \in \langle 0, \gamma_0 \rangle$; naprosto primijetimo da je $\frac{|x'-x|}{|x-y|} \leq \frac{1}{2} < 1$ i $\frac{|y'-y|}{|x-y|} \leq \frac{1}{2} < 1$. Nadalje, u slučaju kada je $\gamma = 1$, a K je klase C^1 možemo (K2) i (K3) zamijeniti nešto jačim pretpostavkama:

$$(K2') \quad |\nabla_x K(x, y)| \lesssim_{K,d} \frac{1}{|x-y|^{d+1}},$$

$$(K3') \quad |\nabla_y K(x, y)| \lesssim_{K,d} \frac{1}{|x-y|^{d+1}},$$

pri čemu $\nabla_x K(x, y)$ označava gradijent po prvim d varijabli od $K(x, y)$, a pripadna ocjena je uniforma po zadnjih d varijabli; slično i za $\nabla_y K(x, y)$. Npr. ovako vidimo da (K2') implicira (K2):

$$\begin{aligned} |K(x', y) - K(x, y)| &= \left| \left(\int_0^1 \nabla_x K((1-\theta)x + \theta x', y) d\theta \right) \cdot (x' - x) \right| \\ &\leq \sup_{\theta \in [0,1]} |\nabla_x K((1-\theta)x + \theta x', y)| |x' - x| \\ &\lesssim_{K,d} \frac{1}{(\frac{1}{2}|x-y|)^{d+1}} |x' - x| \sim_d \frac{|x' - x|}{|x-y|^{d+1}}, \end{aligned}$$

jer je

$$|((1-\theta)x + \theta x') - y| \geq |x-y| - \theta|x-x'| \geq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Calderón-Zygmundov operator je linearni operator $T: C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ kojem je pridružena neka standardna jezgra K u smislu da za svake dvije funkcije $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ s disjunktним nosačima $\text{supp } f$ i $\text{supp } g$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)f(y)dy \right) g(x)dx, \quad (4.1)$$

tj.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(g \otimes f).$$

Pritom smo označili $(g \otimes f)(x, y) := g(x)f(y)$. Primijetimo da se na desnoj strani zapravo integrira po skupu $(\text{supp } g) \times (\text{supp } f)$, koji je disjunktan s “dijagonalom” $\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x = y\}$ pa nije važno kako na njoj dodefiniramo K . Osim toga, lako je vidjeti da je zbog (K1) jezgra K ograničena na produktu nosača od g i f pa u (4.1) slobodno možemo koristiti Fubinijev teorem i transformirati izraz po volji.

Ukoliko je T još i L^2 -ograničen, tj.

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim_T \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

za svaku $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, naprosto ćemo reći da je riječ o *ograničenom Calderón-Zygmundovom operatoru* i tada se T jednoznačno proširuje do omeđenog linearnog operatora na prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$. Isključivo takvim operatorima ćemo se baviti kroz cijelo ovo poglavlje. Uбудuće često nećemo notacijski naglašavati ovisnost implicitnih konstanti o d, γ, K i T , jer će se ona podrazumijevati.

Sljedeći su razlozi zašto ističemo baš L^2 -omeđenost:

- Prostor $L^2(\mathbb{R}^d)$ je Hilbertov i na njemu je Fourierova transformacija izometrija. Vidjet ćemo da to pojednostavljuje teoriju i omogućuje direktnu provjeru L^2 -ograničenosti u važnom specijalnom slučaju translacijski invarijantnih operatora.
- Uz prethodne pretpostavke L^2 -omeđenost implicira omeđenost (tj. neprekidnost) na mnogim drugim funkcijskim prostorima, kao što ćemo vidjeti u idućim odjeljcima.
- Postoje elegantne, primjenjive i sasvim generalne karakterizacije L^2 -ograničenosti ovakvih operatora. To je tema koju ćemo ostaviti za iduće poglavlje.

Primijetimo da je standardna jezgra K jednoznačno određena operatorom T pa je i zovemo *jezgra operatora*. Naime, kada bi postojale dvije takve jezgre K i $\tilde{K}$ pridružene T , one bi bile g.s. ograničene na $B_1 \times B_2$ za bilo koje dvije otvorene kugle $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ s disjunktним zatvaračima te bismo imali

$$\int_{B_1 \times B_2} K(g \otimes f) = \int_{B_1 \times B_2} \tilde{K}(g \otimes f)$$

za svake $g \in C_c^1(B_1)$ i $f \in C_c^1(B_2)$. Jedinstvenost sada slijedi iz činjenice da su linearne kombinacije funkcija oblika $g \otimes f$ guste u $L^1(B_1 \times B_2)$. S druge strane, više Calderón-Zygmundovih operatora može imati istu jezgru. Npr. $T_0 f := 0$ i $T_1 f := f$ oba imaju jezgru $K \equiv 0$ jer vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T_1 f)g = \int_{\mathbb{R}^d} f g = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} (T_0 f)g,$$

čim f i g imaju disjunktne nosače.

Pokažimo da neki Calderón-Zygmundovi operatori imaju direktniji prikaz, koji nazgled nije u duhu općenite definicije.

Propozicija 4.1. *Neka je K standardna jezgra koja još ima svojstvo da za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes*

$$\kappa(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \leq |x-y| \leq 1\}} K(x, y) dy \quad (4.2)$$

i pretpostavimo da je tako dobivena funkcija $\kappa: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ lokalno integrabilna. Tada za svaku $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ i za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes

$$(T_K f)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq \varepsilon\}} K(x, y) f(y) dy \quad (4.3)$$

i njime je definirana lokalno integrabilna funkcija $T_K f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Nadalje, za svake $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ s disjunktним nosačima vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T_K f)g = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x, y) f(y) g(x) dx dy.$$

Drugim riječima, formula (4.3) definira Calderón-Zygmundov operator T_K , čija jezgra je upravo K .

Ponekad kažemo da je T_K *singularni integralni operator* (u užem smislu) pridružen jezgri K . Primijetimo da ovdje K i T_K jednoznačno određuju jedno drugo. Ponekad umjesto $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq \varepsilon\}} \cdots dy$ kratko pišemo p.v. $\int_{\mathbb{R}^d} \cdots dy$.

Dokaz. Za $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ i $0 < \varepsilon < 1$ imamo jednakost

$$\begin{aligned} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq \varepsilon\}} K(x, y) f(y) dy &= \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \leq |x-y| \leq 1\}} K(x, y) (f(y) - f(x)) dy \\ &+ \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \leq |x-y| \leq 1\}} K(x, y) dy \right) f(x) + \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| > 1\}} K(x, y) f(y) dy \end{aligned}$$

pa zbog (4.2) za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes u (4.3) i iznosi

$$\int_{\{y \in \mathbb{R}^d : 0 < |x-y| \leq 1\}} K(x, y) (f(y) - f(x)) dy + \kappa(x) f(x) + \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| > 1\}} K(x, y) f(y) dy.$$

Pritom smo koristili Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji te

$$\begin{aligned} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : 0 < |x-y| \leq 1\}} |K(x, y)| |f(y) - f(x)| dy &\stackrel{(K1)}{\lesssim} \|\nabla f\|_{L^\infty} \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : 0 < |x-y| \leq 1\}} \frac{dy}{|x-y|^{d-1}} < +\infty, \\ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| > 1\}} |K(x, y)| |f(y)| dy &\stackrel{(K1)}{\lesssim} \|f\|_{L^1} < +\infty. \end{aligned}$$

Lokalna integrabilnost od $T_K f$ je sada također očigledna. Konačno, neka $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ imaju disjunktne nosače i stavimo $\varepsilon_0 := \min_{\substack{x \in \text{supp } g \\ y \in \text{supp } f}} |x - y|$. Tada za $x \in \text{supp } g$ formula

(4.3) postaje

$$(T_K f)(x) = \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq \varepsilon_0\}} K(x, y) f(y) dy$$

pa je

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T_K f) g = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy \right) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x, y) f(y) g(x) dx dy.$$

Pritom smo zbog

$$\int_{(\text{supp } g) \times (\text{supp } f)} |K(x, y) f(y) g(x)| dx dy \stackrel{(K1)}{\lesssim} \frac{1}{\varepsilon_0^d} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty$$

smjeli iskoristiti Fubinijev teorem. □

Prethodna propozicija nam već daje dosta primjera singularnih integralnih operatora Calderón-Zygmundovog tipa. Za $d = 1$ i $K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x-y}$ dobivamo Hilbertovu transformaciju spomenutu u uvodu, dok je njen prirodni dvodimenzionalni analogon Ahlfors¹-Beurlingova² transformacija dobivena za $d = 2$, $K(x, y) = \frac{-1}{\pi} \frac{1}{((x_1+ix_2)-(y_1+iy_2))^2}$, tj. u kompleksnim varijablama

$$(Bf)(z) := -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} d\lambda(w) = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{\mathbb{C}} f(z-w) \frac{d\lambda(w)}{w^2}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

Vidjet ćemo da je u oba ova slučaja konstantu $\frac{1}{\pi}$ prirodno staviti radi unitarnosti na L^2 . U višim dimenzijama imamo Rieszove³ transformacije R_j , kod kojih je $K(x, y) = \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}}$, tj.

$$(R_j f)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}} f(y) dy = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) \frac{t_j}{|t|^{d+1}} dt; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pritom x_j, y_j, t_j redom označavaju j -tu koordinatu od x, y, t . Napomenimo da je u svim tim slučajevima $\kappa \equiv \mathbf{0}$.

Kao povijesnu crticu navedimo da je razvoj teorije ovakvih integralnih operatora započet u seminalnom radu Calderóna i Zygmunda [CZ52]. U 19. i prvoj polovici 20. stoljeća je harmonijska analiza bila ključno ovisna o kompleksno-analitičkim tehnikama, koje su dobro funkcionirale samo u jednodimenzionalnom okruženju. Autori tog rada su osmislili tzv. “realnu metodu” u želji da daju zanimljivu teoriju u višim dimenzijama. Kao rezultat toga obogatili su analizu tehnikama koje su toliko općenite i prilagodljive da se i danas pronalaze i primjenjuju njihove raznolike varijante. Teorija singularnih integralnih operatora je popularnost stekla već krajem 50-tih godina kada ju je Calderón uspješno primijenio na probleme jedinstvenosti kod hiperboličkih i eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a potom su se pokazale i veze s računanjem indeksa eliptičkih operatora na mnogostrukostima. Zanimljivi popularni tekst o Calderón-Zygmundovim operatorima je npr. [Ste98].

* * *

Zadatak 4.1.

- (a) Nakon što ograničeni Calderón-Zygmundov operator T s jezgrom K proširimo do omeđenog operatora na $L^2(\mathbb{R}^d)$ (označenog opet sa T), ima smisla promatrati dualni operator T^τ (kao u odjeljku 2.1) i hermitski adjungirani operator T^* . Pokažite da su T^τ i T^* također proširenja Calderón-Zygmundovih operatora kojima su redom pridružene jezgre $K^\tau(x, y) := K(y, x)$ i $K^*(x, y) := \overline{K(y, x)}$.

Napomena: Sada je očigledan razlog zašto T^τ ponekad nazivamo transponirani operator od T .

¹Lars Valerian Ahlfors (1907–1996), finski matematičar.

²Arne Carl-August Beurling (1905–1986), švedski matematičar.

³Nazvane su po Marcelu Rieszu.

- (b) Ako su T_1 i T_2 ograničeni Calderón-Zygmundovi operatori s istom jezgrom, dokažite da postoji funkcija $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da za svaku $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $T_1 f - T_2 f = m f$.

Zadatak 4.2. Neka je K antisimetrična standardna jezgra, tj. pretpostavimo da osim (K1)–(K3) vrijedi i $K(y, x) = -K(x, y)$ za svake $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$. Dokažite da je formulom

$$\Lambda(f, g) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : |x - y| \geq \varepsilon\}} K(x, y) f(y) g(x) dx dy$$

dobro definirana bilinearna forma $\Lambda : C_c^1(\mathbb{R}^d) \times C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ te da je štoviše

$$\Lambda(f, g) = \frac{1}{2} \int_{\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : x \neq y\}} K(x, y) (f(y)g(x) - f(x)g(y)) dx dy.$$

za svake $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Primijetimo da ovdje ne pretpostavljamo disjunktnost nosača od f i g .

Napomena: Ništa nam ne garatira da doista postoji operator $T : C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ takav da vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g = \Lambda(f, g)$ za $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, ali ako to ipak jest slučaj, tada je očigledno T Calderón-Zygmundov operator s jezgrom K i vrijedi $T^* = -T$. Ustvari možemo jedino zaključiti da postoji takav $T : C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_c^1(\mathbb{R}^d)^*$, pri čemu je $C_c^1(\mathbb{R}^d)^*$ svojevrsni prostor distribucija.

4.2. Omeđenost na L^p prostorima

Ukoliko za Calderón-Zygmundov operator T znamo da je L^2 -ograničen, tada prikaz pomoću jezgre (4.1) ostaje vrijediti i u nešto općenitijem obliku. Jedinstveno proširenje od T do ograničenog operatora na $L^2(\mathbb{R}^d)$ ćemo označati istim slovom.

Prisjetimo se kako za funkciju $f \in L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ kažemo da *iščezava* na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ako je $|\{f \neq 0\} \cap U| = 0$. Komplement najvećeg (u smislu relacije $\subseteq$) otvorenog skupa na kojem f iščezava zovemo *nosač* od f i označavamo $\text{supp } f$. Ovaj tehnički detalj je neophodan, jer ako za f uzimamo različite predstavnike iste g.s.-klase izmjerivih funkcija, tada $\{f \neq 0\}$ nema smisla doslovno, već samo do na skupove mjere 0.

Lema 4.2. *Ako je T ograničeni Calderón-Zygmundov operator s jezgrom K , tada za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ s kompaktnim nosačem i za svaki $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\text{supp } f)$ vrijedi*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy. \quad (4.4)$$

Dokaz. Fiksirajmo dva otvorena skupa $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ s kompaktnim i disjunktima zatvaračima i primijetimo da je $U \times V \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto K(x, y)$ omeđena funkcija radi uvjeta (K1). Po definiciji iz prethodnog odjeljka znamo da jednakost

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x, y) g(x) f(y) dx dy \quad (4.5)$$

vrijedi za $g \in C_c^1(U)$, $f \in C_c^1(V)$. Kako su obje strane u (4.5) dobro definirane i ograničene bilinearne forme $L^2(U) \times L^2(V) \rightarrow \mathbb{C}$ u paru funkcija (g, f) , zbog gustoće zaključujemo da jednakost (4.5) ostaje vrijediti i za $g \in L^2(U)$, $f \in L^2(V)$. Konačno, zbog dualnosti $L^2(U)^* \cong L^2(U)$ zaključujemo da je (4.4) ispunjeno za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } f \subseteq V$, $x \in U$ kao g.s. jednakost funkcija na U . $\square$

Standardna kocka je svaka kocka u $\mathbb{R}^d$ čiji bridovi su paralelni koordinatnim osima, tj. skup oblika $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ za neke ograničene intervale jednakih duljina $I_1, \dots, I_d$. Za funkciju $f \in L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ i standardnu kocku Q ćemo sa $[f]_Q$ označavati prosjek od f na Q , tj.

$$[f]_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

Duljinu brida kocke Q ćemo pisati $\ell(Q)$. *Dijadska kocka* je svaka kocka u $\mathbb{R}^d$ oblika $[2^j k_1, 2^j(k_1 + 1)) \times [2^j k_2, 2^j(k_2 + 1)) \times \cdots \times [2^j k_n, 2^j(k_n + 1))$ za neke $j \in \mathbb{Z}$ i $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Kolekciju svih dijadskih kocaka u $\mathbb{R}^d$ ćemo označavati sa $\mathcal{C}$. Prednost dijadskih kocaka je njihovo očigledno svojstvo “ugnježdenosti”:

za svake $Q_1, Q_2 \in \mathcal{C}$ vrijedi ili $Q_1 \subset Q_2$ ili $Q_1 \supset Q_2$ ili $Q_1 = Q_2$ ili $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Kasnije će nam dobro doći i sljedeća jednostavna pomoćna tvrdnja.

Lema 4.3.

- (a) *Svaki omeđeni otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^d$ se može prikazati u obliku $U = \bigcup_j Q_j$ za neku najviše prebrojivu kolekciju međusobno disjunktne dijadske kocake $\{Q_j\}_j$.*
- (b) *Ako za funkciju $g \in L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$, $g \geq 0$ i konstantu $C \in [0, +\infty)$ imamo da za svaku $Q \in \mathcal{C}$ vrijedi $[g]_Q \leq C$, tada je $g(x) \leq C$ za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$.*

Dokaz. (a) Promotrimo kolekciju $\mathcal{D} := \{Q \in \mathcal{C} : Q \subseteq U\}$ i neka je $\mathcal{M}$ podkolekcija svih kocaka iz $\mathcal{D}$ koje su maksimalne obzirom na relaciju $\subseteq$. Očigledno je svaka točka $x \in U$ sadržana u nekoj kocki iz $\mathcal{D}$ pa imamo $U = \cup \mathcal{D} = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}} Q$. Osim toga za svaku $Q \in \mathcal{D}$ postoji $\tilde{Q} \in \mathcal{M}$ takva da je $Q \subseteq \tilde{Q}$, jer bi inače postojao beskonačni strogo rastući niz dijadskih kocaka sadržanih u U , što je u kontradikciji s njegovom ograničenosti. Zaključujemo $\cup \mathcal{D} = \cup \mathcal{M}$. Konačno, svake dvije kocke iz $\mathcal{M}$ su disjunktne, jer bi u protivnom jedna bila sadržana u drugoj, što proturiječi maksimalnosti. Dakle, naprosto kocke iz $\mathcal{M}$ proizvoljno uredimo u (konačni ili beskonačni) niz $Q_1, Q_2, \dots$

(b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\delta > 0$ takav da je $|\{g \geq C + \delta\}| > 0$. Zbog regularnosti Lebesgueove mjere možemo naći kompaktni skup $K \subseteq \{g \geq C + \delta\}$ takav da je $\eta := |K| > 0$ te potom omeđeni otvoreni skup $U \supseteq K$ takav da je $|U| < (1 + \frac{\delta}{C+1})|K|$. Prema (a) dijelu se skup U može rastaviti u najviše prebrojivu uniju kolekcije disjunktne dijadske kocake $\{Q_j\}_j$. Po pretpostavci imamo

$$\int_U g(x) dx = \sum_j |Q_j| [g]_{Q_j} \leq C \sum_j |Q_j| = C|U| < (C + \delta)|K|,$$

dok je s druge strane

$$\int_U g(x)dx \geq \int_K g(x)dx \geq (C + \delta)|K|,$$

što nas dovodi do kontradikcije. $\square$

Sljedeći koristan rezultat se može naći u većini udžbenika iz harmonijske analize, poput [Duo01] i [Ste70]. Napomenimo unaprijed da njegov jednostavni dokaz sugerira mnogo više od možda isprva nesugestivnih uvjeta (D1)–(D10) iz njegovog iskaza.

Teorem 4.4. (Calderón-Zygmundova dekompozicija L^1 funkcije)

Za svaku $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ i svaki $\alpha > 0$ postoje funkcija $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ te najviše prebrojivo mnogo disjunktnih dijadskih kocaka $\{Q_j\}_j$ i Borel-izmjerivih funkcija $\{b_j\}_j$, $b_j: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tako da vrijedi:

$$(D1) \quad f = g + \sum_j b_j,$$

$$(D2) \quad |g(x)| = |f(x)| \leq \alpha \text{ za g.s. } x \notin \bigcup_j Q_j,$$

$$(D3) \quad |g(x)| \lesssim_d \alpha \text{ za g.s. } x \in \bigcup_j Q_j,$$

$$(D4) \quad \|g\|_{L^2}^2 \lesssim_d \alpha \|f\|_{L^1},$$

$$(D5) \quad \left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^1},$$

$$(D6) \quad b_j(x) = 0 \text{ za svaki } j \text{ te } x \notin Q_j,$$

$$(D7) \quad \|b_j\|_{Q_j} \lesssim_d \alpha \text{ za svaki } j,$$

$$(D8) \quad [b_j]_{Q_j} = 0 \text{ za svaki } j,$$

$$(D9) \quad \|f\|_{Q_j} \sim_d \alpha \text{ za svaki } j,$$

$$(D10) \quad |Q_1| \geq |Q_2| \geq \dots \text{ te } \lim_j |Q_j| = 0 \text{ u slučaju beskonačne kolekcije.}$$

Pribrojnik g u dekompoziciji (D1) se često naziva “dobar dio”, dok za $\sum_j b_j$ kažemo da je “loš dio” od f . Dobar dio se nalazi u svim L^p prostorima za $1 \leq p \leq \infty$, dok je loš dio koncentriran na skupu dovoljno male mjere. Napomenimo da je moguće da je loš dio jednak 0 , tj. dozvoljavamo da uopće nema niti kocaka Q_j niti funkcija b_j .

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{D}$ familiju svih dijadskih kocaka Q koje zadovoljavaju $\|f\|_Q > \alpha$. Primijetimo da kocke iz $\mathcal{D}$ ne mogu biti po volji velike zbog

$$|Q| < \alpha^{-1} \int_Q |f(x)|dx \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}.$$

Potom označimo sa $\mathcal{M}$ familiju svih maksimalnih kocaka u $\mathcal{D}$ u smislu skupovne inkluzije i to će nam biti tražene kocke Q_j . Opet imamo $\bigcup \mathcal{M} = \bigcup \mathcal{D}$, kocke iz $\mathcal{M}$ su disjunktna te

$$\left| \bigcup_{Q \in \mathcal{M}} Q \right| = \sum_{Q \in \mathcal{M}} |Q| \leq \alpha^{-1} \sum_{Q \in \mathcal{M}} |Q| \|f\|_Q = \alpha^{-1} \int_{\bigcup \mathcal{M}} |f| \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^1},$$

što je upravo (D5). Posebno vidimo da postoji samo konačno mnogo kocaka iz $\mathcal{M}$ iste veličine pa sve kocke iz $\mathcal{M}$ možemo urediti $Q_1, Q_2, \dots$ kao u (D10). Zbog maksimalnosti dijadska kocka koja sadrži Q_j i ima dvostruko dulji brid, označimo ju $\tilde{Q}_j$, više ne leži u $\mathcal{D}$ pa je

$$\int_{Q_j} |f| \leq \int_{\tilde{Q}_j} |f| = 2^d |Q_j| [f]_{\tilde{Q}_j} \leq 2^d |Q_j| \alpha \Rightarrow [f]_{Q_j} \leq 2^d \alpha,$$

što daje (D9). Za svaki j definiramo

$$b_j(x) := \begin{cases} f(x) - [f]_{Q_j} & \text{za } x \in Q_j, \\ 0 & \text{za } x \notin Q_j \end{cases}$$

pa i (D6) vrijedi po definiciji. U svrhu dokaza od (D7) primijetimo

$$\int_{Q_j} |b_j| \leq \int_{Q_j} |f| + [f]_{Q_j} |Q_j| \leq 2^{d+1} \alpha |Q_j|,$$

a za (D8) napišimo

$$\int_{Q_j} b_j = \int_{Q_j} f - \frac{1}{|Q_j|} \left(\int_{Q_j} f \right) |Q_j| = 0.$$

Konačno definiramo $g := f - \sum_j b_j$, tj.

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{za } x \notin \bigcup_j Q_j, \\ [f]_{Q_j} & \text{za } x \in Q_j, \end{cases}$$

tako da je (D1) ispunjeno već po samoj konstrukciji. Kako je prosjek od $|f| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q_j)}$ po svakoj dijadskoj kocki najviše α , možemo primijeniti lemu 4.3(b) i dobiti da je ta funkcija g.s. manja ili jednaka α , a kako se još f i g podudaraju na $\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q_j)$, zaključujemo da vrijedi (D2). Provjera od (D3) za $x \in Q_j$ glasi

$$|g(x)| \leq [f]_{Q_j} \leq 2^d \alpha,$$

dok (D4) slijedi iz računa:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2}^2 &= \int_{\bigcup_j Q_j} |g|^2 + \int_{\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q_j)} |g|^2 \stackrel{(D2), (D3)}{\lesssim} \alpha^2 \left| \bigcup_j Q_j \right| + \alpha \int_{\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q_j)} |f| \\ &\stackrel{(D5)}{\lesssim} \alpha^2 \alpha^{-1} \|f\|_{L^1} + \alpha \|f\|_{L^1} \lesssim \alpha \|f\|_{L^1}. \end{aligned} \quad \square$$

Teorem 4.5.

(a) Svaki L^2 -omeđeni Calderón-Zygmundov operator T se može proširiti do omeđenog linearnog operatora sa $L^1(\mathbb{R}^d)$ u $L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R}^d)$, tj.

$$|\{|Tf| > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad (4.6)$$

za $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ i $\alpha > 0$. Implicitna konstanta ovisi samo o $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$, d , γ i implicitnim konstantama za K iz (K1)–(K3).

(b) Ako je T neki L^2 -omeđeni Calderón-Zygmundov operator i $p \in \langle 1, \infty \rangle$, onda se T može proširiti do omeđenog linearnog operatora na $L^p(\mathbb{R}^d)$, tj.

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad (4.7)$$

za svaku $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Gornja implicitna konstanta ovisi samo o p , $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$, d , γ i konstantama iz (K1)–(K3).

Dokaz. (a) Iskoristimo Calderón-Zygmundovu dekompoziciju za funkciju f i broj $\alpha > 0$ kao u iskazu propozicije. Teorem 4.4 daje familije kocaka $\{Q_j\}_j$ i funkcija $\{b_j\}_j$ koje udovoljavaju svojstvima (D1)–(D10). Za svaki j neka je Q'_j kocka s istim središtem kao i Q_j , ali $1 + 2\sqrt{d}$ puta duljim bridom. Tada vrijedi

$$\left| \bigcup_j Q'_j \right| \leq \sum_j |Q'_j| \sim_d \sum_j |Q_j| = \left| \bigcup_j Q_j \right| \stackrel{(D5)}{\leq} \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}. \quad (4.8)$$

Neka je

$$E := \{x \in \mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q'_j) : |(Tf)(x)| > \alpha\},$$

zatim stavimo $b := \sum_j b_j$ pa dalje označimo

$$E_1 := E \cap \{|Tg| > \frac{\alpha}{2}\}, \quad E_2 := E \cap \{|Tb| > \frac{\alpha}{2}\}.$$

Zbog $f = g + b$ je $E = E_1 \cup E_2$. Sada ćemo ocijeniti mjere skupova E_1 i E_2 .

Radi omeđenosti od T na $L^2(\mathbb{R}^d)$ je

$$\|Tg\|_{L^2} \leq \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|g\|_{L^2} \stackrel{(D4)}{\lesssim} \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \alpha^{1/2} \|f\|_{L^1}^{1/2}$$

pa Markov-Čebiševljeva nejednakost (1.14) daje

$$|E_1| \lesssim \alpha^{-2} \|Tg\|_{L^2}^2 \lesssim \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}. \quad (4.9)$$

Nadalje ocjenjujemo $|E_2|$. Radi $\sum_j |b_j| \leq |f| + |g|$, $f, g \in L^2$ i (D10) red $\sum_j b_j = b$ očigledno konvergira u $L^2(\mathbb{R}^d)$ pa zbog L^2 -neprekidnosti od T vrijedi $\sum_j Tb_j = Tb$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Prelaskom na podniz koji konvergira g.s., korištenjem Fatouove leme te primjenom leme 4.2 na funkciju b_j dobivamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q'_j)} |(Tb)(x)| dx &\leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^d \setminus (\bigcup_j Q'_j)} |(Tb_j)(x)| dx \leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'_j} |(Tb_j)(x)| dx \\ &= \sum_j \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'_j} \left| \int_{Q_j} K(x, y) b_j(y) dy \right| dx \\ &\stackrel{(D8)}{=} \sum_j \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'_j} \left| \int_{Q_j} (K(x, y) - K(x, y_j)) b_j(y) dy \right| dx \\ &\leq \sum_j \int_{Q_j} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'_j} |K(x, y) - K(x, y_j)| dx \right) |b_j(y)| dy, \end{aligned} \quad (4.10)$$

gdje y_j označava središte kocke Q_j . Primijetimo da iz uvjeta na jezgru (K3) integriranjem i prelaskom na polarne koordinate slijedi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq 2|y-y_j|\}} |K(x, y) - K(x, y_j)| dx \\
 & \stackrel{(K3)}{\lesssim} |y - y_j|^\gamma \int_{\{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq 2|y-y_j|\}} \frac{dx}{|x - y|^{d+\gamma}} \\
 & \sim_d |y - y_j|^\gamma \int_{2|y-y_j|}^{+\infty} \frac{r^{d-1} dr}{r^{d+\gamma}} = \frac{1}{\gamma 2^\gamma} \sim_\gamma 1.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Primijetimo da za $x \notin Q'_j$ i $y \in Q_j$ vrijedi

$$|x - y| \geq \frac{1}{2}(\ell(Q'_j) - \ell(Q_j)) = \frac{1}{2}2\sqrt{d}\ell(Q_j) \geq 2|y - y_j|.$$

Iz (4.10) i (4.11) imamo

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus (\cup_j Q'_j)} |Tb| \lesssim \sum_j \|b_j\|_{L^1} \stackrel{(D7)}{\lesssim} \alpha \sum_j |Q_j| \stackrel{(D5)}{\lesssim} \|f\|_{L^1}$$

pa iz Markov-Čebiševljeve nejednakosti dobivamo

$$|E_2| \leq \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^d \setminus (\cup_j Q'_j)} |Tb| \lesssim \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}. \tag{4.12}$$

Konačno, zbrajanjem (4.8), (4.9) i (4.12) proizlazi slaba ocjena (4.6).

(b) Iz dijela (a) znamo da je T slabo L^1 ograničen, a po pretpostavci je T ograničen na L^2 . Iz Marcinkiewiczovog teorema interpolacije (korolar 2.13) i napomene 2.14 slijedi (4.7) za sve $p \in \langle 1, 2 \rangle$.

Uzmimo sada $p \in \langle 2, \infty \rangle$. Iz zadatka 4.1 znamo da je dualni operator T^τ također Calderón-Zygmundov s istom operatorskom normom na $L^2(\mathbb{R}^d)$ i istim konstantama za jezgru pa možemo primijeniti prethodno zaključivanje na T^τ i p' te dobiti

$$\|T^\tau f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_p \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

Iz dualnosti $L^p(\mathbb{R}^d)^* \cong L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ i komentara s kraja odjeljka 2.1 konačno slijedi (4.7). $\square$

Sva ta proširenja su međusobno kompatibilna na presjecima domena. Preciznije, ako je $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ za neke $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$ tada možemo naći niz $(f_n)_{n=1}^\infty$ koji konvergira prema f i u L^p i u L^q . U oba proširenja je Tf definirano kao limes $\lim_{n \rightarrow \infty} T f_n$, koji postoji u obje norme pa mu i vrijednosti moraju biti g.s. jednake.

Primijetimo da smo u (4.11) zapravo dokazali

$$(H1) \quad \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq 2|x-x'|\}} |K(x, y) - K(x', y)| dy \lesssim 1 \text{ za } x, x' \in \mathbb{R}^d,$$

$$(H2) \quad \int_{\{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| \geq 2|y-y'|\}} |K(x, y) - K(x, y')| dx \lesssim 1 \text{ za } y, y' \in \mathbb{R}^d.$$

Ta svojstva od K se zovu *Hörmanderovi*⁴ uvjeti i ona (kao što smo vidjeli) mogu nadomjestiti uvjete (K2) i (K3).

Previše bi bilo od operatora T očekivati (jaku) ograničenost na $L^1(\mathbb{R}^d)$; ona ne vrijedi čak ni specijalno za Hilbertovu transformaciju; vidjeti primjer 4.9(a) u idućem odjeljku.

4.3. Hilbertova transformacija

Kao što smo već bili naveli, Hilbertova transformacija je inicijalno definirana kao linearni operator $H: C_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R})$ zadan formulom

$$(Hf)(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R} : |x-y| \geq \varepsilon\}} \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \varepsilon\}} f(x-t) \frac{dt}{t} \quad (4.13)$$

za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$. Za funkciju $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ egzistencija gornjeg limesa i lokalna integrabilnost od Hf slijede iz propozicije 4.1.

Pokažimo najprije da se Hilbertova transformacija može definirati i nešto drugačijom formulom.

Lema 4.6. Za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{t dt}{t^2 + \varepsilon^2}.$$

Dokaz. Zapravo trebamo dokazati

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} dt - \int_{\{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \varepsilon\}} f(x-t) \frac{1}{t} dt \right) = 0. \quad (4.14)$$

Označimo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) := \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} & \text{ako je } |t| < 1, \\ \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} & \text{ako je } |t| \geq 1 \end{cases}$$

i za $\varepsilon > 0$ stavimo $\varphi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, tj.

$$\varphi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} & \text{ako je } |t| < \varepsilon, \\ \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{t} & \text{ako je } |t| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Lako se vidi $|\varphi(t)| \leq \frac{1}{t^2+1}$ za sve $t \in \mathbb{R}$, a zbog neparnosti imamo $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 0$. Zato za $x \in \mathbb{R}$ izraz na lijevoj strani od (4.14) postaje

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \varphi_\varepsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\varepsilon s) - f(x)) \varphi(s) ds.$$

⁴Lars Valter Hörmander (1931–2012), švedski matematičar.

Kako je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(x - \varepsilon s) - f(x)) = 0, \quad \|f\|_{L^\infty} < +\infty, \quad \|\varphi\|_{L^1} < +\infty,$$

primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f * \varphi_\varepsilon)(x) = 0$. $\square$

Kao direktnu posljedicu posljednjeg prikaza pokazat ćemo vezu Hilbertove transformacije s *Cauchyjevim integralom* duž realnog pravca. Za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ je formulom

$$(Cf)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt; \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

definirana holomorfna funkcija Cf na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Da bismo se “vratili” na realni pravac promatramo limese

$$(C_{\downarrow}f)(x) := \lim_{y \rightarrow 0^+} (Cf)(x + iy), \quad (C_{\uparrow}f)(x) := \lim_{y \rightarrow 0^-} (Cf)(x + iy)$$

u svim točkama $x \in \mathbb{R}$ za koje oni postoje.

Korolar 4.7. (Plemelj⁵ formule) *Za svake $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{R}$ postoje gornji limesi te vrijedi*

$$(C_{\downarrow}f)(x) + (C_{\uparrow}f)(x) = i(Hf)(x), \quad (C_{\downarrow}f)(x) - (C_{\uparrow}f)(x) = f(x),$$

tj.

$$(C_{\downarrow}f)(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{i}{2}(Hf)(x), \quad (C_{\uparrow}f)(x) = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{i}{2}(Hf)(x).$$

Dokaz. Iz računa

$$\begin{aligned} (Cf)(x + i\varepsilon) + (Cf)(x - i\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\frac{1}{t - x - i\varepsilon} + \frac{1}{t - x + i\varepsilon} \right) dt \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{x - t}{(x - t)^2 + \varepsilon^2} dt = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x - t) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} dt \end{aligned}$$

i leme 4.6 slijedi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((Cf)(x + i\varepsilon) + (Cf)(x - i\varepsilon)) = i(Hf)(x).$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} (Cf)(x + i\varepsilon) - (Cf)(x - i\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\frac{1}{t - x - i\varepsilon} - \frac{1}{t - x + i\varepsilon} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{\varepsilon}{(x - t)^2 + \varepsilon^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x - t) \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2} dt = \int_{\mathbb{R}} f(x - \varepsilon s) \frac{ds}{\pi(s^2 + 1)}, \end{aligned}$$

tj.

$$(Cf)(x + i\varepsilon) - (Cf)(x - i\varepsilon) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x - \varepsilon s) - f(x)) \frac{ds}{\pi(s^2 + 1)}$$

⁵Josip Plemelj (1873–1967), slovenski matematičar.

pa teoremom o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((Cf)(x + i\varepsilon) - (Cf)(x - i\varepsilon) - f(x)) = 0.$$

Sada je jasno da postoje i definicijski limesi od $C_\downarrow$ i $C_\uparrow$ te da vrijede sve četiri navedene formule. $\square$

Osnovna svojstva Hilbertove transformacije su sakupljena u idućem teoremu.

Teorem 4.8.

- (a) Za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ i g.s. $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi $(Hf)^\wedge(\xi) = (-i \operatorname{sgn} \xi) \hat{f}(\xi)$.
- (b) Hilbertova transformacija se proširuje do izometrije na $L^2(\mathbb{R})$, koju ponovno označavamo s H i za koju ostaje vrijediti formula iz (a) dijela. Štoviše, imamo $H^*H = HH^* = I$ i $H^* = -H$.
- (c) Za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$ se H proširuje do omeđenog linearnog operatora na $L^p(\mathbb{R})$, kojeg ponovno označavamo s H . Štoviše, vrijedi $H^2 = -I$, tj. preciznije, za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $f \in L^p(\mathbb{R})$ imamo $H(Hf) = -f$.

Dokaz. (a) Označimo $\psi_\varepsilon(x) := \frac{x}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$ i $\Psi_\varepsilon(\xi) := (-i \operatorname{sgn} \xi) e^{-2\pi\varepsilon|\xi|}$ za $\varepsilon > 0$. Tvrdimo da je $\hat{\psi}_\varepsilon = \Psi_\varepsilon$, a zahvaljujući Fourierovoj formuli inverzije (2.33) možemo radije provjeriti $\check{\Psi}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$, što je pak sasvim direktno zbog $\Psi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \check{\Psi}_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} (-i \operatorname{sgn} \xi) e^{-2\pi\varepsilon|\xi|} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= i \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi(\varepsilon + ix)} d\xi - i \int_0^{+\infty} e^{2\pi\xi(-\varepsilon + ix)} d\xi \\ &= \frac{i}{2\pi(\varepsilon + ix)} - \frac{i}{2\pi(\varepsilon - ix)} = \frac{x}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \psi_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Neka je funkcija $g \in L^2(\mathbb{R})$ definirana kao inverzna Fourierova transformacija od $\xi \mapsto (-i \operatorname{sgn} \xi) \hat{f}(\xi)$. Iz Plancherelovog identiteta, formule (2.36) i teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|g - f * \psi_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\hat{g} - \hat{f} \Psi_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 - e^{-2\pi\varepsilon|\xi|})^2 d\xi = 0.$$

Dakle, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f * \psi_\varepsilon = g$ u L^2 normi, a po lemi 4.6 znamo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f * \psi_\varepsilon = Hf$ g.s. Zato mora vrijediti $Hf = g$ g.s., a posebno je onda i $(Hf)^\wedge(\xi) = \hat{g}(\xi) = (-i \operatorname{sgn} \xi) \hat{f}(\xi)$.

(b) Radi (a) dijela i Planchereovog identiteta imamo za bilo koju $f \in C_c^1(\mathbb{R})$

$$\|Hf\|_{L^2} = \|(Hf)^\wedge\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

pa je jasno da se H jednoznačno proširuje do omeđenog linearnog operatora na $L^2(\mathbb{R})$, koji je štoviše i izometrija. Kako su

$$f \mapsto (Hf)^\wedge \quad \text{i} \quad f \mapsto (-i \operatorname{sgn} \xi) \hat{f}(\xi)$$

dva omeđena linearna operatora na $L^2(\mathbb{R})$, zaključujemo da formula iz (a) doista ostaje vrijediti za sve $f \in L^2(\mathbb{R})$. Osim toga Plancherelov identitet (preciznije, njegova varijanta za skalarni produkt, a ne samo normu, koja lagano slijedi tzv. polarizacijom) još za $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ daje

$$\begin{aligned}\langle H^* f, g \rangle_{L^2} &= \langle f, Hg \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, (Hg)^\wedge \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{(-i \operatorname{sgn} \xi) \hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (i \operatorname{sgn} \xi) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = -\langle (Hf)^\wedge, \hat{g} \rangle_{L^2} = -\langle Hf, g \rangle_{L^2},\end{aligned}$$

odakle slijedi $H^* = -H$. Na vrlo sličan način dobivamo $H^*H = HH^* = I$.

(c) Kako je H posebni slučaj L^2 -ograničenog Calderón-Zygmundovog operatora, iz teorema 4.5 znamo da se H jednoznačno proširuje do omeđenog linearnog operatora na $L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Za $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ već iz (b) dijela vidimo da je $H(Hf) = -f$, a radi neprekidnosti proširenja od H i gustoće ta jednakost ostaje vrijediti i za sve $f \in L^p(\mathbb{R})$. $\square$

Kao posljedicu korolara 4.7 i teorema 4.8 dobivamo da su linearni operatori $C_\downarrow$ i $C_\uparrow$ također ograničeni na $L^p(\mathbb{R})$ za $1 < p < \infty$. U svjetlu prethodnog teorema razumno je zapitati se kolika je točno norma Hilbertove transformacije na Lebesgueovim prostorima. Pichorides [Pic72] je dokazao

$$\|H\|_{L^p \rightarrow L^p} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2p^*}\right); \quad p \in \langle 1, \infty \rangle, \quad p^* := \max\{p, p'\}.$$

Primijetimo da Hilbertova transformacija komutira s translacijama i dilatacijama, tj.

$$H(T_c f) = T_c(Hf), \quad H(D_a f) = D_a(Hf) \quad (4.15)$$

za $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $c \in \mathbb{R}$ i $a > 0$. Obje formule su očigledne po definiciji (4.13) za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, a općenito slijede po neprekidnosti proširenja i operatora T_c , D_a na $L^p(\mathbb{R})$. Vrijedi i svojevrsni obrat te činjenice, koji dodatno ističe posebnu ulogu Hilbertove transformacije; vidjeti zadatak 4.5.

Primjer 4.9. (a) Pokažimo da za $f(x) := \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ vrijedi $(Hf)(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}$. Ne smijemo koristiti definicijsku formulu (4.13) jer f nema kompaktan nosač. Zato sasvim isto kao u dokazu teorema 4.8(a) dobijemo $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ pa iz dokazane formule slijedi $(Hf)^\wedge = \Psi_1 = \hat{\psi}_1$, tj. $(Hf)(x) = \psi_1(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}$. Primijetimo $f \in L^1(\mathbb{R})$, $Hf \notin L^1(\mathbb{R})$ pa vidimo da H nije ograničena na $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Pokažimo da je

$$(H\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|. \quad (4.16)$$

To bi direktno slijedilo iz definicije (4.13) kada bismo smjeli uvrstiti $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$,

$$(H\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_a^b \frac{dt}{x-t},$$

ali (barem zasad) ne znamo da ista definicijska relacija vrijedi za funkcije koje čak nisu niti glatke. Zato radije koristimo formulu iz teorema 4.8(a). Primijetimo da je zbog (4.15) dovoljno provjeriti (4.16) za $a = -1$, $b = 1$.

Po definiciji Fourierove transformacije je

$$\hat{\mathbb{1}}_{[-1,1]}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-1}^1 \cos(2\pi x \xi) dx = \frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi}.$$

S druge strane, označimo li $g(x) := \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$, možemo zahvaljujući korolaru 3.12 i neparnosti od g uz pomoć malo kompleksne analize lako opravdati sljedeći račun za g.s. $\xi > 0$.

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = (-i) \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g(x) \sin(2\pi x \xi) dx \\ &= \frac{-i}{\pi} \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow 0^+}} \int_{[-R, -1-\delta] \cup [-1+\delta, 1-\delta] \cup [1+\delta, R]} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \sin(2\pi x \xi) dx \\ &= \frac{i}{\pi^2 \xi} \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow 0^+}} \int_{[-R, -1-\delta] \cup [-1+\delta, 1-\delta] \cup [1+\delta, R]} \frac{\cos(2\pi x \xi)}{x^2 - 1} dx = \frac{-i \sin(2\pi \xi)}{\pi \xi}. \end{aligned}$$

Zato je $(H\mathbb{1}_{[-1,1]})(\xi) = \hat{g}(\xi)$ pa doista imamo $H\mathbb{1}_{[-1,1]} = g$.

Na kraju ovog odjeljka još dokažimo jednu zanimljivu formulu Steina i Weissa [SW59], koja govori o distribuciji Hilbertove transformacije karakteristične funkcije izmjerivog skupa. Jednostavniji dokaz čiju varijantu navodimo predložio je Zygmund u [Zyg71].

Teorem 4.10. *Ako je $E \subseteq \mathbb{R}$ izmjerivi skup konačne mjere, tada za svaki $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ vrijedi*

$$|\{ |H\mathbb{1}_E| > \alpha \}| = \frac{2|E|}{\text{sh}(\pi\alpha)}.$$

Dokaz. Najprije tvrdnju dokazujemo za konačne unije intervala, tj. za skupove oblika $E = \bigcup_{j=1}^n \langle a_j, b_j \rangle$, pri čemu su $n \in \mathbb{N}$ i

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n.$$

Iz primjera 4.9(b) i linearnosti dobivamo izraz

$$(H\mathbb{1}_E)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x - a_j}{x - b_j} \right| = \frac{1}{\pi} \ln \left| \prod_{j=1}^n \frac{x - a_j}{x - b_j} \right|.$$

Lako je skicirati tok te funkcije; pogledajte sliku 4.1. Neka su:

- $x_1, \dots, x_n$ rješenja jednadžbe $\prod_{j=1}^n \frac{x - a_j}{x - b_j} = -e^{\pi\alpha}$,
- $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ rješenja jednadžbe $\prod_{j=1}^n \frac{x - a_j}{x - b_j} = e^{\pi\alpha}$,

pa tvrdnja konačno slijedi iz $\operatorname{cth} \frac{\pi\alpha}{2} - \operatorname{th} \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{\operatorname{sh}(\pi\alpha)}$.

Sada ćemo postupno proširiti tu tvrdnju na generalne izmjerive skupove E . Prije svega dokažimo sljedeće: Ako tvrdnja vrijedi za sve članove niza izmjerivih skupova $(E_n)_{n=1}^\infty$ i ako je E izmjerivi skup takav da imamo $\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n \triangle E| = 0$, tada tvrdnja vrijedi i za sam skup E . (Ovdje $A \triangle B$ označava simetričnu razliku, tj. $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.) Primijetimo da radi teorema 4.8(b) imamo

$$\|H(\mathbb{1}_{E_n} - \mathbb{1}_E)\|_{L^2}^2 = \|\mathbb{1}_{E_n} - \mathbb{1}_E\|_{L^2}^2 = |E_n \triangle E|.$$

Fiksirajmo $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ te uzmimo neke $\varepsilon \in \langle 0, \alpha \rangle$ i $n \in \mathbb{N}$. Korištenjem očigledne skupovne relacije

$$\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\} \subseteq \{|H\mathbb{1}_{E_n}| > \alpha - \varepsilon\} \cup \{|H\mathbb{1}_{E_n} - H\mathbb{1}_E| > \varepsilon\},$$

pretpostavke na E_n i Markov-Čebiševljeve nejednakosti ocjenjujemo

$$|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}| \leq \frac{2|E_n|}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha - \varepsilon))} + \frac{|E_n \triangle E|}{\varepsilon^2}. \quad (4.17)$$

Sasvim analogno dobivamo

$$|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}| \geq \frac{2|E_n|}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha + \varepsilon))} - \frac{|E_n \triangle E|}{\varepsilon^2}. \quad (4.18)$$

U (4.17) i (4.18) najprije pustimo limes kada $n \rightarrow \infty$, a potom kada $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Zaključujemo da doista vrijedi $|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}| = \frac{2|E|}{\operatorname{sh}(\pi\alpha)}$, tj. ispunjena je tvrdnja i za skup E .

Proizvoljni otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}$ je najviše prebrojiva unija disjunktih otvorenih intervala. Dakle, možemo U prikazati kao rastuću uniju niza $(V_n)_{n=1}^\infty$, pri čemu su V_n konačne unije intervala. Već smo provjerili da tvrdnja vrijedi za skupove V_n pa po prethodnoj napomeni ona vrijedi i za skup U . Proizvoljni skup konačne mjere $E \subseteq \mathbb{R}$ se zbog regularnosti Lebesgueove mjere može do na skup mjere 0 prikazati kao presjek niza otvorenih skupova konačne mjere $(U_n)_{n=1}^\infty$. Netom smo pokazali da tvrdnja vrijedi za skupove U_n pa po prethodnoj napomeni ona vrijedi i za skup E . $\square$

Kombinirajući teorem 4.10 s realnom interpolacijom mogli bismo dati alternativni dokaz omeđenosti od H na L^p prostorima, jedino što bi u tom slučaju argument bio kružni, jer smo kod aproksimacije na kraju dokaza teorema 4.10 trebali neku vrstu neprekidnosti.

* * *

Premda smo dosad u ovom odjeljku radili isključivo u jednoj dimenziji, vratimo se na već spomenute Rieszove transformacije R_j ; $j = 1, 2, \dots, d$, koje su zapravo d -dimenzionalni analogoni Hilbertove transformacije. Može se pokazati (i ostavljeno je čitatelju kao zadatak 4.7) da za Rieszove transformacije vrijedi analogon teorema 4.8(a):

$$(R_j f)(\xi) = c_d \frac{-i\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \quad (4.19)$$

za neku konstantu $c_d \in \langle 0, +\infty \rangle$ te za svaku $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ i za g.s. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Plancherelov teorem daje ograničenost od R_j na $L^2(\mathbb{R}^d)$, a kako je riječ o Calderón-Zygmundovim operatorima, R_j su ograničene i na $L^p(\mathbb{R}^d)$; $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Kao posljedice od (4.19) dobivamo i nekoliko korisnih primjena Rieszovih transformacija.

Propozicija 4.11. (a) Ako neprekidna proširenja od R_j na $L^2(\mathbb{R}^d)$ označimo istim slovom, tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^d R_j^2 = -c_d^2 I_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \sum_{j=1}^d \|R_j f\|_{L^2}^2 = c_d^2 \|f\|_{L^2}^2; \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

(b) Za $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ te $j, k \in \{1, \dots, d\}$ vrijedi

$$\partial_j \partial_k f = -c_d^{-2} R_j R_k \Delta f, \quad \|\partial_j \partial_k f\|_{L^p} \lesssim_{d,p} \|\Delta f\|_{L^p}.$$

Dio (a) ove propozicije govori o mogućnosti dekompozicije identitete. Prva formula u (b) dijelu izražava proizvoljnu parcijalnu derivaciju drugog reda pomoću Laplasijana, a druga formula se ponekad naziva *eliptička regularnost*.

Dokaz. (a) Računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d (R_j^2 f)(\xi) &\stackrel{(4.19)}{=} c_d^2 \sum_{j=1}^d \frac{-\xi_j^2}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi) = -c_d^2 \hat{f}(\xi), \\ \sum_{j=1}^d \|(R_j^2 f)\|_{L^2}^2 &\stackrel{(4.19)}{=} c_d^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = c_d^2 \|\hat{f}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

(b) Dvostrukom parcijalnom integracijom je lako izračunati Fourierov transformat funkcije $\partial_j \partial_k f$:

$$\begin{aligned} (\partial_j \partial_k f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_j \partial_k f)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-2\pi i \xi_j) (-2\pi i \xi_k) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = -4\pi^2 \xi_j \xi_k \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

a posebno imamo i

$$(\Delta f)(\xi) = -4\pi^2 \left(\sum_{j=1}^d \xi_j^2 \right) \hat{f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

Sada je prva tvrdnja očigledna radi

$$c_d^{-2} (R_j R_k g)(\xi) \stackrel{(4.19)}{=} \frac{-\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{g}(\xi),$$

a druga slijedi iz ograničenosti Rieszovih transformacija na $L^p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Kakva je veza Rieszovih transformacija s Rieszovim potencijalom? Uzmimo operator I_s iz primjera 3.1 u posebnom slučaju $s = 1$ te derivirajmo njegovu definicijsku formulu ne opravdavajući račun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-1}} dy &= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \right) f(y) dy \\ &= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{-(d-1)(x_j - y_j)}{|x-y|^{d+1}} f(y) dy. \end{aligned}$$

Dakle, mogli bismo pisati

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (I_1 f)(x) = -(d-1)(R_j f)(x)$$

te

$$\nabla(I_1 f) = -(d-1)(R_1 f, \dots, R_d f).$$

U dimenziji $d = 2$, ako $(I_1 f)(x)$ predstavlja elektrostatski potencijal u točki x , onda je vektor $((R_1 f)(x), (R_2 f)(x))$ do na konstantu jednak elektrostatskom polju u toj istoj točki.

* * *

Zadatak 4.3.

- (a) Dokažite Cotlarovu⁷ formulu

$$(Hf)^2 = f^2 + 2H(fHf)$$

za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$.

- (b) Dokažite

$$\|H\|_{L^{2p} \rightarrow L^{2p}} \leq \|H\|_{L^p \rightarrow L^p} + \sqrt{\|H\|_{L^p \rightarrow L^p}^2 + 1}$$

za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

- (c) Korištenjem (b) dijela i izometričnosti Hilbertove transformacije dajte alternativni dokaz omeđenosti od H na prostorima $L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Zadatak 4.4.

- (a) Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ takva da je i $Hf \in L^1(\mathbb{R})$, dokažite da mora biti $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$.
- (b) Nađite primjer funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ koja nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$ i za koju je $Hf \in L^1(\mathbb{R})$.

⁷Mischa Cotlar (1912–2007), ukrajinski matematičar.

Zadatak 4.5. Ako je $T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ omeđeni linearni operator koji komutira s translacijama i dilatacijama, tada je $T = \alpha I + \beta H$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Uputa: Promotrite linearni operator $S: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definiran sa $Sg := (T\check{g})^\wedge$, koji radi leme 3.6 komutira s modulacijama i dilatacijama. Uzmite $g \in L^1(\mathbb{R})$ takvu da je $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ te pogodno odabranu $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ i opravdajte formalni račun

$$\begin{aligned} (g\varphi)(x) &= \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \right) \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) (M_\xi \varphi)(x) d\xi \\ \Rightarrow S(g\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) S(M_\xi \varphi)(x) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) (M_\xi S\varphi)(x) d\xi = g(x) (S\varphi)(x), \end{aligned}$$

iz kojeg zaključite da je S oblika $Sg = mg$ za neku $m \in L^\infty(\mathbb{R})$. Potom još iskoristite invarijantnost na dilatacije kako biste dobili da je m konstantna na $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$. Alternativno, čitatelj koji poznaje osnove teorije distribucija može pogledati u [SW71] i [Ste70].

Zadatak 4.6. Ako je μ konačna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, onda se Hilbertova transformacija of μ po analogiji definira kao

$$(H\mu)(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{t \in \mathbb{R} : |x-t| \geq \varepsilon\}} \frac{1}{x-t} d\mu(t).$$

Uzmimo različite realne točke $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ i stavimo $\mu = \sum_{j=1}^n \delta_{x_j}$, tj. μ je zbroj Diracovih masa koncentriranih u navedenim točkama. Za svaki $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ dokažite jednakost

$$|\{ |H\mu| > \alpha \}| = \frac{2n}{\pi\alpha}.$$

Zadatak 4.7. Neka su $R_1, \dots, R_d$ Rieszove transformacije. Dokažite da postoji konstanta $c_d \in \langle 0, +\infty \rangle$ (ovisna samo o dimenziji prostora) takva da je

$$(R_j f)(\xi) = -ic_d \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi); \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad j = 1, \dots, d$$

za svaku $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.

Zadatak 4.8. Neka je B Ahlfors-Beurlingova transformacija definirana krajem odjeljka 4.1. Dokažite da za $f \in C_c^1(\mathbb{C})$ vrijedi

$$(Bf)(\xi) = (\bar{\xi}/\xi) \hat{f}(\xi); \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

pa zaključite da se B proširuje do linearne izometrije na $L^2(\mathbb{C})$.

Napomena: Zanimljivo je spomenuti kako do danas nije poznata točna norma od B na prostorima $L^p(\mathbb{C})$ za $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Poznata Iwaniecova⁸ slutnja [BMS97] glasi $\|B\|_{L^p \rightarrow L^p} = p^* - 1$, pri čemu je $p^* := \max\{p, p'\}$.

⁸Tadeusz Iwaniec (1947), poljsko-američki matematičar.

4.4. Poissonov integral

U ovom odjeljku svakoj funkciji iz $L^p(\mathbb{R})$ pridružiti ćemo jednu harmonijsku funkciju na gornjoj poluravnini. Potom ćemo pokazati vezu Hilbertove transformacije i operacije tzv. konjugiranja pripadnih harmonijskih funkcija. To je treći način na koji se prirodno dolazi do operatora H .

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje, tj. otvoren i povezan skup. Za kompleksnu funkciju $u \in C^2(\Omega)$ kažemo da je *harmonijska* ako zadovoljava Laplaceovu⁹ jednadžbu:

$$\Delta u = 0 \text{ na } \Omega, \quad \text{tj. } (\partial_x^2 + \partial_y^2)u(x, y) = 0 \text{ za svaku točku } (x, y) \in \Omega.$$

Očigledno je kompleksna funkcija harmonijska ako i samo ako su harmonijske njezin realni i imaginarni dio. Nadalje, poznata je činjenica da je realna funkcija na jednostavno povezanom području harmonijska ako i samo je ona realni dio neke holomorfne funkcije. Odavde posebno proizlazi da su harmonijske funkcije automatski klase C^∞ .

Pretpostavimo sada dodatno da je područje Ω jednostavno povezano i uzmimo dvije harmonijske funkcije $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Kažemo da je v *harmonijski konjugat* od u ako te funkcije zadovoljavaju Cauchy-Riemannove¹⁰ jednadžbe:

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y), \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \quad \text{za svaku točku } (x, y) \in \Omega.$$

Zbog pretpostavke na Ω za fiksiranu funkciju u taj sustav ima rješenje v , koje je jedinstveno do na aditivnu konstantu. (Ako je v harmonijski konjugat od u , tada je to svakako i funkcija $v + C$ za bilo koji $C \in \mathbb{C}$.) Ukoliko su u, v realne, iz osnovnog kursa kompleksne analize znamo da one zadovoljavaju gornje jednadžbe ako i samo ako je $u + iv$ holomorfna funkcija na Ω . Na taj način možemo naći mnogo harmonijski konjugiranih parova. Naprimjer,

$$P(x, y) := \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}, \quad Q(x, y) := \frac{x}{\pi(x^2 + y^2)}$$

su harmonijske funkcije na gornjoj poluravnini $\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle$ i Q je harmonijski konjugat od P . To lako provjerimo tako da uočimo da je

$$P(x, y) + iQ(x, y) = \frac{y + ix}{\pi(x^2 + y^2)} = \frac{i(x - iy)}{\pi(x + iy)(x - iy)} = \frac{i}{\pi(x + iy)}$$

holomorfna funkcija u varijabli $z = x + iy$ na $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. One imaju i posebna imena; P zovemo Poissonova jezgra, a Q konjugirana Poissonova jezgra (pridružene gornjoj poluravnini).

Uzmimo sada $p \in [1, \infty]$ i $f \in L^p(\mathbb{R})$. Formulom

$$u(x, y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)P(x - t, y)dt \quad \text{za svaku točku } (x, y) \in \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle,$$

tj.

$$u(\cdot, y) = f * P(\cdot, y) \quad \text{za svaki } y \in \langle 0, +\infty \rangle$$

⁹Pierre-Simon Laplace (1749–1827), francuski matematičar, fizičar i astronom.

¹⁰Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), njemački matematičar.

definirana je harmonijska funkcija na gornjoj poluravnini, $u: \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{C}$. Naime, $P(\cdot, y)$ se svakako nalazi u prostoru $L^p(\mathbb{R})$ pa je $u(x, y)$ dobro definirani kompleksni broj, a harmoničnost od u lako slijedi iz harmoničnosti od P i rezultata o deriviranju integrala. Kažemo da je u *Poissonov integral* od f . Sasvim analogno može se uzeti $p \in [1, \infty)$ i $f \in L^p(\mathbb{R})$ te staviti

$$v(x, y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)Q(x-t, y)dt \quad \text{za svaku točku } (x, y) \in \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle.$$

Opet se lako vidi da je tom formulom definirana harmonijska funkcija $v: \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ i ona je, štoviše, harmonijski konjugat od u . Nadalje, među svim harmonijskim konjugatima od u funkcija v je onaj koji iščezava u beskonačnosti, tj. $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} v(x, y) = 0$.

Sasvim legitimno pitanje je vezano uz invertiranje pridruživanja $f \mapsto u$: može li se u gotovo svakoj točki $x \in \mathbb{R}$ vrijednost $f(x)$ rekonstruirati iz $u(x, y)$ puštanjem $y \rightarrow 0^+$. Odgovor je potvrđan, kao što smo već bili najavili u tvrdnji (4) iz odjeljka 1.1. To će biti posljedica općenitijih rezultata iz odjeljka 6.1; pogledajte formulu (6.3). Zasad se zadovoljimo rekonstrukcijom neprekidno diferencijabilne funkcije s kompaktnim nosačem.

Dakle, pretpostavimo dodatno $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Iz dokaza Plemeljevih formula (kolar 4.7) znamo da je

$$\begin{aligned} (Cf)(x+iy) - (Cf)(x-iy) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)P(t, y)dt = u(x, y), \\ (Cf)(x+iy) + (Cf)(x-iy) &= i \int_{\mathbb{R}} f(x-t)Q(t, y)dt = iv(x, y) \end{aligned}$$

te da je

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} ((Cf)(x+iy) - (Cf)(x-iy)) &= f(x), \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} ((Cf)(x+iy) + (Cf)(x-iy)) &= i(Hf)(x). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = f(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} v(x, y) = (Hf)(x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Prvi limes možemo interpretirati: pridruživanje $f \mapsto u$ se za funkcije iz $C_c^1(\mathbb{R})$ invertira uzimanjem vertikalnog limesa u točkama realnog pravca. Drugi limes možemo rezimirati riječima: Hilbertova transformacija od f može se računati tako da se najprije izračuna njezin Poissonov integral $u = u(x, y)$, potom izračuna harmonijski konjugat $v = v(x, y)$ koji iščezava u beskonačnosti te, konačno, prijeđe na limes kada $y \rightarrow 0^+$.

Vidimo da je Hilbertova transformacija usko vezana uz operaciju konjugiranja harmonijskih funkcija. Time je ilustrirana korisnost harmonijskih funkcija kod proučavanja singularnih integrala. Ipak, analogne reprezentacije ne možemo očekivati za integralne operatore iz neke široke klase, poput općenitih Calderón-Zygmundovih operatora.

* * *

Zadatak 4.9. Izračunajte Poissonov integral funkcije:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1},$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$

Rješenje:

(a) $u(x, y) = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2},$

(b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}.$

Zadatak 4.10. Neka je u realna harmonijska funkcija na Ω i v njezin harmonijski konjugat. Za bilo koje $a, b \in \mathbb{R}$ promotrimo *nivo-krivulje*

$$\Gamma_1 = \{z \in \Omega : u(z) = a\}, \quad \Gamma_2 = \{z \in \Omega : v(z) = b\}.$$

(Pretpostavimo da su neprazne i nedegenerirane u svakoj točki, tj. $\nabla u \neq \mathbf{0}$ na Γ_1 i $\nabla v \neq \mathbf{0}$ na Γ_2 .) Pokažite da se u svakoj točki presjeka od Γ_1 i Γ_2 te dvije krivulje sijeku pod pravim kutom.

Zadatak 4.11. Neka je $\mathcal{P}_1$ tzv. *eliptički pramen kružnica*, definiran kao skup svih kružnica koje prolaze kroz točke $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, a $\mathcal{P}_2$ tzv. *hiperbolički pramen kružnica*, koji se sastoji od svih kružnica dobivenih kao geometrijska mjesta točaka ravnine s fiksnim omjerom udaljenosti od točaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

- (a) Nađite holomorfnu funkciju $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ takvu da $\mathcal{P}_1$ čini nivo-skupove od $\operatorname{Re} f$, a $\mathcal{P}_2$ čini nivo-skupove od $\operatorname{Im} f$.
- (b) Zaključite da su dva spomenuta pramena kružnica ortogonalno spregnuti, tj. svaka kružnica iz prvog pramena siječe pod pravim kutom svaku kružnicu iz drugog pramena. Razmislite i o elementarnom dokazu te tvrdnje.

Zadatak 4.12. Izračunajte harmonijske konjugate sljedećih funkcija na zadanim područjima.

(a) $u(x, y) = e^x \sin y \quad \text{na } \mathbb{R}^2,$

(b) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + i(x + y) \quad \text{na } \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle,$

(c) $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2) + i(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad \text{na } \mathbb{R}^2,$

(d) $u(re^{2\pi i\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2} \quad \text{na } B(\mathbf{0}, 1).$

Rješenje:

(a) $v(x, y) = -e^x \cos y + C,$

(b) $v(x, y) = -2\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + i(-x + y) + C,$

(c) $v(x, y) = y(3x^2 - y^2) + i4xy(x^2 - y^2) + C,$

(d) $v(re^{2\pi i\theta}) = \frac{2r\sin(2\pi\theta)}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2} + C.$

4.5. Fourierovi množitelji

Za bilo koju funkciju $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ je zahvaljujući Plancherelovom identitetu dobro definiran ograničeni linearni operator M_m ,

$$M_m: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad M_m f := (m\hat{f})^\vee.$$

Za operator M_m kažemo da je *Fourierov množitelj* (ili kratko samo *množitelj*), a za funkciju m da je njegov *simbol*. Ponekad se radi Fourierove formule inverzije piše integralni izraz

$$(M_m f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

ali s njime valja biti oprezan, jer on ima smisla samo kada je $m\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Primjer 4.12. Iz teorema 4.8(a) znamo da je Hilbertova transformacija množitelj čiji simbol je $m(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi$.

Lema 4.13. $\|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|m\|_{L^\infty}$.

Dokaz. Jedna nejednakost je očigledna zbog Plancherelovog identiteta:

$$\|M_m f\|_{L^2} = \|(M_m f)^\vee\|_{L^2} = \|m\hat{f}\|_{L^2} \leq \|m\|_{L^\infty} \|\hat{f}\|_{L^2} = \|m\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}.$$

Dakle, $\|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|m\|_{L^\infty} < +\infty$.

Za dokaz obratne nejednakosti pretpostavimo da je desna strana strogo pozitivna i uzmimo η takav da je $0 < \eta < \|m\|_{L^\infty}$. Postoji skup konačne i pozitivne mjere E takav da je $E \subseteq \{|m| > \eta\}$ te uzmimo funkciju $f := \mathbb{1}_E$. Tada imamo

$$\|M_m f\|_{L^2} = \|m\hat{f}\|_{L^2} = \left(\int_E |m(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \eta |E|^{1/2} = \eta \|\hat{f}\|_{L^2} = \eta \|f\|_{L^2}$$

pa zbog proizvoljnosti od η slijedi $\|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} \geq \|m\|_{L^\infty}$. $\square$

Primijetimo da je svaki množitelj invarijantan na translacije, tj.

$$M_m(T_c f) = T_c(M_m f)$$

za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $c \in \mathbb{R}^d$, što slijedi iz leme 3.6 i računa

$$(M_m T_c f)^\vee = m(T_c f)^\vee = m M_{-c} \hat{f} = M_{-c}(m\hat{f}) = M_{-c}(M_m f)^\vee = (T_c M_m f)^\vee.$$

Zapravo je moguće pokazati i obrat: svaki ograničeni linearni operator $T: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ koji komutira s translacijama je ovog oblika, tj. postoji jedinstvena $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da vrijedi $(Tf)^\vee = m\hat{f}$ za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dokaz se može naći u knjizi [SW71], ali iziskuje familijarnost s temperiranim distribucijama, koje ovdje ne obrađujemo. Ideju alternativnog dokaza smo spomenuli u uputi zadatka 4.5. U svakom slučaju, mi radi jednostavnosti simbol $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ stavljamo već u samu definiciju množitelja.

Osnovno pitanje u teoriji množitelja je: ako je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ fiksiran, za koje simbole m vrijedi $\|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p} < +\infty$, tj. $\|M_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{m,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ za sve $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$? Pokazuje se da je to pitanje vrlo teško, nije u potpunosti razriješeno i ne očekuje se da je moguće naći jednostavnu karakterizaciju, već se nastoje dati neki dovoljni uvjeti. Počnimo zato radije sa sasvim jednostavnim opservacijama.

Propozicija 4.14. Za svaki eksponent $p \in \langle 1, \infty \rangle$, svake simbole $m, m_1, m_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, svako invertibilno afino preslikavanje $A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ te svaki skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi

- (a) $\|M_{\alpha m}\|_{L^p \rightarrow L^p} = |\alpha| \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p},$
- (b) $\|M_{\bar{m}}\|_{L^p \rightarrow L^p} = \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p},$
- (c) $\|M_m\|_{L^{p'} \rightarrow L^{p'}} = \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p},$
- (d) $\|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|m\|_{L^\infty},$
- (e) $\|M_{m_1 m_2}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \|M_{m_1}\|_{L^p \rightarrow L^p} \|M_{m_2}\|_{L^p \rightarrow L^p},$
- (f) $\|M_{m \circ A}\|_{L^p \rightarrow L^p} = \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p}.$

Dokaz. Dio (a) je očigledan, dok za dio (b) najprije primijetimo da funkcija $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ ima Fourierovu transformaciju $(\tilde{f})^\wedge = \hat{f}$, iz čega slijedi

$$(M_{\bar{m}}f)^\wedge = \bar{m}\hat{f} = \overline{m(\tilde{f})^\wedge} = \overline{(M_m\tilde{f})^\wedge},$$

tj.

$$M_{\bar{m}}f = (M_m\tilde{f})^\sim$$

pa imamo

$$\frac{\|M_{\bar{m}}f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} = \frac{\|M_m\tilde{f}\|_{L^p}}{\|\tilde{f}\|_{L^p}}.$$

Nadalje, za (c) dio primijetimo da za $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\langle M_m f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{m(\xi)} \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \langle f, M_{\bar{m}} g \rangle_{L^2}$$

pa je $M_{\bar{m}}$ hermitski adjungirani operator od M_m i tvrdnja slijedi iz razmatranja krajem odjeljka 2.1. Ovime je odmah dokazan i dio (d) jer kompleksna interpolacija i (c) dio daju

$$\|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \max \{ \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p}, \|M_m\|_{L^{p'} \rightarrow L^{p'}} \} = \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

Za dio (e) jedino treba primijetiti $M_{m_1 m_2} = M_{m_1} M_{m_2}$ i iskoristiti submultiplikativnost operatorske norme. Konačno, u svrhu dokaza (f) dijela naprije pretpostavimo da je A invertibilno linearno preslikavanje i definirajmo operator S_A formulom

$$(S_A h)(x) := |\det A|^{-1} h((A^*)^{-1} x); \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Lako je dokazati $(S_A h)^\wedge(\xi) = \hat{h}(A\xi)$; provjera je direktna zamjenom varijabli u slučaju $h \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, a općenito slijedi argumentom gustoće. Osim toga,

$$\|S_A h\|_{L^p} = |\det A|^{-1/p'} \|h\|_{L^p}.$$

Sada za $g = (S_A)^{-1} f$, tj. $f = S_A g$ možemo računati

$$(M_{m \circ A} f)^\wedge(\xi) = m(A\xi) \hat{f}(\xi) = m(A\xi) \hat{g}(A\xi) = (M_m g)^\wedge(A\xi) = (S_A M_m g)^\wedge(\xi)$$

pa je

$$M_{m \circ A} f = S_A M_m S_A^{-1} f$$

te

$$\frac{\|M_{m \circ A} f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} = \frac{\|M_m S_A^{-1} f\|_{L^p}}{\|S_A^{-1} f\|_{L^p}}.$$

Općenito invertibilno afino preslikavanje A možemo prikazati kao kompoziciju invertibilnog linearnog preslikavanja i translacije, a za translaciju za vektor $c \in \mathbb{R}^d$ je tvrdnja jednostavna:

$$\begin{aligned} (M_{T_c m} f)^\wedge &= (T_c m)^\wedge \hat{f} = (T_c m) T_c((M_{-c} f)^\wedge) = T_c(M_m M_{-c} f)^\wedge = (M_c M_m M_{-c} f)^\wedge, \\ \Rightarrow M_{T_c m} f &= M_c M_m M_{-c} f, \end{aligned}$$

$$\frac{\|M_{T_c m} f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} = \frac{\|M_m M_{-c} f\|_{L^p}}{\|M_{-c} f\|_{L^p}}. \quad \square$$

Iz prethodne propozicije posebno vidimo da za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$ vektorski prostor

$$\mathcal{M}_p := \{m \in L^\infty(\mathbb{R}^d) : \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p} < +\infty\}$$

uz normu $m \mapsto \|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p}$ postaje komutativna Banachova algebra s jedinicom $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$.

Primjer 4.15. Ako uzmemo $d = 1$ i $m = \mathbb{1}_{[-R, R]}$ za $R > 0$, tada pripadni množitelj M_m postaje tzv. *Fourierov parcijalni integral*

$$(S_R f)(x) := \int_{-R}^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi; \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (4.20)$$

koji je kontinuirana varijanta parcijalne sume Fourierovog reda. Pokažimo da se on može izraziti pomoću Hilbertove transformacije. Preciznije, vrijedi formula

$$S_R = \frac{i}{2} (M_{-R} H M_R - M_R H M_{-R}). \quad (4.21)$$

Dovoljno je provjeriti jednakost Fourierovih transformacija objiju strana primijenjenih na funkciji $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} (M_{-R} H M_R f)^\wedge(\xi) - \frac{i}{2} (M_R H M_{-R} f)^\wedge(\xi) \\ &= \frac{i}{2} (-i \operatorname{sgn}(\xi + R)) \hat{f}(\xi - R + R) - \frac{i}{2} (-i \operatorname{sgn}(\xi - R)) \hat{f}(\xi + R - R) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(\xi + R) - \operatorname{sgn}(\xi - R)) \hat{f}(\xi) = \mathbb{1}_{[-R, R]}(\xi) \hat{f}(\xi) \quad \text{g.s.} \end{aligned}$$

Time je doista pokazano (4.21).

Teorem 4.16.

- (a) Za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $R > 0$ vrijedi $\|S_R\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim_p 1$, tj. Fourierovi parcijalni integrali su uniformno ograničeni na $L^p(\mathbb{R})$. Posebno se svaki S_R proširuje po neprekidnosti sa $L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ na cijeli $L^p(\mathbb{R})$.

(b) (Rieszov teorem) Za svaku $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ vrijedi $\lim_{R \rightarrow +\infty} S_R f = f$ po L^p -normi.

Dio (b) ovog teorema je kontinuirani analogon teorema o konvergenciji Fourierovog reda po normi prema polaznoj funkciji. Uočite konceptualnu razliku između teorema 4.16, koji govori o rekonstrukciji funkcije iz svojeg Fourierovog transformata, i rezultata poput korolara 3.12, koji samo govori o računanju Fourierove transformacije dane funkcije. U teoremu 4.16(b) se konvergencija po L^p -normi može zamijeniti konvergencijom g.s., ali je to iznimno težak rezultat makar za bilo koji odabir eksponenta $p \in \langle 1, \infty \rangle$, kojeg ćemo komentirati mnogo kasnije u skripti.

Dokaz. (a) Zbog formule (4.21) i izometričnosti modulacija imamo

$$\begin{aligned} \|S_R\|_{L^p \rightarrow L^p} &\leq \frac{1}{2} \|M_{-R}\|_{L^p \rightarrow L^p} \|H\|_{L^p \rightarrow L^p} \|M_R\|_{L^p \rightarrow L^p} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|M_R\|_{L^p \rightarrow L^p} \|H\|_{L^p \rightarrow L^p} \|M_{-R}\|_{L^p \rightarrow L^p} \\ &\leq \|H\|_{L^p \rightarrow L^p} < +\infty. \end{aligned}$$

Alternativno, mogli smo primijetiti omeđenost od S_1 (ponovno koristeći ograničenost od H) pa iskoristiti propoziciju 4.14(f).

(b) Skup funkcija f takvih da je $\hat{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ je gust u $L^p(\mathbb{R})$. Čim je R dovoljno velik da vrijedi $\text{supp } \hat{f} \subseteq \langle -R, R \rangle$ po Fourierovom teoremu inverzije imamo $S_R f = f$ pa je konvergencija $\lim_{R \rightarrow +\infty} S_R f = f$ sasvim trivijalna za takve funkcije. Radi uniformne ograničenosti iz (a) dijela možemo primijeniti teorem 1.1. $\square$

Obrazložimo jednu vrlo korisnu dekompoziciju operatora identitete na množitelje.

Primjer 4.17. (Littlewood-Paleyeva dekompozicija)

Neka je $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ fiksirana padajuća funkcija klase C^∞ takva da je $\varphi|_{[0,1]} \equiv 1$ i $\varphi|_{[2,+\infty)} \equiv 0$. Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ definirajmo funkciju $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ formulom

$$\psi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}|\xi|) - \varphi(2^{-j+1}|\xi|).$$

Dakle, ψ_j je nenegativna i ima nosač sadržan u kuglinom vijencu $\{\xi \in \mathbb{R}^d : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^j\}$, a cijeli sistem $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ čini glatku particiju jedinice, tj.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\xi) = 1 \quad \text{za } \xi \neq \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Uočimo još da vrijedi $\psi_j(\xi) = \psi_0(2^{-j}\xi)$, odakle slijedi

$$|(\partial^{\mathbf{k}} \psi_j)(\xi)| \lesssim_\varphi (2^{-j})^{|\mathbf{k}|} \quad \text{za } 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}, \quad (4.23)$$

pri čemu za $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ kratko pišemo $\partial^{\mathbf{k}} := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_d^{k_d}$ i $|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_d$. Primijetimo usput i da su za svaki $\xi \in \mathbb{R}^d$ najviše dva pribrojnika u gornjoj sumi različita od 0 pa radi trivijalne nejednakosti

$$a, b \geq 0, \quad a + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 \leq 1$$

imamo i

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\xi)^2 \sim 1 \quad \text{za } \xi \neq \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Pripadni množitelji M_{ψ_j} ; $j \in \mathbb{Z}$ se nazivaju *Littlewood-Paleyve projekcije* te zahvaljujući Plancherelovom teoremu i (4.22) za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ imamo

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_{\psi_j} f = f, \quad (4.25)$$

pri čemu konvergenciju shvaćamo u L^2 normi i u proizvoljnom poretku.

* * *

Sada ćemo iskazati i dokazati jedan općeniti i posebno praktični rezultat koji daje dovoljne uvjete za L^p -omeđenost množitelja, a zasniva se na izloženoj teoriji Calderón-Zygmundovih operatora.

Teorem 4.18. (Mikhlinov¹¹ teorem o množitelju) *Pretpostavimo da je simbol $m \in C^{d+2}(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ i da zadovoljava ocjene*

$$|(\partial^{\mathbf{k}} m)(\xi)| \lesssim |\xi|^{-|\mathbf{k}|}; \quad \text{za } 0 \leq |\mathbf{k}| \leq d+2, \quad (4.26)$$

tzv. homogene ocjene za sve parcijalne derivacije reda najviše $d+2$. Tada je množitelj M_m ograničen na prostorima $L^p(\mathbb{R}^d)$; $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i vrijedi

$$\|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim_{d,p} 1.$$

Uvjeti (4.26) su nam naprosto pokrate za

$$|\partial_{\xi_1}^{k_1} \cdots \partial_{\xi_d}^{k_d} m(\xi_1, \dots, \xi_d)| \lesssim |(\xi_1, \dots, \xi_d)|^{-(k_1 + \dots + k_d)}$$

za svake $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{N}_0$ takve da je $k_1 + \dots + k_d \leq d+2$. Može se pokazati da je zapravo dovoljno imati spomenute ocjene od m za derivacije reda najviše $\lfloor d/2 \rfloor + 1$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je M_m Calderón-Zygmundov operator. Radi leme 4.13 će on automatski biti L^2 -ograničen s normom $\|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1$ te ćemo moći primijeniti teorem 4.5(b).

Iskoristimo dekompoziciju (4.22) iz primjera 4.17 tako da imamo

$$m(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j(\xi), \quad m_j(\xi) := m(\xi) \psi_j(\xi).$$

Primjena Leibnizove¹² formule za derivaciju produkta i (4.23) nam za $0 \leq |\mathbf{k}| \leq d+2$ i $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$ daje

$$\begin{aligned} |(\partial^{\mathbf{k}} m_j)(\xi)| &\leq \sum_{\mathbf{l}} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{l}} |(\partial^{\mathbf{l}} m)(\xi)| |(\partial^{\mathbf{k}-\mathbf{l}} \psi_j)(\xi)| \\ &\lesssim_{\varphi} \sum_{\mathbf{l}} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{l}} |\xi|^{-|\mathbf{l}|} (2^{-j})^{|\mathbf{k}|-|\mathbf{l}|} \lesssim_{\varphi, d} 2^{-j|\mathbf{k}|}. \end{aligned}$$

¹¹Solomon Grigorjevič Mikhlin (1908–1990), sovjetski matematičar.

¹²Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), njemački matematičar i filozof.

Sada stavimo $K_j := \check{m}_j$, tj.

$$K_j(x) := \int_{\mathbb{R}^d} m_j(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

tako da je odmah

$$|K_j(x)| \leq \|m_j\|_{L^1} \lesssim_{\varphi, d} (2^j)^d \|m_j\|_{L^\infty} \lesssim 2^{dj}.$$

Neka je bez smanjenja općenitosti x_1 najveća koordinata od x po apsolutnoj vrijednosti. Parcijalnom integracijom $d+2$ puta pak dobivamo

$$K_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_1}^{d+2} m_j(\xi) (2\pi i x_1)^{-d-2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

odakle je

$$|K_j(x)| \lesssim_d \|\partial_1^{d+2} m_j\|_{L^1} |x|^{-d-2} \lesssim_{\varphi, d} 2^{dj} 2^{-(d+2)j} |x|^{-d-2}.$$

Zajedno imamo ocjenu

$$|K_j(x)| \lesssim_{\varphi, d} |x|^{-d} \min\{(2^j |x|)^d, (2^j |x|)^{-2}\}. \quad (4.27)$$

Gradijent od K je

$$(\nabla K_j)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} 2\pi i \xi m_j(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

pa na sasvim analogan način, ovog puta derivirajući $m(\xi)\xi$ i koristeći $|\xi| \sim 2^j$ na nosaču od m_j , dobivamo

$$|(\nabla K_j)(x)| \lesssim_{\varphi, d} |x|^{-d-1} \min\{(2^j |x|)^{d+1}, (2^j |x|)^{-1}\}. \quad (4.28)$$

Primijetimo da zbog (4.27) i (4.28) redovi $\sum_{j \in \mathbb{Z}} K_j$ i $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \nabla K_j$ konvergiraju apsolutno i uniformno na svakom kompaktu u $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dakle, funkcija

$$K: \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad K(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} K_j(x)$$

je klase C^1 i zadovoljava ocjene

$$|K(x)| \lesssim_{\varphi, d} |x|^{-d} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \min\{(2^j |x|)^d, (2^j |x|)^{-2}\} \lesssim |x|^{-d},$$

$$|(\nabla K)(x)| \lesssim_{\varphi, d} |x|^{-d-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \min\{(2^j |x|)^{d+1}, (2^j |x|)^{-1}\} \lesssim |x|^{-d-1}.$$

Vidimo da je $(x, y) \mapsto K(x - y)$ zapravo standardna jezgra koja čak zadovoljava jače uvjete (K2') i (K3').

Konačno, uzmimo neke $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ s disjunktним nosačima. Zahvaljujući Plancherelovom identitetu uz oznaku $\tilde{f}(x) := f(-x)$ možemo računati

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (M_m f)(x) g(x) dx &= \langle M_m f, \bar{g} \rangle_{L^2} = \langle (M_m f)^\wedge, (\bar{g})^\wedge \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) \hat{f}(\xi) \hat{g}(-\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) \overline{(\tilde{f})(\xi)} (\bar{g})(\xi) d\xi = \langle m, (\tilde{f} * \bar{g})^\wedge \rangle_{L^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle m_j, (\tilde{f} * \bar{g})^\wedge \rangle_{L^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle K_j, \tilde{f} * \bar{g} \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} K_j(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - z) g(x) dx \right) dz = [y = x - z] = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x - y) f(y) g(x) dx dy. \end{aligned}$$

Dakle, doista je M_m Calderón-Zygmundov operator kojem je pridružena jezgra $(x, y) \mapsto K(x - y)$. $\square$

Uočite da su komplikacije u dokazu i potreba korištenja Littlewood-Paleyve dekompozicije uzrokovane nemogućnošću da unaprijed zaključimo kako je m uopće lokalno integrabilna funkcija izvan dijagonale, a kamoli da za nju provjerimo željene ocjene (K1), (K2'), (K3').

Kako funkcija $m(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi$ zadovoljava ocjene (4.26) jer su joj sve derivacije (osim "nulte") čak identički jednake 0, teorem 4.18 daje još jedan dokaz ograničenosti Hilbertove transformacije na prostorima $L^p(\mathbb{R})$; $1 < p < \infty$. Mikhlinov teorem nam ustvari govori kako smijemo dozvoliti kontroliranu singularnost simbola m u jednoj točki (ovdje je to ishodište, ali izbor je nebitan), a da množitelj M_m još uvijek bude ograničen na prostorima $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$.

Hörmander je primijetio da se pretpostavke teorema 4.18 mogu oslabiti. Tako je npr. u jednoj dimenziji od $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ dovoljno tražiti $|m(\xi)| \lesssim 1$ i

$$\int_{\langle -2R, -R \rangle \cup \langle R, 2R \rangle} |m'(\xi)|^2 d\xi \lesssim R^{-1} \quad \text{za svaki } R > 0.$$

Ideja dokaza je da se opet pokaže kako je M_m Calderón-Zygmundov operator, ali ovog puta u općenitijem smislu: s jezgrom koja zadovoljava uvjet (K1) i Hörmanderove uvjete (H1), (H2) s kraja odjeljka 4.2. Nećemo navoditi detalje jer ionako postoji još malo općenitiji rezultat.

Teorem 4.19. (Marcinkiewiczov teorem o množitelju) *Pretpostavimo da simbol m zadovoljava:*

- $m \in C^1(\langle -2^{j+1}, -2^j \rangle \cup \langle 2^j, 2^{j+1} \rangle)$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$,
- $\int_{\langle -2^{j+1}, -2^j \rangle \cup \langle 2^j, 2^{j+1} \rangle} |m'(\xi)| d\xi \lesssim 1$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$,
- $|m(\xi)| \lesssim 1$.

Tada je množitelj M_m ograničen na prostorima $L^p(\mathbb{R})$; $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i vrijedi

$$\|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim_p 1.$$

Njegov dokaz izostavljamo i on se može naći u [Ste70].

U teoremu 4.16 smo pokazali ograničenost na $L^p(\mathbb{R})$; $p \in \langle 1, \infty \rangle$ množitelja čiji simbol je karakteristična funkcija intervala $[-R, R]$. Ista tvrdnja vrijedi za sve intervale $I \subseteq \mathbb{R}$ zbog propozicije 4.14(f), čak i neomeđene (tj. oblika $[a, +\infty)$ ili $(-\infty, b]$) zbog teorema 4.8(a). Prirodno je zapitati se vrijedi li ista ograničenost i za množitelje u dimenzijama $d \geq 2$ čiji simbol je karakteristična funkcija jedinične kugle $B(\mathbf{0}, 1)$. Na sveopće iznenađenje Fefferman¹³ [Fef71] je pokazao da je odgovor negativan: takav množitelj je

¹³Charles Louis Fefferman (1949), američki matematičar.

L^p -ograničen samo za $p = 2$. Kao posljedicu toga i principa uniformne ograničenosti (pogledajte napomenu 1.2) pokazao je i da za $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ konvergencija

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(\mathbf{0}, R)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = f(x) \quad (4.29)$$

ne mora vrijediti u L^p normi ako je $p \neq 2$. I dan-danas je otvoren problem (i smatra se vrlo teškim) vrijedi li za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ konvergencija u (4.29) po točkama za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$.

* * *

Zadatak 4.13. Pretpostavimo da je simbol m jednak Fourierovom transformatu neke konačne kompleksne mjere μ na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, tj.

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x); \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Dokažite da se množitelj M_m proširuje do ograničenog linearnog operatora na $L^1(\mathbb{R}^d)$ čija norma je jednaka totalnoj varijaciji od μ .

Napomena: Može se pokazati da vrijedi i obrat, tj. da su svi L^1 -ograničeni množitelji tog oblika; vidjeti [SW71].

Zadatak 4.14. Ako je $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija ograničene varijacije, dokažite

$$\|M_m\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim_p \|m\|_{V^1} < +\infty \quad \text{za } 1 < p < \infty$$

pa je posebno množitelj M_m ograničen na prostorima $L^p(\mathbb{R})$; $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Pritom varijacijsku normu ovog puta definiramo

$$\|m\|_{V^1} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |m(\xi)| + \sup_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M}} \sum_{j=1}^M |m(\xi_{j-1}) - m(\xi_j)|.$$

Uputa: Lako je normalizirati tako da vrijedi $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = 0$. Koristeći omeđenost Hilbertove transformacije najprije pokažite da su uniformno omeđeni množitelji sa simbolima $\mathbb{1}_{[\eta, +\infty)}$; $\eta \in \mathbb{R}$, a potom koristeći Lebesgue-Stieltjesov¹⁴ integral

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[\eta, +\infty)}(\xi) dm(\eta)$$

prikažite M_m kao njihovu slabu “superpoziciju”:

$$\langle M_m f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \langle M_{\mathbb{1}_{[\eta, +\infty)}} f, g \rangle_{L^2} dm(\eta).$$

Napomena: Ovaj rezultat nam daje još jedan jednostavni dovoljni uvjet za ograničenost množitelja u jednoj dimenziji.

¹⁴Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894), nizozemski matematičar.

Zadatak 4.15. Dokažite omeđenost na prostorima $L^p(\mathbb{R}^d)$; $p \in \langle 1, \infty \rangle$ množitelja čiji simbol je karakteristična funkcija proizvoljnog konveksnog politopa u $\mathbb{R}^d$.

Uputa: Iskoristite propoziciju 4.14(e) i činjenicu da se konveksni politop može prikazati kao presjek konačno mnogo poluprostora.

Napomena: Premda se kugla može “po volji dobro” aproksimirati konveksnim politopima, vidimo da ograničenost pripadnog množitelja nije očuvana tim graničnim procesom. Možemo naslutiti da je poteškoća u kuglinoj zakrivljenosti.

4.6. Omeđenost na prostorima H^1 i BMO

U harmonijskoj analizi postoji uzrečica koja govori da su L^1 i L^∞ “neprirodni” prostori kada su u pitanju singularni integrali, već ih treba nadomjestiti “prirodnijim” modifikacijama H^1 i BMO. Objasnimo stoga pobliže konstrukciju i osnovna svojstva tih dvaju prostora.

Prostor funkcija omeđene srednje oscilacije, kraće *BMO prostor*, u oznaci $BMO(\mathbb{R}^d)$ je vektorski prostor svih lokalno integrabilnih funkcija $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\|f\|_{BMO} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - [f]_Q| < +\infty, \quad (4.30)$$

pri čemu supremum uzimamo po svim standardnim kockama Q . Osim toga identificiramo funkcije koje se g.s. razlikuju za konstantu, tako da je $BMO(\mathbb{R}^d)$ zapravo skup takvih klasa ekvivalencije. Uz $\|\cdot\|_{BMO}$ kao normu $BMO(\mathbb{R}^d)$ (“pocijepan” po konstantnim funkcijama) postaje Banachov prostor. On očigledno sadrži $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ jer imamo $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{L^\infty}$. Primjer neograničene funkcije u prostoru $BMO(\mathbb{R})$ je $f(x) := \ln|x|$; provjerite to kao zadatak 4.16(a). Ako u formuli (4.30) uzimamo supremum samo po dijadskim kockama Q , na opisani način ćemo dobiti *dijadski BMO prostor*, kojeg označavamo $BMO_d(\mathbb{R}^d)$.

Moguće je dokazati (ali mi to ovdje nećemo; vidjeti [Ste93]) da vrijedi *John-Nirenbergova nejednakost*: postoje konstante $A, C \in [0, +\infty)$ takve da za svaku $f \in BMO(\mathbb{R}^d)$, svaku standardnu kocku Q i svaki $\alpha > 0$ vrijedi nejednakost

$$|\{x \in Q : |f(x) - [f]_Q| > \alpha\}| \leq Ce^{-A\alpha/\|f\|_{BMO}}|Q|. \quad (4.31)$$

Štoviše, u [GJ78] je pokazano da je najbolji izbor konstante A vezan uz udaljenost funkcije f od L^∞ . Čitatelj može pogledati i [NS14] za još jednu zanimljivu karakterizaciju. Iz (4.31) nije teško izvesti L^p karakterizaciju BMO norme:

$$\|f\|_{BMO} \sim_p \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - [f]_Q|^p \right)^{1/p} \quad (4.32)$$

za $p \in [1, \infty)$; to je ostavljeno kao zadatak 4.17(a). Posebno pogodna može biti ova karakterizacija za $p = 2$ i u mnogim knjigama se upravo ona uzima kao definicija.

Atom je svaka izmjeriva funkcija $a: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ za koju postoji standardna kocka Q takva da vrijedi

$$\text{supp } a \subseteq Q, \quad \|a\|_{L^2(Q)} \leq |Q|^{-1/2}, \quad \int_Q a = 0, \quad (4.33)$$

a jednostavna posljedica je $\|a\|_{L^1(Q)} \leq 1$. *Realni (atomarni) Hardyjev prostor*, u oznaci $H^1(\mathbb{R}^d)$, je Banachov prostor

$$H^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j : a_j \text{ su atomi, } \beta_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| < +\infty \right\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d),$$

uz normu

$$\|f\|_{H^1} := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| : a_j \text{ su atomi, } \beta_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| < +\infty, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j = f \right\}.$$

Primijetimo usput da za svaku $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\|f\|_{H^1} \geq \|f\|_{L^1}$ i $\int_{\mathbb{R}^d} f = 0$. Postoji nekoliko ekvivalentnih definicija realnog Hardyjevog prostora, vidjeti [Mey92] ili [Ste93], ali nama će biti dovoljna samo ova “atomarna”. Ako u definiciji atoma (4.33) tražimo da kocka Q bude dijadska, onda ćemo na isti način doći do definicije *dijadskog realnog (atomarnog) Hardyjevog prostora*, označenog $H_d^1(\mathbb{R}^d)$.

Pomalo iznenađujući rezultat je dualnost između prostora $H^1(\mathbb{R}^d)$ i $BMO(\mathbb{R}^d)$ te analogno između $H_d^1(\mathbb{R}^d)$ i $BMO_d(\mathbb{R}^d)$. Naime, svaku funkciju $b \in BMO(\mathbb{R}^d)$ možemo shvatiti kao neprekidni linearni funkcional $F_b: H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ koji djeluje po formuli

$$F_b(f) = F_b\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j\right) := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \int_{\mathbb{R}^d} a_j b, \quad (4.34)$$

pri čemu definicija ne ovisi o prikazu $f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j$. Osim toga vrijedi

$$\|F_b\|_{H^1 \rightarrow \mathbb{C}} \sim \|b\|_{BMO}. \quad (4.35)$$

Obratno, svaki neprekidni linearni funkcional na $H^1(\mathbb{R}^d)$ je tog oblika, za dokaz vidjeti [Mey92]. Napomenimo još da se gornji funkcijski prostori neće promijeniti ako u definicijama umjesto kocaka gledamo npr. kugle.

* * *

Vratimo se na Calderón-Zygmundove operatore.

Teorem 4.20.

- (a) *Svaki L^2 -ograničeni Calderón-Zygmundov operator T se može dodefinirati do omeđenog linearnog operatora sa $H^1(\mathbb{R}^d)$ u $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
- (b) *Svaki L^2 -ograničeni Calderón-Zygmundov operator T se može dodefinirati do omeđenog linearnog operatora sa $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $BMO(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz. (a) Uzmimo atom a i standardnu kocku Q takvu da vrijedi (4.33). Ako je Q' kocka s istim središtem ali $1 + 2\sqrt{d}$ puta duljim bridom, onda možemo računati

$$\|Ta\|_{L^1} = \int_{Q'} |Ta| + \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'} |Ta|.$$

S jedne strane je

$$\int_{Q'} |Ta| \leq |Q'|^{1/2} \|Ta\|_{L^2} \lesssim_d |Q|^{1/2} \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|a\|_{L^2} \leq \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1,$$

dok radi Hörmanderovog uvjeta kao u dokazu teorema 4.5 imamo (označivši središte kocke Q sa y_Q)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'} |Ta| &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'} \left| \int_Q K(x, y) a(y) dy \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'} \left| \int_Q (K(x, y) - K(x, y_Q)) a(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_Q \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q'} |K(x, y) - K(x, y_Q)| dx \right) |a(y)| dy \\ &\stackrel{(H2)}{\lesssim} \|a\|_{L^1(Q)} \leq 1. \end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo $\|Ta\|_{L^1} \lesssim 1$ za svaki atom a , pri čemu implicitna konstanta ovisi samo o $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$, d , γ i implicitnim konstantama za K . Ako je $f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j$ neki atomarni prikaz funkcije iz H^1 , tada red

$$Tf := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j Ta_j$$

konvergira u L^1 te vrijedi

$$\|Tf\|_{L^1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| \|Ta_j\|_{L^1} \lesssim \sum_{j=1}^m |\beta_j|,$$

tj. $\|Tf\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{H^1}$. Prešutjeli smo jedan tehnički detalj, a to je da Tf ne ovisi o prikazu od f ; čitatelj ga može rascistiti uz pomoć [CM97], gdje je formulirana i dokazana upravo ta činjenica.

(b) Iskoristit ćemo dualnost između $H^1(\mathbb{R}^d)$ i $BMO(\mathbb{R}^d)$, tj. definicijska jednakost će nam biti

$$(Tf)(g) := (T^\tau g)(f) \quad \text{za } f \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad g \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Preciznije, za $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ je formulom

$$G_f: H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}, \quad G_f(g) := \int_{\mathbb{R}^d} (T^\tau g) f$$

definiran omeđeni linearni funkcional G_f , jer je po (a) dijelu T^τ omeđen sa $H^1(\mathbb{R}^d)$ u $L^1(\mathbb{R}^d)$ pa vrijedi

$$|G_f(g)| \leq \|T^\tau g\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} \leq \|T^\tau\|_{H^1 \rightarrow L^1} \|g\|_{H^1} \|f\|_{L^\infty}.$$

Zato neka Tf označava BMO funkciju takvu da je $G_f = F_{Tf}$, uz oznaku kao u (4.34). Tada je zbog (4.35) još

$$\|Tf\|_{BMO} \sim \|G_f\|_{H^1 \rightarrow \mathbb{C}} \leq \|T^\tau\|_{H^1 \rightarrow L^1} \|f\|_{L^\infty}$$

pa smo dobili i omeđenost sa $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $BMO(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Ipak moramo primijetiti kako teorem 4.20 još uvijek ne govori o ograničenosti nekih Calderón-Zygmundovih operatora na samim prostorima $H^1(\mathbb{R}^d)$ i $BMO(\mathbb{R}^d)$.

Teorem 4.21.

- (a) Ako L^2 -ograničeni Calderón-Zygmundov operator T zadovoljava $\int_{\mathbb{R}^d} Ta = 0$ za svaki atom a , tada se T proširuje do omeđenog linearnog operatora na $H^1(\mathbb{R}^d)$.
- (b) Ako L^2 -ograničeni Calderón-Zygmundov operator T zadovoljava $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$, tada se T proširuje do omeđenog linearnog operatora na $BMO(\mathbb{R}^d)$.

Nećemo izlagati dokaz, već upućujemo zainteresiranog čitatelja na [CM97] ili [Ste93].

* * *

Zadatak 4.16.

- (a) Pokažite da se funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) := \ln|x|$ doista nalazi u prostoru $BMO(\mathbb{R})$.
- (b) Pokažite da periodična funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{2\pi i k x}$ leži u prostoru $BMO(\mathbb{R})$.

Zadatak 4.17.

- (a) Iz nejednakosti (4.31) izvedite ocjenu (4.32).
- (b) Dokažite da red u (4.34) konvergira.
- (c) Dokažite (4.35).

4.7. Hinčinova nejednakost i Littlewood-Paleyeva teorija

Sljedeća ocjena je formulirana jezikom elementarne teorije vjerojatnosti.

Teorem 4.22. (Hinčinova¹⁵ nejednakost) *Ako je $N \in \mathbb{N}$ i ako su $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ nezavisne slučajne varijable s razdiobom $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, tada za svake $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{C}$ i $p \in \langle 0, \infty \rangle$ vrijedi*

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right|^p \right)^{1/p} \sim_p \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.36)$$

¹⁵Aleksandar Jakovljevič Hinčin (1894–1959), sovjetski matematičar.

Prisjetimo se da nezavisnost od $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$ implicira

$$\mathbb{E}(f_1(\epsilon_1) \cdots f_N(\epsilon_N)) = \mathbb{E}f_1(\epsilon_1) \cdots \mathbb{E}f_N(\epsilon_N)$$

za svake funkcije $f_1, \dots, f_N: \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$. Gornja notacija za razdiobu nam znači

$$\mathbb{P}(\epsilon_j = -1) = \mathbb{P}(\epsilon_j = 1) = \frac{1}{2}.$$

Primijetimo da se lijeva strana od (4.36) može deterministički zapisati kao

$$\left(\frac{1}{2^N} \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in \{-1, 1\}} |\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_N x_N|^p \right)^{1/p},$$

ali korisnije će nam biti praktično ostati kod vjerojatnosne notacije.

Dokaz. Primijetimo da je

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right|^2 = \mathbb{E} \sum_{j,k=1}^N \epsilon_j \epsilon_k x_j \overline{x_k} = \sum_{j,k=1}^N x_j \overline{x_k} \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_j \epsilon_k)}_{\substack{=1 \text{ za } j=k \\ =0 \text{ za } j \neq k}} = \sum_{j=1}^N |x_j|^2,$$

tj. za $p = 2$ imamo čak jednakost. Dovoljno je dokazati tvrdnju za realne $x_1, x_2, \dots, x_N$ jer se za kompleksne brojeve samo udvostručuju konstante. Osim toga je zbog leme 2.2(a) lijeva strana od (4.36) rastuća funkcija od p pa je dovoljno dokazati gornju ocjenu (tj. $\lesssim$) za $p > 2$ i donju ocjenu (tj. $\gtrsim$) za $0 < p < 2$. Zahvaljujući lemi 2.1(b) za $0 < p < 2$ imamo

$$\left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{1/2} = \left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right|^p \right)^{(1-\theta)/p} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right|^4 \right)^{\theta/4},$$

pri čemu je $0 < \theta < 1$ određen sa $\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$. Vidimo da će i donja ocjena za $0 < p < 2$ slijediti iz gornje ocjene za $p = 4$.

Radi monotonosti je dovoljno dokazati gornju ocjenu za parne prirodne brojeve, tj. $p = 2m$; $m \in \mathbb{N}$. Multinomni teorem nam daje

$$\left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right)^{2m} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + \dots + k_N = 2m}} \frac{(2m)!}{k_1! \cdots k_N!} (\epsilon_1 x_1)^{k_1} \cdots (\epsilon_N x_N)^{k_N}.$$

Zbog nezavisnosti imamo

$$\mathbb{E}(\epsilon_1^{k_1} \cdots \epsilon_N^{k_N}) = (\mathbb{E}\epsilon_1^{k_1}) \cdots (\mathbb{E}\epsilon_N^{k_N}) = \begin{cases} 1 & \text{ako su svi } k_1, \dots, k_N \text{ parni,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Zato je

$$\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j \right)^{2m} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + \dots + k_N = 2m}} \frac{(2m)!}{(2k_1)! \cdots (2k_N)!} x_1^{2k_1} \cdots x_N^{2k_N}.$$

S druge strane, opet po multinomnom teoremu imamo

$$\left(\sum_{j=1}^N x_j^2\right)^m = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + \dots + k_N = m}} \frac{m!}{k_1! \dots k_N!} x_1^{2k_1} \dots x_N^{2k_N}.$$

Preostaje usporediti multinomne koeficijente:

$$\frac{\frac{(2m)!}{(2k_1)! \dots (2k_N)!}}{\frac{m!}{k_1! \dots k_N!}} = \frac{2m(2m-1) \dots (m+1)}{2k_1(2k_1-1) \dots (k_1+1) \dots 2k_N(2k_N-1) \dots (k_N+1)} \leq \frac{2^m m^m}{2^{k_1} \dots 2^{k_N}} = m^m.$$

To nam daje

$$\left(\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\right)^{2m}\right)^{1/2m} \leq m^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2\right)^{1/2},$$

čime je završen dokaz teorema. $\square$

Alternativni dokaz. Dat ćemo još jedan dokaz gornje ocjene za $p \geq 2$ i za realne brojeve $x_1, \dots, x_N$. Radi homogenosti smijemo normalizirati $\sum_{j=1}^N x_j^2 = 1$. Nezavisnost nam omogućuje račun:

$$\mathbb{E} e^{\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j} = \mathbb{E} \prod_{j=1}^N e^{\epsilon_j x_j} = \prod_{j=1}^N \mathbb{E} e^{\epsilon_j x_j} = \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} e^{-x_j} + \frac{1}{2} e^{x_j}\right) = \prod_{j=1}^N \operatorname{ch} x_j.$$

Iz jednostavne nejednakosti $\operatorname{ch} t \leq e^{t^2/2}$ dobivamo

$$\mathbb{E} e^{\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j} \leq \prod_{j=1}^N e^{\frac{1}{2} x_j^2} = e^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N x_j^2} = e^{1/2} < 2$$

pa je po Markov-Čebiševljevoj nejednakosti za $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j > \alpha\right) = \mathbb{P}\left(e^{\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j} > e^\alpha\right) \leq e^{-\alpha} \mathbb{E} e^{\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j} \leq 2e^{-\alpha},$$

a simetrija razdiobe daje

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\right| > \alpha\right) \leq 4e^{-\alpha}.$$

Konačno koristimo (1.15):

$$\mathbb{E} \left|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\right|^p = \int_0^{+\infty} p \alpha^{p-1} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\right| > \alpha\right) d\alpha \leq 4p \underbrace{\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} e^{-\alpha} d\alpha}_{\Gamma(p)} \lesssim_p 1. \quad \square$$

Naglasimo da ocjene u Hinčinovoj nejednakosti ne ovise o broju N ; inače bi tvrdnja bila trivijalna. (Naime, svake dvije norme na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru su ekvivalentne.)

Sljedeća posljedica teorema 4.22 je priređena za primjene.

Korolar 4.23. (Hinčinova nejednakost za funkcije) *Neka su $N \in \mathbb{N}$, slučajne varijable $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ kao i dosad, $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor σ -konačne mjere, $p \in \langle 0, \infty \rangle$ eksponent te $f_1, \dots, f_N \in L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljne funkcije. Tada vrijedi*

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^N \epsilon_j f_j \right\|_{L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)}^p \right)^{1/p} \sim_p \left\| \left(\sum_{j=1}^N |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)}.$$

Dokaz. Nazovimo vjerojatnosni prostor eksplicitno $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za svaki $x \in \mathbb{X}$ teorem 4.22 daje

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j f_j(x) \right|^p \right)^{1/p} \sim_p \left(\sum_{j=1}^N |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Uzmimo L^p norme obiju strana kao funkcija u varijabli x te iskoristimo Fubinijev teorem na $(\Omega \times \mathbb{X}, \mathcal{F} \times \mathcal{X}, \mathbb{P} \times \mu)$:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{X}} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j f_j(x) \right|^p d\mu(x) \right) d\mathbb{P} \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^N \epsilon_j f_j(x) \right|^p d\mathbb{P} \right) d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\sim_p \left(\int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{j=1}^N |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} d\mu(x) \right)^{1/p}. \quad \square \end{aligned}$$

Korolar 4.24. (Marcinkiewicz-Zygmundova vektorska ocjena) *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor σ -konačne mjere, $p \in [1, \infty)$ eksponent i T ograničeni linearni operator na $L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$. Tada za proizvoljni niz funkcija $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ iz $L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ vrijedi*

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)} \lesssim_{p,T} \|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)}.$$

Posljednja nejednakost se može kratko pisati

$$\left\| \|(Tf_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_2} \right\|_{L^p} \lesssim_{p,T} \left\| \|(f_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_2} \right\|_{L^p},$$

odnosno, korištenjem mješovitih normi iz zadatka 2.1,

$$\|(Tf_j)_{j=1}^{\infty}\|_{L^p(\ell_2)} \lesssim_{p,T} \|(f_j)_{j=1}^{\infty}\|_{L^p(\ell_2)}$$

ili samo

$$\|Tf_j\|_{L^p(\ell_j^2)} \lesssim_{p,T} \|f_j\|_{L^p(\ell_j^2)}.$$

Dokaz. Smijemo pretpostaviti da samo prvih N funkcija nije identički jednako 0, jer potom možemo primijeniti teorem o monotonij konvergenciji za dobivanje općenitog slučaja. Ako su $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ slučajne varijable kao i ranije, zbog omeđenosti od T imamo

$$\left\| \sum_{j=1}^N \epsilon_j T f_j \right\|_{L^p} = \left\| T \left(\sum_{j=1}^N \epsilon_j f_j \right) \right\|_{L^p} \lesssim_p \|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \left\| \sum_{j=1}^N \epsilon_j f_j \right\|_{L^p}.$$

Sada uzmemo p -ti moment obiju strana (tj. primijenimo $(\mathbb{E}|\cdot|^p)^{1/p}$) i dvaput koristimo korolar 4.23. $\square$

* * *

U drugom dijelu ovog odjeljka se vraćamo na množitelje ojačani Hinčinovom nejednakosti kao korisnim alatom. Neka su φ i ψ_j kao u primjeru 4.17. Littlewood-Paleyeva teorija kreće od dekompozicije

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} M_{\psi_j} f \quad \text{u } L^2 \text{ za } f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

te nastoji reći nešto o “veliĉini” (tj. izvjesnoj normi) od f u terminima “veliĉina” pribrojnika $M_{\psi_j} f$. Kako po definiciji množitelja gornju dekompoziciju zapravo možemo pisati

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_j(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

vidimo da su pribrojници ustvari dijelovi of f koji odgovaraju isključivo frekvencijama ξ za koje je $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$.

Preciznije, definiramo *Littlewood-Paleyevu kvadratnu funkciju* (za otprije dane i fiksirane φ i ψ_j) kao operator S zadan formulom

$$Sf: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty], \quad Sf := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |M_{\psi_j} f|^2 \right)^{1/2}.$$

Cilj teorije je pokazati ekvivalentnost raznih normi funkcija Sf i f . Prvi znak te mogućnosti je jednostavna primjena Plancherelovog teorema i (4.24):

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{L^2}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|M_{\psi_j} f\|_{L^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_j(\xi)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\xi)^2 \right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \sim \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ipak, već za L^p norme za $p \neq 2$ tako nešto više nije očigledno.

Teorem 4.25. *Za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i svaku $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi*

$$\|Sf\|_{L^p} \sim_{d, \varphi, p} \|f\|_{L^p}.$$

Dokaz. Najprije dokazujemo ocjenu $\|Sf\|_{L^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|f\|_{L^p}$. Dovoljno je pokazati

$$\left\| \left(\sum_{j=-N}^N |M_{\psi_j} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|f\|_{L^p}$$

s implicitnom konstantom neovisnom o $N \in \mathbb{N}$, jer tada možemo pustiti $N \rightarrow \infty$ i iskoristiti teorem o monotonij konvergenciji. Radi korolara 4.23 je pak dovoljno dokazati

$$\left\| \sum_{j=-N}^N \varepsilon_j M_{\psi_j} f \right\|_{L^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|f\|_{L^p} \quad (4.37)$$

za proizvoljne predznake $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$; $j = -N, \dots, N$, pri čemu, naravno, implicitna konstanta ne smije ovisiti o njihovom izboru. Promotrimo simbol

$$m(\xi) := \sum_{j=-N}^N \varepsilon_j \psi_j(\xi) = \sum_{j=-N}^N \varepsilon_j \psi_0(2^{-j}\xi).$$

Za $\xi \neq \mathbf{0}$ i $j \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}$ imamo najviše dva ne-nul pribrojnika te za derivaciju svakog reda vrijedi

$$\begin{aligned} |(\partial^{\mathbf{k}} m)(\xi)| &\leq (2^{-j})^{|\mathbf{k}|} |(\partial^{\mathbf{k}} \psi_0)(2^{-j}\xi)| + (2^{-j-1})^{|\mathbf{k}|} |(\partial^{\mathbf{k}} \psi_0)(2^{-j-1}\xi)| \\ &\leq 2 \|\partial^{\mathbf{k}} \psi_0\|_{L^\infty} (2^{-j})^{|\mathbf{k}|} \lesssim_{\varphi, \mathbf{k}} (2^j)^{-|\mathbf{k}|} \lesssim_{\mathbf{k}} |\xi|^{-|\mathbf{k}|}. \end{aligned}$$

Zato možemo primijeniti Mikhlinov teorem o množitelju (teorem 4.18), koji nam doista daje (4.37).

Sada prelazimo na dokaz obratne ocjene. Za $j \in \mathbb{Z}$ označimo $\tilde{\psi}_j := \psi_{j-1} + \psi_j + \psi_{j+1}$ i definiramo

$$\tilde{S}f := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |M_{\tilde{\psi}_j} f|^2 \right)^{1/2}.$$

Primijetimo da je $\tilde{\psi}_j$ identički jednaka 1 na nosaču od ψ_j . Operator $\tilde{S}$ nije doslovno, ali jest načelno još jedna kvadratna funkcija. Naime, primjenom nejednakosti Minkowskog za ℓ^2 normu odmah dobivamo

$$\tilde{S}f = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |M_{\psi_{j-1}} f + M_{\psi_j} f + M_{\psi_{j+1}} f|^2 \right)^{1/2} \leq 3Sf.$$

Uzmimo sada proizvoljne $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Obzirom da je $M_{\tilde{\psi}_j} M_{\psi_j} = M_{\tilde{\psi}_j \psi_j} = M_{\psi_j}$ i $M_{\psi_j}^* = M_{\tilde{\psi}_j}^* = M_{\psi_j}$, možemo računati:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{L^2} &\stackrel{(4.25)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle M_{\psi_j} f, g \rangle_{L^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle M_{\tilde{\psi}_j} M_{\psi_j} f, g \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle M_{\psi_j} f, M_{\tilde{\psi}_j} g \rangle_{L^2} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} (M_{\psi_j} f)(x) \overline{(M_{\tilde{\psi}_j} g)(x)} dx \end{aligned}$$

pa je

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |M_{\psi_j} f|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |M_{\tilde{\psi}_j} g|^2 \right)^{1/2} = \langle Sf, \tilde{S}g \rangle_{L^2}$$

te prethodno dokazana ocjena (smjer $\lesssim$) za $\tilde{S}g$ daje

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \|Sf\|_{L^p} \|\tilde{S}g\|_{L^{p'}} \lesssim_{d, \varphi, p} \|Sf\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Zbog obrata Hölderove nejednakosti (lema 2.3) iz posljednjeg proizlazi

$$\|f\|_{L^p} \lesssim_{d, \varphi, p} \|Sf\|_{L^p},$$

a to smo i trebali. $\square$

Moguće je dati Littlewood-Paleyve karakterizacije i za neke druge funkcijske prostore. Tako se npr. može pokazati $\|Sf\|_{L^1} \sim_{d, \varphi} \|f\|_{H^1}$. Prikladna literatura je knjiga [FJW91].

* * *

Zadatak 4.18. Dokažite sljedeću *Zygmundovu nejednakost* za lakunarne trigonometrijske sume. Neka je $q > 1$ i neka je $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1} \geq qm_j$ za $j = 1, 2, \dots$. Tada za $N \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ i $p \in \langle 0, \infty \rangle$ vrijedi

$$\left\| \sum_{j=1}^N c_j e^{2\pi i m_j t} \right\|_{L_t^p(\mathbb{T})} \sim_{p, q} \left(\sum_{j=1}^N |c_j|^2 \right)^{1/2},$$

pri čemu kod integracije smatramo $\mathbb{T} \equiv [0, 1]$.

Uputa: Prvi mogući pristup je postupati kao u prvom dokazu teorema 4.22. Opet je dovoljno dokazati gornju ocjenu (tj. $\lesssim$) za realne c_j i kada je $p = 2m \geq 2$ parni cijeli broj. Možemo izmnožiti “svaki-sa-svakim” zagrade

$$\left| \sum_{j=1}^N c_j e^{2\pi i m_j t} \right|^{2m} = \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{2\pi i m_j t} \right)^m \left(\sum_{j=1}^N c_j e^{-2\pi i m_j t} \right)^m,$$

ali sada treba pripaziti koji članovi “prežive” integriranje. Primijetite da ako je q dovoljno velik obzirom na p , tada nema “iznenađenja” i nakon integriranja ostaju samo pribrojnici kod kojih su se jednako mnogo puta birali $e^{2\pi i m_j t}$ i $e^{-2\pi i m_j t}$ za svaki j . S druge pak strane, za “male” vrijednosti od $q > 1$ možete dovoljno “prorijediti” trigonometrijsku sumu kako biste iskoristili prethodni slučaj, a izgubit ćete samo konstantu ovisnu o q .

Za drugi mogući pristup, umjesto da gledate samo $f(t) := \sum_{j=1}^N c_j e^{2\pi i m_j t}$, promatrajte slučajne sume $f_\epsilon(t) := \sum_{j=1}^N \epsilon_j c_j e^{2\pi i m_j t}$, pri čemu su $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$ slučajne varijable kao i ranije u ovom odjeljku. Iskoristite teorem 4.23 kako biste dobili

$$(\mathbb{E} \|f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{T})}^p)^{1/p} \sim_p \left(\sum_{j=1}^N |c_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Sada pretpostavite $q \geq 3$ i zaključite da vrijedi $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T})} \sim \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ za svaki izbor od $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \{-1, 1\}$. Naime, ako definirate $g(t) := \prod_{j=1}^N (1 + \frac{1}{2}\varepsilon_j e^{2\pi i m_j t} + \frac{1}{2}\varepsilon_j e^{-2\pi i m_j t})$, imat ćete $f = 2f_\varepsilon * g$ i $f_\varepsilon = 2f * g$ te $g \geq 0$ i $\int_{\mathbb{T}} g = 1$, odakle će slijediti $\|f\|_{L^p} \leq 2\|f_\varepsilon\|_{L^p}\|g\|_{L^1} = 2\|f_\varepsilon\|_{L^p}$ i $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq 2\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1} = 2\|f\|_{L^p}$.

Napomena: Riječ “lakunaran” obično označava da suma ima samo rijetke i eksponencijalno razmaknute pribrojnice u gornjem smislu. Poanta ovog zadatka je usporedba s Hinčinovom nejednakosti i ukazati da se eksponencijali $e^{2\pi i m_j t}$ s vrlo različitim frekvencijama m_j također ponašaju “prilično nezavisno” (premda doslovno to nisu). Heuristički: svaki od njih oscilira mnogo više od svojih prethodnika pa su ti prethodnici “prilično ravni” duž svakog njegovog perioda.

Poglavlje 5

T(1) teorem

U ovom poglavlju ćemo iskazati i dokazati poznati kriterij L^2 -omeđenosti Calderón-Zygmundovog operatora, tzv. *T(1) teorem*. Teži smjer teorema je dovoljnost njegovih uvjeta; nju ćemo najprije dokazati u posebnom slučaju $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$, $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i to ocjenjivanjem matrice koeficijenata u valičnoj bazi. Poradi dokaza dovoljnosti u općenitom slučaju preostat će nam konstruirati operatore koji su ograničeni na $L^2(\mathbb{R}^d)$ i za koje $T\mathbb{1}$ poprima proizvoljnu vrijednost iz $BMO(\mathbb{R}^d)$; to su tzv. paraproducti. Na kraju poglavlja diskutiramo (bez potpunog dokaza) pitanje omeđenosti Cauchyjevog integrala duž proizvoljnog Lipschitzovog¹ grafa, problem koji je također dijelom motivirao formulaciju i generalizacije T(1) teorema. Glavni izvor za materijal ovog poglavlja su knjige [CM97] i [Mey92], koje je autor svojedobno obradio u [Kov06], odakle je preuzeta većina teksta.

5.1. Iskaz T(1) teorema i neki primjeri

Prisjetimo se iz poglavlja 4 kako je Calderón-Zygmundov operator zapravo linearni operator $T: C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ za koji postoji jezgra K koja zadovoljava (K1)–(K3) iz odjeljka 4.1 (tzv. standardna jezgra) i takva je da vrijedi (4.1). Dimenzija d i parametar γ se obično posebno ne ističu, ali se podrazumijevaju. U prethodnom poglavlju smo vidjeli kako je L^2 -ograničenost od T vrlo poželjno svojstvo i tek je početak zanimljive teorije pa se postavlja pitanje njene karakterizacije “jednostavnijim” uvjetima.

U cijelom ovom poglavlju ćemo pretpostavljati da T ima transponirani operator i da je on također Calderón-Zygmundov. To zapravo znači da postoji linearni operator $T^\tau: C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ takav da je

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g = \int_{\mathbb{R}^d} f(T^\tau g)$$

za svake $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Iz zadatka 4.1(a) znamo da je njegova jezgra $K^\tau(x, y) = K(y, x)$.

Najprije dajmo iskaz osnovnog rezultata ovog poglavlja, tzv. *T(1) teorema*, danas već slavnog rezultata Davida² i Journéa³ [DJ84]. Potom ćemo pažljivo definirati sve

¹Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903), njemački matematičar.

²Guy David (1957), francuski matematičar.

³Jean-Lin Journé (1957), francuski matematičar.

pojmove koji se u njemu pojavljuju.

Teorem 5.1. (Originalni $T(1)$ teorem) *Calderón-Zygmundov operator T se može proširiti do neprekidnog linearnog operatora na $L^2(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako vrijede sljedeća tri uvjeta:*

(DJ1) T je omeđen u slabom smislu,

(DJ2) $T\mathbb{1} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$,

(DJ3) $T^\tau \mathbb{1} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

Vidimo da tek trebamo pridati značenje uvjetima (DJ1)–(DJ3), ali intuitivno za provjeru L^2 -omeđenosti od T treba provjeriti neku slabiju verziju omeđenosti od T te provjeriti da operatori T i T^τ preslikavaju konstantnu funkciju $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ u BMO prostor. Kako je prvi uvjet često automatski zadovoljen, glavni posao preostaje testirati operatore T i T^τ na jednoj jednoj funkciji $\mathbb{1}$, odakle i naziv samog teorema. Ipak, to nije uvijek sasvim lako niti je $\mathbb{1}$ uvijek najprirodniji odabir funkcije na kojoj se provjeravaju uvjeti (DJ2) i (DJ3) pa su s vremenom dokazane i neke varijante (tzv. $T(b)$ teoremi) o kojima nećemo govoriti.

Neka je $T: C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ linearni operator. Kažemo da je T omeđen u slabom smislu ako za svake $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ i za svake “test-funkcije” $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ čiji nosači su sadržani u $\text{Cl}(B(x_0, R))$ vrijedi

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g \right| \lesssim R^d \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} R^{|\alpha|} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} R^{|\alpha|} \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty} \right). \quad (5.1)$$

Postoje i (očigledne) varijante tog uvjeta koje uključuju i više derivacije ∂^α na desnoj strani, ali radi jednostavnosti ostanimo samo kod derivacija prvog reda. Svaki L^2 -omeđeni operator T je i omeđen u slabom smislu. Naprosto, za x_0, R, f, g kao gore vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g \right| &\leq \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \\ &\leq \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} |B(x_0, R)|^{1/2} \|f\|_{L^\infty} |B(x_0, R)|^{1/2} \|g\|_{L^\infty} \\ &= \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} |B(\mathbf{0}, 1)| R^d \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Prema tome, uvjet (DJ1) u teoremu 5.1 je nužan. Razlog zašto je on dosta slabiji je pojavljivanje L^∞ normi prvih derivacija od f i g na desnoj strani od (5.1).

Označimo sa $C_{c,0}^1(\mathbb{R}^d)$ prostor

$$C_{c,0}^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C_c^1(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} f = 0 \right\}.$$

Definirat ćemo $T\mathbb{1}$ naprosto kao linearni funkcional na prostoru $C_{c,0}^1(\mathbb{R}^d)$. Neka je $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ niz funkcija iz $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ koji je ograničen u L^∞ normi i koji aproksimira konstantu $\mathbb{1}$ u smislu da vrijedi

$$(\forall R > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0) (\varphi_m = 1 \text{ na } \text{Cl}(B(\mathbf{0}, R))).$$

Tada definiramo

$$T\mathbb{1} := \lim_{m \rightarrow \infty} T\varphi_m,$$

pri čemu limes shvaćamo *-slabo, tj.

$$(\forall f \in C_{c,0}^1(\mathbb{R}^d)) \left((T\mathbb{1})(f) := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m)f \right).$$

Trebamo dokazati da limes $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m)f$ doista postoji kao kompleksan broj. Naime, neka je $R > 0$ dovoljno velik da je $\text{supp } f \subseteq B(\mathbf{0}, R/2)$ i neka su $m, m' \in \mathbb{N}$ takvi da je $\varphi_m = 1 = \varphi_{m'}$ na zatvaraču od $B(\mathbf{0}, R)$. Tada funkcije f i $\varphi_m - \varphi_{m'}$ imaju disjunktne nosače te uz oznaku $M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_\infty$ formula (4.1) daje

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m)f - \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_{m'})f \right| \\ & \stackrel{(4.1)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x, y) f(x) (\varphi_m(y) - \varphi_{m'}(y)) dx dy \right| \\ & = \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)} \left(\int_{\text{supp } f} K(x, y) f(x) dx \right) (\varphi_m(y) - \varphi_{m'}(y)) dy \right| \\ & \leq 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)} \left| \int_{\text{supp } f} K(x, y) f(x) dx \right| dy \\ & = 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)} \left| \int_{B(\mathbf{0}, R/2)} (K(x, y) - K(\mathbf{0}, y)) f(x) dx \right| dy \\ & \stackrel{(K2)}{\lesssim} 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)} \left(\int_{B(\mathbf{0}, R/2)} \frac{|x|^\gamma}{|y|^{d+\gamma}} |f(x)| dx \right) dy \\ & = 2M \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\gamma |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)} \frac{dy}{|y|^{d+\gamma}} \right), \end{aligned}$$

što teži prema 0 kada $R \rightarrow +\infty$, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i jer je $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, 1)} |y|^{-d-\gamma} dy < +\infty$. Zaključujemo da je spomenuti niz brojeva Cauchyjev, što znači da i konvergira. Štoviše, definicija od $T\mathbb{1}$ ne ovisi o izboru od $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Naime, neka je $(\tilde{\varphi}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ još jedan takav niz i $f \in C_{c,0}^1(\mathbb{R}^d)$. Nadalje, uzmimo proizvoljni $R > 0$ takav da je $\text{supp } f \subseteq B(\mathbf{0}, R/2)$ i dovoljno veliki $m \in \mathbb{N}$ da vrijedi $\varphi_m = 1 = \tilde{\varphi}_m$ na zatvaraču kugle $B(\mathbf{0}, R)$. Uz oznaku

$$M := \max \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{L^\infty}, \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\tilde{\varphi}_k\|_{L^\infty} \right\}$$

račun vrlo sličan gornjem daje

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m)f - \int_{\mathbb{R}^d} (T\tilde{\varphi}_m)f \right| \lesssim M \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\gamma |f(x)| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, R)} \frac{dy}{|y|^{d+\gamma}} \right),$$

odakle vidimo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m)f - \int_{\mathbb{R}^d} (T\tilde{\varphi}_m)f \right) = 0.$$

Uglavnom će nas zanimati samo situacije kada je $(T\mathbb{1})(f) = \int_{\mathbb{R}^d} (T\mathbb{1})f$ za neku lokalno integrabilnu funkciju $T\mathbb{1}$ (označenu na isti način) i upravo na taj način treba interpretirati uvjete (DJ2) i (DJ3).

Ukoliko znamo da je T L^2 -omeđeni Calderón-Zygmundov operator, tada iz rezultata odjeljka 4.6 već znamo da se on neprekidno proširuje do operatora sa $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $BMO(\mathbb{R}^d)$, a nije teško vidjeti da je netom dana definicija od $T\mathbb{1}$ tada posebni slučaj definicije od tamo. To dokazuje nužnost uvjeta (DJ2) i (DJ3) u teoremu 5.1. Dakle, u ostatku poglavlja trebamo dokazati dovoljnost od (DJ1)–(DJ3).

Čitatelj upoznat s teorijom distribucija će primijetiti da bi nam zapravo bilo prirodnije inicijalno definirati Calderón-Zygmundov operator kao preslikavanje sa nekog prostora test funkcija $\mathcal{D}$ u odgovarajući prostor distribucija $\mathcal{D}'$. Naime, tada ne bismo unaprijed morali pretpostavljati egzistenciju transponiranog operatora, a $T\mathbb{1}$ i $T^\tau\mathbb{1}$ bismo mogli shvatiti kao distribucije “pocijepane” po konstantnim funkcijama. U literaturi je to obično slučaj, a za $\mathcal{D}$ se uzima ili $C_c^r(\mathbb{R}^d)$ za neki $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (kao u [CM97]) ili prostor Schwartzovih⁴ funkcija (kao u [Ste93]). Mi smo se ipak odlučili za konkretniju “definiciju”, prvenstveno radi jednostavnosti, ali i jer je ona zadovoljavajuća za sve zamislive primjene. U prethodnom poglavlju nam ova napomena ne bi ništa značila jer, ako već imamo ograničenost na L^2 , tada bilo koja od spomenutih inicijalnih definicija biva poopćena lemom 4.2.

* * *

Zadatak 5.1.

- (a) Neka je T antisimetrični Calderón-Zygmundov operator kao u iskazu i napomeni zadatka 4.2. Dokažite da je T uvijek omeđen u slabom smislu i da zadovoljava $T^\tau\mathbb{1} = -T\mathbb{1}$.

Napomena: Dakle, iz teorema 5.1 slijedi da se T proširuje do ograničenog operatora na $L^2(\mathbb{R}^d)$ ako i samo vrijedi $T\mathbb{1} \in BMO(\mathbb{R}^d)$.

- (b) Ako je još jezgra K invarijantna na translacije, tj. $K(x, y) = K(x - y, \mathbf{0})$, dokažite da je $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$.

Napomena: Na ovaj način iz teorema 5.1 npr. slijedi L^2 -omeđenost Rieszovih transformacija.

- (c) Korištenjem teorema 5.1 pokažite da je operator $f \mapsto mf$ ograničen na $L^2(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako je $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Napomena: Naravno da je sama tvrdnja trivijalna, ali njom ilustrirajte teorem.

5.2. Postojanje valićnih baza

U poglavlju 3 smo bili definirali operatore translacija T_c i operatore dilatacija $D_a^{(p)}$. Obzirom da radimo u prostoru $L^2(\mathbb{R})$, najprirodnija će nam biti normalizacija za $p = 2$ i zato

⁴Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002), francuski matematičar.

ćemo u ovom poglavlju pisati samo D_a umjesto $D_a^{(2)}$. Ideja ovog odjeljka je komentirati (bez dokaza) postojanje prikladne ortonormirane baze prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ za dekompoziciju Calderón-Zygmundovog operatora T . “Pod prikladnim” svojstvima mislimo glatkoću, koja je nužna da bi se baza doista nalazila u domeni operatora $C_c^1(\mathbb{R}^d)$, i svojevrsnu invarijantnost na translacije i dilatacije, obzirom da i klasa Calderón-Zygmundovih operatora poštuje te dvije “simetrije”. Dakle, idealno bi bilo krenuti od nekoliko generatora $\psi^1, \psi^2, \dots$ i ortonormiranu bazu dobiti primjenama operatora T_k ; $k \in \mathbb{Z}^d$ i $D_{2^{-j}}$; $j \in \mathbb{Z}$. Da je to doista moguće je jedan od najvećih uspjeha tzv. *teorije valića*.

Familija $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ je *multirezolucijska analiza* (kraće *MRA*) od $L^2(\mathbb{R}^d)$ ako vrijedi:

- (M1) V_j ; $j \in \mathbb{Z}$ su zatvoreni potprostori od $L^2(\mathbb{R}^d)$,
- (M2) za svaki $j \in \mathbb{Z}$ je $V_j \subseteq V_{j+1}$,
- (M3) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$,
- (M4) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
- (M5) za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i svaki $j \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f \in V_j \Leftrightarrow D_{2^j} f \in V_0$,
- (M6) za svaku $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i svaki $k \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $f \in V_0 \Leftrightarrow T_k f \in V_0$,
- (M7) postoji funkcija $\varphi \in V_0$ takva da je $(T_k \varphi)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ ortonormirana baza od V_0 .

Napomenimo da skup aksioma (M1)–(M7) nije nezavisan. Npr. (M4) i (M6) se mogu izvesti iz ostalih aksioma; vidjeti [HW96]. Primijetimo usput da je za svaki fiksirani j kolekcija $(D_{2^{-j}} T_k \varphi)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ ortonormirana baza od V_j . Funkciju φ kao u (M7) zovemo *skalirajuća funkcija* i ona jednoznačno određuje MRA.

Kažemo da je MRA *r-regularna* za neki $r \in \mathbb{N}_0$ ako vrijedi:

- (M8) funkcija φ iz (M7) je još klase $C^r(\mathbb{R}^d)$ te za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks α , $|\alpha| \leq r$, vrijedi

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \lesssim_m (1 + |x|)^{-m}; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Još neki korisni zahtjevi na multirezolucijsku analizu su:

- (M9) funkcija φ iz (M7) je klase C^r i ima kompaktan nosač,
- (M10) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0) = 1$,
- (M11) $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (T_k \varphi)(x) = 1$ za $x \in \mathbb{R}^d$.

Očigledno (M9) povlači (M8), a uz pretpostavke (M1)–(M9) vrijedi $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ pa množenjem funkcije φ odgovarajućom konstantom možemo postići (M10) te kao posljedicu dobiti i (M11); vidjeti [HW96] i [Mey92].

Neka je E konačan skup. Za sistem funkcija $\psi_{j,k}^\epsilon$; $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $\epsilon \in E$ kažemo da je *ortonormirani valićni sistem* ili *ortonormirana valićna baza* ako vrijedi:

- (V1) $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ je ortonormirana baza od $L^2(\mathbb{R}^d)$,

(V2) postoje funkcije ψ^ϵ ; $\epsilon \in E$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ takve da za svake $j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $\psi_{j,k}^\epsilon = D_{2^{-j}} T_k \psi^\epsilon$,

Pokazuje se da mora biti $\text{card } E = 2^d - 1$, ali to nećemo koristiti. Valićni sistem $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ je r -regularan za neki $r \in \mathbb{N}_0$ ako još imamo:

(V3) funkcije ψ^ϵ ; $\epsilon \in E$ iz (V2) su klase C^r te za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks α , $|\alpha| \leq r$, vrijedi

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \lesssim_m (1 + |x|)^{-m}; \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

(V4) za svaki multiindeks α , $|\alpha| \leq r$, i za svake indekse j, k, ϵ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \psi_{j,k}^\epsilon(x) dx = 0.$$

Još jedan vrlo poželjan zahtjev na valićnu bazu je:

(V5) funkcije ψ^ϵ ; $\epsilon \in E$ iz (V2) su klase C^r i imaju kompaktan nosač.

Jasno je da ovaj uvjet povlači (V3).

Reći ćemo da je ortonormirani valićni sistem $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ pridružen nekoj MRA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ako je $(T_k \psi^\epsilon)_{k,\epsilon}$ ortonormirana baza od W_0 . Pritom sa W_j označavamo ortogonalni komplement potprostora V_j u potprostoru V_{j+1} , tj. $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$. U tom slučaju za svaki fiksirani j kolekcija $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{k,\epsilon}$ čini ortonormiranu bazu od W_j . Za postupak konstrukcije ortonormiranih valića pridruženih danoj MRA vidjeti [Wut98].

Fundamentalni rezultat egzistencije ortonormiranih valićnih baza s kompaktnim nosačima je sljedeći teorem kojeg je dokazala Daubechies⁵ [Dau92].

Teorem 5.2. *Za svaki $r \in \mathbb{N}_0$ postoje multirezolucijska analiza $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ i njoj pridružen ortonormirani valićni sistem $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ koji zadovoljavaju uvjete (M1)–(M11) i (V1)–(V5).*

Umjesto dokaza (koji nije sasvim jednostavan) samo ćemo kratko komentirati vrlo jednostavnu konstrukciju jedne MRA i jedne valićne baze, kod kojih nemamo ni neprekidnost, a kamoli glatkoću. Naprije radimo u jednoj dimenziji. Ako stavimo

$$V_j := \text{Cl} \left(\text{span} \left\{ \mathbb{1}_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))} : k \in \mathbb{Z} \right\} \right).$$

tada je $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ MRA kod koje možemo uzeti naprosto $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Osim toga je

$$W_j = \text{Cl} \left(\text{span} \left\{ \mathbb{1}_{[2^{-j}k, 2^{-j-1}(2k+1))} - \mathbb{1}_{[2^{-j-1}(2k+1), 2^{-j}(k+1))} : k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$$

pa nam je ortonormirana baza od W_0 generirana funkcijom $\mathbb{h} = \mathbb{1}_{[0,1/2)} - \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Sasvim eksplicitno, jedna ortonormirana valićna baza od $L^2(\mathbb{R})$ je

$$(\mathbb{h}_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbb{h}_{j,k} = 2^{j/2} \left(\mathbb{1}_{[2^{-j}k, 2^{-j-1}(2k+1))} - \mathbb{1}_{[2^{-j-1}(2k+1), 2^{-j}(k+1))} \right)$$

⁵Ingrid Daubechies (1954), belgijska fizičarka i matematičarka.

i ona se naziva *Haarov⁶ sistem* [Haa10]. Praktično je tu kolekciju indeksirati po familiji svih dijadskih intervala

$$\mathcal{D} := \{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

uz “supstituciju” $I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Ako označimo

$$\varphi_I := \frac{\mathbb{1}_I}{\sqrt{|I|}}, \quad \mathbb{h}_I := \frac{\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}}{\sqrt{|I|}}, \quad (5.2)$$

pri čemu su I_{lijevo} i I_{desno} lijeva i desna polovica od I , tada vidimo da su φ_I i $\mathbb{h}_I$ normirane u $L^2(\mathbb{R})$, a Haarov sistem možemo zapisati $(\mathbb{h}_I)_{I \in \mathcal{D}}$. Za dobivanje valičnih baza u višim dimenzijama služimo se tenzoriranjem. Tako je npr. kolekcija

$$\{\varphi_I \otimes \mathbb{h}_J, \mathbb{h}_I \otimes \varphi_J, \mathbb{h}_I \otimes \mathbb{h}_J : I, J \in \mathcal{D}, |I| = |J|\}$$

(indeksirana po dijadskim kvadratima $I \times J \in \mathcal{C}$) jedna ortonormirana valična baza od $L^2(\mathbb{R}^2)$, pri čemu nam $f \otimes g$ označava tzv. elementarni tenzor

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y).$$

Više o ortonormiranim valićima čitatelj može naći u vrlo pristupačnoj knjizi [HW96].

* * *

Zadatak 5.2. Dokažite da je za funkciju $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ekvivalentno:

- (1) $(\mathbb{D}_{2^{-j}} \mathbb{T}_k \psi)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormirani skup u $L^2(\mathbb{R})$,
- (2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1$ za g.s. $\xi \in \mathbb{R}$,
 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + k)) \overline{\hat{\psi}(\xi + k)} = 0$ za $j \in \mathbb{N}$ i g.s. $\xi \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5.3. Dokažite sljedeću karakterizaciju ortonormiranih valića (prvi put dokazanu od strane Gripenberga [Gri95] i Wanga [Wan95]). Za funkciju $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ takvu da je $\|\psi\|_{L^2} = 1$ ekvivalentno je:

- (1) $(\mathbb{D}_{2^{-j}} \mathbb{T}_k \psi)_{j,k \in \mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza od $L^2(\mathbb{R})$,
- (2) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1$ za g.s. $\xi \in \mathbb{R}$,
 $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + m))} = 0$ za $m \in 2\mathbb{Z} + 1$ i g.s. $\xi \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5.4. Dokažite da ne postoji ortonormirana valična baza koja ispunjava svojstva (V1)–(V5) uz $r = \infty$.

Uputa: Iz svojstva (V4) zaključite da su članovi baze ortogonalni na sve polinome pa potom iskoristite Stone⁷-Weierstrassov⁸ teorem aproksimacije.

⁶Alfréd Haar (1885–1933), mađarski matematičar.

⁷Marshall Harvey Stone (1903–1989), američki matematičar.

⁸Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), njemački matematičar.

5.3. Diskretna Schurova lema

Sada ćemo dokazati težinsku varijantu leme 2.7. Bit će to jednostavni rezultat koji daje dovoljan uvjet za ograničenost linearnog operatora zadanog “beskonačnom matricom” $(a_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ u nekoj ortonormiranoj bazi Hilbertovog prostora.

Lema 5.3. (Diskretna težinska Schurova lema) *Neka je $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H i neka je $(a_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ familija kompleksnih brojeva. Ako postoje konstanta $C \in [0, +\infty)$ i familija pozitivnih brojeva $(w_\alpha)_{\alpha \in A}$ tako da vrijedi*

$$\sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta \leq C w_\alpha \quad \text{za svaki } \alpha \in A, \quad (5.3)$$

$$\sum_{\alpha \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\alpha \leq C w_\beta \quad \text{za svaki } \beta \in A, \quad (5.4)$$

onda postoji jedinstveni ograničeni linearni operator $T: H \rightarrow H$ takav da je

$$\langle T e_\beta, e_\alpha \rangle_H = a_{\alpha,\beta}$$

za svake $\alpha, \beta \in A$ te štoviše imamo $\|T\|_{H \rightarrow H} \leq C$.

Dokaz. Uzmimo proizvoljni $v \in H$ tako da koeficijenti $v_\beta = \langle v, e_\beta \rangle \in \mathbb{C}$ zadovoljavaju $(v_\beta)_{\beta \in A} \in \ell^2(A)$. Možemo pisati

$$|a_{\alpha,\beta}| |v_\beta| = |a_{\alpha,\beta}|^{1/2} w_\beta^{1/2} |a_{\alpha,\beta}|^{1/2} w_\beta^{-1/2} |v_\beta|$$

pa po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| |v_\beta| &\leq \left(\sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta \right)^{1/2} \left(\sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(5.3)}{\leq} C^{1/2} w_\alpha^{1/2} \left(\sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zatim je

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| |v_\beta| \right)^2 &\leq C \sum_{\alpha \in A} w_\alpha \left(\sum_{\beta \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 \right) \\ &= C \sum_{\beta \in A} w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 \left(\sum_{\alpha \in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\alpha \right) \stackrel{(5.4)}{\leq} C^2 \sum_{\beta \in A} w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 w_\beta = C^2 \sum_{\beta \in A} |v_\beta|^2, \end{aligned}$$

odakle vidimo da koeficijenti $u_\alpha := \sum_{\beta \in A} a_{\alpha,\beta} v_\beta$ također čine kolekciju skalara iz $\ell^2(A)$ te je dobro definiran vektor

$$Tv := \sum_{\alpha \in A} u_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in A} a_{\alpha,\beta} \langle v, e_\beta \rangle_H \right) e_\alpha \in H.$$

Jasno je da je ovako definiran operator T linearan. Osim toga, iz iste nejednakosti slijedi $\|Tv\|_H \leq C \|v\|_H$, a po konstrukciji očigledno vrijedi $\langle T e_\beta, e_\alpha \rangle_H = a_{\alpha,\beta}$.

Jedinstvenost takvog ograničenog linearnog operatora T je očigledna jer su konačne linearne kombinacije elemenata ortonormirane baze $(e_\beta)_{\beta \in A}$ guste u H . $\square$

Schurovu lemu ćemo koristiti u slučaju kada je $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, a $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ je pogodna valična baza indeksirana po $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d \times E$.

* * *

Zadatak 5.5. (a) Koliku najveću operatorsku (tj. spektralnu) normu može imati $n \times n$ matrica s elementima iz $[0, 1]$?

(b) Koliku najveću operatorsku normu može imati stohastička $n \times n$ matrica, tj. nenegativna matrica čije sume elemenata u svakom retku iznose 1?

(c) Koliku najveću operatorsku normu može imati bistohastička $n \times n$ matrica, tj. nenegativna matrica čije sume elemenata u svakom retku i svakom stupcu iznose 1?

5.4. Dokaz $T(1)$ teorema u posebnom slučaju

Kao što smo već bili komentirali, preostaje dokazati dovoljnost uvjeta (DJ1)–(DJ3) u teoremu 5.1. U ovom odjeljku pretpostavljamo $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$ pa su uvjeti (DJ2) i (DJ3) trivijalno ispunjeni.

Fiksirajmo 1-regularnu multirezolucijsku analizu $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ od $L^2(\mathbb{R}^d)$ sa skalirajućom funkcijom φ pridruženu nekom 1-regularnom ortonormiranom valičnom sistemu $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$, $\psi_{j,k}^\epsilon := D_{2^{-j}}T_k\psi^\epsilon$ na način opisan u prethodnom odjeljku. Zahvaljujući teoremu 5.2 možemo pretpostaviti da su zadovoljeni uvjeti (M1)–(M11) i (V1)–(V5). Osim toga označimo $\varphi_{j,k} := D_{2^{-j}}T_k\varphi$. Iz praktičnih razloga ćemo pretpostaviti $\gamma < 1$, što možemo jer smanjivanjem γ samo oslabljujemo ocjene (K2) i (K3).

Ideja dokaza je promotriti koeficijente $\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}$ operatora T u netom spomenutoj valičnoj bazi te ih dovoljno dobro ocijeniti tako da možemo primijeniti lemu 5.3. Ortonormirana baza $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ je ovdje prikladna zahvaljujući tome što su njeni elementi funkcije klase C^1 s kompaktnim nosačem pa se nalaze u domeni operatora T . Glavni dio dokaza je sljedeća propozicija u čijem dokazu ćemo iskoristiti sve pretpostavke na T i K .

Propozicija 5.4. *Ako je $T: C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^d)$ Calderón-Zygmundov operator koji je omeđen u slabom smislu i za kojeg vrijedi $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$, onda imamo ocjenu*

$$|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| \lesssim 2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\gamma)} \left(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'} + |2^{-j}k - 2^{-j'}k'|} \right)^{d+\gamma}. \quad (5.5)$$

Podijelit ćemo dokaz u više slučajeva, ovisno o međusobnom odnosu funkcija $\psi_{j,k}^\epsilon$ i $\psi_{j',k'}^{\epsilon'}$ za razne indekse $j, j', k, k', \epsilon, \epsilon'$. Plan dokaza je ugrubo sljedeći.

- (1) Ako je $j = j'$ i nosači od $\psi_{j,k}^\epsilon$ i $\psi_{j',k'}^{\epsilon'}$ su međusobno “daleko” (specijalno su disjunktne), onda možemo $\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}$ raspisati po formuli (4.1) te iskoristiti ocjene za standardnu jezgru.

- (2) Ako je $j = j'$ i nosači od $\psi_{j,k}^\epsilon$ i $\psi_{j',k'}^{\epsilon'}$ su međusobno “blizu”, onda iskoristimo omeđenost u slabom smislu operatora T .
- (3) Ako je j manje od j' , onda je funkcija $\psi_{j,k}^\epsilon$ “mnogo ravnija” (tj. bliža konstanti) od $\psi_{j',k'}^{\epsilon'}$, dok ova druga funkcija ima srednju vrijednost 0. Kako je $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$, možemo očekivati da će $|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}|$ biti “dosta malo”.
- (4) Ako je j veće od j' , onda iskoristimo uvjet $T^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$ na isti način kao u (3) jer imamo $|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| = |\langle T^\tau \psi_{j',k'}^{\epsilon'}, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|$.

Ocjena (5.5) nam govori da je matrica operatora T u valičnoj bazi $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ “skoro-dijagonalna”, tj. njeni elementi $\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}$ “brzo trnu” daleko od dijagonale. Sve implicitne konstante u donjem dokazu će ovisiti samo o operatoru T , ocjenama za njegovu jezgru K te sistemima funkcija $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$, $(\varphi_{j,k})_{j,k}$, ali to nećemo notacijski isticati.

Dokaz propozicije 5.4. Neka je $r > 0$ takav da funkcije ψ^ϵ , φ imaju nosače sadržane u $B(\mathbf{0}, \frac{r}{2})$. Primijetimo da su tada nosači od $\psi_{j,k}^\epsilon$ i $\varphi_{j,k}$ podskupovi kugle $B(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$. Označimo s K jezgru operatora T .

Slučaj 1. Pretpostavimo $j = j'$ i $|k - k'| \geq 2r$.

Uočimo da je desna strana u (5.5) jednaka $(\frac{2}{2+|k-k'|})^{d+\gamma}$. Kako su $\text{supp } \psi_{j,k}^\epsilon$ i $\text{supp } \psi_{j',k'}^{\epsilon'}$ disjunktni (jer su kugle $B(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$ i $B(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$ disjunktne), primjenjiva je formula (4.1) pa možemo pisati

$$\begin{aligned} \langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x, y) \psi_{j,k}^\epsilon(y) \overline{\psi_{j',k'}^{\epsilon'}(x)} dx dy \\ &= \int_{B(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}}) \times B(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})} (K(x, y) - K(x, \frac{k}{2^j})) \psi_{j,k}^\epsilon(y) \overline{\psi_{j',k'}^{\epsilon'}(x)} dx dy. \end{aligned}$$

Sada za $x \in B(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$, $y \in B(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$ vrijedi

$$|y - \frac{k}{2^j}| \leq \frac{r}{2^{j+1}}, \quad |x - y| \geq \frac{|k-k'|}{2^j} - \frac{r}{2^{j+1}} - \frac{r}{2^{j+1}} \geq \frac{|k-k'|}{2^{j+1}}, \quad |y - \frac{k}{2^j}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

pa možemo iskoristiti ocjenu za jezgru (K3) kako bismo dobili:

$$\begin{aligned} |\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| &\lesssim \int_{B(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}}) \times B(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})} \frac{(\frac{r}{2^{j+1}})^\gamma}{(\frac{|k-k'|}{2^{j+1}})^{d+\gamma}} |\psi_{j,k}^\epsilon(y)| |\psi_{j',k'}^{\epsilon'}(x)| dx dy \\ &= r^\gamma |k - k'|^{-d-\gamma} 2^{d(j+1)} 2^{-\frac{dj}{2}} \|\psi^\epsilon\|_{L^1} 2^{-\frac{dj}{2}} \|\psi^{\epsilon'}\|_{L^1} \lesssim \left(\frac{1}{|k - k'|} \right)^{d+\gamma} \lesssim \left(\frac{2}{2 + |k - k'|} \right)^{d+\gamma}. \end{aligned}$$

Slučaj 2. Pretpostavimo $j = j'$ i $|k - k'| < 2r$.

Stavimo li $x_0 := \frac{1}{2^{j+1}}(k + k')$, $R := \frac{r}{2^{j+1}}$, možemo odmah uočiti da su $\text{supp } \psi_{j,k}^\epsilon$ i $\text{supp } \psi_{j',k'}^{\epsilon'}$ sadržani u $B(x_0, R)$ pa svojstvo omeđenosti u slabom smislu (5.1) daje

$$|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| \lesssim R^d 2^{dj} \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} (2^j R)^{|\alpha|} \|\partial^\alpha \psi^\epsilon\|_{L^\infty} \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} (2^j R)^{|\alpha|} \|\partial^\alpha \psi^{\epsilon'}\|_{L^\infty} \right),$$

a zbog $2^j R = 2r$ je desna strana zapravo konstantna pa možemo pisati

$$|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| \lesssim 1 \lesssim \left(\frac{2}{2 + |k - k'|} \right)^{d+\gamma}.$$

Slučaj 3. Pretpostavimo sada da je $j' \leq j - 1$. (Slučaj $j \leq j' - 1$ se dokazuje analogno zbog simetrije argumenata, zamjenom T i T^* .)

Kako je $\psi_{j',k'}^{\epsilon'} \in V_{j'+1} \subseteq V_j$, imamo

$$\psi_{j',k'}^{\epsilon'} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \langle \psi_{j',k'}^{\epsilon'}, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2} \varphi_{j,i},$$

pri čemu je u ovoj sumi samo konačno mnogo koeficijenata različito od 0 radi kompaktnosti nosača od $\psi^{\epsilon'}$ i φ . Zato imamo

$$\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \overline{\langle \psi_{j',k'}^{\epsilon'}, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2}} \langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2} = \langle g, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2},$$

pri čemu smo označili

$$g := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i \varphi_{j,i}, \quad c_i := \langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2}; \quad i \in \mathbb{Z}^d.$$

(Zapravo je g ortogonalna projekcija od $T\psi_{j,k}^\epsilon$ na V_j .) Primijetimo da je $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$.

Kao prvo, za svaki indeks i vrijedi

$$|c_i| = |\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2}| \lesssim \frac{1}{(1 + |i - k|)^{d+\gamma}}. \quad (5.6)$$

Ta se ocjena izvodi na isti način kao i ocjene u slučajevima 1 i 2. Naime, ako u istim računima pišemo $\varphi_{j,i}$ umjesto $\psi_{j',k'}^{\epsilon'}$, dobit ćemo

$$|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2}| \lesssim \frac{1}{|i - k|^{d+\gamma}} \quad \text{za } |i - k| \geq 2r,$$

odnosno

$$|\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2}| \lesssim 1 \quad \text{za } |i - k| < 2r,$$

iz čega slijedi (5.6). Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ možemo pisati

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}^d \\ x \in \text{supp } \varphi_{j,i}}} |c_i| |\varphi_{j,i}(x)| \lesssim 2^{\frac{dj}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty} \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}^d \\ |i - 2^j x| < r/2}} \frac{1}{(1 + |i - k|)^{d+\gamma}} \\ &\lesssim 2^{\frac{dj}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty} \text{card}\{i \in \mathbb{Z}^d : |i - 2^j x| < r/2\} \frac{(r/2 + 1)^{d+\gamma}}{(1 + |2^j x - k|)^{d+\gamma}}, \end{aligned}$$

a kako ima manje od $(r + 1)^d$ cjelobrojnih točaka unutar svake kugle polumjera $r/2$, zaključujemo da vrijedi

$$|g(x)| \lesssim \frac{2^{\frac{dj}{2}}}{(1 + |2^j x - k|)^{d+\gamma}}. \quad (5.7)$$

Osim toga, iz (5.6) odmah slijedi $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |c_i| < +\infty$. Pokažimo da je štoviše

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i = 0.$$

Naime, zbog $T^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$, $2^{-\frac{dj}{2}} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{j,i} = \mathbb{1}$ te $\int \psi_{j,k}^\epsilon = 0$ imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \varphi_{j,i} \rangle_{L^2} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \langle \psi_{j,k}^\epsilon, T^\tau \varphi_{j,i} \rangle_{L^2} \\ &= 2^{\frac{dj}{2}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \psi_{j,k}^\epsilon, T^\tau \left(2^{-\frac{dj}{2}} \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z}^d \\ \|i\|_{\ell^1} \leq m}} \varphi_{j,i} \right) \right\rangle_{L^2} = 0. \end{aligned}$$

Konačno, radi

$$\int_{\mathbb{R}^d} g = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{j,i} = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i \right) 2^{-\frac{dj}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi$$

dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} g = 0. \quad (5.8)$$

Ocjena (5.5) će se temeljiti na činjenicama da je funkcija g “dobro lokalizirana” u smislu (5.7) i ima integral 0 te da je funkcija $\psi_{j',k'}^{\epsilon'}$ tim “manja” i “ravnija” što je j' manji, a to vidimo iz

$$\|\psi_{j',k'}^{\epsilon'}\|_{L^\infty} = 2^{\frac{dj'}{2}} \|\psi^{\epsilon'}\|_{L^\infty}, \quad (5.9)$$

$$\|\partial_l \psi_{j',k'}^{\epsilon'}\|_{L^\infty} = 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} \|\partial_l \psi^{\epsilon'}\|_{L^\infty}; \quad l = 1, 2, \dots, d. \quad (5.10)$$

Radi (5.7), (5.8) i jednog iz serije klasičnih rezultata o surjektivnosti operatora divergencije (pogledajte zadatak 5.6) znamo da postoje funkcije $g_1, g_2, \dots, g_d \in C^1(\mathbb{R}^d)$ takve da je

$$g = \operatorname{div}(g_1, g_2, \dots, g_d) = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \dots + \partial_d g_d$$

te

$$|g_l(x)| \lesssim \frac{2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j}}{(1 + |2^j x - k|)^{d+\gamma-1}}; \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad l = 1, 2, \dots, d. \quad (5.11)$$

Sada razlikujemo dva podslučaja.

Slučaj 3a. Neka je $|2^{-j}k - 2^{-j'}k'| < 2^{-j'}r$, tj. $|2^{j-j'}k' - k| < 2^{j-j'}r$.

Uz primjenu formule za parcijalnu integraciju možemo računati:

$$\begin{aligned}
 |\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_{j',k'}^{\epsilon'}} g \right| \leq \sum_{l=1}^d \left| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_{j',k'}^{\epsilon'}} \partial_l g_l \right| = \sum_{l=1}^d \left| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\partial_l \psi_{j',k'}^{\epsilon'}} g_l \right| \\
 &\stackrel{(5.10), (5.11)}{\lesssim} 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j} \int_{B(\frac{k'}{2^{j'}}, \frac{r}{2^{j'+1}})} \frac{dx}{(1 + |2^j x - k|)^{d+\gamma-1}} \\
 &= 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} \int_{B(2^{j-j'} k' - k, 2^{j-j'-1} r)} \frac{dx'}{(1 + |x'|)^{d+\gamma-1}} \\
 &\leq 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} \int_{B(\mathbf{0}, 2^{j-j'+1} r)} \frac{dx'}{(1 + |x'|)^{d+\gamma-1}} \\
 &\lesssim 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} \int_0^{2^{j-j'+1} r} \frac{t^{d-1} dt}{(1+t)^{d+\gamma-1}} \\
 &\lesssim 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} (2^{j-j'})^{1-\gamma} = 2^{-(j-j')(\frac{d}{2}+\gamma)} \\
 &\lesssim 2^{-(j-j')(\frac{d}{2}+\gamma)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |2^{-j} k - 2^{-j'} k'|} \right)^{d+\gamma}.
 \end{aligned}$$

Slučaj 3b. Neka je $|2^{-j} k - 2^{-j'} k'| \geq 2^{-j'} r$, tj. $|2^{j-j'} k' - k| \geq 2^{j-j'} r$.

U ovom slučaju ocjenjujemo

$$\begin{aligned}
 |\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_{j',k'}^{\epsilon'}} g \right| \stackrel{(5.9), (5.7)}{\lesssim} 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} \int_{B(\frac{k'}{2^{j'}}, \frac{r}{2^{j'+1}})} \frac{dx}{(1 + |2^j x - k|)^{d+\gamma}} \\
 &= 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-dj} \int_{B(2^{j-j'} k' - k, 2^{j-j'-1} r)} \frac{dx'}{(1 + |x'|)^{d+\gamma}} \\
 &\lesssim 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-dj} \frac{(2^{j-j'-1} r)^d}{(1 + \frac{1}{2} |2^{j-j'} k' - k|)^{d+\gamma}} \\
 &\lesssim 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-dj} (2^{j-j'})^{-\gamma} \left(\frac{2^{-j'+1}}{2^{-j+1} + |2^{-j} k - 2^{-j'} k'|} \right)^{d+\gamma} \\
 &\lesssim 2^{-(j-j')(\frac{d}{2}+\gamma)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |2^{-j} k - 2^{-j'} k'|} \right)^{d+\gamma}.
 \end{aligned}$$

Time je u svakom slučaju dokazana ocjena (5.5). $\square$

Dokaz teorema 5.1 u posebnom slučaju $T\mathbb{1} = T^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$. Za primjenu Schurove leme 5.3

dovoljno je naći “težine” $w_{j,k,\epsilon}$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{j',k',\epsilon'} w_{j',k',\epsilon'} |\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| &\lesssim w_{j,k,\epsilon} \quad \text{za svake indekse } j, k, \epsilon, \\ \sum_{j,k,\epsilon} w_{j,k,\epsilon} |\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}| &\lesssim w_{j',k',\epsilon'} \quad \text{za svake indekse } j', k', \epsilon'. \end{aligned}$$

Stavimo $w_{j,k,\epsilon} = 2^{-\frac{dj}{2}}$ i provjerimo samo prvu nejednakost jer je druga analogna zbog simetrije. Prema propoziciji 5.4 treba još samo vidjeti da je

$$\sum_{j',k'} 2^{\frac{d(j-j')}{2}} 2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\gamma)} \left(\frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{2^{-j} + 2^{-j'} + |2^{-j}k - 2^{-j'}k'|} \right)^{d+\gamma} \lesssim 1 \quad (5.12)$$

za sve indekse j, k .

Najprije ćemo sumirati po $j' \geq j$. Stavimo li $n = j' - j$, vidimo da lijeva strana u (5.12) iznosi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} 2^{-(d+\gamma)n} \left(\frac{1 + 2^{-n}}{1 + 2^{-n} + |2^{-n}k' - k|} \right)^{d+\gamma} \lesssim \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma n} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \frac{2^{-nd}}{(1 + |2^{-n}k' - k|)^{d+\gamma}}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \frac{2^{-nd}}{(1 + |2^{-n}k' - k|)^{d+\gamma}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + |x - k|)^{d+\gamma}} < +\infty,$$

jer su gornje sume zapravo Riemannove sume podintegralne funkcije. Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \frac{2^{-nd}}{(1 + |2^{-n}k' - k|)^{d+\gamma}} \lesssim 1$$

pa je zbog $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma n} \lesssim 1$ lijeva strana u (5.12) ograničena nekom konstantom.

Prosumirajmo sada po $j' < j$. Ako stavimo $n = j - j'$, onda lijeva strana u (5.12) postaje

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} 2^{-\gamma n} \left(\frac{1 + 2^{-n}}{1 + 2^{-n} + |k' - 2^{-n}k|} \right)^{d+\gamma} \\ &\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\gamma n} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(1 + |k' - 2^{-n}k|)^{d+\gamma}} \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\gamma n} \lesssim 1, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili poznati kriterij konvergencije Dirichletovih⁹ redova.

Dakle, po Schurovoj lemi postoji ograničeni linearni operator $\tilde{T}$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$ takav da je

$$\langle T\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2} = \langle \tilde{T}\psi_{j,k}^\epsilon, \psi_{j',k'}^{\epsilon'} \rangle_{L^2}$$

⁹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), njemački matematičar.

za svake indekse $j, j', k, k', \epsilon, \epsilon'$. Treba još vidjeti da $\tilde{T}$ doista proširuje T na cijeloj domeni $C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Zapravo je zbog dualnosti dovoljno provjeriti

$$\langle Tf, g \rangle_{L^2} = \langle \tilde{T}f, g \rangle_{L^2}$$

za svake $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Po konstrukciji ta jednakost vrijedi kada su f i g konačne linearne kombinacije članova valične baze $\psi_{j,k}^\epsilon$, a zbog omeđenosti u slabom smislu (5.1) i gustoće tih linearnih kombinacija u prostoru $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ s normom

$$\|f\|_{C_c^1(\mathbb{R}^d)} := \sum_{|\alpha| \leq 1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}$$

slijedi posljednja tvrdnja. $\square$

Sasvim općeniti slučaj teorema 5.1 ćemo dokazati u idućem odjeljku svođenjem na netom dokazani posebni slučaj.

* * *

Zadatak 5.6. Ako je $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ funkcija takva da za neki $\gamma > 0$ vrijedi

$$|g(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-d-\gamma}; \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 0,$$

tada postoje funkcije $g_1, g_2, \dots, g_d \in C^1(\mathbb{R}^d)$ takve da je

$$g = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \dots + \partial_d g_d$$

i koje zadovoljavaju

$$|g_l(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-d+1-\gamma}; \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad l = 1, 2, \dots, d.$$

5.5. Paraproducti i dokaz općenitog slučaja

Fiksirajmo $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ i $(\varphi_{j,k})_{j,k}$ iste kao u prethodnoj točki. Osim toga, za $j \in \mathbb{Z}$ i $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ označimo

$$Q_{j,k} := \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j} \right) \times \left[\frac{k_2}{2^j}, \frac{k_2+1}{2^j} \right) \times \dots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j} \right) = \frac{1}{2^j} ([0, 1]^d + k).$$

Dakle, $Q_{j,k}$ je dijadska kocka s duljinom brida 2^{-j} .

Paraproduct je bilinearni operator definiran formulom

$$\pi(f, g) := \sum_{j,k,\epsilon} 2^{\frac{dj}{2}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2} \langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2} \psi_{j,k}^\epsilon,$$

za svake f i g za koje gornji red (u nekom poretku) konvergira u odgovarajućem funkcijskom prostoru; mi ćemo promatrati samo $L^2(\mathbb{R}^d)$. Iz propozicije 5.5 će slijediti da je $\pi(f, g)$ dobro definirana L^2 -funkcija čim je $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

Dokažimo sljedeću ocjenu kako bismo dovršili dokaz $T(1)$ teorema.

Propozicija 5.5. ($L^2 \times \text{BMO} \rightarrow L^2$ ocjena za paraprodukt) *Za svake $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\pi(f, g) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i*

$$\|\pi(f, g)\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2} \|g\|_{\text{BMO}}.$$

Dokaz. Kako je $(\psi_{j,k}^\epsilon)_{j,k,\epsilon}$ ortonormirana baza od $L^2(\mathbb{R}^d)$, to imamo

$$\|\pi(f, g)\|_{L^2}^2 = \sum_{j,k,\epsilon} 2^{dj} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2. \quad (5.13)$$

Najprije pokažimo da za svaku standardnu kocku Q vrijedi

$$\sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ Q_{j,k} \subseteq Q}} |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 \lesssim \|g\|_{\text{BMO}}^2 |Q|. \quad (5.14)$$

To je ocjena tzv. Carlesonovog¹⁰ tipa.

U svrhu dokaza od (5.14) uzmimo dovoljno veliki $r > 0$ tako da su $\text{supp } \varphi$ i $\text{supp } \psi^\epsilon$ za svaki ϵ sadržani u kocki $Q^0 := [-\frac{r+1}{2}, \frac{r+1}{2}]^d$. Tada je

$$\text{supp } \varphi_{j,k} \subseteq Q_{j,k}^0, \quad \text{supp } \psi_{j,k}^\epsilon \subseteq Q_{j,k}^0, \quad Q_{j,k}^0 := \frac{1}{2^j}(Q^0 + k)$$

za svake j, k, ϵ . Očigledno je $Q_{j,k}^0$ kocka s istim središtem kao i $Q_{j,k}$, ali r puta duljim bridom. Označimo još sa $\tilde{Q}$ standardnu kocku s istim središtem kao i Q , ali također r puta većom duljinom brida. Zbrajajući po kockama $Q_{j,k} \subseteq Q$ zbog $\text{supp } \psi_{j,k}^\epsilon \subseteq Q_{j,k}^0 \subseteq \tilde{Q}$ i $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_{j,k}^\epsilon = 0$ imamo

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ Q_{j,k} \subseteq Q}} |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 &= \sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ Q_{j,k} \subseteq Q}} \left| \int_{\tilde{Q}} g \overline{\psi_{j,k}^\epsilon} \right|^2 = \sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ Q_{j,k} \subseteq Q}} \left| \int_{\tilde{Q}} (g - [g]_{\tilde{Q}}) \overline{\psi_{j,k}^\epsilon} \right|^2 \\ &\leq \sum_{j,k,\epsilon} |\langle (g - [g]_{\tilde{Q}}) \mathbb{1}_{\tilde{Q}}, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 = \|(g - [g]_{\tilde{Q}}) \mathbb{1}_{\tilde{Q}}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\tilde{Q}} |g - [g]_{\tilde{Q}}|^2 \lesssim \|g\|_{\text{BMO}}^2 |\tilde{Q}| \lesssim \|g\|_{\text{BMO}}^2 |Q|. \end{aligned}$$

Formulom

$$(M_\star f)(x) := \sup_{\substack{j,k \\ x \in Q_{j,k}}} \frac{1}{|Q_{j,k}|} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(2^j x - k) dx \right| = \sup_{\substack{j,k \\ x \in Q_{j,k}}} 2^{\frac{dj}{2}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}|; \quad x \in \mathbb{R}^d$$

je definirana jedna varijanta maksimalne funkcije. Radi nejednakosti

$$(M_\star f)(x) \lesssim \sup_{\substack{j,k \\ x \in Q_{j,k}}} \frac{1}{|Q_{j,k}^0|} \int_{Q_{j,k}^0} |f| \leq \sup_{\substack{Q \text{ st. kocka} \\ x \in Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|$$

¹⁰Lennart Axel Edvard Carleson (1928), švedski matematičar.

iz rezultata idućeg poglavlja će slijediti da je M_* omeđeni sublinearni operator na $L^2(\mathbb{R}^d)$, tj.

$$\|M_*f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}, \quad (5.15)$$

Za bilo koji $t > 0$ neka je

$$\Omega_t := \{x \in \mathbb{R}^d : (M_*f)(x) > \sqrt{t}\} = \bigcup_{\substack{j,k \\ 2^{dj} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 > t}} Q_{j,k}$$

pa po Markov-Čebiševljevoj nejednakosti i (5.15) imamo

$$|\Omega_t| \leq \frac{\|M_*f\|_{L^2}^2}{t} \lesssim \frac{\|f\|_{L^2}^2}{t} < +\infty. \quad (5.16)$$

Promotrimo sve dijadske kocke $Q_{j,k}$ za koje vrijedi $2^{dj} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 > t$. Zbog nejednakosti (5.16) ta familija ne može sadržavati kocke po volji velikog volumena pa neka je među njima $(Q_m)_m$ (konačni ili beskonačni) niz maksimalnih kocaka (u smislu skupovne inkluzije). Kad neke dvije od kocaka Q_m ne bi bile disjunktne, onda bi jedna bila podskup druge, što nije moguće zbog maksimalnosti. Dakle, Ω_t je disjunktna unija od $(Q_m)_m$.

Iskoristimo sada (5.14) na svaku od kocaka Q_m tako da možemo računati:

$$\begin{aligned} \|\pi(f, g)\|_{L^2}^2 &\stackrel{(5.13)}{=} \sum_{j,k,\epsilon} \left(\int_0^{2^{dj} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2} dt \right) |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ 2^{dj} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 > t}} |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 \right) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ Q_{j,k} \subseteq \Omega_t}} |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 \right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_m \sum_{\substack{j,k,\epsilon \\ Q_{j,k} \subseteq Q_m}} |\langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2}|^2 \right) dt \\ &\stackrel{(5.14)}{\lesssim} \|g\|_{\text{BMO}}^2 \int_0^{+\infty} \left(\sum_m |Q_m| \right) dt = \|g\|_{\text{BMO}}^2 \int_0^{+\infty} |\Omega_t| dt \\ &= \|g\|_{\text{BMO}}^2 \int_0^{+\infty} |\{x \in \mathbb{R}^d : |(M_*f)(x)|^2 > t\}| dt \\ &= \|M_*f\|_{L^2}^2 \|g\|_{\text{BMO}}^2 \stackrel{(5.15)}{\lesssim} \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{\text{BMO}}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Sada pokažimo vezu paraprodukta s teorijom Calderón-Zygmundovih operatora.

Propozicija 5.6. *Za fiksiranu $g \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$ je formulom $Sf := \pi(f, g)$ definiran omeđeni Calderón-Zygmundov operator S takav da vrijedi $S\mathbb{1} = g$, $S^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$.*

Dokaz. Po definiciji je

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Sf)h = \sum_{j,k,\epsilon} 2^{\frac{dj}{2}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle_{L^2} \langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2} \langle h, \overline{\psi_{j,k}^\epsilon} \rangle_{L^2}.$$

Operator S je očigledno Calderón-Zygmundov s jezgrom

$$K_S(x, y) := \sum_{j,k,\epsilon} 2^{\frac{dj}{2}} \langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2} \psi_{j,k}^\epsilon(x) \overline{\varphi_{j,k}(y)},$$

a osim toga po propoziciji 5.5 je omeđen. Konačno, $S\mathbb{1} = g$ slijedi iz $2^{\frac{dj}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{j,k} = 1$ i

$$\int_{\mathbb{R}^d} (S\mathbb{1})h = \sum_{j,k,\epsilon} \langle g, \psi_{j,k}^\epsilon \rangle_{L^2} \langle h, \overline{\psi_{j,k}^\epsilon} \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} gh,$$

a $S^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$ slijedi iz $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_{j,k}^\epsilon = 0$ i

$$\int_{\mathbb{R}^d} (S^\tau \mathbb{1})h = \int_{\mathbb{R}^d} (Sh)\mathbb{1} = 0. \quad \square$$

Naposljetku se vraćamo na naš glavni teorem.

Dokaz teorema 5.1 u općem slučaju $T\mathbb{1} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$, $T^\tau \mathbb{1} \in \text{BMO}(\mathbb{R}^d)$. Pretpostavimo da za Calderón-Zygmundov operator T vrijede uvjeti (DJ1)–(DJ3) iz teorema 5.1. Definirajmo operator N formulom

$$Nf := Tf - \pi(f, T\mathbb{1}) - \pi(\cdot, T^\tau \mathbb{1})^\tau f,$$

tj.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Nf)g = \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g - \int_{\mathbb{R}^d} \pi(f, T\mathbb{1})g - \int_{\mathbb{R}^d} \pi(g, T^\tau \mathbb{1})f; \quad f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d).$$

Sada je N Calderón-Zygmundov operator koji je omeđen u slabom smislu te zadovoljava $N\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i $N^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$. Prema dijelu dokaza iz prethodne točke, operator N je omeđen na $L^2(\mathbb{R}^d)$ pa je i polazni operator T omeđen na $L^2(\mathbb{R}^d)$ kao zbroj tri omeđena operatora. Time je dokaz završen. $\square$

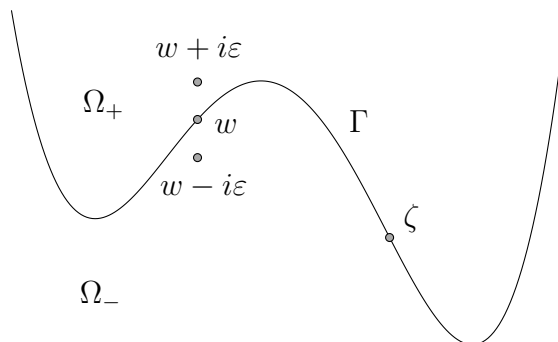
5.6. Cauchyjev integral duž Lipschitzovog grafa

U odjeljku 4.3 smo se već susreli s Cauchyjevim integralom duž realnog pravca, ali sada ćemo promatrati općenitiju krivulju koja je graf neke Lipschitzove funkcije. Neka je

$$\Gamma := \{x + ia(x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C},$$

pri čemu je $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neka Lipschitzova funkcija, što zapravo znači da je g.s. derivabilna i $a' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Najprirodnija parametrizacija krivulje Γ je $t \mapsto \gamma(t) := t + ia(t)$. Na Γ možemo promatrati mjeru duljine luka ds , koja je zapravo 1-dimenzionalna Hausdorffova mjera restringirana na Borelove podskupove od Γ . Elementarnije, ds se može definirati putem parametrizacije γ kao $ds(E) := \int_{\gamma^{-1}(E)} |\gamma'(t)| dt$ za Borelov skup $E \subseteq \Gamma$. U tom smislu koristimo oznaku $L^2(\Gamma)$ za Lebesgueov prostor $L^2(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), ds)$. Krivulja Γ je zajednička granica područjima “iznad” i “ispod” Γ :

$$\begin{aligned} \Omega_+ &:= \{x + ia(x) + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}, \\ \Omega_- &:= \{x + ia(x) + iy : x \in \mathbb{R}, y < 0\}; \end{aligned}$$


 Slika 5.1: Cauchyjev integral duž Γ .

pogledajte sliku 5.1.

Za $f \in C_c^1(\Gamma)$ promatramo Cauchyjev integral duž Γ ,

$$(Cf)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta; \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

koji definira holomorfnu funkciju Cf na $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Kao i u odjeljku 4.3 možemo promatrati rubne vrijednosti

$$\begin{aligned} (C_{\downarrow}f)(w) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (Cf)(w + i\varepsilon); \quad w \in \Gamma, \\ (C_{\uparrow}f)(w) &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (Cf)(w - i\varepsilon); \quad w \in \Gamma. \end{aligned}$$

Na taj način dolazimo do linearnih operatora $C_{\downarrow}$ i $C_{\uparrow}$ te je prirodno zapitati se jesu li oni ograničeni na $L^2(\Gamma)$. Već smo vidjeli da je posebni slučaj $\Gamma = \mathbb{R}$ direktna posljedica korolar 4.7 i teorema 4.8(b), ali nije jasno kakve nove poteškoće nosi ova geometrijski kompliciranija situacija. Doista, to pitanje je neko vrijeme bilo otvoreni problem i inspiriralo je mnoge smjerove istraživanja u harmonijskoj analizi. Među ostalima postavio ga je i popularizirao Calderón [Cal77], a riješili su ga (i to potvrdno) Coifman, McIntosh i Meyer [CMM82]. Zainteresiranog čitatelja radije upućujemo na članak Coifmana, Jonesa i Semmesa [CJS89], koji su dali čak dva relativno elementarna dokaza.

Vratimo se radije originalnom Calderónovom pristupu, ojačanom za glavni teorem ovog poglavlja. Uvrštavanjem parametrizacije u definicijski integral za Cf i rezoniranjem kao u korolaru 4.7 nije teško vidjeti da je zapravo dovoljno proučavati omeđenost singularnog integrala duž Γ :

$$(Hf)(x + ia(x)) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y + ia(y))}{(x + ia(x)) - (y + ia(y))} |1 + ia'(y)| dy; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sada je lako prijeći s Γ na $\mathbb{R}$ putem ograničenih invertibilnih operatora (zahvaljujući $\|a'\|_{L^\infty} \lesssim 1$):

$$\begin{aligned} U: L^2(\Gamma) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (Uf)(y) := f(y + ia(y)) |1 + ia'(y)|, \\ V: L^2(\Gamma) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (Vh)(x) := h(x + ia(x)). \end{aligned}$$

Na taj način pitanje svodimo na ograničenost operatora $T := VHU^{-1}$, tj.

$$(Tg)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(y)}{x - y + i(a(x) - a(y))} dy; \quad x \in \mathbb{R},$$

na prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Jezgru posljednjeg operatora možemo razviti u red

$$K(x, y) := \frac{1}{x - y + i(a(x) - a(y))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \underbrace{\frac{(a(x) - a(y))^k}{(x - y)^{k+1}}}_{K_k(x, y)}.$$

Operatori T_k s jezgrama K_k se zovu *Calderónovi komutatori*. Njihovu L^2 -omeđenost možemo dokazati matematičkom indukcijom po k . Za $k = 0$ samo primijetimo da je riječ o Hilbertovoj transformaciji (do na multiplikativnu konstantu), a za nju znamo da je ograničena. U koraku indukcije uzmimo $k \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da je T_{k-1} ograničen operator, a zbog teorema 4.20 i $a' \in L^\infty$ znamo da vrijedi $T_{k-1}a' \in \text{BMO}(\mathbb{R})$. Formalni račun, korištenjem parcijalne integracije, daje

$$T_k \mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{(a(x) - a(y))^k}{(x - y)^{k+1}} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{(a(x) - a(y))^{k-1}}{(x - y)^k} a'(y) dy = T_{k-1}a',$$

odakle zaključujemo $T_k \mathbb{1} \in \text{BMO}(\mathbb{R})$. Kako je T_k antisimetričan, kombinacija teorema 5.1 i zadatka 5.1 daje njegovu ograničenost na $L^2(\mathbb{R})$. Time je završen dokaz indukcijom te zaključujemo da su svi Calderónovi komutatori ograničeni. Ovo rezoniranje ipak nije dovoljno da bismo mogli prosumirati red po k te zaključili omeđenost operatora T , osim ako je Lipschitzova konstanta $\|a'\|_{L^\infty}$ dovoljno mala. Zapravo je bolja ideja tretirati $T, C_\downarrow, C_\uparrow$ drukčijim (bilo realnim bilo kompleksnim) tehnikama, vidjeti [CJS89].

Vratimo se još malo na prvi Calderónov komutator, razmatranom već u [Cal65]. Calderón je predložio i alternativni pristup omeđenosti od T_1 , kojeg nije znao provesti u potpunosti. Koristeći integralni oblik teorema srednje vrijednosti imamo

$$a(y) - a(x) = (y - x) \int_0^1 a'((1 - \theta)x + \theta y) d\theta$$

pa formula za T_1 postaje

$$\begin{aligned} (T_1 g)(x) &= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x) - a(y)}{(x - y)^2} g(y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} a'((1 - \theta)x + \theta y) g(y) \frac{dy}{x - y} \right) d\theta \\ &= - \int_0^1 \left(\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} a'(x + \theta s) g(x + s) \frac{ds}{s} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Unutar zagrade primjećujemo izraz $B_\theta(a', g)$, pri čemu je B_θ bilinearni singularni integral definiran sa

$$B_\theta(f, g)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x + \theta s) g(x + s) \frac{ds}{s}$$

za bilo koji realni parametar θ . Taj operator je prirodno prozvati *bilinearna Hilbertova transformacija* i za potrebe drugog dokaza L^2 -omeđenosti od T_1 bi trebalo pokazati ograničenost od B_θ sa $L^\infty(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ u $L^2(\mathbb{R})$ i to čak s konstantom neovisnom o θ . Ipak, trebalo je proći još mnogo vremena i razviti originalne tehnike da bi se dokazale bilo kakve ocjene za B_θ ; konačno su to uspjeli Lacey i Thiele u paru inspirativnih radova [LT97] i [LT99]. Uniformost ocjena po parametru θ je postignuta nešto kasnije. Vratit ćemo se bilinearnoj Hilbertovoj transformaciji u jednom od posljednjih poglavlja ove skripte.

* * *

Zadatak 5.7. Osmislite definicije multilinearne Hilbertovih transformacija te pomoću njih izrazite Calderónove komutatore višeg reda.

Napomena: Omeđenost trilinearne Hilbertove transformacije za bilo koji raspon Lebesgueovih prostora je aktualno otvoreni problem, koji se smatra vrlo teškim. Poznati su samo neki negativni rezultati, poput protuprimjera iz [Dem08] za posebne slučajeve eksponenata.

Poglavlje 6

Maksimalne ocjene

Važnost ocjena za maksimalne operatore prepoznali smo još u poglavlju 1 jer one garantiraju g.s. konvergenciju ukoliko još možemo direktno ispitati da ta konvergencija vrijedi na nekom gustom potprostoru. U odjeljku 3.3 smo već dokazali jedan maksimalni rezultat: teorem 3.11 je pomoću trika bio izveden kao direktna posljedica linearne ocjene. Ipak, čitatelj ne bi smio steći dojam kako je takav trik uvijek na raspolaganju. Obično nam je potrebno dokazati ocjenu maksimalnog operatora sa L^p u L^p , a često je (zbog simetrija) jedino takva ocjena i moguća, no tada tehnika Christa i Kiseleva nije primjenjiva. U stvari, ocijeniti maksimalni operator je ponekad neusporedivo teže nego ocijeniti odgovarajući linearni operator; dobar primjer će biti uvodna diskusija iz odjeljka 6.5.

6.1. Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija

Za svaki $r > 0$ ima smisla razmatrati prosječne vrijednosti funkcije $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$ na kuglama radijusa r , tj.

$$(A_r f)(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Primijetimo da operatore A_r alternativno možemo zapisati

$$(A_r f)(x) = \frac{1}{|B(\mathbf{0}, r)|} \int_{B(\mathbf{0}, r)} f(x - y) dy, \quad \text{tj. } A_r f = f * \frac{\mathbb{1}_{B(\mathbf{0}, r)}}{|B(\mathbf{0}, r)|} \quad (6.1)$$

pa Youngova nejednakost (primjer 2.18) daje

$$\|A_r f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \left\| \frac{\mathbb{1}_{B(\mathbf{0}, r)}}{|B(\mathbf{0}, r)|} \right\|_{L^1} = \|f\|_{L^p}$$

za svaki $p \in [1, \infty]$ i svaki $r > 0$. Vrlo prirodno je postaviti pitanje konvergiraju li usrednjenja $A_r f$ po točkama prema funkciji f . Za neprekidne funkcije f je to sasvim očigledno, ali nije jasno vrijedi li ta konvergencija za bilo koju $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$ u g.s. točki

$x \in \mathbb{R}^d$. Prisjetimo li se teorema 1.6 i 1.7 iz prvog poglavlja, vidimo da je rješenje promatrati maksimalni operator

$$Mf := \sup_{r \in \langle 0, +\infty \rangle} |A_r f|, \quad \text{tj. } (Mf)(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \left| \int_{B(x, r)} f(y) dy \right|.$$

Operator M zovemo *Hardy-Littlewoodov maksimalni operator*, a Mf zovemo (*Hardy-Littlewoodova*) *maksimalna funkcija* od f . Lako je vidjeti neprekidnost od $r \mapsto (A_r f)(x)$ pa je po komentaru nakon teorema 1.7 funkcija Mf izmjeriva. Rezultat koji nam treba za spomenutu konvergenciju je slaba L^1 omeđenost od M , a zanimljive će nam biti i jake L^p ocjene za $p > 1$.

Lema 6.1 (Wienerova¹ lema o pokrivaču). *Neka je $B_1, B_2, \dots, B_n$ konačna kolekcija kugala u $\mathbb{R}^d$. Postoji konačna podkolekcija $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_m}$ disjunktnih kugala takva da vrijedi $|\bigcup_{j=1}^m B_{i_j}| \geq 3^{-d} |\bigcup_{i=1}^n B_i|$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su kugle sortirane u padajućem poretку po svojim radijusima. Postupno promatramo jednu po jednu kuglu i služimo se pohlepним algoritmom:

- Ukoliko je razmatrana kugla B_i disjunktna od svih prethodno odabranih kugala, tada odaberemo i nju.
- Ukoliko razmatrana kugla B_i siječe neku od prethodno odabranih kugala, tada je zanemarimo.

U drugom slučaju kugla B_i siječe neku odabranu kuglu B_k , $k < i$, a ima manji radijus od nje pa mora biti sadržana u $3B_k$, pri čemu nam $3B$ označava kuglu s istim središtem kao B , ali tri puta većim polumjerom. Radi toga vidimo da na kraju odabrane kugle $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_m}$ zadovoljavaju

$$\left| \bigcup_{i=1}^n B_i \right| \leq \left| \bigcup_{j=1}^m 3B_{i_j} \right| \leq \sum_{j=1}^m |3B_{i_j}| = 3^d \sum_{j=1}^m |B_{i_j}| = 3^d \left| \bigcup_{j=1}^m B_{i_j} \right|. \quad \square$$

Sada možemo dokazati spomenute ocjene.

Teorem 6.2. *Vrijedi*

$$\|Mf\|_{L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{ i } \quad \|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Dokaz. Tražena slaba ocjena zapravo znači da za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$|\{Mf > \alpha\}| \lesssim_d \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}.$$

Radi $Mf \leq M|f|$ možemo pretpostaviti da je f nenegativna. Fiksirajmo $\alpha > 0$ i uzmimo proizvoljni kompakt K sadržan u $\{Mf > \alpha\}$. Po definiciji od M za svaki $x \in K$ postoji

¹Norbert Wiener (1894–1964), američki matematičar i filozof.

$r_x \in \langle 0, +\infty \rangle$ takav da je $\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x, r_x)} f > \alpha$. Sada familija $\{B(x, r_x) : x \in K\}$ čini otvoreni pokrivač od K , koji se (zbog kompaktnosti) može reducirati na konačni potpokrivač $B_1, B_2, \dots, B_n$. Nadalje, možemo među njima odabrati disjunktne kugle $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_m}$ kao u lemi 6.1. Imamo

$$|K| \leq \left| \bigcup_{i=1}^n B_i \right| \leq 3^d \left| \bigcup_{j=1}^m B_{i_j} \right| = 3^d \sum_{j=1}^m |B_{i_j}| < \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^m \int_{B_{i_j}} f = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^m B_{i_j}} f \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$

Radi regularnosti Lebegueove mjere kompakti K mogu biti odabrani tako da im mjere teže prema $|\{Mf > \alpha\}|$, iz čega slijedi prva željena ocjena. Realnom interpolacijom s trivijalnom nejednakosti $\|Mf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ dobivamo i drugu traženu ocjenu. $\square$

Napomenimo da jaka L^p ocjena ne vrijedi za $p = 1$ i čak ni ne trebamo biti izbirljivi kako bismo našli protuprimjer; vidjeti zadatak 6.1. Iz dokaza nije jasno moraju li L^p ocjene za $p > 1$ doista ovisiti o dimenziji d . Pomalo izmenadujuće, Stein [Ste82] je dokazao ocjene neovisne o dimenziji, ali je njegov pristup dosta drugačiji od navedenog. Još uvijek je otvoren problem ovise li najbolje konstante u slaboj L^1 ocjeni o dimenziji d . Stein i Strömberg² [SS83] su dokazali da su one najviše $O(d)$, a noviji rezultati (poput [Ald11] za kocke umjesto kugala) sugeriraju da bi odgovor mogao biti negativan.

Korolar 6.3. Za svaku $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$ za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $\lim_{r \rightarrow 0^+} (A_r f)(x) = f(x)$.

Dokaz. U razmatranju limesa su nam važne jedino vrijednosti $r \in \langle 0, 1 \rangle$ pa možemo pretpostaviti da je $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Tada tvrdnja slijedi iz teorema 1.7 (tj. zadatka 1.7), teorema 6.2 i već spomenute činjenice da ona vrijedi za neprekidne funkcije f . $\square$

* * *

Razne varijante maksimalnih funkcija se mogu svesti na Hardy-Littlewoodovu. Tako za lokalno integrabilnu funkciju f definiramo *necentriranu maksimalnu funkciju* kao

$$(M_{\text{nc}} f)(x) := \sup_{\substack{B \text{ je kugla} \\ \text{koja sadrži } x}} \frac{1}{|B|} \left| \int_B f(y) dy \right|; \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (6.2)$$

Lako je vidjeti da za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi

$$(Mf)(x) \leq (M_{\text{nc}} f)(x) \leq 2^d (Mf)(x)$$

pa operator M_{nc} zadovoljava iste ocjene kao M , eventualno s većim konstantama. Svim analogno se diskutira (npr. necentrirana) maksimalna funkcija kod koje su kugle zamijenjene standardnim kockama:

$$(M_{\text{kocke}} f)(x) := \sup_{\substack{Q \text{ je standardna kocka} \\ \text{koja sadrži } x}} \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q f(y) dy \right|; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

S druge strane, zapis usrednjenja $A_r f$ kao u (6.1) nam može dati ideju da promatramo općenitije maksimalne funkcije konvolucijskog tipa.

²Jan-Olov Strömberg (1947), švedski matematičar.

Teorem 6.4. *Neka je $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ funkcija koja ima monotonu i radijalnu L^1 majorantu, tj. postoji padajuća funkcija $\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ takva da je*

$$|\varphi(x)| \leq \theta(|x|) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \theta(|x|) dx < +\infty.$$

Tada maksimalna funkcija

$$(M_\varphi f)(x) := \sup_{r \in (0, +\infty)} |(f * D_r^{(1)} \varphi)(x)|$$

zadovoljava ocjene

$$\|M_\varphi f\|_{L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, \varphi} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{i} \quad \|M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d, p, \varphi} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

za $p \in [1, \infty]$.

Dokaz. Radi monotonosti možemo pretpostaviti da je $\varphi(x) = \theta(|x|)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^d$. Zbog teorema 6.2 je dovoljno dokazati nejednakost po točkama:

$$(M_\varphi |f|)(x) \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \theta(|y|) dy \right)}_{< +\infty} (M|f|)(x); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ukoliko je θ jednostavna (tj. stepenasta) padajuća funkcija, odnosno $\theta = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{[0, r_j)}$ za neke $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j, r_j > 0$, tada imamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \theta(|y|) dy = \sum_{j=1}^m \alpha_j |\mathbb{B}(\mathbf{0}, r_j)| = |\mathbb{B}(\mathbf{0}, 1)| \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j^d$$

te

$$\begin{aligned} (|f| * D_r^{(1)} \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)| r^{-d} \theta(r^{-1}|t|) dt = r^{-d} \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{\mathbb{B}(\mathbf{0}, rr_j)} |f(x-t)| dt \\ &= |\mathbb{B}(\mathbf{0}, 1)| \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j^d \underbrace{\frac{1}{|\mathbb{B}(\mathbf{0}, rr_j)|} \int_{\mathbb{B}(\mathbf{0}, rr_j)} |f(x-t)| dt}_{A_{rr_j} |f|(x)} \\ &\leq \left(|\mathbb{B}(\mathbf{0}, 1)| \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j^d \right) (M|f|)(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \theta(|y|) dy \right) (M|f|)(x), \end{aligned}$$

iz čega slijedi tražena nejednakost. Općenita padajuća funkcija θ se može prikazati kao rastući limes niza jednostavnih funkcija gornjeg oblika pa tvrdnja konačno slijedi iz teorema o monotonij konvergenciji. $\square$

Korolar 6.5. *Neka je φ kao u teoremu 6.4 uz dodatnu pretpostavku $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Za svaku $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty)$ za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (f * D_r^{(1)} \varphi)(x) = f(x).$$

Dokaz. Treba još provjeriti konvergenciju za funkcije f iz nekog gustog potprostora, a mi odabiremo $C_c(\mathbb{R}^d)$. Račun koji slijedi smo već vidjeli, npr. u dokazima leme 4.6 i korolara 4.7:

$$\begin{aligned} |(f * D_r^{(1)}\varphi)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-t) - f(x)) r^{-d} \varphi(r^{-1}t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-rs) - f(x)| |\varphi(s)| ds. \end{aligned}$$

Radi neprekidnosti od f za svaki $s \in \mathbb{R}^d$ imamo $\lim_{r \rightarrow 0^+} |f(x-rs) - f(x)| = 0$ pa teorem o dominiranoj konvergenciji zahvaljujući omeđenosti od f i integrabilnosti od φ daje

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-rs) - f(x)| |\varphi(s)| ds = 0. \quad \square$$

Teorem 6.4 i korolar 6.5 se posebno mogu primijeniti na fundamentalno rješenje jednadžbe provođenja; vidjeti tvrdnju (3) iz odjeljka 1.1. Naime, tada je

$$\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}, \quad h(x, t) = (f * D_{\sqrt{t}}^{(1)}\varphi)(x).$$

Oni su također primjenjivi na Poissonov integral funkcije, vidjeti tvrdnju (4) iz istog odjeljka. U tom je pak slučaju

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, \quad u(x, t) = (f * D_y^{(1)}\varphi)(x). \quad (6.3)$$

* * *

Zadatak 6.1. Dokažite da za svaku funkciju $f \geq 0$ koja nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$ maksimalna funkcija Mf ne leži u prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Zadatak 6.2. Neka su $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $s > 0$ takvi da vrijedi $1/p = 1/q + s/d$.

(a) Za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ dokažite Hedbergovu nejednakost³ [Hed72]:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-s}} dy \lesssim_{d,p,s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{sp/d} (Mf)(x)^{1-sp/d}.$$

Uputa: Uočavanjem i korištenjem simetrija možemo normalizirati tako da vrijedi $\|f\|_{L^p} = 1$ i $(Mf)(x) = 1$. Rastavite područje integracije na $\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| > 1\}$ i $\bigcup_{k=0}^{\infty} \{y \in \mathbb{R}^d : 2^{-k-1} < |x-y| \leq 2^{-k}\}$.

(b) Iskoristite (a) dio kako biste dali alternativni dokaz ocjene Rieszovog potencijala iz primjera 3.1:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}} dy \right\|_{L_x^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

³Lars Inge Hedberg (1935–2005), švedski matematičar.

Zadatak 6.3. Dokažite da za svaki $d \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $c_d > 0$ sa sljedećim svojstvom. Neka su $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \geq 0$ i $\alpha > 0$. Ako je B kugla u $\mathbb{R}^d$ takva da je $(Mf)(x) \geq \alpha$ za svaku točku $x \in B$, tada vrijedi $(Mf)(x) \geq c_d \alpha$ za svaku točku $x \in 2B$.

Napomena: Ovdje $2B$ označava kuglu s istim središtem kao B , ali dvostrukim polumjerom.

Uputa: Imitirajte dokaz slabe L^1 ocjene za Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju. Neka su $B_1, \dots, B_n$ kugle koje prekrivaju (zatvarač od) B i takve su da za svaki i vrijedi $\frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} f > \frac{\alpha}{2}$. Razlikujte slučaj kada neka od kugala B_i ima radijus veći nego B i slučaj kada sve kugle B_i imaju radijuse manje ili jednake nego kugla B . U drugom slučaju se može odozdo ocijeniti prosjek od f na $3B$.

Zadatak 6.4. (*Maksimalna funkcija po pravokutnicima*) Neka je $\mathcal{R}$ kolekcija svih pravokutnika u $\mathbb{R}^2$ čije stranice su paralelne s koordinatnim osima. Za lokalno integrabilnu funkciju f definiramo

$$(M_{\square}f)(x) := \sup_{\substack{R \in \mathcal{R} \\ R \ni x}} \frac{1}{|R|} \left| \int_R f(y) dy \right|.$$

Dokažite da je operator $M_{\square}$ omeđen na prostoru $L^p(\mathbb{R}^2)$ za $1 < p \leq \infty$. Primjerom pokažite da $M_{\square}$ ipak ne zadovoljava čak ni slabu L^1 ocjenu.

Uputa: Dvapat primijenite ograničenost jednodimenzionalne necentrirane maksimalne funkcije u svakoj varijabli zasebno.

Napomena: Pravokutnici čije stranice nisu paralelne s koordinatnim osima su mnogo problematičniji. Može se pokazati da maksimalna funkcija po takvim pravokutnicima (tzv. *Keakey*⁴ *maksimalna funkcija*) uopće nije ograničena pa se onda npr. promatraju samo pravokutnici ograničenog ekscentriciteta.

Zadatak 6.5. (a) Dokažite da “parabolična” maksimalna funkcija

$$(M_{\text{par}}f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r} \left| \int_0^r f(x+t^2) dt \right|$$

zadovoljava ocjenu $\|M_{\text{par}}f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Uputa: Zamjenom varijabli i dijadskim “razbijanjem” intervala integracije svedite traženu nejednakost na teorem 6.2.

(b) Dokažite da bilinearna maksimalna funkcija

$$M_{\text{bilin}}(f, g)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \left| \int_{-r}^r f(x-t)g(x+t) dt \right|$$

zadovoljava ocjenu $\|M_{\text{bilin}}(f, g)\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_{p, p_1, p_2} \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R})} \|g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R})}$ za $p, p_1, p_2 \in \langle 1, \infty \rangle$ takve da je $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$.

Uputa: Najprije iskoristite Hölderovu nejednakost po t kako biste sveli traženu ocjenu na teorem 6.2.

⁴Soichi Kakeya (1886–1947), japanski matematičar.

Napomena: Poznato je da ocjena ostaje vrijediti i kada je $p \in \langle 2/3, 1 \rangle$, ali je tada dokaz mnogo složeniji i zahtijeva sofisticiranije tehnike; čitatelj može pogledati [Lac00]. Posebni slučaj $p = 1$ je zapravo dugo godina bio otvoreni problem kojeg je bio postavio Calderón.

6.2. Ocjene i konvergencija martingala

Ovaj odjeljak nije sasvim nužan za nastavak proučavanja maksimalnih ocjena i njihovih posljedica. On će zapravo omogućiti alternativni, vjerojatnosni pristup takvim rezultatima (pogledajte recimo tekst nakon korolara 6.9), koji je posljednjih godina vrlo aktualan u modernoj harmonijskoj analizi.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. U teoriji vjerojatnosti je uobičajeno izmjerive kompleksne funkcije na vjerojatnosnom prostoru zvati *slučajnim varijablama* te ih označavati velikim latiničnim slovima. Integral slučajne varijable X po Ω obzirom na mjeru $\mathbb{P}$ se obično piše $\mathbb{E}X$ i zove *očekivanje* od X . Ako je pak $\mathcal{G}$ neka σ -algebra takva da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, tada definiramo *uvjetno očekivanje* od $X \in L^1(\Omega)$ na $\mathcal{G}$, u oznaci $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, kao slučajnu varijablu $Y \in L^1(\Omega)$ sa svojstvima:

- Y je $\mathcal{G}$ -izmjeriva,
- $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ za svaki $A \in \mathcal{G}$.

Može se pokazati da takva slučajna varijabla Y postoji i da je jedinstvena do na jednakost g.s. obzirom na $\mathbb{P}$. Dakle, kad god pišemo jednakosti ili nejednakosti s $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ zapravo bismo trebali dopisivati “g.s.”, ali to obično ne činimo. Intuicija iza definicije ovog pojma je da $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ predstavlja “najbolju” $\mathcal{G}$ -izmjerivu aproksimaciju slučajne varijable X .

U slučaju trivijalne σ -algebre $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ lako po definiciji provjerimo da je $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\})$ upravo konstanta $\mathbb{E}X$ pa uvjetno očekivanje poopćuje obično očekivanje. Malo općenitije, ako je $A_1, A_2, \dots, A_m$ konačna particija od Ω na skupove pozitivne mjere $\mathbb{P}$, tada za $X \in L^1$ i za σ -algebru $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, A_2, \dots, A_m\})$ sastavljenu od svih konačnih unija skupova $A_1, A_2, \dots, A_m$ imamo

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A_j)} \int_{A_j} X d\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{A_j}. \quad (6.4)$$

Ukoliko nam je X nepoznata slučajna varijabla, ali znamo izračunati $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, iz posljednje jednakosti vidimo da je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega)$ “najbolji pokušaj” kod pogađanja prave vrijednosti od $X(\omega)$ za $\omega \in \Omega$.

Drugi ekstremni slučaj je $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, kada imamo $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$. Općenitije vrijedi

$$\mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) = H\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \quad (6.5)$$

ako su $X, HX \in L^1$ i H je $\mathcal{G}$ -izmjeriva. Ako pak imamo σ -algebre $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ takve da je $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \supseteq \mathcal{H}$, tada da svaku $X \in L^1$ vrijedi

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}). \quad (6.6)$$

Slikovito kaŹemo da kod uzastopnih uvjetnih oĉekivanja “pobjeĉuje” manja σ -algebra.

Lako je vidjeti da je uvjetno oĉekivanje linearno, a i monotono je na realnim sluĉajnim varijablama. Osim toga je korisno sljedeće svojstvo kontraktivnosti na L^p prostorima.

Lema 6.6.

(a) Za $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vrijedi $|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G})$.

(b) Za $p \in [1, \infty]$ i $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vrijedi $\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} \leq \|X\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$.

Dokaz. (a) Ako je X realna, rastavimo je na pozitivni i negativni dio, $X = X_+ - X_-$, $X_+ := \max\{X, 0\}$, $X_- := \max\{-X, 0\}$, tako da imamo $|X| = X_+ + X_-$. Zbog linearnosti je

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| = |\mathbb{E}(X_+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X_-|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(X_+|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_-|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(|X||\mathcal{G}).$$

Za kompleksnu $X \in L^1$ je dokaz ipak malo sloŹeniji. Stavimo $H := \overline{\text{sgn } \mathbb{E}(X|\mathcal{G})}$ pa, kako je H izmjeriva obzirom na $\mathcal{G}$, moŹemo pisati

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| &= H\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \stackrel{(6.5)}{=} \mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) = \text{Re } \mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}(\text{Re}(HX)|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|HX||\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{G}), \end{aligned}$$

pri ĉemu smo u posljednje dvije nejednakosti koristili monotonost uvjetnog oĉekivanja.

(b) Radi kompleksne interpolacije dovoljno je provjeriti tvrdnju u graniĉnim sluĉajevima $p = 1$ i $p = \infty$. Za $p = 1$ imamo:

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\|_{L^1} = \mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \stackrel{(a)}{\leq} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{G})) \stackrel{(6.6)}{=} \mathbb{E}|X| = \|X\|_{L^1},$$

dok tvrdnja za $p = \infty$ slijedi iz:

$$|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})| \stackrel{(a)}{\leq} \mathbb{E}(|X||\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\|X\|_{L^\infty}|\mathcal{G}) = \|X\|_{L^\infty}. \quad \square$$

Neka je sada $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ proizvoljna *filtracija* od $\mathcal{F}$, tj. rastući niz pod- σ -algebri od $\mathcal{F}$. Za niz $(X_n)_{n=0}^\infty$ iz $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kaŹemo da je (*diskretni*) *martingal* obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ ako vrijedi:

- X_n je $\mathcal{F}_n$ -izmjeriva za svaki $n \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Direktna posljedica definicije i svojstva (6.6) je

$$\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \dots,$$

a radi leme 6.6(b) za $p \geq 1$ vrijedi

$$\|X_0\|_{L^p} \leq \|X_1\|_{L^p} \leq \|X_2\|_{L^p} \leq \dots,$$

tj.

$$\mathbb{E}|X_0|^p \leq \mathbb{E}|X_1|^p \leq \mathbb{E}|X_2|^p \leq \dots$$

Tipični primjer martingala dobijemo ako uzmemo neku $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i stavimo $X_n := \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$.

Reći ćemo da je slučajna varijabla $T: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ *vrijeme zaustavljanja* (obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$) ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Tada ima smisla slučajna varijabla X_T određena sa

$$X_T|_{\{T=n\}} = X_n|_{\{T=n\}} \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0,$$

tj.

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega),$$

koju zovemo *martingal* $(X_n)_{n=0}^\infty$ *zaustavljen u vremenu* T . Definiramo još i σ -algebru

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : (\forall n \in \mathbb{N}_0)(A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n)\},$$

koju zovemo *filtracija* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ *zaustavljena u vremenu* T . Naime, lako je provjeriti da je doista riječ o σ -algebri. Također je lako provjeriti da je slučajna varijabla X_T izmjeriva obzirom na $\mathcal{F}_T$. Možda najefektnije svojstvo martingala je sljedeće: Ako je $(T_n)_{n=0}^\infty$ rastući niz ograničenih vremena zaustavljanja, tada je $(X_{T_n})_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{T_n})_{n=0}^\infty$; vidjeti zadatak 6.6.

Primjer 6.7. Tzv. *dijadska filtracija* od $[0, 1]$ je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^\infty$ definirana sa

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n &:= \sigma(\{I \in \mathcal{D} : I \subseteq [0, 1], |I| = 2^{-n}\}) \\ &= \text{konačne unije intervala } [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)); \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1. \end{aligned}$$

Za bilo koju $f \in L^1([0, 1])$ je formulom $X_n := \mathbb{E}(f | \mathcal{D}_n)$ dan tzv. *dijadski martingal* $(X_n)_{n=0}^\infty$. Ako nam, kao i ranije, $[f]_I$ označava prosjek funkcije f na intervalu I , tada zahvaljujući (6.4) za $n \in \mathbb{N}_0$ možemo pisati:

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))} \mathbb{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))} = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subseteq [0, 1] \\ |I|=2^{-n}}} [f]_I \mathbb{1}_I.$$

Pogledajmo još što su u ovom slučaju martingalne razlike $X_{n+1} - X_n$:

$$\begin{aligned} &X_{n+1} - X_n \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} [f]_{[2^{-(n+1)}k, 2^{-(n+1)}(k+1))} \mathbb{1}_{[2^{-(n+1)}k, 2^{-(n+1)}(k+1))} - \sum_{k=0}^{2^n-1} [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))} \mathbb{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))} \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(([f]_{[2^{-(n+1)}2k, 2^{-(n+1)}(2k+1))} - [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))}) \mathbb{1}_{[2^{-(n+1)}2k, 2^{-(n+1)}(2k+1))} \right. \\ &\quad \left. + ([f]_{[2^{-(n+1)}(2k+1), 2^{-(n+1)}(2k+2))} - [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1))}) \mathbb{1}_{[2^{-(n+1)}(2k+1), 2^{-(n+1)}(2k+2))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} ([f]_{[2^{-(n+1)}2k, 2^{-(n+1)}(2k+1))} - [f]_{[2^{-(n+1)}(2k+1), 2^{-(n+1)}(2k+2))}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\mathbb{1}_{[2^{-n-1}2k, 2^{-n-1}(2k+1))} - \mathbb{1}_{[2^{-n-1}(2k+1), 2^{-n-1}(2k+2))} \right) \\
 = & \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subseteq [0,1] \\ |I|=2^{-n}}} \frac{1}{2} ([f]_{I_{\text{lijevo}}} - [f]_{I_{\text{desno}}}) (\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}),
 \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} - X_n &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subseteq [0,1] \\ |I|=2^{-n}}} \frac{1}{|I|} \left(\int_{[0,1]} f (\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}) \right) (\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}) \\
 &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subseteq [0,1] \\ |I|=2^{-n}}} \langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2([0,1])} \mathbb{h}_I,
 \end{aligned}$$

pri čemu su $\mathbb{h}_I$ Haarove funkcije definirane u (5.2). Napomenimo da skalarni produkti $\langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2([0,1])}$ imaju smisla za svaku $f \in L^1([0,1])$.

* * *

Dokažimo poznatu maksimalnu ocjenu za sasvim općeniti martingal.

Teorem 6.8. (Doobova⁵ nejednakost) *Neka je $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal (obzirom na neku filtraciju) i neka je $(X_n^*)_{n=0}^\infty$ pripadni maksimalni proces, tj.*

$$X_n^* := \max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \quad \text{za } n \in \mathbb{N}_0.$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n^* > \alpha) &\leq \frac{1}{\alpha} \|X_n\|_{L^1} \quad \text{za } \alpha \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\
 \|X_n^*\|_{L^p} &\leq \frac{p}{p-1} \|X_n\|_{L^p} \quad \text{za } p \in \langle 1, \infty \rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0.
 \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo $A := \{X_n^* > \alpha\}$ i definirajmo vrijeme zaustavljanja

$$T := \min\{k \geq 0 : |X_k| > \alpha \text{ ili } k = n\}$$

tako da po definiciji vrijedi

$$|X_T| > \alpha \text{ na } A, \quad |X_T| = |X_n| \text{ na } A^c.$$

Po zadatku 6.6(c) radi $T \leq n$ imamo $\mathbb{E}|X_T| \leq \mathbb{E}|X_n|$, a kako je $\mathbb{E}(|X_T| \mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{A^c})$, zapravo smo dobili

$$\alpha \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{E}(|X_T| \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_A). \quad (6.7)$$

⁵Joseph Leo Doob (1910–2004), američki matematičar.

Zbog $\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}|X_n|$ dijeljenjem (6.7) sa α slijedi prva tražena nejednakost.

Nadalje, računamo:

$$\begin{aligned} \|X_n^*\|_{L^p}^p &\stackrel{(1.15)}{=} \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \mathbb{P}(X_n^* > \alpha) d\alpha \stackrel{(6.7)}{\leq} \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \alpha^{-1} \left(\int_{\{X_n^* > \alpha\}} |X_n| d\mathbb{P} \right) d\alpha \\ &= \int_\Omega |X_n| \left(\int_0^{X_n^*} p\alpha^{p-2} d\alpha \right) d\mathbb{P} = \frac{p}{p-1} \int_\Omega |X_n| (X_n^*)^{p-1} d\mathbb{P} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} \|X_n\|_{L^p} \|X_n^*\|_{L^p}^{p-1}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem sa $\|X_n^*\|_{L^p}^{p-1}$ (ukoliko je taj broj različit od 0) slijedi i druga nejednakost. $\square$

Kao posebni slučaj teorema slijede ocjene za tzv. *dijadsku maksimalnu funkciju*:

$$(M_{\text{dij}}f)(x) := \sup_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \ni x}} \frac{1}{|I|} \left| \int_I f(y) dy \right|; \quad x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$M_{\text{dij}}f := \sup_{I \in \mathcal{D}} |[f]_I| \mathbb{1}_I. \quad (6.8)$$

Korolar 6.9. *Vrijedi*

$$\|M_{\text{dij}}f\|_{L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad i \quad \|M_{\text{dij}}f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Dokaz. Radi neprekidnosti mjere i teorema o monotonij konvergenciji, dovoljno je pokazati tražene nejednakosti za varijantu maksimalne funkcije kod koje se uzima supremum samo po konačnoj podkolekciji od $\mathcal{D}$. Nadalje, zbog translacijske i dilatacijske invarijantnosti tih nejednakosti možemo pretpostaviti i da su svi intervali iz te podkolekcije podskupovi od $[0, 1]$, no tada naprosto iskoristimo teorem 6.8. $\square$

Zanimljivo je da se čak i teorem 6.2 može izvesti iz Doobove nejednakosti, premda Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija nije vezana uz neki martingal. Poslužit ćemo se tzv. *Christovim trikom translacije za trećinu*.

Radi jednostavnosti pretpostavimo $d = 1$. Uvest ćemo još jednu dijadsku rešetku $\mathcal{D}'$, definiranu sa

$$\mathcal{D}' := \left\{ I + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ 4^m < |I|}} 4^m : I \in \mathcal{D} \right\}.$$

Familiju $\mathcal{D}'$ možemo interpretirati na sljedeći način. Dijadske intervale pomičemo za formalni binarni “broj”

$$\dots 10101.010101\dots,$$

ali obzirom da je kolekcija dijadskih intervala duljine 2^n zapravo invarijantna na pomake za višekratnike od 2^n , njih je dovoljno translatirati za najveći broj oblika

$$101\dots 01.010101\dots$$

koji je manji od 2^n . Još preciznije, ako je $I \in \mathcal{D}$, $|I| = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ tada I pomičemo:

- za $2^n/3$ ako je n paran,
- za $2^{n+1}/3$ ako je n neparan.

Istu familiju $\mathcal{D}'$ ćemo dobiti i ako u drugom slučaju radije pomičemo za $2^{n+1}/3 - 2^n = -2^n/3$. Dakle,

$$\mathcal{D}' = \left\{ I + (-1)^n \frac{2^n}{3} : I \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{Z}, |I| = 2^n \right\}.$$

U ovom alternativnom prikazu svaki dijadski interval pomičemo ili ulijevo ili udesno za trećinu njegove duljine, odakle je trik i dobio svoj kolokvijalni naziv.

Lema 6.10. *Za svaki ograničeni interval $J \subseteq \mathbb{R}$ postoji interval $I \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ takav da je $J \subseteq I$ i $|I| \leq 8|J|$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^{n-3} \leq |J| < 2^{n-2}$. Ukoliko je J sadržan u nekom dijadskom intervalu duljine 2^n , tada njega možemo uzeti za traženi interval I . U protivnom J sadrži broj oblika 2^nk za neki $k \in \mathbb{Z}$. Iz pretpostavke o duljini slijedi da je J sadržan u $\langle 2^nk - \frac{2^n}{3}, 2^nk + \frac{2^n}{3} \rangle$ te je zato pogotovo podskup intervala

$$\left[2^nk - \frac{2^n}{3}, 2^n(k+1) - \frac{2^n}{3} \right) \quad \text{ i } \quad \left[2^n(k-1) + \frac{2^n}{3}, 2^nk + \frac{2^n}{3} \right).$$

Kako se barem jedan od ta dva intervala nalazi u $\mathcal{D}'$ (ovisno o parnosti od n), možemo baš njega uzeti za traženi interval I . $\square$

Zbog gornjeg opisa od $\mathcal{D}'$ je jasno da i “pomaknuta” dijadska maksimalna funkcija

$$(M'_{\text{dij}}f)(x) := \sup_{\substack{I \in \mathcal{D}' \\ I \ni x}} \frac{1}{|I|} \left| \int_I f(y) dy \right|; \quad x \in \mathbb{R}.$$

zadovoljava ocjene iz korolara 6.9. Radi leme 6.10 možemo pisati

$$Mf \leq 8M_{\text{dij}}|f| + 8M'_{\text{dij}}|f|,$$

što daje alternativni dokaz teorema 6.2.

* * *

Vratimo se sada na općeniti martingal $(X_n)_{n=0}^\infty$ obzirom na neku filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Neka je još $(H_n)_{n=1}^\infty$ *predvidivi proces* obzirom na istu filtraciju, što znači da je slučajna varijabla H_n izmjeriva obzirom na $\mathcal{F}_{n-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Intuitivno, vrijednosti od H_n se mogu “predvidjeti” već u trenutku $n-1$, kada raspoložemo informacijama određenima sa $\mathcal{F}_{n-1}$. *Martingalna transformacija* (od $(X_n)_{n=0}^\infty$ obzirom na $(H_n)_{n=1}^\infty$) je novi proces $((H \cdot X)_n)_{n=0}^\infty$ definiran sa

$$(H \cdot X)_0 := \mathbf{0}, \quad (H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) \quad \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Uz pretpostavku ograničenosti varijabli H_n taj novi proces $H \cdot X$ je opet martingal obzirom na istu filtraciju. Drugi česti naziv za $H \cdot X$ je *diskretni stohastički integral*, jer je riječ o Riemannovim sumama tzv. Itôvog⁶ integrala. U toj interpretaciji prirodno je ispitati koji se sve procesi mogu prikazati kao martingalne transformacije obzirom na dani martingal $(X_n)_{n=0}^\infty$, a odgovor daju tzv. teoremi reprezentacije martingala. Takvim rezultatima obiluje literatura iz teorije vjerojatnosti (vidjeti npr. knjige [Pro04] i [RY99]), premda su češće formulirani s neprekidnim vremenskim parametrom, dok su za diskretno vrijeme ti rezultati raspisani u diplomskom radu [Vuk14].

Pojam martingalne transformacije uveo je Burkholder⁷ [Bur66]. Jedan od njegovih najvećih doprinosa ovom području je “oštra” ocjena za martingalnu transformaciju s doista ingenioznim dokazima. Naime, Burkholder je svoj originalni dokaz iz [Bur84] kasnije dodatno pojednostavnio (npr. u radu [Bur88b]), a u knjizi [Ose12] dane su brojne modifikacije njegove metode.

Teorem 6.11. (Burkholderova nejednakost) *Za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\|(H \cdot X)_n\|_{L^p} \leq (p^* - 1) \left(\max_{1 \leq k \leq n} \|H_k\|_{L^\infty} \right) \|X_n\|_{L^p},$$

pri čemu smo označili $p^* := \max\{p, p'\} = \max\{p, \frac{p}{p-1}\}$.

Može se pokazati i da je konstanta $p^* - 1$ najbolja moguća, premda je nejednakost stroga osim u trivijalnim slučajevima kada je $p = 2$ ili je desna strana jednaka 0.

Dokaz. Brojeve $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $n \in \mathbb{N}$ smatramo fiksiranima. U cijelom dokazu pretpostavljat ćemo da je $\|H_k\|_{L^\infty} < +\infty$ za $k = 1, 2, \dots, n$ i $\|X_n\|_{L^p} < +\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Iz (b) dijela leme 6.6 tada slijedi i $\|X_k\|_{L^p} < +\infty$ za $k = 0, 1, \dots, n$.

Slučaj $p = 2$ je jednostavan, jer prema (6.5) imamo ortogonalnost prirasta,

$$\mathbb{E}(H_k \overline{H_l}(X_k - X_{k-1})(X_l - X_{l-1})) = \mathbb{E}(H_k \overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{\mathbb{E}(X_l - X_{l-1}|\mathcal{F}_{l-1})}) = 0$$

za $1 \leq k < l \leq n$, pa možemo pisati

$$\begin{aligned} \|(H \cdot X)_n\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) \right|^2 = \sum_{k,l=1}^n \mathbb{E}(H_k \overline{H_l}(X_k - X_{k-1})(X_l - X_{l-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|H_k|^2 |X_k - X_{k-1}|^2) + 2\operatorname{Re} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \mathbb{E}(H_k \overline{H_l}(X_k - X_{k-1})(X_l - X_{l-1})) \\ &\leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} \|H_k\|_{L^\infty}^2 \right) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k - X_{k-1}|^2) \end{aligned}$$

te je analogno

$$\|X_n\|_{L^2}^2 = \mathbb{E} \left| X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}) \right|^2 = \mathbb{E}|X_0|^2 + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k - X_{k-1}|^2).$$

⁶Kiyoshi Itô (1915–2008), japanski matematičar.

⁷Donald Lyman Burkholder (1927–2013), američki matematičar.

Neka je sada $p > 2$ i označimo $Y_m := (H \cdot X)_m$. Normalizirajmo

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|H_k\|_{L^\infty} = 1, \quad (6.9)$$

tako da zapravo imamo dva martingala $(X_m)_{m=0}^\infty$ i $(Y_m)_{m=0}^\infty$ obzirom na istu filtraciju $(\mathcal{F}_m)_{m=0}^\infty$ koji zadovoljavaju

$$|Y_m - Y_{m-1}| \leq |X_m - X_{m-1}| \quad (6.10)$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$. Rezultat kojeg želimo dokazati glasi: ako martingali zadovoljavaju tzv. *uvjet diferencijalne subordiniranosti* (6.10), tada vrijedi nejednakost

$$\|Y_n\|_{L^p} \leq (p-1)\|X_n\|_{L^p}. \quad (6.11)$$

Opet možemo pretpostaviti $\|X_n\|_{L^p} < +\infty$, što za jednostavnu posljedicu ima da slučajne varijable X_k i Y_k za $k = 0, 1, \dots, n$ imaju konačne L^p norme.

Definirajmo funkcije $u, v: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ formulama

$$\begin{aligned} u(x, y) &:= p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-1} (|y| - (p-1)|x|) (|x| + |y|)^{p-1}, \\ v(x, y) &:= |y|^p - (p-1)^p |x|^p. \end{aligned}$$

Mi zapravo trebamo dokazati $\mathbb{E}v(X_n, Y_n) \leq 0$, a za to je dovoljno provjeriti:

(B1) $v(x, y) \leq u(x, y)$ za svake $x, y \in \mathbb{C}$,

(B2) $\mathbb{E}u(X_k, Y_k) \leq \mathbb{E}u(X_{k-1}, Y_{k-1})$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Naime, tada će tražena nejednakost slijediti iz

$$\mathbb{E}v(X_n, Y_n) \leq \mathbb{E}u(X_n, Y_n) \leq \mathbb{E}u(X_{n-1}, Y_{n-1}) \leq \dots \leq \mathbb{E}u(X_0, Y_0) = \mathbb{E}u(X_0, \mathbf{0}) \leq 0.$$

Za provjeru svojstva (B1) traženu nejednakost možemo podijeliti s $|y|^p$ i supstituirati $t = |x|/|y|$, tako da ona postaje

$$\varphi(t) := p\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-1} (1 - (p-1)t)(t+1)^{p-1} - 1 + (p-1)^p t^p \geq 0$$

za svaki $t \in [0, +\infty)$, pri čemu se i posebni slučaj $|y| = 0 \neq |x|$ može interpretirati kao $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) \geq 0$. Primijetimo da je $\varphi\left(\frac{1}{p-1}\right) = 0$ pa je još dovoljno provjeriti $\varphi'(t) \leq 0$ za $x \in [0, \frac{1}{p-1}]$ i $\varphi'(t) \geq 0$ za $x \in [\frac{1}{p-1}, +\infty)$. Deriviranje daje

$$\varphi'(t) = (p-1)^p p^{3-p} t (p^{p-2} t^{p-2} - (t+1)^{p-2})$$

pa je

$$\varphi'(t) \leq 0 \iff pt \leq t+1 \iff t \leq \frac{1}{p-1}.$$

Nije očigledno kako pristupiti provjeri svojstva (B2). Burkholder [Bur88b] ju je sveo na direktnu (ali mukotrpnu) verifikaciju konkavnosti funkcije $t \mapsto u(x + \alpha t, y + \beta t)$ kada su $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takvi da je $|\beta| \leq |\alpha|$, a mi koristimo elegantni trik iz knjige [Ose12],

koji se tamo naziva *metoda integracije*. Definirajmo još jednu funkciju $w: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, ovog puta jednostavnom formulom,

$$w(x, y) := \begin{cases} (|y| - 1)^2 - |x|^2 & \text{za } |x| + |y| > 1, \\ 0 & \text{za } |x| + |y| \leq 1. \end{cases}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{p-1} w\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) dt &= \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} \left(\left(\frac{|y|}{t} - 1 \right)^2 - \left(\frac{|x|}{t} \right)^2 \right) dt \\ &= (|y|^2 - |x|^2) \int_0^{|x|+|y|} t^{p-3} dt - 2|y| \int_0^{|x|+|y|} t^{p-2} dt + \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} dt \\ &= (|x| + |y|)^{p-1} \left(\frac{1}{p-2} |y| - \frac{1}{p-2} |x| - \frac{2}{p-1} |y| + \frac{1}{p} |x| + \frac{1}{p} |y| \right) \\ &= \frac{2}{p(p-1)(p-2)} (|y| - (p-1)|x|) (|x| + |y|)^{p-1}, \end{aligned}$$

odakle uočavamo iznenađujući identitet,

$$u(x, y) = c_p \int_0^{+\infty} t^{p-1} w\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) dt, \quad (6.12)$$

pri čemu je $c_p := \frac{1}{2} p^{3-p} (p-1)^p (p-2) > 0$. Ako sada provjerimo:

(B2') $\mathbb{E} w(X_k, Y_k) \leq \mathbb{E} w(X_{k-1}, Y_{k-1})$ za svaki $k \in \mathbb{N}$,

tada će uvođenjem novih martingala $(\tilde{X}_m)_{m=0}^\infty$ i $(\tilde{Y}_m)_{m=0}^\infty$ formulama $\tilde{X}_m := X_m/t$ i $\tilde{Y}_m := Y_m/t$ te primjenom (6.12) i Fubinijevog teorema (za zamjenu $\mathbb{E}$ i $\int_0^{+\infty}$) slijediti (B2). Napomenimo da se Fubinijev teorem smije iskoristiti jer radi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \left| w\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \right| dt &\leq \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} \left(\left(\frac{|y|}{t} + 1 \right)^2 + \left(\frac{|x|}{t} \right)^2 \right) dt \\ &= (|y|^2 + |x|^2) \int_0^{|x|+|y|} t^{p-3} dt + 2|y| \int_0^{|x|+|y|} t^{p-2} dt + \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} dt \lesssim_p |x|^p + |y|^p \end{aligned}$$

imamo

$$\mathbb{E} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \left| w\left(\frac{X_k}{t}, \frac{Y_k}{t}\right) \right| dt \lesssim_p \mathbb{E} |X_k|^p + \mathbb{E} |Y_k|^p = \|X_k\|_{L^p}^p + \|Y_k\|_{L^p}^p < +\infty$$

za svaki $k = 0, 1, \dots, n$.

Provjera od (B2') je mnogo lakša nego bi bila provjera od (B2). Uvodimo još dvije pomoćne funkcije $a, b: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dane sa

$$a(x, y) := \begin{cases} -2x & \text{za } |x| + |y| > 1, \\ 0 & \text{za } |x| + |y| \leq 1, \end{cases} \quad b(x, y) := \begin{cases} 2y - 2 \operatorname{sgn} y & \text{za } |x| + |y| > 1, \\ 0 & \text{za } |x| + |y| \leq 1. \end{cases}$$

Tvrdimo da za svake $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takve da je $|\beta| \leq |\alpha|$ vrijedi

$$w(x + \alpha, y + \beta) \leq w(x, y) + \operatorname{Re}(a(x, y)\bar{\alpha} + b(x, y)\bar{\beta}). \quad (6.13)$$

Naime, funkcije a i b nisu slučajno izabrane, već na otvorenom skupu $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| + |y| \neq 1, |y| \neq 0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} a(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) &= (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})w(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2), \\ b(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) &= (\partial_{y_1} + i\partial_{y_2})w(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2). \end{aligned}$$

Ipak, naša provjera nejednakosti (6.13) nije infinitezimalna, već direktna, radi komplikacija zbog činjenice da w nije klase C^1 . U svrhu dokaza od (6.13) najprije primijetimo da je $w(x, y) \leq (|y| - 1)^2 - |x|^2$ za svake $x, y \in \mathbb{C}$, što za $|x| + |y| \leq 1$ proizlazi iz

$$0 \leq (|y| - 1)^2 - |x|^2 \iff |x|^2 \leq (1 - |y|)^2.$$

Sada pokazujemo (6.13) i pritom razlikujemo tri slučaja.

Slučaj 1. Pretpostavimo $|x| + |y| > 1$. Ovdje (6.13) slijedi iz

$$\begin{aligned} w(x + \alpha, y + \beta) &\leq (|y + \beta| - 1)^2 - |x + \alpha|^2 \\ &= |y|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(y\bar{\beta}) - 2|y + \beta| + 1 - |x|^2 - |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(x\bar{\alpha}) \\ &= w(x, y) + \operatorname{Re}(a(x, y)\bar{\alpha} + b(x, y)\bar{\beta}) \\ &\quad + \left(2\operatorname{Re}((\operatorname{sgn} y)\bar{\beta}) - 2|y + \beta| + 2|y|\right) + (|\beta|^2 - |\alpha|^2) \\ &\leq w(x, y) + \operatorname{Re}(a(x, y)\bar{\alpha} + b(x, y)\bar{\beta}), \end{aligned}$$

pri čemu u posljednoj nejednakosti za $y \neq 0$ koristimo

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}((\operatorname{sgn} y)\bar{\beta}) &= \frac{2\operatorname{Re}(y\bar{\beta})}{|y|} = \frac{y\bar{\beta} + \bar{y}\beta}{|y|} = \frac{|y + \beta|^2 - |y|^2 - |\beta|^2}{|y|} \\ &= 2|y + \beta| - 2|y| - \frac{1}{|y|}(|y| + |\beta| - |y + \beta|)(|y + \beta| + |\beta| - |y|) \leq 2|y + \beta| - 2|y| \end{aligned}$$

te još uvažavamo $|\beta| \leq |\alpha|$.

Slučaj 2. Pretpostavimo $|x| + |y| \leq 1$ i $|x + \alpha| + |y + \beta| > 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} w(x + \alpha, y + \beta) &= (|y + \beta| - 1)^2 - |x + \alpha|^2 \\ &= (|x + \alpha| + |y + \beta| - 1)(|y + \beta| - |x + \alpha| - 1) \leq 0. \end{aligned}$$

Naime, prvi faktor je pozitivan zbog pretpostavke ovog slučaja, dok je drugi faktor manji ili jednak 0 zbog

$$|y + \beta| \leq |y| + |\beta| \leq 1 - |x| + |\alpha| \leq 1 + |x + \alpha|.$$

Slučaj 3. U slučaju $|x| + |y| \leq 1$ i $|x + \alpha| + |y + \beta| \leq 1$ obje strane od (6.13) su jednake 0 pa nejednakost trivijalno vrijedi.

Ovime je dovršena provjera od (6.13). Sada u tu ocjenu uvrstimo $x = X_{k-1}$, $y = Y_{k-1}$, $\alpha = X_k - X_{k-1}$, $\beta = Y_k - Y_{k-1}$, uvažavajući (6.10),

$$w(X_k, Y_k) \leq w(X_{k-1}, Y_{k-1}) + \operatorname{Re} \left(a(X_{k-1}, Y_{k-1}) \overline{(X_k - X_{k-1})} + b(X_{k-1}, Y_{k-1}) \overline{(Y_k - Y_{k-1})} \right).$$

Uzimanjem očekivanja objiju strana konačno dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}w(X_k, Y_k) &\leq \mathbb{E}w(X_{k-1}, Y_{k-1}) \\ &\quad + \operatorname{Re} \mathbb{E} \left(a(X_{k-1}, Y_{k-1}) \overline{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})} \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} \mathbb{E} \left(b(X_{k-1}, Y_{k-1}) \overline{\mathbb{E}(Y_k - Y_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})} \right) \\ &= \mathbb{E}w(X_{k-1}, Y_{k-1}). \end{aligned}$$

Time je završen dokaz Burkholderove nejednakosti u obliku (6.11) kada je $p > 2$.

Pretpostavimo sada da je $1 < p < 2$ i vratimo se na polazni oblik nejednakosti koju dokazujemo. Opet normaliziramo kao u (6.9) i fiksiramo prirodni broj n . Zbog obrata Hölderove nejednakosti dovoljno je za proizvoljnu slučajnu varijablu Z takvu da je $\|Z\|_{L^{p'}} < +\infty$ pokazati

$$\left| \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) Z \right) \right| \leq (p' - 1) \|X_n\|_{L^p} \|Z\|_{L^{p'}}.$$

Ako stavimo $X := X_n$, tada je zapravo $X_k = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_k)$ za $k = 0, 1, \dots, n$, a s druge pak strane možemo označiti $Z_k := \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_k)$. Lijevu stranu sada transformiramo koristeći svojstva uvjetnog očekivanja:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1}) Z) \\ &\stackrel{(6.6)}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1})(Z - Z_k) | \mathcal{F}_k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1}) Z_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &\stackrel{(6.5)}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1}) \underbrace{\mathbb{E}(Z - Z_k | \mathcal{F}_k)}_{=0}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k Z_{k-1} \underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1})}_{=0}) \end{aligned}$$

pa mi zapravo pokazujemo

$$\left| \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})) \right| \leq (p' - 1) \|X\|_{L^p} \|Z\|_{L^{p'}}.$$

Na sasvim isti način se dobiva

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k X(Z_k - Z_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1}))$$

pa je radi Hölderove nejednakosti dovoljno provjeriti

$$\left\| \sum_{k=1}^n H_k(Z_k - Z_{k-1}) \right\|_{L^{p'}} \leq (p' - 1) \|Z\|_{L^{p'}},$$

ali to je upravo prethodno dokazani slučaj nejednakosti za eksponent veći od 2. $\square$

Funkcija u iz prethodnog dokaza s pravom se ponekad zove *Burkholderova funkcija*. On je do nje došao rješavanjem kompliciranih parcijalnih diferencijalnih jednačbi [Bur84], a jednom kada ju je pronašao, znao ju je primijeniti u raznolikim kontekstima u radovima [Bur85], [Bur87], [Bur88a], [Bur88b].

Neka je sada $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal takav da je $X_0 = \mathbf{0}$. Definiramo kvadratnu varijaciju $([X]_n)_{n=0}^\infty$ kao novi proces definiran eksplicitno sa

$$[X]_0 := \mathbf{0}, \quad [X]_n := \sum_{k=1}^n |X_k - X_{k-1}|^2 \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}[X]_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^2.$$

S druge strane, za $1 \leq k < l \leq n$ imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1})) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1}) | \mathcal{F}_{l-1})) \\ &= \mathbb{E}(\overline{(X_k - X_{k-1})} \underbrace{\mathbb{E}(X_l - X_{l-1} | \mathcal{F}_{l-1})}_{=0}) = 0, \end{aligned}$$

a isto vrijedi i za $l < k$ pa je

$$\|X_n\|_{L^2}^2 = \sum_{k,l=1}^n \mathbb{E}(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1})) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^2.$$

Zaključujemo

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{L^2} = \|X_n\|_{L^2}.$$

Poznata nejednakost daje poopćenje uočene tvrdnje za sve $1 < p < \infty$.

Teorem 6.12. (Burkholder-Davis-Gundy nejednakost) *Za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{L^p} \sim_p \|X_n\|_{L^p}.$$

Dokaz. Postupa se slično kao kod dokaza teorema 4.25, pri čemu ovaj put polazimo od nejednakosti iz teorema 6.11. Ukratko, nejednakost $\lesssim_p$ slijedi Hinčinovim trikom, a obratna nejednakost $\gtrsim_p$ se dobiva dualizacijom. $\square$

Primjenom teorema 6.12 na posebni slučaj dijadske filtracije dobivaju se ocjene za tzv. *dijadsku kvadratnu funkciju*:

$$S_{\text{dij}}f := \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2}|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{1/2}. \quad (6.14)$$

Korolar 6.13. *Vrijedi*

$$\|S_{\text{dij}}f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Dokaz. Opet je radi teorema o monotonij konvergenciji dovoljno promatrati samo sumiranje po dijadskim intervalima sadržanim u $[0, 1]$ i koji imaju duljinu strogo veću od 2^{-n} za neki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$. Ukoliko funkciji $f \in L^1([0, 1])$ pridružimo dijadski martingal $(X_n)_{n=0}^\infty$ kao u primjeru 6.7, iz tamo izvedenog računa će slijediti

$$|X_{k+1} - X_k|^2 = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subseteq [0, 1] \\ |I| = 2^{-k}}} |\langle f, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2([0, 1])}|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I,$$

odnosno

$$[X]_n = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subseteq [0, 1] \\ 2^{-n+1} \leq |I| \leq 1}} |\langle f, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2([0, 1])}|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I$$

pa tvrdnja korolara slijedi iz jedne od dviju ocjena teorema 6.12. $\square$

* * *

Što se tiče g.s. konvergencije martingala, dat ćemo rezultat koji nije najopćenitiji moguć, ali je vrlo kvantitativan. Trik koji slijedi je prvi upotrijebio Lépingle [Lep76]. Obzirom da nemamo prirodnu klasu na kojoj bi g.s. konvergencija bila bitno lakša, ne možemo koristiti teorem 1.6 pa radije brojimo skokove, kao u odjeljku 1.1.

Neka je opet $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Za svaki $\varepsilon > 0$ definiramo svojevrsni *brojač skokova* $J_\varepsilon X$ kao slučajnu varijablu danu sa

$$(J_\varepsilon X)(\omega) := \sup \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : \text{postoje } 0 \leq m_1 < n_1 \leq m_2 < n_2 \leq \dots \leq m_k < n_k \right. \\ \left. \text{t.d. je } |X_{n_i}(\omega) - X_{m_i}(\omega)| \geq \varepsilon \text{ za } i = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Teorem 6.14. (Lépingleova nejednakost) *Za $1 < p < \infty$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\|(J_\varepsilon X)^{1/2}\|_{L^p} \lesssim_p \varepsilon^{-1} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_{L^p}. \quad (6.15)$$

Posljedično, ako je $(X_n)_{n=0}^\infty$ ograničen u L^p normi, tada on konvergira g.s.

Dokaz. Translacijom možemo postići $X_0 = 0$, a radi teorema o monotonij konvergenciji je dovoljno dokazati ocjenu samo za martingale za koje postoji indeks $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq N$ vrijedi $X_n = X_N$. Rekurzivno definirajmo niz vremena zaustavljanja $(S_i)_{i=0}^\infty$:

$$S_0(\omega) := 0,$$

$$S_i(\omega) := \min \{n \in \mathbb{N}_0 : n > S_{i-1}(\omega), |X_n(\omega) - X_{S_{i-1}(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon/2\}; \quad i \in \mathbb{N},$$

uz konvenciju $\min \emptyset = \infty$. Za $\varepsilon > 0$ definirajmo i “pohlepni” brojač skokova

$$\begin{aligned} (\tilde{J}_\varepsilon X)(\omega) &:= \sup \{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(\omega) < \infty\} \\ &= \text{broj konačnih članova niza } S_1(\omega) < S_2(\omega) < \dots \end{aligned}$$

Stavimo još $T_i := \min\{S_i, N\}$. Lako je vidjeti

$$J_\varepsilon X \leq \tilde{J}_\varepsilon X$$

i

$$(\tilde{J}_\varepsilon X)^{1/2} \leq (\varepsilon/2)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}|^2 \right)^{1/2}.$$

Posljednja suma je u stvarnosti konačna zbog naše pretpostavke na martingal. Iz zadatka 6.6 slijedi da je $(X_{T_n})_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{T_n})_{n=0}^\infty$. Korištenjem Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti (teorem 6.12) na taj novi martingal dobivamo

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \lesssim_p \sup_{i \in \mathbb{N}_0} \|X_{T_i}\|_{L^p} \leq \|X_N\|_{L^p},$$

odakle konačno slijedi (6.15). Napomenimo da smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili $T_i \leq N$, zadatak 6.6 i dio (b) leme 6.6. $\square$

Napomena 6.15. Potreban je još jedan korak dokaza kako bi se iz (6.15) izvela varijacijska formulacija Lépingleove nejednakosti:

$$\| \|X_n(\omega)\|_{V_n^e} \|_{L_\omega^p} \lesssim_{p,e} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_{L^p}$$

za $1 < p < \infty$ i $2 < \varrho < \infty$, pri čemu je $\|\cdot\|_{V^e}$ varijacijska norma definirana u odjeljku 1.1. Za $\varrho \leq 2$ spomenuta ocjena naprosto ne vrijedi. S druge strane, teorem o g.s. konvergenciji martingala ostaje vrijediti i uz slabiju pretpostavku ograničenosti u L^1 normi; vidjeti knjigu [Dur10].

* * *

Zadatak 6.6. Neka je $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ i neka su S i T dva ograničena vremena zaustavljanja takva da je $S \leq T$. Dokažite da vrijedi:

- (a) $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$,
- (b) $X_S, X_T \in L^1$ i $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$,
- (c) $\mathbb{E}X_S = \mathbb{E}X_T$ i $\mathbb{E}|X_S| \leq \mathbb{E}|X_T|$.

Uputa: Za dokaz jednakosti pod (b) uzmite $m \in \mathbb{N}_0$ dovoljno velik da vrijedi $S \leq T \leq m$ pa dokažite po definiciji

$$\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_S) = X_S, \quad \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_T) = X_T.$$

Potom naprosto iskoristite (a) dio i (6.6) u računu

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_S) = X_S.$$

Za dokaz nejednakosti pod (c) koristite (b) dio i lemu 6.6(b) za $p = 1$.

Zadatak 6.7. Neka je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^\infty$ dijadska filtracija iz primjera 6.7.

- (a) Dokažite da je na sljedeći način opisana bijektivna korespondencija između ograničenih vremena zaustavljanja T obzirom na tu filtraciju i konačnih particija $\mathcal{I}$ od $[0, 1]$ na dijadske intervale.

Ako je $\mathcal{I}$ konačna dijadska particija od $[0, 1]$ tada je $T: [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}_0$, $T(\omega) := \log_2(1/|I|)$ za jedinstveni $I \in \mathcal{I}$ koji sadrži ω , vrijeme zaustavljanja.

Obratno, ako je $T: [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}_0$ ograničeno vrijeme zaustavljanja, tada se svaki skup $\{T = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ particionira u neku konačnu kolekciju $\mathcal{I}_n$ dijadskih intervala duljine 2^{-n} pa $\mathcal{I} = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ čini dijadsku particiju od $[0, 1]$.

- (b) Pokažite da je u gornjem slučaju $\mathcal{D}_T$ upravo familija svih konačnih unija članova iz $\mathcal{I}$ te da za $f \in L^1([0, 1])$ vrijedi $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_T) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I f \right) \mathbb{1}_I$.
- (c) Neka su $f \in L^1([0, 1])$, $f \geq 0$, $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ i $m \in \mathbb{N}_0$. Opišite particiju pridruženu vremenu zaustavljanja $T(\omega) := n$ za najmanji $n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ takav da je $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_n) > \alpha$ ako takav n postoji, $T(\omega) := m$ ako takav n ne postoji.

Zadatak 6.8. Izvedite teorem 6.11 iz teorema 6.12; dakle obrnuto nego je učinjeno u tekstu.

Uputa: Koristite dualizaciju iz računa s kraja dokaza teorema 6.11.

6.3. Calderónov princip prijenosa

U ovom odjeljku pokazujemo g.s. konvergenciju ergodičkih usrednjenja i to korištenjem teorema 1.6 te svođenjem ograničenosti odgovarajućeg ergodičkog maksimalnog operatora na ograničenost Hardy-Littlewoodovog maksimalnog operatora, tj. preciznije, njegove necentrirane verzije (6.2). Time će biti potvrđen rezultat pod (2) spomenut u odjeljku 1.1. Trik iz dokaza je prvi iskoristio Calderón u radu [Cal68] pa se u njegovu čast zove *Calderónov princip prijenosa*.

Uzmimo neki sustav koji čuva mjeru $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$, što znači (prisjetimo se odjeljka 1.2) da je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ vjerojatnosni prostor, a $S: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ je bijekcija takva da su S i S^{-1} izmjerive i čuvaju mjeru. Već u poglavlju 1 promatrali smo ergodička usrednjenja

$$(A_N f)(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x); \quad N \in \mathbb{N}$$

i spomenuli maksimalni operator

$$(M_2 f)(x) := \sup_{N \in \mathbb{N}} |(A_N f)(x)|$$

definiran za $f \in L^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.

Teorem 6.16. *Vrijedi*

$$\|M_2 f\|_{L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{X})} \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{X})} \quad i \quad \|M_2 f\|_{L^p(\mathbb{X})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{X})}$$

za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Dokaz. Zbog realne interpolacije i očigledne nejednakosti na $L^\infty(\mathbb{X})$ dovoljno je pokazati samo prvu ocjenu, tj. za proizvoljni $\alpha > 0$ dokazujemo

$$\mu\left(\left\{\sup_{N \in \mathbb{N}} |A_N f| > \alpha\right\}\right) \lesssim \alpha^{-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{X})}. \quad (6.16)$$

U tu svrhu najprije za dvostrano beskonačni niz $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ i za $N \in \mathbb{N}$ definirajmo diskretne prosjeke

$$(\tilde{A}_N g)(k) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(k+j); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pokazat ćemo da oni zadovoljavaju slabu ℓ^1 maksimalnu ocjenu, tj. da za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\text{card} \left\{ k \in \mathbb{Z} : \sup_{N \in \mathbb{N}} |(\tilde{A}_N g)(k)| > \alpha \right\} \lesssim \alpha^{-1} \|g\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}. \quad (6.17)$$

To ćemo pak postići prelaskom s proizvoljnog niza $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ na stepenastu funkciju $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiranu $h := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \mathbb{1}_{[k, k+1)}$. Očigledno je

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|g\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \quad (6.18)$$

i

$$\frac{1}{N} \int_{[k, k+N)} h(y) dy = (\tilde{A}_N g)(k); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prisjetimo se operatora M_{nc} definiranog formulom (6.2). Dakle, čim je $(\tilde{A}_N g)(k) > \alpha$, onda je $M_{nc}h > \alpha$ na cijelom intervalu $[k, k+1)$ pa slijedi

$$\text{card} \left\{ k \in \mathbb{Z} : \sup_{N \in \mathbb{N}} |(\tilde{A}_N g)(k)| > \alpha \right\} \leq |\{M_{nc}h > \alpha\}|. \quad (6.19)$$

Korištenjem slabe L^1 ocjene za M_{nc} , što je pak direktna posljedica teorema 6.2, dobivamo

$$|\{M_{nc}h > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-1} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

a to u kombinaciji s (6.18) i (6.19) daje (6.17).

Fiksirajmo prirodni broj N_0 . Za svaki $x \in \mathbb{X}$ definirajmo funkciju $g_{x, N_0} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ duž orbite od x danu sa

$$g_{x, N_0}(n) := \begin{cases} f(S^n x) & \text{za } 0 \leq n \leq 2N_0 - 1, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

te primijetimo da za cijele brojeve $1 \leq N \leq N_0$ i $0 \leq k \leq N_0 - 1$ imamo

$$(A_N f)(S^k x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^{k+n} x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_{x, N_0}(k+n) = (\tilde{A}_N g_{x, N_0})(k).$$

U idućem računu koristimo invarijantnost mjere μ na transformaciju S , Fubinijev teorem i netom dokazanu ocjenu (6.17).

$$\begin{aligned} \mu \left(\left\{ \max_{1 \leq N \leq N_0} |A_N f| > \alpha \right\} \right) &= \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{X} : \max_{1 \leq N \leq N_0} |(A_N f)(S^k x)| > \alpha \right\} \right) \\ &= \frac{1}{N_0} \int_{\mathbb{X}} \text{card} \left\{ k \in \{0, \dots, N_0 - 1\} : \max_{1 \leq N \leq N_0} |(\tilde{A}_N g_{x, N_0})(k)| > \alpha \right\} d\mu(x) \\ &\stackrel{(6.17)}{\lesssim} \frac{1}{N_0} \int_{\mathbb{X}} \alpha^{-1} \|g_{x, N_0}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} d\mu(x) = \alpha^{-1} \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{2N_0-1} \int_{\mathbb{X}} |f(S^n x)| d\mu(x) = 2\alpha^{-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{X})} \end{aligned}$$

Puštanjem $N_0 \rightarrow \infty$ konačno dobivamo (6.16). □

Korolar 6.17. (Birkhoffov⁸ točkovni ergodički teorem) *Ako je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$ sustav koji čuva mjeru i $f \in L^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, tada niz ergodičkih usrednjenja $(A_N f)_{N=1}^\infty$ konvergira μ -g.s., tj. limes*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x)$$

postoji (i konačan je) za μ -g.s. $x \in \mathbb{X}$.

⁸George David Birkhoff (1884–1944), američki matematičar.

Dokaz. Primjenjujemo teorem 1.6 uz $p = q = 1$ na operatore $(A_N)_{N=1}^\infty$. Pretpostavka (1) je ispunjena uz $C_n = 1$, naprosto zbog nejednakosti trokuta i invarijantnosti mjere na transformaciju S . Teorem 6.16 uz $p = 1$ upravo garantira pretpostavku (2). Konačno, pretpostavku (3) je dovoljno provjeriti za $S = L^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ pa je dostatno dokazati tvrdnju korolara samo za L^2 funkcije.

U svrhu daljnje redukcije opet koristimo teorem 1.6, ovog puta uz $p = q = 2$. Pretpostavka (1) je ponovno trivijalna, a pretpostavka (2) je garantirana teoremom 6.16 uz $p = 2$. Sada pretpostavku (3) provjeravamo na gustom potprostoru

$$\text{Ker}(U - I) \oplus \text{Im}(U - I),$$

pri čemu je $Uf := f \circ S$; primijetite analogiju s dokazima propozicije 1.3 i korolara 1.5. Svaka funkcija f iz gornjeg gustog potprostora ima prikaz $f = f_1 + f_2$, pri čemu vrijedi $f_1 \circ S = f_1 \in L^2(\mathbb{X})$, $f_2 = g \circ S - g$, $g \in L^2(\mathbb{X})$. Teleskopiranje daje

$$(A_N f)(x) = f_1(x) + \frac{1}{N} (g(S^N x) - g(x))$$

pa će biti dovoljno još samo pokazati $\lim_{N \rightarrow \infty} g(S^N x)/N = 0$ za μ -g.s. $x \in \mathbb{X}$. Posljednja činjenica slijedi iz

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{N=1}^{\infty} \left| \frac{g(S^N x)}{N} \right|^2 \right) d\mu(x) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{X}} |g(S^N x)|^2 d\mu(x) = \frac{\pi^2}{6} \|g\|_{L^2(\mathbb{X})}^2 < +\infty$$

i nužnog kriterija za konvergenciju reda nenegativnih brojeva. $\square$

Zanimljivo je spomenuti poznati otvoreni problem u ergodičkoj teoriji koji traži da se dokaže μ -g.s. konvergencija bilinearnih ergodičkih usrednjenja

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f \circ S^n)(g \circ T^n),$$

pri čemu su S i T proizvoljne dvije komutirajuće transformacije na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ koje čuvaju mjeru te $f, g \in L^\infty(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljne funkcije. Ovdje više nema prirodnog gustog potprostora na kojem je lako provjeriti konvergenciju pa veći potencijal imaju pristupi poput brojenja skokova s kraja prethodnog odjeljka.

6.4. Maksimalni singularni integrali

U odjeljku 4.3 formulom (4.13) definirali smo Hilbertov transformat Hf , ali samo za funkcije $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, jer smo jedino za takve funkcije mogli dokazati postojanje limesa kada $\varepsilon \rightarrow 0^+$ za svaku točku $x \in \mathbb{R}$. Međutim, H je primjer Calderón-Zygmundovog operatora pa se on, zahvaljujući teoremu 4.5, proširuje po neprekidnosti i na funkcije $f \in L^p(\mathbb{R})$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Stoga je legitimno upitati se postoji li i za takve funkcije limes iz (4.13), makar ne za svaki, nego samo za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$. Odgovor je potvrđan i bazira se na općenitom principu, teoremu 1.7. Dokaz iznosimo prema knjizi [Duo01].

Fiksirajmo $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i za svaki $\varepsilon > 0$ definirajmo operator $H_\varepsilon: L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ formulom

$$(H_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\{t \in \mathbb{R}: |t| \geq \varepsilon\}} f(x-t) \frac{dt}{t}.$$

Gornji integral je apsolutno konvergentan za svaki $x \in \mathbb{R}$, naprosto po Hölderovoj nejednakosti, jer se funkcija $t \mapsto (1/\pi t) \mathbb{1}_{\{|t| \geq \varepsilon\}}(t)$ svakako nalazi u prostoru $L^{p'}(\mathbb{R})$. Potom definiramo

$$(H_\star f)(x) := \sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} |(H_\varepsilon f)(x)|.$$

Operator $H_\star$ zovemo *maksimalna Hilbertova transformacija*. Ona je primjer tzv. maksimalnog singularnog integrala.

Naredna lema se nekad naziva *Cotlarova nejednakost*.

Lema 6.18. Za $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(H_\star f)(x) \lesssim (M|Hf|)(x) + (M|f|)(x).$$

Dokaz. Fiksirajmo funkciju $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ koja je nenegativna, parna, padajuća na $\langle 0, +\infty \rangle$, iščezava izvan $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ i ima integral jednak 1. Za $\varepsilon > 0$ i $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ definirajmo $T_\varepsilon f := (Hf) * (D_\varepsilon^{(1)}\varphi)$ tako da iz dokaza teorema 6.4 za svaki $x \in \mathbb{R}$ znamo

$$\sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} |(T_\varepsilon f)(x)| \leq (M_\varphi |Hf|)(x) \lesssim_\varphi (M|Hf|)(x). \quad (6.20)$$

S druge strane, korištenjem činjenica da je H antihermitski i da komutira s translacijama i dilatacijama te da je Hilbertov transformat parne funkcije neparna funkcija, možemo pisati

$$(T_\varepsilon f)(x) = \langle Hf, T_x D_\varepsilon^{(1)}\varphi \rangle_{L^2} = -\langle f, T_x D_\varepsilon^{(1)}H\varphi \rangle_{L^2} = (f * D_\varepsilon^{(1)}H\varphi)(x).$$

Posljedično,

$$H_\varepsilon f - T_\varepsilon f = f * (D_\varepsilon^{(1)}\psi),$$

gdje je

$$\psi(t) := \frac{1}{\pi t} \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle}(t) - (H\varphi)(t).$$

Za $|t| \geq 1$ ocjenjujemo

$$|\psi(t)| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{t} - \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \frac{\varphi(s)}{t-s} ds \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \frac{|\varphi(s)||s|}{|t||t-s|} ds \leq \frac{2}{\pi t^2} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |\varphi(s)||s| ds \lesssim_\varphi \frac{1}{t^2}.$$

S druge strane, radi računa iz dokaza propozicije 4.1 za $|t| < 1$ imamo

$$|\psi(t)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{[-2, 2]} (\varphi(t-s) - \varphi(t)) \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{4}{\pi} \max_{s \in \mathbb{R}} |\varphi'(s)| \lesssim_\varphi 1.$$

Zaključujemo $|\psi(t)| \lesssim_\varphi \rho(t)$ uz $\rho(t) := \min\{|t|^{-2}, 1\}$ pa iz dokaza teorema 6.4 za svaki $x \in \mathbb{R}$ dobivamo

$$\sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} |(H_\varepsilon f)(x) - (T_\varepsilon f)(x)| \lesssim_\varphi (M_\rho |f|)(x) \lesssim (M|f|)(x). \quad (6.21)$$

Zbrajanje (6.20) i (6.21) daje željenu tvrdnju. $\square$

Teorem 6.19. *Za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ vrijedi*

$$\|H_\star f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Dokaz. Iz leme 6.18, maksimalnog teorema 6.2 i teorema 4.8 slijedi

$$\|H_\star f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \|M(Hf)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|Mf\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|Hf\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

čime je dokaz završen. $\square$

Korolar 6.20. *Za $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $\varepsilon > 0$ i $f \in L^p(\mathbb{R})$ vrijedi $H_\varepsilon f \in L^p(\mathbb{R})$ i*

$$\|H_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Dokaz. Iz teorema 6.19 posebno za svaki $\varepsilon > 0$ i za $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ slijedi

$$\|H_\varepsilon \varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (6.22)$$

Sada standardnim aproksimacijskim argumentom tu ocjenu proširujemo na sve funkcije iz $L^p(\mathbb{R})$. Zbog gustoće za danu funkciju $f \in L^p(\mathbb{R})$ postoji niz $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ u $C_c^1(\mathbb{R})$ takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - f\|_{L^p} = 0$. Po Hölderovoj nejednakosti je

$$|(H_\varepsilon \varphi_n)(x) - (H_\varepsilon f)(x)| \leq \|\varphi_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left(\int_{\{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \varepsilon\}} \frac{dt}{|\pi t|^{p'}} \right)^{1/p'} \lesssim_{p,\varepsilon} \|\varphi_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

odakle slijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_\varepsilon \varphi_n)(x) = (H_\varepsilon f)(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Fatouova lema sada daje

$$\|H_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|H_\varepsilon \varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

pa kombiniranje s ocjenom (6.22) dovršava dokaz. $\square$

Korolar 6.21. *Ako je $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, tada za g.s. $x \in \mathbb{R}$ postoji limes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (H_\varepsilon f)(x)$ i vrijedi*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (H_\varepsilon f)(x) = (Hf)(x).$$

Dokaz. U svrhu korištenja teorema 1.7 treba provjeriti njegove pretpostavke. Uvjet (1) slijedi iz korolara 6.20; čak imamo i uniformnu ograničenost familije operatora $(H_\varepsilon)_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle}$ na $L^p(\mathbb{R})$, a za (1) nam je dovoljna samo individualna ograničenost. Uvjet (2) je naprosto teorem 6.19, dok je uvjet (3) provjeren na gustom potprostoru $S = C_c^1(\mathbb{R})$, još na samom početku odjeljka 4.3. Time je dokazana egzistencija limesa $(H_0 f)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (H_\varepsilon f)(x)$ za g.s. $x \in \mathbb{R}$. Kako bismo vidjeli da je taj limes za g.s. $x \in \mathbb{R}$ upravo jednak $(Hf)(x)$, dobro će nam doći uniformna ograničenost od $(H_\varepsilon)_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle}$. Naime, treba samo primijetiti kako iz Fatouove leme i korolara 6.20 također slijedi

$$\|H_0 f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|H_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

pa je H_0 ograničeni operator na $L^p(\mathbb{R})$ koji se na gustom potprostoru $C_c^1(\mathbb{R})$ podudara s ograničenim operatorom H . Dakle, $H_0 = H$. $\square$

Napomenimo da je H_* također ograničen s $L^1(\mathbb{R})$ u $L^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R})$ pa posljedično prethodni korolar vrijedi i u slučaju $p = 1$. Dokaz izostavljamo; može se naći u [Duo01].

* * *

Analogon Cotlarove formule postoji i za višedimenzionalne Calderón-Zygmundove operatore. Umjesto da poopćujemo taj pristup maksimalnim singularnim integralima, radije ćemo pokazati jedan maštoviti trik, tzv. *metodu rotacije* Steina i Weissa [SW71]. Njome možemo samo iz omeđenosti od H_* zaključiti omeđenost nekih višedimenzionalnih maksimalnih operatora.

Neka je $S^{d-1} := \{\omega \in \mathbb{R}^d : |\omega| = 1\}$ standardna jedinična sfera. Uzmimo standardnu jezgru K koja udovoljava uvjetima iz propozicije 4.1 i još je oblika

$$K(x, y) = \frac{1}{|x - y|^d} \Omega\left(\frac{x - y}{|x - y|}\right)$$

za neku neparnu funkciju $\Omega: S^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$, tj. $\Omega(-\omega) = -\Omega(\omega)$. Singularni integralni operator $T_K: C_c^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^d)$ pridružen K i definiran formulom (4.3) tada zapravo glasi

$$(T_K f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (T_\varepsilon f)(x), \quad (T_\varepsilon f)(x) := \int_{\{t \in \mathbb{R}^d : |t| \geq \varepsilon\}} f(x - t) \frac{\Omega(t/|t|)}{|t|^d} dt.$$

Prema teoriji iz poglavlja 4 znamo da se T_K proširuje do ograničenog linearnog operatora na $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$, ali ponovno ostaje pitanje postoji li gornji limes za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$ čak i kada je samo $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. To pitanje će biti razriješeno (jednako kao i za H) ako pokažemo da je maksimalni singularni integralni operator

$$(T_* f)(x) := \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} |(T_\varepsilon f)(x)|$$

također L^p ograničen.

Neka je σ upravo $(d-1)$ -dimenzionalna Hausdorffova mjera na S^{d-1} . (Elementarnije ju se može dobiti putem neke parametrizacije, npr. sferičnih koordinata.) Za svaku izmjerivu funkciju $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t) dt = \int_{S^{d-1}} \left(\int_0^\infty g(r\omega) r^{d-1} dr \right) d\sigma(\omega).$$

Zbog neparnosti od Ω za svaku $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ možemo pisati

$$\begin{aligned} (T_\varepsilon f)(x) &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} f(x - r\omega) \frac{\Omega(\omega)}{r^d} r^{d-1} dr \right) d\sigma(\omega) \\ &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} f(x - r\omega) \frac{dr}{r} \right) \Omega(\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} \left(\int_{\{r \in \mathbb{R} : |r| \geq \varepsilon\}} f(x - r\omega) \frac{dr}{r} \right) \Omega(\omega) d\sigma(\omega). \end{aligned}$$

Sada uzmimo vjerojatnosno-normaliziranu obostranu Haarovu mjeru ς na kompaktnoj grupi $\mathrm{SO}(d)$ rotacija prostora $\mathbb{R}^d$; vidjeti [Coh13] za definiciju i svojstva Haarove mjere. Za svaku integrabilnu funkciju $g: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$ imamo identitet

$$\frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\omega) d\sigma(\omega) = \int_{\mathrm{SO}(d)} g(Re) d\varsigma(R), \quad (6.23)$$

pri čemu je $e = (1, 0, \dots, 0)$ prvi vektor kanonske baze od $\mathbb{R}^d$. On slijedi iz računa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathrm{SO}(d)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(R\omega) d\sigma(\omega) d\varsigma(R) \\ &= \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathrm{SO}(d)} g(RR_\omega e) d\varsigma(R) d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathrm{SO}(d)} g(Re) d\varsigma(R) d\sigma(\omega) \\ &= \int_{\mathrm{SO}(d)} g(Re) d\varsigma(R), \end{aligned}$$

gdje je $R_\omega \in \mathrm{SO}(d)$ neka rotacija za koju je $R_\omega e = \omega$. U našem slučaju (6.23) daje

$$(T_\varepsilon f)(x) = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})}{2} \int_{\mathrm{SO}(d)} \left(\int_{\{r \in \mathbb{R} : |r| \geq \varepsilon\}} f(x - rRe) \frac{dr}{r} \right) \Omega(Re) d\varsigma(R).$$

Ako operator rotacije funkcija uvedemo formulom (3.10) i još definiramo operatore $H_\varepsilon^{(1)}$, $H_\star^{(1)}$ u smjeru e (tj. po prvoj varijabli) kao

$$(H_\varepsilon^{(1)} f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\{t \in \mathbb{R} : |t| \geq \varepsilon\}} f(x - te) \frac{dt}{t}, \quad (H_\star^{(1)} f)(x) := \sup_{\varepsilon \in (0, +\infty)} |(H_\varepsilon^{(1)} f)(x)|$$

za funkcije $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, tada radi $x - rRe = R(R^{-1}x - re)$ posljednju jednakost možemo pisati

$$(T_\varepsilon f)(x) = \frac{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\pi}{2} \int_{\mathrm{SO}(d)} (\mathbf{R}_R H_\varepsilon^{(1)} \mathbf{R}_{R^{-1}} f)(x) \Omega(Re) d\varsigma(R).$$

Zato je

$$(T_\star f)(x) \leq \frac{\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\pi}{2} \int_{\mathrm{SO}(d)} (\mathbf{R}_R H_\star^{(1)} \mathbf{R}_{R^{-1}} f)(x) |\Omega(Re)| d\varsigma(R)$$

pa preostaje primijetiti

$$\|H_\star^{(1)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)} = \|H_\star\|_{L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})} < +\infty.$$

6.5. Steinov maksimalni princip

U odjeljku 4.5 smo spominjali problem konvergencije Fourierovih parcijalnih integrala (4.20). Teorem 4.16 je za svaku $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ dao konvergenciju $\lim_{R \rightarrow +\infty} S_R f = f$ po L^p -normi, ali legitimno je pitati se vrijedi li ista konvergencija g.s. Sasvim analogan (čak ekvivalentan) problem je konvergencija g.s. niza parcijalnih suma Fourierovog reda,

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}; \quad x \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-2\pi i k t} dt,$$

funkcije $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$ na jednodimenzionalnom torusu $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv [0, 1]$. Kako je opet očigledna konvergencija na gustom potprostoru, iz općenitog teorema 1.6 (tj. zadatka 1.7(b)) znamo da je još jedino potrebno pokazati slabu L^p ocjenu za maksimalni operator

$$(S_* f)(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |(S_n f)(x)| = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \right|; \quad x \in \mathbb{T}.$$

Ipak, taj problem se ispostavio iznimno težak i riješili su ga Carleson [Car66] i Hunt⁹ [Hun67] više desetaka godina nakon što je Luzin¹⁰ postavio slutnju o g.s. konvergenciji.

S druge strane, još prije toga je Stein [Ste61] primijetio kako je za mnoga takva pitanja konvergencije g.s. ne samo dovoljno već i nužno da vrijedi slaba ocjena za maksimalni operator. Formulacija Steinovog principa koju ćemo navesti nije najopćenitija moguća, ali je prikladna upravo za primjenu na Fourierove redove. Primijetimo da operatori S_n komutiraju s translacijama T_c :

$$(S_n T_c f)(x) = \sum_{k=-n}^n (T_c f)(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{-2\pi i k c} e^{2\pi i k x} = (T_c S_n f)(x).$$

Teorem 6.22. (Steinov maksimalni princip [Ste61]) *Neka je $p \in [1, 2]$ i neka su $T_n: L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^p(\mathbb{T})$; $n \in \mathbb{N}$ ograničeni linearni operatori koji komutiraju s translacijama. Ako za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{T})$ za g.s. $x \in \mathbb{T}$ postoji limes $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(x) \in \mathbb{C}$, tada vrijedi ocjena*

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n f| \right\|_{L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{T})} \lesssim_{(T_n), p} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \quad \text{za svaku } f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Dokaz teorema 6.22 će biti dvostruka primjena tzv. vjerojatnosne metode, tj. konstrukcije determinističkih objekata slučajnim odabirom. Najveći promotor vjerojatnosne metode bio je Erdős¹¹, a odlična i opsežna knjiga o njoj je [AS08].

Najprije trebamo dvije pomoćne tvrdnje.

⁹Richard Allen Hunt (1937–2009), američki matematičar.

¹⁰Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883–1950), ruski matematičar.

¹¹Paul Erdős (1913–1996), mađarski matematičar.

Lema 6.23. (Calderón-Steinova lema pokrivanja [Ste61]) *Neka je $(E_n)_{n=1}^\infty$ niz Borelovih podskupova od $\mathbb{T}$ sa svojstvom $\sum_{n=1}^\infty |E_n| = +\infty$. Tada postoji niz $(t_n)_{n=1}^\infty$ u $\mathbb{T}$ takav da skup*

$$\limsup_n (E_n + t_n) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty (E_n + t_n)$$

ima mjeru jednaku 1, tj. da se gotovo svaka točka iz $\mathbb{T}$ nalazi u beskonačno mnogo skupova $E_n + t_n$.

Dokaz leme 6.23. Neka je $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s uniformnom razdiobom na $\mathbb{T}$. Dakle, za vjerojatnosni prostor možemo uzeti $\Omega = \mathbb{T}^\mathbb{N}$, na njemu promatrati beskonačni produkt Borelovih σ -algebri i beskonačni produkt (Lebesgueovih) mjera na $\mathbb{T}$ te za slučajne varijable uzeti koordinatne projekcije. Ipak, nije u duhu vjerojatnosti stavljati vjerojatnosni prostor u prvi plan.

Za prirodne brojeve $k \leq l$ računamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \bigcap_{n=k}^l (E_n^c + \tau_n) \right| &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{\bigcap_{n=k}^l (E_n^c + \tau_n)}(x) dx = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^l \mathbb{1}_{E_n^c + \tau_n}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E} \prod_{n=k}^l \mathbb{1}_{x - E_n^c}(\tau_n) dx = (\text{nezavisnost}) = \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^l \mathbb{E} \mathbb{1}_{x - E_n^c}(\tau_n) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^l \mathbb{P}(\tau_n \in x - E_n^c) dx = \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^l |x - E_n^c| dx = \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^l |E_n^c| dx \\ &= \prod_{n=k}^l |E_n^c| = \prod_{n=k}^l (1 - |E_n|) \leq \prod_{n=k}^l e^{-|E_n|} = e^{-\sum_{n=k}^l |E_n|}. \end{aligned}$$

Prema Fatouovoj lemi radi pretpostavke $\sum_{n=1}^\infty |E_n| = +\infty$ sada slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \bigcap_{n=k}^\infty (E_n^c + \tau_n) \right| &= \mathbb{E} \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{n=k}^l (E_n^c + \tau_n) \right| \right) \\ &\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \bigcap_{n=k}^l (E_n^c + \tau_n) \right| = \lim_{l \rightarrow \infty} e^{-\sum_{n=k}^l |E_n|} = 0, \end{aligned}$$

a potom zbog još jedne primjene Fatouove leme i

$$\mathbb{E} \left| \left(\limsup_n (E_n + \tau_n) \right)^c \right| = \mathbb{E} \left| \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty (E_n^c + \tau_n) \right| = 0,$$

tj.

$$\mathbb{E} \left| \limsup_n (E_n + \tau_n) \right| = 1.$$

Dakle, za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi

$$\left| \limsup_n (E_n + \tau_n) \right| = 1$$

pa naprosto uzmemo $t_n := \tau_n(\omega)$; $n \in \mathbb{N}$ za bilo koji takav ω .

Upućeni čitatelj će primijetiti da je dio navedenog dokaza zapravo dokaz tzv. *druge Borel-Cantellijeve*¹² leme. $\square$

U daljnjem je $(\epsilon_m)_{m=1}^\infty$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s razdiobom $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Očekivanje će se uvijek podrazumijevati obzirom na vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem su one konstruirane.

Lema 6.24.

- (a) Za svaki događaj A i svaki broj $\alpha > 1$ postoji prirodni broj M takav da za svaki kvadratno sumabilni niz kompleksnih brojeva $(x_m)_{m=1}^\infty$ vrijedi

$$\alpha^{-1} \mathbb{P}(A) \sum_{m=M}^\infty |x_m|^2 \leq \int_A \left| \sum_{m=M}^\infty \epsilon_m x_m \right|^2 d\mathbb{P} \leq \alpha \mathbb{P}(A) \sum_{m=M}^\infty |x_m|^2.$$

- (b) Za svaki događaj A pozitivne vjerojatnosti postoje $M \in \mathbb{N}$ i konstanta $C \in [0, +\infty)$ takvi da za svaki kvadratno sumabilni niz kompleksnih brojeva $(x_m)_{m=1}^\infty$ vrijedi

$$\left(\sum_{m=M}^\infty |x_m|^2 \right)^{1/2} \leq C \left\| \sum_{m=1}^\infty \epsilon_m x_m \right\|_{L^\infty(A)}.$$

Prije dokaza leme napomenimo da zbog $\sum_{m=1}^\infty |x_m|^2 < +\infty$ red slučajnih varijabli $\sum_{m=1}^\infty \epsilon_m x_m$ zadovoljava uvjete Kolmogorovljevog teorema o tri reda (vidjeti [Sar02]) pa on konvergira g.s. Zato ima smisla L^∞ ocjena pod (b).

Dokaz leme 6.24. (a) Prije svega raspišimo:

$$\int_A \left| \sum_{m=M}^\infty \epsilon_m x_m \right|^2 d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A) \sum_{m=M}^\infty |x_m|^2 + 2 \sum_{\substack{m,n \\ M \leq m < n}} \operatorname{Re}(x_m \overline{x_n}) \int_\Omega \mathbb{1}_A \epsilon_m \epsilon_n d\mathbb{P}.$$

Drugi pribrojnik ocijenimo koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost sa

$$2 \underbrace{\left(\sum_{\substack{m,n \\ M \leq m < n}} |x_m x_n| \right)^{1/2}}_{\leq \sum_{m=M}^\infty |x_m|^2} \left(\sum_{\substack{m,n \\ M \leq m < n}} |\langle \mathbb{1}_A, \epsilon_m \epsilon_n \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Iz nezavisnosti slučajnih varijabli ϵ_m vrlo jednostavno slijedi činjenica da su produkti $\epsilon_m \epsilon_n$ međusobno ortogonalni za različite parove (m, n) takve da je $m < n$. Odavde dobivamo

$$\sum_{\substack{m,n \\ 1 \leq m < n}} |\langle \mathbb{1}_A, \epsilon_m \epsilon_n \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \|\mathbb{1}_A\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbb{P}(A) < +\infty,$$

¹²Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), talijanski matematičar.

pa je

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m,n \\ M \leq m < n}} |\langle \mathbb{1}_A, \epsilon_m \epsilon_n \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 = 0,$$

što znači da tražena tvrdnja vrijedi za dovoljno veliki $M \in \mathbb{N}$.

(b) Možemo iskoristiti dio (a) uz $\alpha = 1/2$ te staviti $C = \sqrt{2/\mathbb{P}(A)}$. $\square$

Sada konačno možemo dati dokaz samog teorema.

Dokaz teorema 6.22. Označimo $T_*f := \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n f|$ i pretpostavimo da ne vrijedi tražena ocjena. Za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ postoji funkcija $f_m \in L^p(\mathbb{T})$ za koju vrijedi

$$\|f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \sim \frac{1}{m^{3/2}} \quad \text{i} \quad \|T_*f_m\|_{L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{T})} > m^{1/p} \|f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

To znači da postoji $\alpha > 0$ takav da je

$$|\{T_*f_m > \alpha\}| > \alpha^{-p} m \|f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p.$$

Zbog homogenosti možemo pretpostaviti $\alpha = 1$, tj.

$$|\{T_*f_m > 1\}| > m \|f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p,$$

jer inače naprosto zamijenimo f_m sa f_m/α , a i dalje vrijedi

$$\|f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \sim_{p,\alpha} \frac{1}{m^{3/2}}.$$

Označimo li $E_m := \{T_*f_m > 1\} \subseteq \mathbb{T}$ imat ćemo

$$\sum_{m=1}^{\infty} |E_m| = +\infty.$$

Štoviše, uzmimo još $r_m := m^{1/4}$, tako da je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = +\infty \quad \text{i} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \|r_m f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p < +\infty.$$

Po lemi 6.23 postoji niz $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ u $\mathbb{T}$ takav da se gotovo svaka točka iz $\mathbb{T}$ nalazi u beskonačno mnogo skupova $E_m + t_m$. Fiksirajmo jedan takav niz kroz cijeli dokaz. Promotrimo “slučajne funkcije” definirane sa

$$F_M := \sum_{m=1}^M \epsilon_m r_m T_{t_m} f_m; \quad M \in \mathbb{N},$$

tj. preciznije, F_M su funkcije na $\mathbb{T} \times \Omega$:

$$F_M(x, \omega) := \sum_{m=1}^M \epsilon_m(\omega) r_m f_m(x - t_m).$$

Tvrdimo da za g.s. $\omega \in \Omega$ niz funkcija $(F_M(\cdot, \omega))_{M=1}^\infty$ konvergira u normi prostora $L^p(\mathbb{T})$. Promotrimo

$$(\mathbb{E} \|F_{M'} - F_M\|_{L^p(\mathbb{T})}^p)^{1/p}$$

za neke prirodne brojeve $M < M'$ i ocijenimo taj izraz koristeći Hinčinovu nejednakost za funkcije (korolar 4.23) i $1 \leq p \leq 2$ kao

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{m=M+1}^{M'} \epsilon_m r_m \mathbb{T}_{t_m} f_m \right\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \right)^{1/p} \sim_p \left\| \left(\sum_{m=M+1}^{M'} |r_m \mathbb{T}_{t_m} f_m|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \\ & \leq \left\| \left(\sum_{m=M+1}^{M'} |r_m \mathbb{T}_{t_m} f_m|^p \right)^{1/p} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\sum_{m=M+1}^{M'} \|r_m f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Vidimo da je $(F_M)_{M=1}^\infty$ Cauchyjev niz u prostoru $L^p(\mathbb{T} \times \Omega)$ pa on konvergira po njegovoj normi prema nekoj funkciji F . Zato postoji podniz $(F_{M_k})_{k=1}^\infty$ takav da za g.s. $\omega \in \Omega$ vrijedi $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{M_k}(\cdot, \omega) = F(\cdot, \omega)$ u prostoru $L^p(\mathbb{T})$. Dakle, za g.s. $\omega \in \Omega$ je dobro definirana funkcija

$$F(\cdot, \omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{M_k} \epsilon_m(\omega) r_m \mathbb{T}_{t_m} f_m \in L^p(\mathbb{T}).$$

Primjenom operatora T_n i korištenjem $T_n \mathbb{T}_{t_m} = \mathbb{T}_{t_m} T_n$ za g.s. $\omega \in \Omega$ dolazimo do funkcije

$$T_n F(\cdot, \omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{M_k} \epsilon_m(\omega) r_m \mathbb{T}_{t_m} T_n f_m \in L^p(\mathbb{T}).$$

Računamo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \sum_{m=1}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^p dx \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \|r_m T_n f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p \leq \|T_n\|_{L^p \rightarrow L^p}^p \sum_{m=1}^{\infty} \|r_m f_m\|_{L^p(\mathbb{T})}^p < +\infty \end{aligned}$$

pa za g.s. $x \in \mathbb{T}$ vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^p < +\infty$$

te zbog $p \leq 2$ pogotovo imamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^2 < +\infty. \quad (6.24)$$

Dakle, za g.s. $x \in \mathbb{T}$ red slučajnih varijabli

$$\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_m(\omega) r_m (T_n f_m)(x - t_m)$$

zadovoljava uvjete Kolmogorovljevog teorema o tri reda pa on konvergira za g.s. $\omega \in \Omega$.

Zbog pretpostavke teorema o konvergenciji g.s. posebno zaključujemo $(T_*F)(x, \omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |(T_n F)(x, \omega)| < +\infty$ za g.s. $x \in \mathbb{T} \times \Omega$. (Naime, svaki konvergentni niz kompleksnih brojeva je ograničen.) Zato postoje skup $A \subseteq \mathbb{T} \times \Omega$ pozitivne mjere i konstanta $D \in [0, +\infty)$ takvi da za svaki $(x, \omega) \in A$ vrijedi

$$(T_*F)(x, \omega) \leq D. \quad (6.25)$$

Posebno, postoji skup pozitivne mjere $B \subseteq \mathbb{T}$ takav da za svaki $x \in B$ događaj $A_x := \{\omega \in \Omega : (x, \omega) \in A\} \subseteq \Omega$ ima pozitivnu vjerojatnost. Zbog (6.24), (6.25) i leme 6.24(b) za svaki $x \in B$ dobivamo $C(x) \in [0, +\infty)$ i $M(x) \in \mathbb{N}$ takve da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left(\sum_{m=M(x)}^{\infty} |r_m(T_n f_m)(x - t_m)|^2 \right)^{1/2} \leq C(x)$$

te posebno

$$|r_m(T_n f_m)(x - t_m)| \leq C(x) \quad \text{za } m \geq M(x).$$

Uzimanjem supremuma po n na lijevoj strani dobivamo

$$r_m(T_* f_m)(x - t_m) \leq C(x) \quad \text{za } m \geq M(x).$$

S druge pak strane, po konstrukciji od $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ za gotovo svaki $x \in \mathbb{T}$ postoji strogo rastući niz indeksa $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ takav da se x nalazi u skupovima $E_{m_k} + t_{m_k}$ te tada imamo:

$$r_{m_k}(T_* f_{m_k})(x - t_{m_k}) > r_{m_k} \longrightarrow +\infty \quad \text{kada } k \rightarrow \infty,$$

što nas je konačno dovelo do kontradikcije. $\square$

Kao što smo već rekli, teorem 6.22 predstavlja parcijalni obrat teorema 1.6. U njegovom iskazu ne možemo zamijeniti $\mathbb{T}$ sa $\mathbb{R}$, vidjeti zadatak 1.6, ali u posebnom slučaju Fourierovih parcijalnih integrala princip ipak ostaje vrijediti. Za primjer “principa prijenosa” ocjena između $\mathbb{T}$ i $\mathbb{R}$ pogledajte zadatak 6.11.

* * *

Zadatak 6.9. Poanta ovog zadatka je na vrlo jednostavnom primjeru objasniti ideju konstrukcije pomoću slučajnih predznaka iz dokaza teorema 6.22.

(a) Pokažite da je za svaki $a \in [-\infty, +\infty]$ moguće naći koeficijente $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takve da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ konvergira prema broju a . Osim toga pokažite da je moguće odabrati koeficijente ε_n tako da taj red uopće nema sumu (tj. uopće ne konvergira).

(b) Neka je $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s razdiobom $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dokažite da red slučajnih varijabli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ gotovo sigurno konvergira u $\mathbb{R}$.

Napomena: Ovu tvrdnju možemo interpretirati kao sljedeću “igru”. Netko nam

je zadao red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pm 1}{n}$, pri čemu nam predznaci nisu vidljivi i traži od nas da odaberemo niz predznaka $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ tako da red $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\pm 1}{n}$ konvergira u $\mathbb{R}$. Nikakvim determinističkim putem ne možemo doći do izbora koji je sigurno dobar, ali obzirom da je gotovo svaki izbor dobar, bacanje novčića se čini kao razumna solucija.

- (c) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite da s pozitivnom vjerojatnosti red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ iz (b) dijela konvergira sa sumom u intervalu $\langle a, b \rangle$.

Zadatak 6.10. Neka su dani eksponenti p, q takvi da je $1 \leq q < p \leq 2$. Ako je $T: L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^q(\mathbb{T})$ ograničeni linearni operator koji komutira s translacijama, tada je T i slabo L^p ograničen. Preciznije, ako za neku konstantu C vrijedi ocjena

$$\|Tf\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

tada vrijedi i

$$\|Tf\|_{L^p_{\text{slabi}}(\mathbb{T})} \lesssim_{p,q} C\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Uputa: Postupajte slično kao u dokazu teorema 6.22.

Zadatak 6.11. Hilbertova transformacija na torusu $\mathbb{T}$ definirana je formulom

$$(\tilde{H}f)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) \operatorname{ctg}(\pi t) dt$$

za funkcije $f \in C^1(\mathbb{T})$. Ona se također proširuje do ograničenog operatora na $L^p(\mathbb{T})$ za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$, a dokaz te činjenice može slijediti iste korake kao i dokaz za Hilbertovu transformaciju H na $\mathbb{R}$. Umjesto toga dokažite direktno ekvivalentnost ocjena:

$$(1) \quad \|Hf\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$(2) \quad \|\tilde{H}f\|_{L^p(\mathbb{T})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Uputa: Za dokaz od (2) $\Rightarrow$ (1) najprije pridajte značenje Hilbertovoj transformaciji na kružnici radijusa $R > 0$, potom zaključite da je njena omeđenost direktna posljedica rezultata na $\mathbb{T}$ te konačno pustite $R \rightarrow +\infty$. Obratno, za dokaz od (1) $\Rightarrow$ (2) krenite od funkcije na $\mathbb{T}$, shvatite je kao 1-periodičnu funkciju na $\mathbb{R}$, potom je stavite na 0 izvan nekog intervala $[-R, R]$, iskoristite ocjenu na $\mathbb{R}$ te konačno pustite $R \rightarrow +\infty$ ocjenjujući grešku. Ovaj trik dobro radi za operatore koji su barem u nekom smislu invarijantni na dilatacije.

Poglavlje 7

Vremensko-frekvencijska analiza

Vremensko-frekvencijska analiza nastoji proučavati funkcije i sisteme funkcija tretirajući ih kao objekte koji istovremeno “egzistiraju” i u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni. Na taj način možemo ići s heuristikom čak toliko daleko da smatramo kako članovi sistema načelno “žive” samo u određenim lokaliziranim dijelovima tzv. fazne ravnine. Taj pogled nam može pomoći kod boljeg razumijevanja klasičnih sistema, poput već spomenutih valićnih, ali nam i omogućava da gradimo sisteme prikladne za dekompoziciju pojedinih operatora. Ukoliko želimo dokazati ocjene za neki operator koristeći odgovarajući funkcijski sistem, tada je razumno tražiti od sistema da poštuje iste grupe simetrija kao i sam operator. Taj je princip koristan sasvim općenito, ali je posebno relevantan za multilinearne integralne operatore, jer oni često posjeduju više strukturalnih simetrija nego linearni operatori.

U ovom poglavlju ćemo formalizirati i razjasniti tu vezu između kombinatorno i geometrijski netrivialnih vremensko-frekvencijskih konstrukcija i singularnih integralnih operatora. Posebno ćemo se baviti bilinearnom Hilbertovom transformacijom, spomenutom u odjeljku 5.6, ali obzirom da je originalni dokaz vrlo složen, dokazat ćemo samo omeđenost jednog pojednostavljenog operatora. To će nam ujedno biti i motivacija za uvođenje modela Fourierove analize u konačnim karakteristikama, što znači da ćemo realnom pravcu promijeniti grupovnu i topološku strukturu. Većina materijala ovog poglavlja je prilagođena iz autorovih zabilježki [Kov14] za doktorski mini-kolegij održan na Sveučilištu u Wrocławu.

7.1. Fazna ravnina

Uvest ćemo (rigorozno i heuristički) pojam fazne ravnine, poznate još i kao vremensko-frekvencijska ravnina. Radi jednostavnosti ćemo raditi isključivo s jednodimenzionalnim funkcijama.

Prisjetimo se svojstava Fourierove transformacije spomenutih u odjeljku 2.3, posebno činjenice da se ona jedinstveno proširuje do unitarnog operatora $\mathcal{F}$ na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Osim toga, prisjetimo se redom definicija operatora translacije, operatora

modulacije i operatora dilatacije iz poglavlja 3:

$$\begin{aligned} (T_c f)(x) &:= f(x - c), \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}, \\ (M_b f)(x) &:= e^{2\pi i b x} f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \\ (D_a f)(x) &:= |a|^{-1/2} f(a^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

U ovom poglavlju ćemo kratko pisati D_a umjesto $D_a^{(2)}$. Lemom 3.6 smo bili pokazali važne komutacijske relacije:

$$\mathcal{F}T_c = M_{-c}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}M_b = T_b\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}D_a = D_{a^{-1}}\mathcal{F}. \quad (7.1)$$

Možemo uvesti i nešto manje standardne *kvadratne modulacije*, kao operatore

$$(Q_r f)(x) := e^{\pi i r x^2} f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Svi spomenuti operatori su unitarni na $L^2(\mathbb{R})$ i očigledno je kako im izgledaju inverzi.

Fazna ravnina će biti naprosto Kartezijev produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pri čemu prvu koordinatu zamišljamo kao “vrijeme”, a drugu kao “frekvenciju”. Alternativna terminologija iz kvantne fizike bi bila da varijable nazivamo “pozicija” i “moment”. Ustvari, to su bilo koje dvije “međusobno dualne” varijable x i ξ (ili t i τ), što znači da funkcija f ovisi o prvoj (pa pišemo $f(x)$), a njena Fourierova transformacija $\hat{f}$ ovisi o drugoj (pa pišemo $\hat{f}(\xi)$). Želimo gledati na funkciju $f \in L^2(\mathbb{R})$ kao na objekt koji “živi” u faznoj ravnini te istovremeno odražava svojstva od f i $\hat{f}$.

Upućeni čitatelj će primijetiti kako bi ambijentni prostor radije trebao biti Heisenbergova¹ grupa, koja je skupovno $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uz grupovnu operaciju

$$(x_1, \xi_1, \theta_1) \boxplus (x_2, \xi_2, \theta_2) := (x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, \theta_1 + \theta_2 + x_1 \xi_2).$$

Mi namjerno zanemarujemo tu suptilnu razliku i ignoriramo (nebitnu) treću koordinatu, jer će nas više zanimati kombinatorni i geometrijski od algebarskih aspekata fazne ravnine. Štoviše, podskupove od $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ će biti lakše grafički vizualizirati.

7.2. Princip neodređenosti

Pošteno je odmah napomenuti kako rezultati ovoj odjeljka nisu strogo logički potrebni u ostatku poglavlja, ali zato motiviraju sve što slijedi.

Heisenbergove heurističke ideje o kvantnoj mehanici su matematički formalizirali Kennard², Weyl³ i Robertson⁴. Na taj način *princip neodređenosti* postaje generičko ime za bilo koji rezultat koji tvrdi da se φ i $\hat{\varphi}$ ne mogu istovremeno “dobro lokalizirati”, ponekad uz dodatne uvjete postavljene na funkciju φ . Slikovito rečeno, signal se ne može previše dobro lokalizirati i u vremenu i u frekvenciji, tj. postoji teorijska granica

¹Werner Karl Heisenberg (1901–1976), njemački fizičar.

²Earle Hesse Kennard (1885–1968), američki fizičar.

³Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955), njemački matematičar, fizičar i filozof.

⁴Howard Percy Robertson (1903–1961), američki matematičar i fizičar.

za svaku takvu lokalizaciju. Nekoliko rezultata dokazanih ili spomenutih u ovom odjeljku ili kasnije kroz poglavlje dat će rigorozne formulacije te tvrdnje.

Sasvim prirodno i rigorozno matematičko pitanje je: Postoji li netrivialna funkcija $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ za koju φ i $\hat{\varphi}$ iščezavaju izvan kompaktnih skupova? Kad bi takva funkcija φ postojala, mogli bismo je translatirati i modulirati i činila bi idealni “građevni blok” za generiranje savršeno lokaliziranih funkcijskih sistema. Ipak, pokazuje se da je odgovor na prethodno pitanje negativan.

Teorem 7.1. (Kvalitativni princip neodređenosti) *Ako je $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ takva da φ i $\hat{\varphi}$ imaju kompaktne nosače, tada mora biti $\varphi = 0$ g.s.*

Dokaz. Obzirom da je svaka L^2 funkcija s kompaktnim nosačem integrabilna, imamo $\varphi, \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ te možemo iskoristiti Fourierovu formulu inverzije (2.33). Kako je φ g.s. jednaka neprekidnoj funkciji ($\hat{\varphi}$), zapravo smijemo pretpostaviti da je već i sama funkcija φ neprekidna.

Definirajmo $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ formulom

$$F(\zeta) := \int_a^b \varphi(x) e^{-2\pi i x \zeta} dx,$$

gdje je $[a, b]$ interval koji sadrži nosače od φ i $\hat{\varphi}$. Očigledno je F neprekidna funkcija. Kako bismo pokazali da je F holomorfna, uzimamo proizvoljnu zatvorenu po dijelovima C^1 konturu C u kompleksnoj ravnini. Po Cauchyjevom integralnom teoremu i činjenici da je eksponencijalna funkcija holomorfna imamo $\oint_C e^{-2\pi i t \zeta} d\zeta = 0$. Zamjena integrala daje

$$\oint_C F(\zeta) d\zeta = \int_a^b \varphi(x) \left(\oint_C e^{-2\pi i x \zeta} d\zeta \right) dx = 0.$$

Po Morerinom⁵ teoremu F doista mora biti holomorna na cijelom $\mathbb{C}$, tj. F je cijela funkcija.

Prisjetimo se da $\hat{\varphi}$ iščezava na polupravcu $[b, +\infty)$, a kako za $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi $F(\xi + i0) = \hat{\varphi}(\xi)$, zapravo vidimo da F iščezava na polupravcu $[b, +\infty) \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$. Po teoremu jedinstvenosti za holomorfne funkcije F mora biti jednaka 0 na cijelom $\mathbb{C}$. Kako je njena restrikcija na realni pravac upravo $\hat{\varphi}$, netom smo pokazali da je $\hat{\varphi} \equiv 0$. Ponovnim korištenjem Fourierove formule inverzije slijedi $\varphi \equiv 0$. $\square$

Sljedeća razumna stvar je pokušati naći kvantitativnu granicu do koje se φ i $\hat{\varphi}$ mogu istovremeno lokalizirati.

Teorem 7.2. (Kvantitativni (Kennardov) princip neodređenosti) *Neka je $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Schwartzova funkcija, tj. C^∞ funkcija čije sve derivacije trnu brže od svakog polinoma, a pretpostavimo dodatno i $\|\varphi\|_{L^2} = 1$. Tada za svake $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\varphi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

⁵Giacinto Morera (1856–1909), talijanski inženjer i matematičar.

Dokaz. Promotrimo novu funkciju

$$\psi := M_{-\xi_0} T_{-x_0} \varphi, \quad \text{tj.} \quad \psi(z) = e^{-2\pi i z \xi_0} \varphi(z + x_0),$$

za koju (7.1) daje

$$\hat{\psi} = T_{-\xi_0} M_{x_0} \hat{\varphi}, \quad \text{tj.} \quad \hat{\psi}(\zeta) = e^{2\pi i x_0 (\zeta + \xi_0)} \hat{\varphi}(\zeta + \xi_0).$$

Supstitucijama $z = x - x_0$ i $\zeta = \xi - \xi_0$ željena nejednakost postaje

$$\left(\int_{\mathbb{R}} z^2 |\psi(z)|^2 dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta^2 |\hat{\psi}(\zeta)|^2 d\zeta \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Uvedimo dva operatora koji djeluju na Schwartzovim funkcijama:

- *operator pozicije* X , dan sa $(Xf)(x) := xf(x)$,
- *operator momenta* D , dan sa $(Df)(x) := \frac{1}{2\pi i} f'(x)$.

Njih izmjenjuje Fourierova transformacija:

$$(Df)^\wedge = X\hat{f}, \quad \text{tj.} \quad (Df)^\wedge(\xi) = \xi \hat{f}(\xi),$$

jer parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned} (Df)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi i} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi i} f(x) \left(\frac{d}{dx} e^{-2\pi i x \xi} \right) dx \\ &= \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Primijetimo da zbog Plancherelovog identiteta zapravo trebamo pokazati

$$\|X\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|D\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (7.2)$$

Vrijedi komutatorska jednakost

$$DX - XD = \frac{1}{2\pi i} I,$$

koja je samo koncizni način pisanja

$$2\pi i (DX - XD)f(x) = \frac{d}{dx}(xf(x)) - xf'(x) = f(x).$$

Nadalje, X and D su hermitski (samo-adjungirani), u smislu da vrijedi

$$\langle Xf, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, Xg \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{i} \quad \langle Df, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, Dg \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

za svake Schwartzove funkcije f i g . Raspišimo nenegativnu kvadratnu veličinu

$$\|(\alpha X + iD)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Dobiva se:

$$\begin{aligned} \|(\alpha X + iD)\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \alpha^2 \langle X\psi, X\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \alpha i \langle \psi, (DX - XD)\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle D\psi, D\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \alpha^2 \|X\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{\alpha}{2\pi} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|D\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Obzirom da je ta kvadratna funkcija po α uvijek nenegativna, njena diskriminanta mora biti manja ili jednaka 0 pa konačno dobivamo

$$\frac{1}{4\pi^2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^4 - 4\|X\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|D\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 0,$$

što se lako transformira u (7.2). □

Primijetimo da je uvjet $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ moguće preformulirati

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = 1$$

pa su $|\varphi|^2$ i $|\hat{\varphi}|^2$ gustoće dviju apsolutno neprekidnih vjerojatnosnih razdioba. Teorem 7.2 daje najbolju ocjenu kada je

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}} x |\varphi(x)|^2 dx, \quad \xi_0 = \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi,$$

tj. x_0 i ξ_0 su očekivanja tih razdioba, dok sam teorem daje donju ogradu za produkt njihovih varijanci:

$$\text{Var}(|\varphi|^2) \text{Var}(|\hat{\varphi}|^2) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Ideja neodređenosti sveprisutna je u mnogim temama iz matematičke analize. Pregled nekoliko varijanti principa neodređenosti (za individualne funkcije i za sisteme funkcija) dan je u diplomskom radu [Rad14].

* * *

Zadatak 7.1. Dokažite da nejednakost u teoremu 7.2 postaje jednakost ako i samo ako je φ modulirana Gaussova funkcija oblika

$$\varphi(x) = c \sqrt[4]{2r} e^{-\pi r(x-x_0)^2} e^{2\pi i x \xi_0}$$

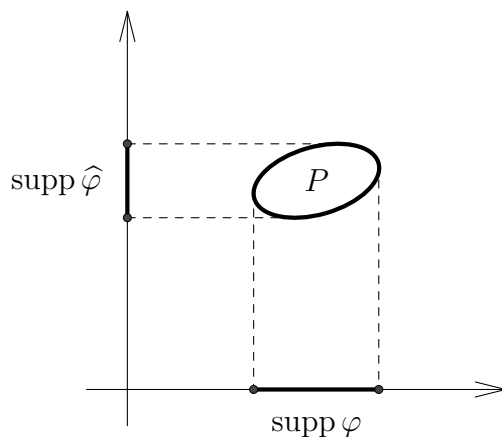
za neke parametre $r > 0$ i $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$.

Uputa: Za funkciju φ za koju se postiže jednakost funkcija ψ iz gornjeg dokaza mora zadovoljavati običnu diferencijalnu jednadžbu $\alpha x \psi(x) + \frac{1}{2\pi} \psi'(x) = 0$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadatak 7.2. Dokažite *operatorsku (Robertsonovu) verziju principa neodređenosti*: Ako su A i B dva (moguće neograničena) hermitska operatora na Hilbertovom prostoru H , tada za svake $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i za svaki v iz domena od AB i BA vrijedi

$$\|(A - \alpha I)v\|_H \|(B - \beta I)v\|_H \geq \frac{1}{2} |\langle (AB - BA)v, v \rangle_H|.$$

Napomena: Primijetite da ova tvrdnja implicira teorem 7.2.



Slika 7.1: Projekcije faznog portreta.

Zadatak 7.3. Dokažite entropijsku (Hirschmanovu) verziju principa neodređenosti:

$$-\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \log |\varphi(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \log |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \geq \log \frac{e}{2}.$$

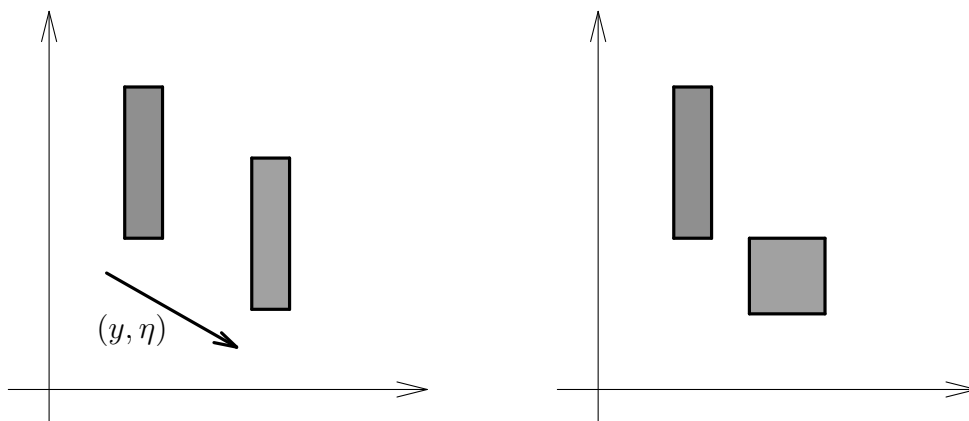
Uputa: Koristite Babenko-Becknerovu nejednakost (2.32).

Napomena: Dva člana na lijevoj strani su zapravo entropije vjerojatnosnih razdioba s gustoćama $|\varphi|^2$ i $|\hat{\varphi}|^2$ redom. Može se pokazati da ovaj rezultat također implicira teorem 7.2.

7.3. Fazni portret

Zamislamo da imamo omeđeni skup $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ u faznoj ravnini, gdje je koncentrirana neka pažljivo odabrana ne-nul funkcija $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Premda još nemamo jasnu ideju što bi bio taj skup, nazovimo ga *fazni portret* ili *fazni nosač* ili *vremensko-frekvencijski nosač* od φ . Idealno bi bilo kada bismo projiciranjem P na horizontalnu os dobili nosač od φ , a projiciranjem P na vertikalnu os nosač od $\hat{\varphi}$, kao što je prikazano na slici 7.1. Ipak, teorem 7.1 onemogućava postojanje netrivialne funkcije φ s tim svojstvom pa radije nastavimo s heurističkim svojstvom da su φ and $\hat{\varphi}$ samo “pretežno” koncentrirane (štogod to značilo) na ortogonalnim projekcijama od P na koordinatne osi.

Ako takav fazni nosač postoji, tada se pomoću njega može ilustrirati djelovanje operatora T_c , M_b i D_a na funkciju φ . Sasvim je očekivano da se fazni portret od $T_y \varphi$ dobiva horizontalnom translacijom P udesno za y , a koristeći (7.1) vidimo da se fazni portret od $M_\eta \varphi$ dobiva vertikalnom translacijom P prema gore za η . Dakle, kompozicija $S_{(y,\eta)} := M_\eta T_y$ zaslužuje biti nazvana *vremensko-frekvencijski pomak* za vektor (y, η) i njeno djelovanje na fazni portret je ilustrirano na lijevom dijelu slike 7.2. S druge strane, fazni portret od $D_r \varphi$ za neki $r > 0$ se dobiva rastezanjem P horizontalno za faktor r i



Slika 7.2: Vremensko-frekvencijski pomak i dilatacija.

vertikalno za faktor r^{-1} , tj. primjenom geometrijske transformacije $(x, \xi) \mapsto (rx, r^{-1}\xi)$ na faznoj ravnini; pogledajte desni dio slike 7.2.

Dakle, možemo li konačno rigorozno definirati pojam faznog nosača? Odgovor je potvrđan i postoji čak nekoliko načina da to učinimo, ali ti pristupi nisu međusobno ekvivalentni. Niti jedan od tih načina ne zadovoljava baš sva željena svojstva do kojih bismo mogli doći naivnom heuristikom.

* * *

Metaplektička reprezentacija. Motivirani gornjim ilustracijama možemo odustati od pojma doslovnog vremensko-frekvencijskog nosača funkcije i radije promatrati neku klasu geometrijskih transformacija ravnine $\mathbb{R}^2$. Dakle, fazni portret ovdje skupovno nema nikakvo značenje, već samo uočavamo kako se mijenja kada mijenjamo funkciju φ . Preciznije imat ćemo korespondenciju između nekih afinih preslikavanja od $\mathbb{R}^2$ i nekih unitarnih operatora na Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$. To će nas dovesti do tzv. Weilove⁶ reprezentacije metaplektičke grupe $\text{Mp}_2(\mathbb{R})$.

Uzmimo afinu transformaciju $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ koja čuva površinu i orijentaciju, tj. $A(x, \xi) = L(x, \xi) + (y, \eta)$ za neku matricu $L \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, $y, \eta \in \mathbb{R}$. Moguće je definirati unitarni operator U_L na $L^2(\mathbb{R})$ takav da on zadovoljava jednakost

$$U_L S_{(a,b)} = c_{L,a,b} S_{L(a,b)} U_L$$

uz neku konstantu $c_{L,a,b} \in \mathbb{C}$ modula 1 za svaku točku fazne ravnine $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Riječima: ne vidimo odmah efekt djelovanja operatora na hipotetski vremensko-frekvencijski nosač od φ , nego radije uočavamo kako on “isprepliće” vremensko-frekvencijske pomake. Nakon toga je prirodno staviti

$$U_A := S_{(y,\eta)} U_L.$$

⁶André Weil (1906–1998), francuski matematičar.

Ova formulacija željenog svojstva od U_L i U_A je posuđena iz [HRT96].

Sama konstrukcija nije previše složena, jer je dovoljno definirati U_L na nekoliko transformacija koje generiraju cijelu grupu $SL(2, \mathbb{R})$. To možemo učiniti sljedećom tablicom.

L	U_L
horizontalno-vertikalno skaliranje $L(a, b) = (ra, r^{-1}b)$	dilatacija D_r
vertikalno "posmicanje" $L(a, b) = (a, b + ra)$	kvadratna modulacija Q_r
rotacija za $-\pi/2$ $L(a, b) = (b, -a)$	Fourierova transformacija $\mathcal{F}$

Pokažimo da je ta tablica doista ispravna.

Dokaz.

$$\begin{aligned}
 (D_r M_b T_a f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{r}} e^{2\pi i b x / r} f\left(\frac{x}{r} - a\right) = (M_{b/r} T_{ra} D_r f)(x) \\
 (Q_r M_b T_a f)(x) &= e^{\pi i (r x^2 + 2 b x)} f(x - a) = e^{\pi i (r(x-a)^2 + 2(b+ra)x - ra^2)} f(x - a) \\
 &= e^{-\pi i r a^2} (M_{b+ra} T_a Q_r f)(x) \\
 \mathcal{F} M_b T_a &= T_b \mathcal{F} T_a = T_b M_{-a} \mathcal{F} = e^{2\pi i a b} M_{-a} T_b \mathcal{F}
 \end{aligned}
 \quad \square$$

Lako je pokazati da već vertikalna posmicanja i rotacija za $\frac{\pi}{2}$ generiraju $SL(2, \mathbb{R})$; pogledajte zadatak 7.4. Stvari su nešto drugačije u višim dimenzijama, jer tamo treba promatrati transformacije koje čuvaju simplektičku formu, a ne volumen. Napomenimo da smo u ovoj konstrukciji ipak izostavili jedan detalj: nismo pokazali da različitim prikazima afine transformacije A pomoću generatora dobivamo iste operatore U_A , no i to je moguće učiniti; vidjeti [Fol89].

Rezimirajmo da je u ovom pristupu vremensko-frekvencijski nosač relativni, a ne apsolutni pojam. On nema smisla za jednu funkciju ili za familiju nepovezanih funkcija, nego samo za sistem generiran primjenom neke grupe unitarnih operatora na jednu fiksiranu funkciju.

* * *

Wignerova transformacija. Drugi pristup je da ne promatramo fazni portret kao skup, nego kao funkciju na vremensko-frekvencijskoj ravnini. Za $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiramo *Wignerovu transformaciju* od f kao dvodimenzionalnu funkciju

$$(Vf)(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t \xi} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{x}{2}\right)} dt.$$

Primijetimo da Vf ne mora biti nenegativna, osim ako ne pretpostavimo nešto dodatno za funkciju f . Lako je vidjeti da je Wignerova transformacija standardne L^2 -normalizirane Gaussove funkcije $\varphi(x) = 2^{1/4} e^{-\pi x^2}$ dvodimenzionalna Gaussova funkcija

$$(V\varphi)(x, \xi) = e^{-\frac{\pi}{2}(x^2 + \xi^2)}.$$

Sada bi se moglo izračunati $V\varphi$ kada je φ modulirana Gaussova funkcija te zaključiti da opet dobivamo dvodimenzionalne Gaussove funkcije do na nebitnu unimodularnu konstantu. Takve funkcije igraju važnu ulogu u teorijskoj fizici, ali Gaussove funkcije rijetko vode na zadovoljavajuće sisteme u svrhu dekompozicije operatora u harmonijskoj analizi.

Ukoliko se pak pomirimo s činjenicom da je fazni portret od φ neka kompleksna funkcija $V\varphi$ na $\mathbb{R}^2$, tada imamo sljedeći sasvim općeniti rezultat.

Propozicija 7.3. *Za svake $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ imamo $\langle Vf, Vg \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = |\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2$.*

Barem za modulirane Gaussove funkcije ovaj rezultat možemo interpretirati: funkcije f i g su “približno ortogonalne” ako i samo ako su Vf i Vg “približno ortogonalne”, tj. ako i samo ako su fazni portreti od f i g “dovoljno razmaknuti”.

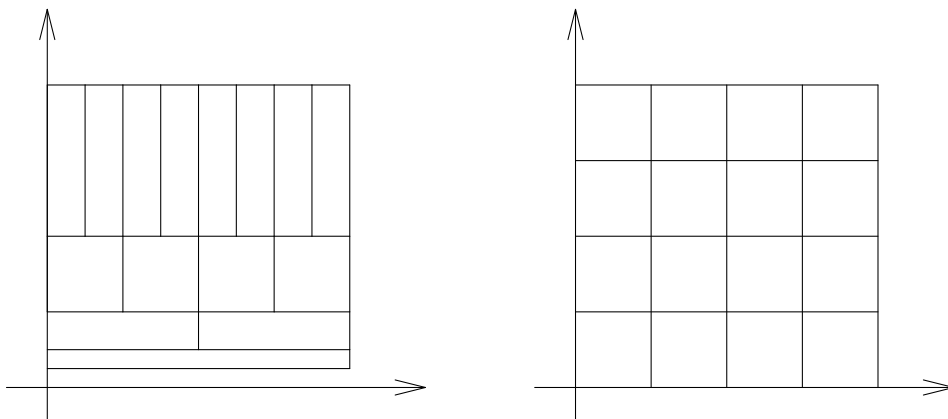
Dokaz. Uočimo da je $\xi \mapsto (Vf)(x, \xi)$ upravo inverzna Fourierova transformacija funkcije $t \mapsto f(t + \frac{x}{2})\overline{f(t - \frac{x}{2})}$ za svaki fiksirani x . Primjena Plancherelove formule daje

$$\begin{aligned} \langle Vf, Vg \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}} \langle (Vf)(x, \cdot), (Vg)(x, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t + \frac{x}{2}) \overline{f(t - \frac{x}{2})} g(t + \frac{x}{2}) \overline{g(t - \frac{x}{2})} dt dx \\ &\quad \left[u = t + \frac{x}{2}, \quad v = t - \frac{x}{2}, \quad dudv = dt dx \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(u) \overline{f(v)} g(u) \overline{g(v)} dudv = |\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Zaključujemo kako je pri ovom pristupu fazni portret sasvim određeni pojam. On ne mora biti lokaliziran na nekom skupu, već može biti prilično općenita funkcija koja se prostire faznom ravninom i možda je samo načelno koncentrirana u nekom njenom dijelu (kao što je slučaj kod moduliranih Gaussovih funkcija). Za više detalja upućujemo na knjigu [Fol89], a čitatelju preporučujemo i skriptu [Tao01].

* * *

Praktični kompromis za sisteme funkcija. Kao što smo već bili rekli, obično funkciju φ biramo pažljivo te pomoću nje generiramo neki funkcijski sistem. Zato je najpraktičnije naprosto proglasiti neki razumni podskup od $\mathbb{R}^2$ za fazni nosač od φ (npr. vođeni ocjenama “repova” od φ i $\hat{\varphi}$) te potom kao u prvom pristupu indeksirati cijeli funkcijski sistem slikama tog faznog nosača po odgovarajućim ravninskim transformacijama. Dakle, vodimo se istom heuristikom kao i ranije, ali odgađamo opravdanje za konkretnu primjenu, poput dekompozicije danog operatora obzirom na taj funkcijski sistem. U mnogim situacijama će ti fazni portreti biti pravokutnici i zovemo ih “pločice” te nam ostaje intuicija da su stranice pravokutnika pridruženog φ “približni nosači” od φ i $\hat{\varphi}$. Kada doista trebamo učiniti rigoroznim ono što smo geometrijski uočili, tada najčešće formuliramo neku tvrdnju o “približnoj ortogonalnosti” familije funkcija koja odgovara kolekciji disjunktnih pravokutnika.



Slika 7.3: Popločavanja koja odgovaraju valičnim i Gaborovim sistemima.

Odličan primjer smo imali već u poglavlju 5, kada samo koristili valični sistem u dekompoziciji Calderón-Zygmundovih operatora. Prisjetimo se da je u jednoj dimenziji takav sistem oblika $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ i dobiven je iz neke $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tako da stavimo

$$\psi_{j,k}(x) := (D_{2^{-j}}T_k\psi)(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx - k).$$

Kada $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ čini ortonormiranu bazu od $L^2(\mathbb{R})$, kažemo da je ψ ortonormirani valič. Najjednostavniji primjer je bio Haarov valič dan sa $\psi = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)}$. Već smo bili rekli da je Daubechies [Dau92] konstruirala ortonormirane valiće s kompaktnim nosačem klase C^k za po volji veliki $k \in \mathbb{N}$. Svojevrsni kvalitativni princip neodređenosti za valiće govori da ne postoji ortonormirani valič s kompaktnim nosačem koji bi bio klase C^∞ ; vidjeti [HW96].

Proglasimo jedinični kvadrat $[0, 1) \times [1, 2)$ faznim nosačem funkcije ψ , što se može donekle motivirati činjenicom da za valiće kao u odjeljku 5.2 vrijedi $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$ pa nosač od $\hat{\psi}$ ne sadrži 0. Kao u prvom pristupu će fazni nosač funkcije $\psi_{j,k} = D_{2^{-j}}T_k\psi$ biti pravokutnik $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \times [2^j, 2^{j+1})$. Uočimo da kolekcija tih pravokutnika (kada j i k prolaze svim cijelim brojevima) particionira gornju poluravninu $\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle$; pogledajte lijevi dio slike 7.3.

Krenemo li od $g \in L^2(\mathbb{R})$, nešto drukčiji sistem $(g_{k,n})_{k,n \in \mathbb{Z}}$ se dobiva djelujemo li na g translacijama i modulacijama, tj. stavimo li

$$g_{k,n}(x) := (M_nT_kg)(x) = e^{2\pi i n x}g(x - k).$$

Prethodno usvojenim rječnikom taj sistem je generiran cjelobrojnim vremensko-frekvencijskim pomacima i zovemo ga *Gaborov⁷ sistem*. Primijetimo usput da M_n i T_k komutiraju kada su $k, n \in \mathbb{Z}$ pa tako također imamo i $g_{k,n} = T_kM_ng$. Bilo bi odlično naći dobro “fazno lokaliziranu” funkciju g takvu da $(g_{k,n})_{k,n \in \mathbb{Z}}$ čini ortonormiranu bazu od $L^2(\mathbb{R})$. Najjednostavniji primjer je $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$, za čiju provjeru treba jedino primijetiti da

⁷Dennis Gabor (1900–1979), mađarsko-britanski inženjer i fizičar.

eksponencijali s cjelobrojnim frekvencijama čine ortonormiranu bazu od $L^2([0, 1])$. Ipak, $\hat{1}_{[0,1]}$ nije odviše lokalizirana funkcija, u smislu da čak nije niti apsolutno integrabilna. Postoji dodatak kvantitativnom principu neodređenosti, nazvan *Balian⁸-Low⁹ teorem*, koji kaže da ako je g netrivialna funkcija za koju je $(g_{k,n})_{k,n \in \mathbb{Z}}$ ortonormirana baza od $L^2(\mathbb{R})$, tada mora biti

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)|^2 dx = +\infty \quad \text{ili} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = +\infty.$$

Ovog puta za fazni nosač od g uzimamo naprosto kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, tako da onda $g_{k,n} = M_n T_k g$ ima fazni nosač $[k, k+1] \times [n, n+1]$. Kolekcija tih kvadrata indeksiranih po $k, n \in \mathbb{Z}$ čini particiju cijele ravnine $\mathbb{R}^2$; pogledajte desni dio slike 7.3.

Ovakvi sistemi postaju mnogo složeniji kada dozvoljavamo da k i n budu općeniti realni brojevi. Naprimjer, još uvijek je otvoreni problem je li za svaku netrivialnu $g \in L^2(\mathbb{R})$ i za svakih konačno mnogo točaka (a_i, b_i) ; $i = 1, 2, \dots, N$ sistem

$$S_{(a_i, b_i)} g; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

linearno nezavisan; vidjeti [HRT96]. U međuvremenu su pokazani mnogi posebni slučajevi te slutnje, ali je ona ostala otvorena čak i za Schwartzove funkcije g te čak i za četiri proizvoljne točke.

Valni paketi su pak sistemi generirani jednom funkcijom $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, ali korištenjem svih triju spomenutih grupa operatora: translacija, modulacija i dilatacija. Tako naprimjer možemo promatrati $(\varphi_{j,k,n})_{j,k,n \in \mathbb{Z}}$, pri čemu je

$$\varphi_{j,k,n} := D_{2^{-j}} T_k M_n \varphi.$$

U ovom sistemu ima previše funkcija da bi on činio ortonormiranu bazu pa je u primjenama potrebno organizirati funkcije u podkolekcije “približno ortogonalnih” funkcija. Ukoliko je $[0, 1] \times [0, 1]$ vremensko-frekvencijski nosač od φ , tada je vremensko-frekvencijski nosač od $\varphi_{j,k,n}$ upravo pločica (tj. pravokutnik)

$$[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)] \times [2^j n, 2^j(n+1)].$$

Spomenute približno ortogonalne podkolekcije odgovaraju familijama međusobno disjunktih pločica. Odlična knjiga o tehnici valnih paketa u teorijskoj harmonijskoj analizi je [Thi06]. Vratit ćemo im se kasnije u ovom poglavlju.

Jedna ideja koja je nedostajala starijoj literaturi je upravo kombinatorno-geometrijska struktura funkcijskih sistema, koja proizlazi iz geometrijskih odnosa faznih nosača funkcija, a lakše ju je diskutirati ako fazne nosače zamišljamo kao jednostavne skupove u ravnini. Vremensko-frekvencijska analiza je procvjetala kada je na gornji skup pločica uveden i parcijalni uređaj, o kojem će još biti riječi. Ta ideja potječe još od Feffermanovog rada [Fef73], a razvijena je u seriji radova Laceyja i Thielea [LT97], [LT99], [LT00]. U odjeljku 7.7 ćemo čitatelju dočarati tu moćnu metodu na nešto pojednostavljenom modelu.

⁸Roger Balian (1933), francusko-armenski fizičar.

⁹Francis Eugene Low (1921–2007), američki fizičar.

Spomenute tri vrste funkcijskih sistema su tijekom godina postale standardne i često se koriste. Postoje još mnogi drugi sistemi motivirani pretežno potrebama primijenjene matematike (curvelets, ridgelets, edgelets, eyelets, composite dilation wavelets, chirplets) ili pak varijante spomenutih (valni paketi s polinomijalnim fazama). Neki radovi poput [LL10] i [Lie09] im nalaze upotrebu i kod čisto teorijskih problema.

* * *

Modeli u konačnim karakteristikama. Četvrta alternativa je promatrati neki pojednostavljeni model Fourierove analize u kojem ne vrijedi kvalitativni princip neodređenosti pa nas ništa ne priječi da imamo savršenu vremensko-frekvencijsku lokalizaciju. Jedan primjer takvog modela će biti predstavljen u odjeljku 7.6. Ipak, čak i tada ćemo se morati ograničiti samo na sistem valnih paketa kod definiranja faznog nosača.

Obzirom da su neki dokazi koji koriste vremensko-frekvencijsku analizu, poput omeđenosti bilinearne Hilbertove transformacije, iznimno tehnički složeni, može biti vrlo korisno razjasniti osnovne ideje u takvom nekom pojednostavljenom modelu. Mi ćemo upravo to učiniti u odjeljku 7.7. Potom je razumno pokušati imitirati dokaz i u klasičnom slučaju, vodeći računa o nešto suptilnijim detaljima. Ovaj metodološki trik je uvelike inaugurirao Thiele u [Thi95] i popularizirao ga je zajedno s brojnim kolaboratorima.

* * *

Zadatak 7.4. Pokažite da matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{bmatrix}; r \in \mathbb{R}$ i $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ generiraju grupu $SL(2, \mathbb{R})$.

Zadatak 7.5.

- (a) Izračunajte $\mathcal{F}^2\varphi$, $\mathcal{F}^3\varphi$ i $\mathcal{F}^4\varphi$ u terminima funkcije φ . Usporedite dobiveni rezultat s interpretacijom Fourierove transformacije kao rotacije faznog nosača za kut $-\pi/2$ u vremensko-frekvencijskoj ravnini.
- (b) Ako je $A_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotacija oko ishodišta za kut $0 < \theta < \pi/2$, nađite eksplicitnu formulu za pripadni unitarni operator U_{A_θ} na nekom gustom potprostoru od $L^2(\mathbb{R})$. Taj operator se naziva *razlomljena Fourierova transformacija* i označava $\mathcal{F}^\theta$.

7.4. Valićna karakterizacija L^p normi

Ovdje ćemo iskoristiti priliku kako bismo ispitali ulogu ortonormirane valićne baze u prostorima $L^p(\mathbb{R})$ za proizvoljni $1 < p < \infty$. Dakle, pretpostavimo da je ψ jednodimenzionalni ortonormirani valić, što znači da valićni sistem $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ čini ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L^2(\mathbb{R})$. Na temelju diskusije vremensko frekvencijskog nosača iz prethodnog odjeljka zaključujemo da je funkcije $\psi_{j,k}$, kao i Haarove funkcije, prirodno indeksirati dijadskim intervalima $I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ pa tako dolazimo do valićnog sistema $(\psi_I)_{I \in \mathcal{D}}$ takvog da je

$$\psi_I(x) = |I|^{-1/2} \psi(|I|^{-1}(x - l_I)),$$

pri čemu je l_I lijevi kraj intervala $I \in \mathcal{D}$. Iz tehničkih razloga pretpostavimo da je $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ i da zadovoljava

$$|\psi(x)| + |\psi'(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-3}, \quad (7.3)$$

što je slabija pretpostavka od neprekidne diferencijabilnosti i kompaktnosti nosača iz poglavlja 5.

Prvo prirodno pitanje je kako iz magnitude valićnih koeficijenata $|\langle f, \psi_I \rangle_{L^2}|$ procijeniti L^p normu funkcije f . U slučaju $p = 2$ odgovor trivijalno daje Parsevalov¹⁰ identitet:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_I \rangle_{L^2}|^2$$

pa slutimo da bi odgovarajuća karakterizacija mogla postojati i za $p \neq 2$. Drugo prirodno pitanje je kako okarakterizirati kompleksne koeficijente $(c_I)_{I \in \mathcal{D}}$ takve da red $\sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \psi_I$ konvergira u prostoru $L^p(\mathbb{R})$ i to neovisno o poretku sumacije.

Neka je $\mathcal{I}$ beskonačni prebrojivi skup indeksâ te neka je $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ sistem vektora iz nekog Banachovog prostora X . Kažemo da red $\sum_{i \in \mathcal{I}} f_i$ konvergira bezuvjetno u X prema $f \in X$ ako za svaku bijekciju $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{I}$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)} = f$ s konvergencom po normi prostora X . Nadalje, kažemo da je sistem vektora $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ iz X bezuvjetna baza prostora X ako za svaki vektor $f \in X$ postoji jedinstveni sistem skalara $(c_i)_{i \in \mathcal{I}}$ takav da $\sum_{i \in \mathcal{I}} c_i e_i$ konvergira bezuvjetno prema f . Pokazuje se (vidjeti [Hei11] ili [HW96]) da je sistem ne-nul vektora $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ bezuvjetna baza od X ako i samo ako im je linearna ljuska gusta u X i vrijedi nejednakost

$$\left\| \sum_{i \in F} \lambda_i c_i f_i \right\|_X \lesssim \left\| \sum_{i \in F} c_i f_i \right\|_X$$

s univerzalnom implicitnom konstantom (ovisnom samo o prostoru i sistemu) za svaki konačni skup $F \subset \mathcal{I}$, svake skalare $(c_i)_{i \in F}$ i svake skalare $(\lambda_i)_{i \in F}$ modula najviše 1. Nadalje, u tom slučaju su linearni funkcionali $f \mapsto c_i$ ograničeni i nazivamo ih *koeficijentnim funkcionalima*.

Teorem 7.4. *Gore opisani valićni sistem $(\psi_I)_{I \in \mathcal{D}}$ je bezuvjetna baza prostora $L^p(\mathbb{R})$ za svaki $1 < p < \infty$, a koeficijentni funkcionali su dani sa $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_I(x) dx$. Nadalje, za $f \in L^p(\mathbb{R})$ imamo karakterizaciju L^p norme:*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim_p \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_I \rangle_{L^2}|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (7.4)$$

Konačno, za indeksiranu familiju skalara $(c_I)_{I \in \mathcal{D}}$ vrijedi:

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \psi_I \text{ konvergira bezuvjetno u } L^p(\mathbb{R}) \iff \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |c_I|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty. \quad (7.5)$$

¹⁰Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836), francuski matematičar.

Dokaz. Za svaki izbor skalara $\lambda = (\lambda_I)_{I \in \mathcal{D}}$ modula najviše 1 definiramo ograničeni linearni operator

$$T_\lambda: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

djelovanjem na ortonormiranoj bazi $(\psi_I)_{I \in \mathcal{D}}$ danim sa

$$T_\lambda: \psi_I \mapsto \lambda_I \psi_I.$$

Ako je štoviše $(\lambda_I)_{I \in \mathcal{D}} \in \{-1, 1\}^{\mathcal{D}}$, tada su T_λ čak unitarni operatori. Naime, ograničenost je direktna posljedica ortonormiranosti baze, a u posljednjem slučaju je očigledna izometričnost, dok surjektivnost slijedi iz involutornosti $T_\lambda^2 = I_{L^2(\mathbb{R})}$. Možemo pisati

$$(T_\lambda f)(x) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \lambda_I \langle f, \psi_I \rangle_{L^2} \psi_I(x) = \int_{\mathbb{R}} K_\lambda(x, y) f(y) dy,$$

pri čemu je

$$K_\lambda(x, y) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \lambda_I \psi_I(x) \overline{\psi_I(y)} = \sum_{\substack{j, k \in \mathbb{Z} \\ I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}} \lambda_I 2^j \psi(2^j x - k) \overline{\psi(2^j y - k)}.$$

Tvrdimo da su T_λ Calderón-Zygmundovi operatori s konstantama uniformnim po λ , a za to trebamo provjeriti da jezgre K_λ zadovoljavaju standardne ocjene uniformno po λ . Najprije radi (7.3) imamo

$$\begin{aligned} |K_\lambda(x, y)| &\leq \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} 2^j (1 + |2^j x - k|)^{-3} (1 + |2^j y - k|)^{-3} \\ &\lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j (1 + 2^j |x - y|)^{-3} \lesssim |x - y|^{-1}, \end{aligned}$$

a slično i derivaciju

$$\frac{\partial}{\partial x} K_\lambda(x, y) = \sum_{\substack{j, k \in \mathbb{Z} \\ I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}} \lambda_I 2^{2j} \psi'(2^j x - k) \overline{\psi(2^j y - k)}$$

ocjenjujemo kao

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} K_\lambda(x, y) \right| &\leq \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} 2^{2j} (1 + |2^j x - k|)^{-3} (1 + |2^j y - k|)^{-3} \\ &\lesssim \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2j} (1 + 2^j |x - y|)^{-3} \lesssim |x - y|^{-2}. \end{aligned}$$

Iz dijela (b) teorema 4.5 zato slijedi

$$\|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (7.6)$$

za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Jedinostveno neprekidno proširenje od T_λ na prostor $L^p(\mathbb{R})$ i dalje označavamo s T_λ te ocjena (7.6) ostaje vrijediti na cijelom tom prostoru.

Primjena (7.6) na funkciju $f = \sum_{I \in F} c_I \psi_I$ za konačni skup $F \subset \mathcal{D}$ i neki izbor skalara $(c_I)_{I \in F}$ daje

$$\left\| \sum_{I \in F} \lambda_I c_I \psi_I \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \left\| \sum_{I \in F} c_I \psi_I \right\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (7.7)$$

Nejednakost (7.7) implicira da $(\psi_I)_{I \in \mathcal{D}}$ čini bezuvjetnu bazu od $\text{Cl}(\text{span}(\{\psi_I : I \in \mathcal{D}\}))$, ali nam još preostaje vidjeti da je spomenuta linearna ljuska gusta u $L^p(\mathbb{R})$.

Ako za λ_I uzmemo baš $\pm$ predznake, tada iz (7.6) i involutornosti od T_λ zapravo slijedi

$$\|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (7.8)$$

Fiksirajmo sada funkciju oblika $f = \sum_{I \in F} c_I \psi_I$ za neki konačni skup $F \subset \mathcal{D}$ i neke skalare $(c_I)_{I \in F}$. Uzmimo nezavisne slučajne predznake $(\epsilon_I)_{I \in F}$ kao u odjeljku 4.7. Korištenjem (7.8) i Hinčinove nejednakosti za funkcije (korolar 4.23) dobivamo

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} &\sim_p \left(\mathbb{E} \|T_{(\epsilon_I)_{I \in \mathcal{D}}} f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{I \in F} \lambda_I c_I \psi_I \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\sim_p \left\| \left(\sum_{I \in F} |c_I|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

tj.

$$\left\| \sum_{I \in F} c_I \psi_I \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim_p \left\| \left(\sum_{I \in F} |c_I|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (7.9)$$

U idućem koraku uzimamo $f \in L^p(\mathbb{R})$. Za konačni skup $F \subset \mathcal{D}$ definiramo $\lambda = (\lambda_I)_{I \in \mathcal{D}}$ tako da stavimo $\lambda_I = 1$ za $I \in F$, a $\lambda_I = 0$ za $I \notin F$. Dakle, $T_\lambda f = \sum_{I \in F} \langle f, \psi_I \rangle_{L^2} \psi_I$ (zbog jednakosti dvaju ograničenih operatora na gustom potprostoru $L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; pogledajte (7.11), iz čega slijedi ograničenost desne strane) pa redom primjenom ocjena (7.9) i (7.6) dobivamo

$$\left\| \left(\sum_{I \in F} |\langle f, \psi_I \rangle_{L^2}|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim_p \|T_\lambda f\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Potom korištenjem teorema o monotonij konvergenciji kada konačni skupovi F iscrpljuju $\mathcal{D}$ dolazimo do

$$\left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (7.10)$$

Uredimo sada skup dijadskih intervala proizvoljno u niz: $\mathcal{D} = \{I_1, I_2, I_3, \dots\}$. Za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ imamo $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n}$ s konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$ pa postoji podniz niza parcijalnih suma $(\sum_{n=1}^{N_m} \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n})_{m \in \mathbb{N}}$ koji konvergira g.s. na $\mathbb{R}$ i to opet prema f . Korištenjem Fatouove leme i (7.9) za svaki $N \in \mathbb{N}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{N_m} \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\lesssim_p \left\| \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle f, \psi_{I_n} \rangle|^2 |\psi_{I_n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Obzirom da (7.10) daje $\|(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 |\psi_I|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty$, možemo upotrijebiti teorem o dominiranoj konvergenciji kako bismo zaključili $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n}$ s konvergencijom u $L^p(\mathbb{R})$. Dakle, zatvarač (obzirom na L^p normu) linearne ljuške funkcija ψ_I sadrži $L^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, a kako je posljednji skup gust u $L^p(\mathbb{R})$, zaključujemo da taj zatvarač zapravo mora biti jednak cijelom prostoru $L^p(\mathbb{R})$. Ta činjenica zajedno sa (7.7) konačno dokazuje da je $(\psi_I)_{I \in \mathcal{D}}$ bezuvjetna baza za $L^p(\mathbb{R})$.

Iz nejednakosti

$$|\langle f, \psi_I \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^p} \|\psi_I\|_{L^{p'}} \quad (7.11)$$

vidimo da je $\langle \cdot, \psi_I \rangle_{L^2}$ ograničeni linearni funkcional na $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Ako vrijedi $f = \sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \psi_I$ uz bezuvjetnu konvergenciju u prostoru $L^p(\mathbb{R})$, tada za svaki $J \in \mathcal{D}$ zbog neprekidnosti spomenutih funkcionala vrijedi

$$\langle f, \psi_J \rangle = \sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \langle \psi_I, \psi_J \rangle_{L^2} = c_J,$$

što pokazuje spomenutu tvrdnju o koeficijentnim funkcionalima.

Nadalje, za svaku $f \in L^p(\mathbb{R})$ imamo $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n}$ uz konvergenciju u normi od $L^p(\mathbb{R})$ pa pomoću (7.9) dobivamo

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \psi_{I_n} \rangle \psi_{I_n} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

što zajedno sa (7.10) konačno dokazuje (7.4) za svaku funkciju $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Još nam preostaje dokaz ekvivalencije (7.5). Ako je $(c_I)_{I \in \mathcal{D}}$ indeksirana familija skalara sa svojstvom

$$\left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |c_I|^2 |\psi_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty, \quad (7.12)$$

onda za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći konačni skup $F_0 \subset \mathcal{D}$ takav da je

$$\left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D} \setminus F_0} |c_I|^2 |\psi_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \varepsilon.$$

Tada za svaki konačni skup $F \subset \mathcal{D} \setminus F_0$ po (7.9) imamo $\|\sum_{I \in F} c_I \psi_I\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \varepsilon$, što zbog potpunosti prostora pokazuje da $\sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \psi_I$ doista bezuvjetno konvergira u $L^p(\mathbb{R})$ prema nekoj L^p funkciji. Obratno, ako su skalari $(c_I)_{I \in \mathcal{D}}$ takvi da imamo bezuvjetnu konvergenciju $\sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \psi_I = f$ prema nekoj funkciji $f \in L^p(\mathbb{R})$, tada primjenom koeficijentnih funkcionala baze dobivamo $c_I = \langle f, \psi_I \rangle_{L^2}$ za svaki $I \in \mathcal{D}$ te preostaje iskoristiti (7.10) kako bismo zaključili da doista vrijedi (7.12). $\square$

Izraz

$$S_{\psi} f := \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \psi_I \rangle|^2 |\psi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

možemo smatrati varijantom Littlewood-Paleyve kvadratne funkcije iz odjeljka 4.7 i u nekom smislu smo dokazali rezultat analogan teoremu 4.25. Uz još nešto truda i uz pretpostavku kompaktnosti nosača od ψ u gornjim karakterizacijama se $|\psi_I|^2$ može

zamijeniti sa $|I|^{-1}\mathbb{1}_I$; vidjeti [Mey92]. Na taj se način dolazi do prostora kompleksnih koeficijenata $(c_I)_{I \in \mathcal{D}}$ takvih da je

$$\left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} |c_I|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} < +\infty, \quad (7.13)$$

čija definicija više uopće ne ovisi o konkretnom izboru valične baze.

Valične karakterizacije nekih drugih funkcijskih prostora izvedene su u knjizi [Mey92], a od hrvatske literature, u diplomskom radu [Sti15].

* * *

Zadatak 7.6. Neka je $(\mathbb{h}_I)_{I \in \mathcal{D}}$ Haarov sistem iz odjeljka 5.2, definiran formulom (5.2), i uzmimo eksponent $1 < p < \infty$. Dokažite da za indeksiranu familiju skalara $(c_I)_{I \in \mathcal{D}}$ red $\sum_{I \in \mathcal{D}} c_I \mathbb{h}_I$ konvergira bezuvjetno u $L^p(\mathbb{R})$ ako i samo ako vrijedi (7.13).

Napomena: Ovo je analogon tvrdnje iz teorema 7.4 za Haarov valiće, koji ne zadovoljava tehničke pretpostavke s početka odjeljka.

Uputa: Sve elementi potrebni za rješenje su implicitno već dokazani u odjeljku 6.2; pogledajte teorem 6.12 i korolar 6.13.

7.5. Fourierova analiza na abelovim grupama

U ovom odjeljku ćemo ukratko navesti osnove harmonijske analize na općenitoj lokalno kompaktnoj abelovoj grupi. Većina teksta je preuzeta iz [Kov06]. Detaljniji pristup i dokazi svih činjenica mogu se naći u odličnoj knjizi [Fol95] i u diplomskom radu [Pal15], a klasična referenca za ovo gradivo je [HR62]. Mi ćemo ionako kasnije specijalizirati definicije na vrlo posebne primjere grupa, ali će one izgledati mnogo prirodnije ako imamo na umu općenitu situaciju. Zato je ovaj odjeljak moguće preskočiti bez gubitka potpunosti izlaganja, ali na uštrb nešto motivacije za kasnije definicije.

Neka je $\mathbb{A}$ lokalno kompaktna komutativna grupa, čiju binarnu operaciju pišemo $+$ (tj. aditivno). To znači da je na skupu $\mathbb{A}$ definirana lokalno kompaktna Hausdorffova topologija obzirom na koju su funkcije $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, $(x, y) \mapsto x + y$ i $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, $x \mapsto -x$ neprekidne. Poznata je činjenica da tada postoji jedinstvena (do na pozitivni skalarni višekratnik) translacijski-invarijantna mjera $\lambda_{\mathbb{A}}$, tj. ne-nul regularna mjera $\lambda_{\mathbb{A}}$ na Borelovim podskupovima od $\mathbb{A}$ takva da za svake $x \in \mathbb{A}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{A})$ vrijedi $\lambda_{\mathbb{A}}(x+B) = \lambda_{\mathbb{A}}(B)$. Takvu mjeru $\lambda_{\mathbb{A}}$ zovemo *Haarova mjera* od $\mathbb{A}$ i ona se podrazumijeva (kod integrala, funkcijskih prostora i sl.), čak i kad nije notacijski istaknuta. Npr. u slučajevima $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{A} = \mathbb{T}$ Haarova mjera je upravo Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{T} \equiv [0, 1)$, a u slučaju $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ Haarova mjera je upravo mjera prebrojavanja. Haarova mjera je konačna ako i samo ako je grupa kompaktna.

(*Unitarni*) karakter od $\mathbb{A}$ je svaki neprekidni homomorfizam grupa $(\mathbb{A}, +) \rightarrow (S^1, \cdot)$, pri čemu je S^1 jedinična kružnica oko ishodišta u kompleksnoj ravnini, a skup svih karaktera od $\mathbb{A}$ označavamo $\hat{\mathbb{A}}$. Možemo definirati zbroj dvaju karaktera $\xi, \zeta \in \hat{\mathbb{A}}$ formulom

$$(\xi + \zeta)(x) := \xi(x)\zeta(x); \quad x \in \mathbb{A}$$

te obzirom na tu binarnu operaciju i uz topologiju uniformne konvergencije po kompaktima, skup $\hat{\mathbb{A}}$ također postaje lokalno kompaktna abelova grupa. Zovemo je *dualna grupa* od $\mathbb{A}$. Pokazuje se da je grupa dualna grupi $\hat{\mathbb{A}}$ izomorfna (kao topološka grupa) grupi $\mathbb{A}$, tj. $(\hat{\hat{\mathbb{A}}}) \cong \mathbb{A}$; to je tzv. *Pontrjaginov teorem o bidualu*. Kako bismo naglasili dualnost nekad umjesto $\xi(x)$ za $x \in \mathbb{A}$, $\xi \in \hat{\mathbb{A}}$ pišemo $\langle x, \xi \rangle$ i pritom je $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{A} \times \hat{\mathbb{A}} \rightarrow S^1$ neprekidno preslikavanje. Nadalje, postoji prirodni izbor (do na skalarni višekratnik) Haarove mjere na $\hat{\mathbb{A}}$ obzirom na Haarovu mjeru na $\mathbb{A}$, određen teoremima 7.7 i 7.8, koji slijede. Za najčešće spominjane grupe vrijedi sljedeća tablica:

$$\begin{array}{ll}
 \hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R} & \text{uz } \langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i x \xi}; \quad x, \xi \in \mathbb{R} \\
 \hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z} & \text{uz } \langle t, j \rangle = e^{2\pi i j t}; \quad t \in \mathbb{T} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z} \\
 \hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T} & \text{uz } \langle j, t \rangle = e^{2\pi i j t}; \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{T} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\
 \widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n & \text{uz } \langle x, \xi \rangle = e^{2\pi i x \cdot \xi}; \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n \\
 \widehat{\mathbb{T}^n} \cong \mathbb{Z}^n & \text{uz } \langle t, j \rangle = e^{2\pi i j \cdot t}; \quad t \in \mathbb{T}^n, \quad j \in \mathbb{Z}^n \\
 \widehat{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{T}^n & \text{uz } \langle j, t \rangle = e^{2\pi i j \cdot t}; \quad j \in \mathbb{Z}^n, \quad t \in \mathbb{T}^n \\
 \widehat{\mathbb{Z}_d} \cong \mathbb{Z}_d & \text{uz } \langle k, l \rangle = e^{\frac{2\pi i}{d} kl}; \quad k, l \in \mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\
 \hat{\mathbb{A}} \cong \mathbb{A} & \text{za svaku konačnu abelovu grupu } \mathbb{A}
 \end{array}$$

Iz gornjih primjera nije teško naslutiti da općenito vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A} \text{ je diskretna} &\Rightarrow \hat{\mathbb{A}} \text{ je kompaktna} \\
 \mathbb{A} \text{ je kompaktna} &\Rightarrow \hat{\mathbb{A}} \text{ je diskretna}
 \end{aligned}$$

Nadalje, “višedimenzionalne” tvrdnje slijede iz “jednodimenzionalnih” zahvaljujući:

$$(\mathbb{A}_1 \times \dots \times \mathbb{A}_n)^\wedge \cong \hat{\mathbb{A}}_1 \times \dots \times \hat{\mathbb{A}}_n$$

za bilo koje lokalno kompaktno abelove grupe $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$. Karakteri kompaktno abelove grupe $\mathbb{A}$ s vjerojatnosno normaliziranom Haarovom mjerom uvijek čine ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{A})$.

Konvolucija Borel-izmjerivih funkcija $f, g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ je nova funkcija definirana formulom

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{A}} f(x - y)g(y) d\lambda_{\mathbb{A}}(y)$$

za sve $x \in \mathbb{A}$ za koje gornji integral postoji (kao kompleksni broj). Ako $(f * g)(x)$ postoji za $\lambda_{\mathbb{A}}$ -skoro svaki $x \in \mathbb{A}$, onda je na taj način definirana (do na jednakost g.s.) Borel-izmjeriva funkcija $f * g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Teorem 7.5. (Youngova nejednakost)

- (a) Ako su $p, q \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$ te $f \in L^p(\mathbb{A})$, $g \in L^q(\mathbb{A})$, onda za svaki $x \in \mathbb{A}$ postoji $(f * g)(x)$, funkcija $f * g: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ je omeđena i neprekidna te vrijedi $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.
- (b) Ako su $p, q, r \in [1, \infty]$ takvi da je $1/p + 1/q = 1/r + 1$ te $f \in L^p(\mathbb{A})$, $g \in L^q(\mathbb{A})$, onda za $\lambda_{\mathbb{A}}$ -g.s. $x \in \mathbb{A}$ postoji $(f * g)(x)$ i vrijedi $f * g \in L^r(\mathbb{A})$ te $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Nadalje, *involucija funkcije* $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ je naprosto funkcija $f^*: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ definirana formulom

$$f^*(x) := \overline{f(-x)}; \quad x \in \mathbb{A}.$$

Obzirom na operacije konvoluciju (kao množenje) i involuciju (kao unarnu operaciju), $L^1(\mathbb{A})$ postaje komutativna i asocijativna Banachova $*$ -algebra. (Za definiciju tog pojma vidjeti npr. [Fol95].)

Fourierova transformacija i *inverzna Fourierova transformacija* definiraju se redom formulama

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{A}) &\rightarrow C_0(\hat{\mathbb{A}}), \quad f \mapsto \hat{f}, \quad \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{A}} f(x) \overline{\langle x, \xi \rangle} d\lambda_{\mathbb{A}}(x); \quad \xi \in \hat{\mathbb{A}}, \\ L^1(\hat{\mathbb{A}}) &\rightarrow C_0(\mathbb{A}), \quad h \mapsto \check{h}, \quad \check{h}(x) := \int_{\hat{\mathbb{A}}} h(\xi) \langle x, \xi \rangle d\lambda_{\hat{\mathbb{A}}}(\xi); \quad x \in \mathbb{A} \end{aligned}$$

i to su injektivni $*$ -homomorfizmi Banachovih $*$ -algebri. Drugim riječima, imaju sljedeća svojstva:

Propozicija 7.6. Za $f, f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{A})$ i $h, h_1, h_2 \in L^1(\hat{\mathbb{A}})$ vrijedi:

- (a) $(f_1 * f_2)^{\sim} = \hat{f}_1 \hat{f}_2, \quad (f^*)^{\sim} = \overline{\hat{f}}, \quad \|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$
- (b) $(h_1 * h_2)^{\sim} = \check{h}_1 \check{h}_2, \quad (h^*)^{\sim} = \overline{\check{h}}, \quad \|\check{h}\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^1}.$

Uobičajeni *Fourierov teorem inverzije* vrijedi i u ovoj situaciji:

Teorem 7.7. (Fourierov teorem inverzije)

- (a) Ako je $f \in L^1(\mathbb{A})$ i $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{A}})$, onda vrijedi $(\hat{f})^{\sim} = f$ g.s.
- (b) Ako je $h \in L^1(\hat{\mathbb{A}})$ i $\check{h} \in L^1(\mathbb{A})$, onda vrijedi $(\check{h})^{\sim} = h$ g.s.

Nadalje, L^2 -teorija Fourierove transformacije zasniva se na *Plancherelovom teoremu*.

Teorem 7.8. (Plancherelov teorem) *Fourierova transformacija* $L^1(\mathbb{A}) \cap L^2(\mathbb{A}) \rightarrow L^2(\hat{\mathbb{A}})$ se jedinstveno proširuje do unitarnog izomorfizma $L^2(\mathbb{A}) \rightarrow L^2(\hat{\mathbb{A}})$. *Inverzna Fourierova transformacija* $L^1(\hat{\mathbb{A}}) \cap L^2(\hat{\mathbb{A}}) \rightarrow L^2(\mathbb{A})$ se jedinstveno proširuje do unitarnog izomorfizma $L^2(\hat{\mathbb{A}}) \rightarrow L^2(\mathbb{A})$. Dobivena dva unitarna operatora su međusobno inverzni.

Na ovom nivou općenitosti *fazna ravnina* je naprosto grupa $\mathbb{A} \times \hat{\mathbb{A}}$. Dosad smo promatrali samo slučaj $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ pa bi se $\mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ mogla zvati euklidska ili klasična fazna ravnina. U idućem odjeljku ćemo predstaviti fazni prostor za jedan vrlo posebni tip grupe $\mathbb{A}$ koji ima još jednostavniju geometriju.

* * *

Zadatak 7.7. Neka je $\omega := e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Dokažite da za svake $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrijedi nejednakost

$$|a + b + c|^3 + |a + \omega b + \omega^2 c|^3 + |a + \omega^2 b + \omega c|^3 \geq 3(|a|^3 + |b|^3 + |c|^3).$$

(b) Dokažite da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svake $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrijedi nejednakost

$$|a + b + c|^3 + |a + \omega b + \omega^2 c|^3 + |a + \omega^2 b + \omega c|^3 \geq 3(|a|^3 + |b|^3 + |c|^3) + \varepsilon|abc|.$$

Uputa: Za (a) dio koristite Plancherelov teorem na grupi $\mathbb{Z}_3 \equiv \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$|a + b + c|^2 + |a + \omega b + \omega^2 c|^2 + |a + \omega^2 b + \omega c|^2 = 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2),$$

kojeg je lako izvesti i direktno, te elementarne nejednakosti za nenegativne brojeve. Za (b) dio će vam još trebati ocjena poput

$$(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)^{3/2} - (|a|^3 + |b|^3 + |c|^3) \geq \frac{1}{10}|abc|,$$

u kojoj radi simetrije i homogenosti dodatno pretpostavite $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ te razlikujte slučajeve $c \leq \frac{9}{10}$ i $c > \frac{9}{10}$.

Zadatak 7.8. Neka je $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija na konačnoj abelovoj grupi $\mathbb{A}$ koja nije jednaka konstanti 0. Označimo

$$\begin{aligned} \text{supp}(f) &:= \{x \in \mathbb{A} : f(x) \neq 0\}, \\ \text{supp}(\hat{f}) &:= \{\xi \in \mathbb{A} : \hat{f}(\xi) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dokažite konačnu varijantu *principa neodređenosti*:

$$|\text{supp}(f)| |\text{supp}(\hat{f})| \geq |\mathbb{A}|.$$

Zadatak 7.9. (a) Uzmimo sada posebno $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_p$ za prost broj p , uzmimo funkciju f na $\mathbb{Z}_p$ koja nije identički jednaka 0 i neka su skupovi $\text{supp}(f)$, $\text{supp}(\hat{f})$ definirani kao u prethodnom zadatku. Dokažite da mora vrijediti

$$|\text{supp}(f)| + |\text{supp}(\hat{f})| \geq p + 1.$$

(b) Obratno, pokažite da za $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ koji zadovoljavaju $|A| + |B| \geq p + 1$ postoji funkcija $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$ takva da je $\text{supp}(f) = A$ i $\text{supp}(\hat{f}) = B$.

Uputa: U rješenju ovog zadatka je potreban *teorem Čebotareva o korijenima iz jedinice*, kojeg smijete koristiti bez dokaza, a glasi: Ako su p prost broj, $1 \leq m \leq p$ te $x_1, \dots, x_m$ različiti elementi od $\mathbb{Z}_p$ i još $\xi_1, \dots, \xi_m$ također različiti elementi od $\mathbb{Z}_p$, tada je

$$\det [e^{2\pi i x_j \xi_k / p}]_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, m}} \neq 0.$$

Zadatak 7.10. Neka je p prost broj i neka je $S := \{w \in \mathbb{C} : w^p = 1\}$ skup p -tih korijena iz jedinice. Promotrimo polinom oblika

$$P(z) := \sum_{j=0}^k c_j z^{n_j}$$

za neke koeficijente $c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i za neke različite eksponente $n_0, n_1, \dots, n_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Dokažite da polinom P može imati najviše k različitih nultočaka u skupu S .

Zadatak 7.11. Neka je $p \geq 3$ prost i pretpostavimo da je funkcija $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$ takva da je najviše jedan od brojeva

$$\hat{f}(0), \hat{f}(1), \dots, \hat{f}(p-1)$$

različit od 0. Dokažite da su brojevi

$$f(0), f(1), \dots, f(p-1)$$

ili svi jednaki, ili su vrhovi pravilnog p -terokuta u kompleksnoj ravnini.

Zadatak 7.12. Neka su z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 kompleksni brojevi za koje vrijedi

- $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$,
- $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$,
- $z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_0 = 0$.

Dokažite da oni leže u vrhovima pravilnog peterokuta.

Zadatak 7.13. Walsh¹¹ [Wal23] je uveo sljedeći sistem funkcija $(W_n)_{n=0}^\infty$ na $[0, 1]$, koji će nam biti koristan u idućem odjeljku, a ovaj zadatak skicira kako ga se može definirati na sasvim elementaran način. To je niz $(W_n)_{n=0}^\infty$ zadan rekursivno:

$$\begin{aligned} W_0(x) &:= 1 \quad \text{za svaki } x \in [0, 1], \\ W_{2k}(x) &:= \begin{cases} W_k(2x) & \text{za } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ W_k(2x-1) & \text{za } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ W_{2k+1}(x) &:= \begin{cases} W_k(2x) & \text{za } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -W_k(2x-1) & \text{za } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- (a) Pokažite da je sistem $(W_n)_{n=0}^\infty$ ortonormirana baza od $L^2([0, 1])$. Skicirajte grafove funkcija W_n za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
- (b) Pokažite da je $R_k = W_{2^k}$ i da su $(R_k)_{k=0}^\infty$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$. Obratno, prikažite Walshove funkcije $(W_n)_{n=0}^\infty$ kao sve konačne produkte (uključujući i “prazan produkt”) Rademacherovih funkcija $(R_k)_{k=0}^\infty$. Iskoristite te činjenice za alternativni dokaz ortogonalnosti Walshovih funkcija.

¹¹Joseph Leonard Walsh (1895–1973), američki matematičar.

- (c) Pokažite da za $m, n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $W_m(x)W_n(x) = W_{m \oplus n}(x)$, pri čemu je $m \oplus n$ nenegativni cijeli broj dobiven zbrajanjem m i n u binarnoj bazi bez prenošenja znamenki. Preciznije, ako su $m = \sum_{j \geq 0} a_j 2^j$ i $n = \sum_{j \geq 0} b_j 2^j$ binarni zapisi od m i n (podrazumijeva se $a_j, b_j \in \{0, 1\}$), onda $m \oplus n$ ima binarni zapis $\sum_{j \geq 0} c_j 2^j$, $c_j \in \{0, 1\}$, takav da za svaki j brojevi c_j i $a_j + b_j$ imaju istu parnost.

Napomena: Ovo svojstvo se može shvatiti kao dijadski analogon od $e^{2\pi i m x} e^{2\pi i n x} = e^{2\pi i (m+n)x}$, a može se i iskoristiti za još jedan dokaz ortogonalnosti sistema $(W_n)_{n=0}^\infty$.

7.6. Vremensko-frekvencijska analiza u konačnim karakteristikama

Vratimo se pojmu faznog nosača funkcije i pretpostavimo da ga želimo definirati na najdoslovniji mogući način: kao skup u vremensko-frekvencijskoj ravnini. Za to smo spremni odreći se uobičajene grupovne i uobičajene topološke strukture na $\mathbb{R}$ (tj. na $\mathbb{R}^2$) i spremni smo raditi u nekom idealiziranom modelu gdje nas više ne ograničava kvalitativni princip neodređenosti iz teorema 7.1. Tada će uobičajeni eksponencijali $e^{2\pi i k x}$ kao karakteri od $\mathbb{T}$ ili $\mathbb{R}$ biti zamijenjeni tzv. Walshovim funkcijama. Izgradit ćemo model Fourierove analize u kojem vrijedi mnogo toga priželjkivanog u odjeljku 7.3.

Fiskirajmo prirodni broj $d \geq 2$ i promotrimo grupu $\mathbb{Z}_d$ koja je naprosto skup $\{0, 1, 2, \dots, d-2, d-1\}$ uz zbrajanje modulo d . Nadalje, promotrimo beskonačni produkt

$$\mathbb{Z}_d^\mathbb{N} := \{(a_j)_{j \in \mathbb{N}} : (\forall j \in \mathbb{N})(a_j \in \mathbb{Z}_d)\},$$

koji uz zbrajanje po koordinatama postaje abelova grupa. Osim toga, na njemu je prirodno definirana produktna topologija; vidjeti [Fol99]. Iz općenite teorije znamo da kompaktna grupa $\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}$ ima Haarovu mjeru $\lambda_{\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}}$, koju štoviše možemo normalizirati tako da bude vjerojatnosna. Definirajmo

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{Z}_d^\mathbb{N} &\rightarrow [0, 1], & (a_j)_{j \in \mathbb{N}} &\mapsto \overbrace{0.a_1 a_2 a_3 \dots}^{\text{u bazi } d} = \sum_{j=1}^\infty a_j d^{-j}, \\ \Psi: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{Z}_d^\mathbb{N}, & t &\mapsto ([d^j t] \bmod d)_{j \in \mathbb{N}} = (j\text{-ta znamenka od } t \text{ u bazi } d)_{j \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Funkcije Φ i Ψ su Borel-izmjerive te je $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}}$ g.s. obzirom na $\lambda_{\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}}$ i $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{[0,1]}$ g.s. obzirom na λ . Osim toga, Haarova mjera na $\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}$ je slika Lebesgueove mjere na $[0, 1]$ po funkciji Ψ , a obratno prebacuje funkcija Φ . Dakle, možemo identificirati prostore vjerojatnosnih mjera

$$(\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}), \lambda_{\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}}) \equiv ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda).$$

Prilikom te identifikacije moramo imati na umu da grupovna struktura iz $\mathbb{Z}_d^\mathbb{N}$ zapravo vodi na zbrajanje brojeva iz $[0, 1]$ zapisanih u bazi d bez prenošenja znamenki. Obzirom da je i $\mathbb{T}$ u smislu prostora mjere također poistovjećen s $[0, 1]$, zapravo smo uveli tzv. *Cantorov model jednodimenzionalnog torusa*.

Walshove funkcije [Wal23] na $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{N}}$ su funkcije $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definirane formulom

$$W_n((a_j)_{j \in \mathbb{N}}) := \omega^{\sum_{j=1}^k b_j a_j}, \quad (7.14)$$

pri čemu je $\omega = e^{2\pi i/d}$, a $n = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1}$ je prikaz broja n u bazi d . Na nenegativnim cijelim brojevima prirodna operacija je opet zbrajanje njihovih prikaza u bazi d bez prenošenja znamenki i na taj način i $\mathbb{N}_0$ postaje abelova grupa. Zapravo je ona izomorfna dualnoj grupi od $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{N}}$, što znači da su Walshove funkcije naprosto svi karakteri od $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{N}}$. Oдавde posebno slijedi da $\{W_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ čini ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L^2(\mathbb{Z}_d^{\mathbb{N}}) \equiv L^2([0, 1])$. Putem spomenute identifikacije $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{N}} \equiv [0, 1]$ možemo promatrati Walshove funkcije na intervalu $[0, 1]$. U posebnom slučaju $d = 2$ smo ih već bili spomenuli u zadatku 7.13, gdje su bile definirane rekursivnim relacijama:

$$\begin{aligned} W_0(t) &= 1, \quad t \in [0, 1], \\ W_{2k}(t) &= \begin{cases} W_k(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ W_k(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \\ W_{2k+1}(t) &= \begin{cases} W_k(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -W_k(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Za općeniti d se također mogu izvesti rekursivne relacije, ali one postaju manje praktične pa smo ih preferirali definirati direktnije, jednakošću (7.14).

Na vrlo sličan način uvodimo *Cantorov model realnog pravca*, odnosno polupravca $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, da budemo sasvim precizni. Promotrimo beskonačni produkt

$$\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}} := \{(a_j)_{j \in \mathbb{Z}} : (\forall j \in \mathbb{Z})(a_j \in \mathbb{Z}_d), (\exists j_0 \in \mathbb{Z})(\forall j \in \mathbb{Z})(j < j_0 \Rightarrow a_j = 0)\},$$

koji sadrži dvostrano beskonačne nizove znamenki iz $\{0, 1, \dots, d-1\}$ takve da im od nekog mjesta nalijevo pišu samo nule. Na $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$ definiramo zbrajanje i množenje po koordinatama:

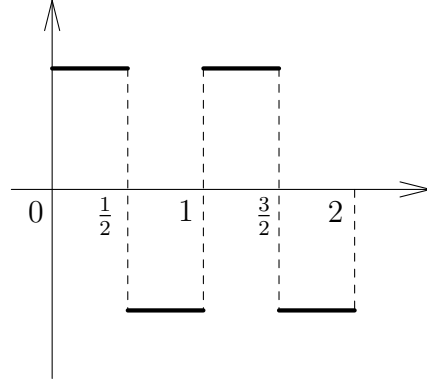
$$\begin{aligned} (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \oplus (b_j)_{j \in \mathbb{Z}} &:= ((a_j + b_j) \bmod d)_{j \in \mathbb{Z}}, \\ (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \otimes (b_j)_{j \in \mathbb{Z}} &:= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \bmod d \right)_{j \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Suprotni element od $a \in \mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$ pišemo $\ominus a$. Uočite da je zbog

$$da = \underbrace{a \oplus a \oplus \dots \oplus a}_{d \text{ pribrojnika}} = \mathbf{0}$$

zapravo $\ominus a = (d-1)a$. Ukoliko je d prost broj, te operacije pretvaraju $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$ u polje karakteristike d , a inače je samo riječ o komutativnom prstenu. Nama su svi prirodni brojevi $d \geq 2$ jednako praktični za teoriju pa za svaku vrijednost parametra d koristimo naziv *karakteristika Cantorovog modela*. Ovog puta definiramo

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}} &\rightarrow [0, +\infty), \quad (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j d^{-j}, \\ \Psi: [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}, \quad t \mapsto (\lfloor d^j t \rfloor \bmod d)_{j \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$


 Slika 7.4: Graf funkcije E za $d = 2$.

Funkcije Φ i Ψ su Borel izmjerive te $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}}$ g.s. i $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{[0, +\infty)}$ g.s. Iz tog razloga (uz odgovarajuću normalizaciju Haarove mjere) možemo identificirati prostore mjera

$$(\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}), \lambda_{\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}}) \equiv (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda).$$

Označimo $E: \mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}} \rightarrow \mathbb{C}$, $E((c_j)_{j \in \mathbb{Z}}) = \omega^{c_1}$. Lako se provjeri

$$E((a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \oplus (b_j)_{j \in \mathbb{Z}}) = E((a_j)_{j \in \mathbb{Z}})E((b_j)_{j \in \mathbb{Z}}),$$

tj. uz identifikaciju $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}} \equiv \mathbb{R}_+$ možemo pisati

$$E(x \oplus y) = E(x)E(y), \quad x, y \in [0, +\infty).$$

Funkcija E se u slučaju $d = 2$ naziva i “kvadratični sinus”, iz razloga očiglednog na slici 7.4. Zapravo je dualna grupa od $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$ izomorfna sa $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$, a svi karakteri su oblika $x \mapsto E(x \otimes \xi)$ za neki $\xi \in \mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$. Dakle, možemo pisati $\langle x, \xi \rangle = E(x \otimes \xi)$. Fourierovu transformaciju na $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}} \equiv \mathbb{R}_+$ nazivamo *Walsh-Fourierova transformacija* i ona uzima funkciju $f \in L^1(\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}) \equiv L^1(\mathbb{R}_+)$ i pridružuje joj $\hat{f}$ definiranu sa

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{E(x \otimes \xi)} dx; \quad \xi \in \mathbb{R}_+.$$

Inverzna Walsh-Fourierova transformacija je analogni objekt koji h pridružuje

$$\check{h}(x) := \int_{\mathbb{R}_+} h(\xi) E(x \otimes \xi) d\xi; \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Osnovna svojstva Walsh-Fourierove transformacije su posebni slučaj rezultata spomenutih u odjeljku 7.5, a kao i klasična transformacija ona posjeduje neke simetrije.

Propozicija 7.9. *Walsh-Fourierova transformacija se proširuje po gustoći do unitarnog operatora na $L^2(\mathbb{R}_+)$. Uzmimo $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $y, \eta \in \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{Z}$ i definirajmo sljedeće*

transformacije:

$$\begin{aligned} \text{translacije: } (\mathbf{T}_y f)(x) &:= f(x \ominus y), \\ \text{modulacije: } (\mathbf{M}_\eta f)(x) &:= E(x \otimes \eta) f(x), \\ \text{dilatacije: } (\mathbf{D}_{d^j} f)(x) &:= d^{-j/2} f(d^{-j} x). \end{aligned}$$

Tada vrijedi

$$(\mathbf{T}_y f)^\wedge = \mathbf{M}_{\ominus y} \hat{f}, \quad (\mathbf{M}_\eta f)^\wedge = \mathbf{T}_\eta \hat{f}, \quad (\mathbf{D}_{d^j} f)^\wedge = \mathbf{D}_{d^{-j}} \hat{f}.$$

Uočimo da je kod definicije dilatacija svejedno pišemo li $d^{-j} \otimes x$ ili $d^{-j}x$, dokle god je j cijeli broj.

Dokaz. Radi gustoće i neprekidnosti dovoljno je jednakosti provjeriti za $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_y f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus y) \overline{E(x \otimes \xi)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{E((x \oplus y) \otimes \xi)} dx \\ &= \overline{E(y \otimes \xi)} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{E(x \otimes \xi)} dx = E((\ominus y) \otimes \xi) \hat{f}(\xi) = (\mathbf{M}_{\ominus y} \hat{f})(\xi), \\ (\mathbf{M}_\eta f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+} E(x \otimes \eta) f(x) \overline{E(x \otimes \xi)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{E(x \otimes (\ominus \eta))} \overline{E(x \otimes \xi)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{E(x \otimes (\xi \ominus \eta))} dx = \hat{f}(\xi \ominus \eta) = (\mathbf{T}_\eta \hat{f})(\xi), \\ (\mathbf{D}_{d^j} f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+} d^{-j/2} f(d^{-j} \otimes x) \overline{E(x \otimes \xi)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} d^{-j/2} f(x) \overline{E((d^j \otimes x) \otimes \xi)} d^j dx \\ &= d^{j/2} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{E(x \otimes (d^j \otimes \xi))} dx = d^{j/2} \hat{f}(d^j \otimes \xi) = (\mathbf{D}_{d^{-j}} \hat{f})(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Fazna ravnina je sada $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}} \times \mathbb{Z}_d^{\mathbb{Z}, \text{kon}}$ i ona se kao prostor mjere može indentificirati s prvim kvadrantom $(\mathbb{R}_+)^2 = [0, +\infty)^2$. Nazivamo je *Walshova fazna ravnina*. Funkcija $\mathbb{1}_{[0,1]}$ je vlastiti Walsh-Fourierov transformat i služi kao analogon Gaussove funkcije $e^{-\pi x^2}$ iz klasične Fourierove analize. Dakle, vidimo da je savršena vremensko-frekvencijska lokalizacija doista moguća! U daljnjem ćemo se koncentrirati na vezu geometrije Walshove fazne ravnine i svojstava jednog funkcijskog sistema.

* * *

Walshovi valni paketi čine sistem $(w_{j,k,n})_{j \in \mathbb{Z}, k, n \in \mathbb{N}_0}$, koji je dobiven primjenom svih triju spomenutih grupa transformacija (translacija, modulacija i dilatacija) na funkciju $\mathbb{1}_{[0,1]}$, tj.

$$w_{j,k,n} := \mathbf{D}_{d^j} \mathbf{T}_k \mathbf{M}_n \mathbb{1}_{[0,1]}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0$$

i njihova eksplicitna formula glasi

$$w_{j,k,n}(x) = d^{-j/2} \widetilde{W}_n(d^{-j}x - k), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Ovdje $\widetilde{W}_n$ označava proširenje od W_n na cijeli $\mathbb{R}_+$ nulom izvan intervala $[0, 1)$. Koristeći osnovna svojstva Walsh-Fourierove transformacije lako dobivamo

$$\hat{w}_{j,k,n} := D_{d^{-j}} \underbrace{M_{\ominus k} T_n}_{\text{komutiraju}} \mathbb{1}_{[0,1)} = w_{-j,n,\ominus k}.$$

Dakle, nosač od $w_{j,k,n}$ je $[d^j k, d^j(k+1))$, a nosač od $\hat{w}_{j,k,n}$ je $[d^{-j}n, d^{-j}(n+1))$ pa je prirodno funkciji $w_{j,k,n}$ pridružiti d -adski pravokutnik

$$P_{j,k,n} := [d^j k, d^j(k+1)) \times [d^{-j}n, d^{-j}(n+1))$$

u faznoj ravnini $(\mathbb{R}_+)^2$, kojeg sada s pravom smatramo njenim faznim nosačem. Svaki pravokutnik gornjeg oblika (za fiksirani d) zvat ćemo “pločica”. Primijetimo da svaka pločica ima površinu 1, što znači da ipak poštujemo neku kvantitativnu verziju principa neodređenosti. Obratno, za svaku pločicu P označavat ćemo s w_P pripadni jedinstveni valni paket čiji je ona fazni nosač. U tom ćemo slučaju vremenski interval od P pisati I_P , a frekvencijski interval Ω_P , tj. $P = I_P \times \Omega_P$. Ponekad ćemo koristiti i mješovitu notaciju, poput $w_{I,n}$ umjesto $w_{j,k,n}$ ako je $I = [d^j k, d^j(k+1))$. Primijetimo da su funkcije w_P normalizirane u L^2 normi. Njihove L^∞ -normalizacije će također biti praktične u idućem odjeljku te ih pišemo $\tilde{w}_P$, tj.

$$\tilde{w}_P(x) = \tilde{w}_{j,k,n}(x) := \widetilde{W}_n(d^{-j}x - k),$$

tako da je

$$w_P = |I_P|^{-1/2} \tilde{w}_P.$$

Lema 7.10. *Ako su P i P' disjunktne pločice, tada su funkcije $w_P, w_{P'} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ međusobno ortogonalne.*

Dokaz. Primijetimo da su ili vremenski intervali $I_P, I_{P'}$ disjunktni, kada je tvrdnja očigledna, ili su frekvencijski intervali $\Omega_P, \Omega_{P'}$ disjunktni, kada tvrdnja slijedi primjenom Plancherelovog teorema:

$$\langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \langle \hat{w}_P, \hat{w}_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0. \quad \square$$

Sljedeća lema je analogon propozicije 7.3. U njoj $|\cdot|$ označava uobičajenu površinu (tj. Lebesgueovu mjeru) pravokutnika u $(\mathbb{R}_+)^2$.

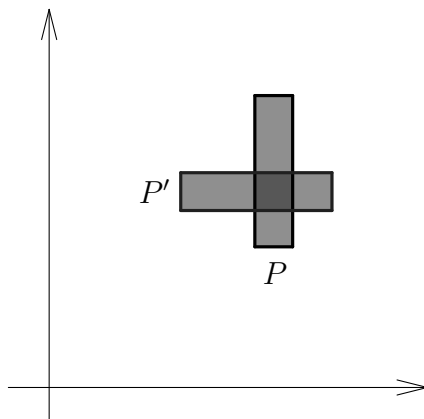
Lema 7.11. *Za bilo koje dvije pločice P i P' vrijedi $|\langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|^2 = |P \cap P'|$.*

Dokaz. Radi prethodne leme možemo pretpostaviti $P \cap P' \neq \emptyset$. Neka je

$$\begin{aligned} P &= P_{j,k,n} = [d^j k, d^j(k+1)) \times [d^{-j}n, d^{-j}(n+1)), \\ P' &= P_{j',k',n'} = [d^{j'} k', d^{j'}(k'+1)) \times [d^{-j'} n', d^{-j'}(n'+1)). \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $j \leq j'$, kao na slici 7.5. Primijetimo da $\Omega_P \cap \Omega_{P'} \neq \emptyset$ implicira $\Omega_P \supseteq \Omega_{P'}$, što daje

$$d^{j'-j}n \leq n' \leq d^{j'-j}n + d^{j'-j} - 1. \quad (7.15)$$



Slika 7.5: Presjek dviju pločica.

Primjenom definicijske formule za w_P dobivamo

$$w_P(x) = \begin{cases} d^{-j/2} E(x \otimes d^{-j} n) & \text{za } x \in [d^j k, d^j(k+1)), \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

pa računamo:

$$\langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} w_P \overline{w_{P'}} = d^{-\frac{j+j'}{2}} \int_{[d^j k, d^j(k+1))} E(x \otimes (d^{-j} n \ominus d^{-j'} n')) dx.$$

Tvrdimo da je gornja podintegralna funkcija konstantna na cijelom intervalu $[d^j k, d^j(k+1))$. To će značiti

$$|\langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}| = d^{-\frac{j+j'}{2}} d^j = d^{\frac{j-j'}{2}},$$

dok je

$$|P \cap P'| = |I_P| |\Omega_{P'}| = d^j d^{-j'} = d^{j-j'},$$

što će dokazati traženu tvrdnju.

Za $x \in [d^j k, d^j(k+1))$ supstituirajmo $x = d^j(k \oplus t)$, $t \in [0, 1)$, a zbog (7.15) možemo staviti $n' = d^{j'-j} n \oplus m$, $m \in \{0, 1, 2, \dots, d^{j'-j} - 1\}$. Imamo

$$E(x \otimes (d^{-j} n \ominus d^{-j'} n')) = E(d^j k \otimes (d^{-j} n \ominus d^{-j'} n')) \overline{E(t \otimes d^{j-j'} m)}$$

pa još jedino treba provjeriti da je izraz $E(t \otimes d^{j-j'} m)$ neovisan o $t \in [0, 1)$, a vidjet ćemo da je on zapravo jednak 1. Za to pak treba jedino primijetiti da brojevi t i $d^{j-j'} m$ u bazi d mogu imati ne-nul znamenke samo desno od decimalne točke pa je $t \otimes d^{j-j'} m = 0$. $\square$

Sljedeći teorem nam omogućuje da uspostavimo korespondenciju između “popločivih” podskupova fazne ravnine $(\mathbb{R}_+)^2$ i zatvorenih potprostora Hilbertovog prostora $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Teorem 7.12. *Ako su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ dvije kolekcije u parovima disjunktne pločice takve da je $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} P'$, tada vrijedi*

$$\text{Cl}(\text{span}\{w_P : P \in \mathcal{P}\}) = \text{Cl}(\text{span}\{w_{P'} : P' \in \mathcal{P}'\}),$$

pri čemu se linearna ljuska i zatvarač shvaćaju u prostoru $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Dokaz. Uzmimo neku pločicu $P \in \mathcal{P}$ i iskoristimo činjenicu da presjeci $P \cap P'$, $P' \in \mathcal{P}'$ čine prebrojivu particiju od P :

$$\sum_{P' \in \mathcal{P}'} |\langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|^2 \stackrel{\text{lema 7.11}}{=} \sum_{P' \in \mathcal{P}'} |P \cap P'| = |P| = 1.$$

Prema lemi 7.10 skup $\{w_{P'} : P' \in \mathcal{P}'\}$ čini ortonormiranu bazu potprostora $\text{Cl}(\text{span}\{w_{P'} : P' \in \mathcal{P}'\})$ pa kvadrat norme ortogonalne projekcije od w_P na taj potprostor iznosi

$$\left\| \sum_{P' \in \mathcal{P}'} \langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} w_{P'} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 = \sum_{P' \in \mathcal{P}'} |\langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}|^2 = 1$$

te je po Pitagorinom poučku kvadrat udaljenosti od w_P do tog potprostora jednak

$$\begin{aligned} & \left\| w_P - \sum_{P' \in \mathcal{P}'} \langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} w_{P'} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &= \|w_P\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 - \left\| \sum_{P' \in \mathcal{P}'} \langle w_P, w_{P'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} w_{P'} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo $w_P \in \text{Cl}(\text{span}\{w_{P'} : P' \in \mathcal{P}'\})$, a kako je $P \in \mathcal{P}$ bila proizvoljna, upravo smo pokazali

$$\text{Cl}(\text{span}\{w_P : P \in \mathcal{P}\}) \subseteq \text{Cl}(\text{span}\{w_{P'} : P' \in \mathcal{P}'\}).$$

Druga inkluzija slijedi radi simetrije pretpostavki. $\square$

Dakle, svakom skupu $S \subseteq (\mathbb{R}_+)^2$ koji je unija neke familije $\mathcal{P}$ u parovima disjunktne pločice možemo sa

$$V_S := \text{Cl}(\text{span}\{w_P : P \in \mathcal{P}\})$$

pridružiti zatvoreni potprostor od $L^2(\mathbb{R}_+)$ i ortogonalni projektor Π_S na taj potprostor koji djeluje po formuli

$$\Pi_S f := \sum_{P \in \mathcal{P}} \langle f, w_P \rangle w_P.$$

Radi teorema 7.12 definicije od V_S i Π_S ne ovise o “popločavanju” od S kolekcijom $\mathcal{P}$. Pridruživanje $S \mapsto V_S$ ima očigledna svojstva:

$$\begin{aligned} S \subseteq S' & \Rightarrow V_S \subseteq V_{S'}, \\ S \cap S' = \emptyset & \Rightarrow V_S \perp V_{S'}. \end{aligned}$$

Zanimljivo je posebno primijetiti da svako popločavanje cijele fazne ravnine $(\mathbb{R}_+)^2$ daje jednu ortonormiranu bazu cijelog prostora $L^2(\mathbb{R}_+)$. Postoji mnogo različitih takvih popločavanja; prisjetimo se recimo slike 7.3.

Najčešće se u literaturi pojavljuju Cantorovi modeli za $d = 2$, koji se tada nazivaju *dijadskim modelima*. Odlični izvori materijala o njima, koji se međusobno nadopunjuju, su [AHMTT02], [Per01] i [Thi95].

7.7. Modeli linearne i bilinearne Hilbertove transformacije

U odjeljku 4.3 smo proučavali Hilbertovu transformaciju danu formulom

$$(Hf)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{dt}{\pi t}.$$

za funkciju $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Već smo bili primijetili da je H unitarna i da komutira s translacijama i dilatacijama; formula (4.15). Posljedica toga je da ona prevodi ortonormiranu valićnu bazu opet u ortonormiranu valićnu bazu. Preciznije, ako je $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$, $\psi_{j,k} = D_{2^{-j}} T_k \psi$ valićni sistem koji čini ortonormiranu bazu od $L^2(\mathbb{R})$ i za valić ψ vrijedi $\psi \in C_c^1(\mathbb{R})$, tada je $(H\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ opet valićni sistem generiran valićem $H\psi \in L^2(\mathbb{R})$, koji (radi unitarnosti od H) opet čini ortonormiranu bazu od $L^2(\mathbb{R})$. Razvijajući L^2 funkciju f kao $f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ i pišući $\vartheta_{j,k} = H\psi_{j,k}$ dobivamo prikaz

$$\langle Hf, g \rangle_{L^2} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \langle H\psi_{j,k}, g \rangle_{L^2} = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \overline{\langle g, \vartheta_{j,k} \rangle_{L^2}},$$

tj.

$$\Lambda_{\text{HT}}(f, g) = \langle Hf, g \rangle_{L^2} = \sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f, \psi_I \rangle_{L^2} \overline{\langle g, \vartheta_I \rangle_{L^2}} \quad (7.16)$$

gdje za $I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ pišemo $\psi_I := \psi_{j,k}$ i $\vartheta_I := \vartheta_{j,k}$. Napomenimo odmah da prikaz (7.16) nije odviše koristan za izučavanje svojstava Hilbertove transformacije. Naime, premda je ψ odabrana da bude glatka funkcija s kompaktnim nosačem, njena slika $\vartheta = H\psi$ ne mora više biti takva funkcija. Osim toga, koeficijente $\langle H\psi_I, \vartheta_I \rangle_{L^2}$ ne znamo direktno ocijeniti. Naime, nismo bez razloga u poglavlju 5 inzistirali baš na ocjenama koeficijenata $\langle H\psi_I, \psi_J \rangle_{L^2}$ za različite intervale I i J (i to čak za mnogo općenitije Calderón-Zygmundove operatore).

Iz (7.16) barem možemo naslutiti da je dobar dijadski model Hilbertove transformacije seskvilinearna forma

$$\Lambda_{\text{HT},2,\varepsilon}(f, g) := \sum_{I \in \mathcal{D}} \varepsilon_I \langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2} \overline{\langle g, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2}},$$

kod koje smo ψ_I i ϑ_I zamijenili Haarovim valićima $\mathbb{h}_I$ i umetnuli smo proizvoljne (ali fiksirane) predznake $\varepsilon_I \in \{-1, 1\}$; $I \in \mathcal{D}$. Napomenimo kako je bilo nužno staviti predznake jer bi se inače cijela forma trivijalno prosumirala u $\langle f, g \rangle_{L^2}$. Ukoliko želimo dokazati ocjenu

$$|\Lambda_{\text{HT},2,\varepsilon}(f, g)| \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty \rangle$, možemo naprosto iskoristiti nejednakost za dijadsku kvadratnu funkciju (6.14) iz korolara 6.13. Naime, lijeva strana se može ocijeniti i raspisati kao

$$\begin{aligned} \left| \sum_{I \in \mathcal{D}} \varepsilon_I \langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2} \overline{\langle g, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2}} \right| &\leq \sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2} \langle g, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2}| \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{I \in \mathcal{D}} |I|^{-1/2} |\langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2}| \mathbb{1}_I |I|^{-1/2} |\langle g, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2}| \mathbb{1}_I, \end{aligned}$$

što je po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti (za sumu po I) najviše

$$\int_{\mathbb{R}} (S_{\text{dij}} f) (S_{\text{dij}} g) \leq \|S_{\text{dij}} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|S_{\text{dij}} g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}.$$

Alternativni način, koji čak daje optimalnu konstantu $\max\{p, p'\} - 1$, je dilatacijskom simetrijom svesti ocjenu na sumu po intervalima sadržanima u $[0, 1)$ i potom iskoristiti ocjenu za martingalnu transformaciju obzirom na dijadsku filtraciju.

* * *

Bilinearnu Hilbertovu transformaciju smo susreli već u odjeljku 5.6. Za posebni odabir parametra $\theta = -1$ možemo je zapisati

$$B(f, g)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(x+t) \frac{dt}{t}.$$

Opet B očigledno komutira s translacijama i dilatacijama. Dualizirajmo je nekom trećom funkcijom h kako bismo otkrili još jednu invarijantnost (tj. simetriju),

$$\Lambda_{\text{BHT}}(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}} \left(\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(x+t)h(x) \frac{dt}{t} dx \right).$$

Za svaki $\eta \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\text{BHT}}(M_{\eta}f, M_{\eta}g, M_{-2\eta}h) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(x-t)\eta} f(x-t) e^{2\pi i(x+t)\eta} g(x+t) e^{-4\pi i x \eta} h(x) \frac{dt}{t} dx = \Lambda_{\text{BHT}}(f, g, h). \end{aligned}$$

Takva simetrija se zove *modulacijska simetrija*, a šira klasa takvih formi (čiji je bilinearna Hilbertova transformacija reprezentativni predstavnik) se naziva *modulacijski invarijantne forme*. Povijesno su prvu L^p ocjenu za bilinernu Hilbertovu transformaciju pokazali Lacey i Thiele [LT97] i ona je glasila

$$|\Lambda_{\text{BHT}}(f, g, h)| \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} \|h\|_{L^r(\mathbb{R})} \quad (7.17)$$

za eksponente $2 < p, q, r < \infty$ takve da je $1/p + 1/q + 1/r = 1$. Kasnije su isti autori u [LT99] proširili raspon poznatih ocjena.

Ekvivalentno se na B može gledati kao na primjer tzv. *bilinearnog množitelja*, tj.

$$B(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} (-\pi i \operatorname{sgn}(\xi - \eta)) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) d\xi d\eta.$$

Pripomenimo kako je i obični točkovni produkt trivijalni primjer bilinearnog množitelja,

$$f(x)g(x) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i x(\xi + \eta)} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) d\xi d\eta$$

i on svakako zadovoljava iste ocjene (7.17). Dakle, promatranjem linearnih kombinacija spomenutih bilinearnih operatora, može se ocjena za B svesti na ocjenu za bilinearni množitelj pridružen simbolu $\mathbb{1}_{\langle 0, +\infty \rangle}$,

$$T(f, g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\langle 0, +\infty \rangle}(\xi - \eta) e^{2\pi i x(\xi + \eta)} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) d\xi d\eta.$$

Primijetimo da je simbol posljednjeg množitelja singularan (tj. nije gladak) duž pravca $\xi = \eta$, što može biti heurističko obrazloženje zašto ga je teže omeđiti nego linearne množitelje iz odjeljka 4.5.

Prvi prirodni korak je načiniti glatku dekompoziciju simbola:

$$\mathbb{1}_{\langle 0, +\infty \rangle}(\tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho(3^{-j}\tau),$$

gdje je ρ neka C^∞ funkcija s kompaktnim nosačem u intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. (Odabir broja 3 umjesto npr. broja 2 je sasvim nebitan, samo će nam kasnije biti sugestivan.) Ako stavimo $\psi = \check{\rho}$, tada možemo pisati

$$\check{\mathbb{1}}_{\langle 0, +\infty \rangle}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 3^j \psi(3^j t).$$

Posljedično se pripadna trilinearna forma dekomponira kao

$$\Lambda_T(f, g, h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x - t) g(x + t) h(x) 3^j \psi(3^j t) dt dx.$$

Nadalje vršimo glatku particiju jedinice kako bismo lokalizirali i u x varijabli,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k),$$

za neku C^∞ funkciju φ s kompaktnim nosačem. To nas konačno vodi na

$$\Lambda_T(f, g, h) = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} f(x - t) g(x + t) h(x) \varphi(x - k) 3^j \psi(3^j t) dt dx. \quad (7.18)$$

Primijetimo da je $\varphi(x - k)$ funkcija koja ima vremenski nosač oko točke k , dok je $\psi(3^j t)$ funkcija koja ima frekvencijski nosač oko točke 3^j . Ukoliko želimo komentirati dokaz ocjene (7.17), dobar metodički trik je u ovom trenutku prijeći na Cantorov model. Najjednostaviji takav model za koji se posljednja forma ne trivijalizira dobivamo za $d = 3$. Naime u slučaju $d = 2$ ne bismo mogli razlikovati $x \oplus t$ i $x \ominus t$.

* * *

Motivirani dekompozicijom (7.18) definiramo trijadski model bilinearne Hilbertove transformacije kao trilinearnu formu

$$\Lambda_{\text{BHT}, 3, \varepsilon}(f, g, h) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{I \text{ trijadski int.} \\ |I| = 3^{-j}}} \varepsilon_I \int_{(\mathbb{R}_+)^2} f(x \ominus t) g(x \oplus t) h(x) \mathbb{1}_I(x) 3^j \tilde{\mathbb{h}}_{[0, 3^{-j})}(t) dt dx,$$

gdje su sada $\varepsilon_I \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon_I| = 1$ proizvoljni kompleksni predznaci. Prisjetimo se da ovdje $\oplus$ and $\ominus$ označavaju operacije u Cantorovom modelu za $\mathbb{R}_+$ s karakteristikom $d = 3$, tj. zbrajamo i oduzimamo realne brojeve u bazi 3 bez prenošenja znamenki. Haarove funkcije u karakteristikici 3 glase

$$\tilde{h}_I = \mathbb{1}_{I_0} + \omega \mathbb{1}_{I_1} + \omega^2 \mathbb{1}_{I_2},$$

pri čemu su I_0, I_1, I_2 trećine intervala I i $\omega = e^{2\pi i/3}$. Zapravo je $\tilde{h}_I$ naprosto L^∞ -normalizirana prva Walshova funkcija $\tilde{w}_{I,1}$ na intervalu I u karakteristikici 3. Ubacivanje predznaka je bilo nužno jer bi se inače $\Lambda_{\text{BHT},3,\varepsilon}$ lako prosumirala u $\int_{(\mathbb{R}_+)^2} fgh$, što je trivijalno ograničeno. Tek nakon razbijanja po “skalama” i umetanja predznaka Cantorov model postaje vjeran euklidskom.

Supstituirajmo $y = x \ominus t$, tako da je

$$t = x \ominus y \quad \text{ i } \quad x \oplus t = 2x \ominus y = \ominus x \ominus y,$$

obzirom da radimo u karakteristikici 3. Koristeći “karakterna svojstva” Walshovih funkcija,

$$\mathbb{1}_I(x) \tilde{h}_{[0,3^{-j}]}(t) = \mathbb{1}_I(x) \mathbb{1}_I(y) \tilde{h}_{[0,3^{-j}]}(x \ominus y) = \tilde{h}_I(x) \tilde{h}_I(\ominus y) = \tilde{h}_I(x) \overline{\tilde{h}_I(y)},$$

trilinearna forma postaje

$$\Lambda_{\text{BHT},3,\varepsilon}(f, g, h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 3^j \sum_{\substack{I \text{ trijadski int.} \\ |I|=3^{-j}}} \varepsilon_I \int_{(\mathbb{R}_+)^2} h(x) f(y) g(\ominus x \ominus y) \tilde{h}_I(x) \overline{\tilde{h}_I(y)} dx dy.$$

Dekomponirajmo g u Walsh-Fourierov red,

$$g(z) = |I|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, \tilde{w}_{I,n} \rangle_{L^2} \tilde{w}_{I,n}(z),$$

tj.

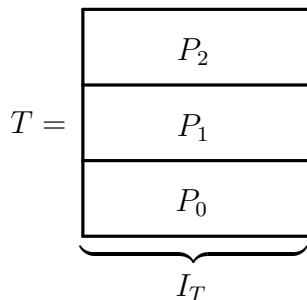
$$g(\ominus x \ominus y) = |I|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, \tilde{w}_{I,n} \rangle_{L^2} \overline{\tilde{w}_{I,n}(x) \tilde{w}_{I,n}(y)},$$

pri čemu su $\tilde{w}_{I,n}$ sada L^∞ -normalizirane Walshove funkcije, dok i dalje zadržavamo notaciju $w_{I,n}$ za njihove L^2 -normalizacije. Uvrštavanjem prethodnog i korištenjem svojstva

$$\tilde{w}_{I,m} \tilde{w}_{I,n} = \tilde{w}_{I,m \oplus n},$$

koje je samo eksplicitno zapisana činjenica da je dualna grupa od $\mathbb{Z}_d^{\mathbb{N}}$ izomorfna sa $(\mathbb{N}_0, \oplus)$, konačno slijedi

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\text{BHT},3,\varepsilon}(f, g, h) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 3^{2j} \sum_{\substack{I \text{ trijadski int.} \\ |I|=3^{-j}}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(\mathbb{R}_+)^2} h(x) f(y) \langle g, \tilde{w}_{I,n} \rangle_{L^2} \overline{\tilde{w}_{I,n \oplus 1}(x) \tilde{w}_{I,n \oplus 1}(y)} dx dy \right| \end{aligned}$$



Slika 7.6: Vertikalna podjela na pločice.

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{I \text{ trijadski int.}} \sum_{n=0}^{\infty} |I|^{-2} |\langle f, \tilde{w}_{I,n \oplus 1} \rangle_{L^2} \langle g, \tilde{w}_{I,n} \rangle_{L^2} \langle h, \tilde{w}_{I,n \ominus 1} \rangle_{L^2}| \\
 &= \sum_{I \text{ trijadski int.}} \sum_{n=0}^{\infty} |I|^{-1/2} |\langle f, w_{I,n \oplus 1} \rangle_{L^2} \langle g, w_{I,n} \rangle_{L^2} \langle h, w_{I,n \ominus 1} \rangle_{L^2}|.
 \end{aligned}$$

Desna strana se može ograničiti s tri međusobno simetrične trisublinearne forme oblika

$$\Lambda(f, g, h) = \sum_T |I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} \langle g, w_{P_1} \rangle_{L^2} \langle h, w_{P_2} \rangle_{L^2}|.$$

Suma se uzima po svim $T = I_T \times \Omega_T$ trijadskim pravokutnicima površine 3, koji su vertikalno podijeljeni na pločice P_0, P_1, P_2 , kao na slici 7.6. U svemu što slijedi *tri-pločica* će uvijek biti pravokutnik površine 3 čije stranice su trijadski intervali. Osnovno svojstvo im je da ako se donje trećine P_0 neke kolekcije tri-pločica presjecaju, tada su njihove srednje trećine P_1 međusobno disjunktne, a isto vrijedi i za njihove gornje trećine P_2 .

Teorem 7.13. *Ocjena*

$$\Lambda(f, g, h) \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}_+)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}_+)} \quad (7.19)$$

vrijedi kada je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $2 < p, q, r < \infty$.

Ostatak odjeljka je posvećen dokazu navedenog teorema. U velikoj mjeri pratimo slijed argumenata iz [Thi95]. Prije svega, primijetimo da zahvaljujući standardnim aproksimacijskim argumentima možemo pretpostaviti da su funkcije f, g, h omeđene i imaju kompaktan nosač. Također je dovoljno razmatrati samo tri-pločice T takve da je $|I_T| \geq 3^{-N}$ za neki dovoljno veliki prirodni broj N . Dokazana ocjena neće ovisiti o N pa se na samom kraju može pustiti $N \rightarrow \infty$. Prednost ovih restrikcija je da čine konačnim sve argumente koji slijede.

Definirajmo parcijalni uređaj na skupu svih tri-pločica tako da stavimo

$$T \preceq T' \quad \text{ako i samo ako je} \quad I_T \subseteq I_{T'} \text{ i } \Omega_T \supseteq \Omega_{T'}.$$

Primijetimo da su tri-pločice T i T' usporedive ako i samo ako je $T \cap T' \neq \emptyset$. Kolekcija tri-pločica $\mathcal{C}$ je *konveksna* ako za svake tri tri-pločice T, T', T'' vrijedi

$$(T \preceq T' \preceq T'') \& (T, T'' \in \mathcal{C}) \Rightarrow T' \in \mathcal{C}.$$

Lema 7.14. *Ako je $\mathcal{C}$ neka konačna konveksna kolekcija tri-pločica, tada se unija od $\mathcal{C}$ (kao podskup od $(\mathbb{R}_+)^2$) može dekomponirati u kolekciju $\mathcal{D}$ međusobno disjunktne pločice. Posebno, ortogonalna projekcija $\Pi_{\cup \mathcal{C}} = \Pi_{\cup \mathcal{D}}$ je dobro definirana. Nadalje, kolekcija $\mathcal{D}$ se može odabrati tako da vrijedi sljedeće: ako je T neka minimalna tri-pločica u $\mathcal{C}$, tada se T daje horizontalno podijeliti u tri disjunktne pločice iz $\mathcal{D}$.*

Dokaz leme 7.14. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po ukupnom broju tri-pločica u $\mathcal{C}$. Ona trivijalno vrijedi kada je $\mathcal{C}$ ili prazna ili sadrži samo jednu tri-pločicu. Pretpostavimo da nam je dana neprazna konačna konveksna kolekcija $\mathcal{C}$, uzmimo neku maksimalnu tri-pločicu $T \in \mathcal{C}$ i podijelimo je horizontalno u pločice R_0, R_1, R_2 . Za neki i promotrimo tri-pločicu Q_i koja se vertikalno dijeli na R_i i dvije druge pločice.

- Ako nijedna tri-pločica iz $\mathcal{C} \setminus \{T\}$ ne siječe R_i , tada R_i odabiremo u kolekciju $\mathcal{D}$.
- Ako postoji tri-pločica $T' \in \mathcal{C} \setminus \{T\}$ koja siječe R_i , tada vrijedi $T' \preceq Q_i \preceq T$. Po konveksnosti od $\mathcal{C}$ mora biti $Q_i \in \mathcal{C}$. Dakle, $\mathcal{C} \setminus \{T\}$ prekriva R_i pa se ta pločica može zasad zanemariti.

Obzirom da je T bila maksimalna, kolekcija $\mathcal{C} \setminus \{T\}$ je još uvijek konveksna te se može primijeniti pretpostavka indukcije. $\square$

Lema 7.15. *Za svaku tri-pločicu T vertikalno podijeljenu u pločice P_0, P_1, P_2 imamo*

$$\frac{1}{3} \|\Pi_T f\|_{L^\infty} \leq |I_T|^{-1/2} \max_{1 \leq j \leq 3} |\langle f, w_{P_j} \rangle_{L^2}| \leq \|\Pi_T f\|_{L^\infty}.$$

Dokaz leme 7.15. Lako je izvesti jednakost:

$$\begin{aligned} \|\Pi_T f\|_{L^\infty} &= \|\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} w_{P_0} + \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} w_{P_1} + \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2} w_{P_2}\|_{L^\infty} \\ &= |I_T|^{-1/2} \max \left\{ |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} + \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} + \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}|, \right. \\ &\quad \left| \langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} + \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} \omega + \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2} \omega^2 \right|, \\ &\quad \left| \langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} + \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} \omega^2 + \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2} \omega \right| \}. \end{aligned}$$

Lema je sada očigledna po nejednakosti trokuta. $\square$

Definirajmo *gustoću* tri-pločice T obzirom na funkciju f kao

$$\delta(T, f) := \sup_{T' \succeq T} \|\Pi_{T'} f\|_{L^\infty}.$$

Primijetimo da $\delta(T, f)$ pada u 0 kada $|I_T| \rightarrow +\infty$, naprosto jer je f omeđena i ima kompaktan nosač. Osim toga, tri-pločice s $\delta(T, f) = 0$ se mogu ignorirati kod sumiranja u formi Λ .

Uvest ćemo kolekcije tri-pločica koje imaju međusobno usporedive gustoće. Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$\mathcal{P}_k^f := \{T : 2^k \leq \delta(T, f) < 2^{k+1}\},$$

i označimo s $\mathcal{M}_k^f$ familiju svih maksimalnih tri-pločica u $\mathcal{P}_k^f$. Kolekcije $\mathcal{P}_k^g$, $\mathcal{M}_k^g$, $\mathcal{P}_k^h$, $\mathcal{M}_k^h$ se definiraju analogno. Nadalje, za svaku trojku cijelih brojeva k_1, k_2, k_3 stavljamo

$$\mathcal{P}_{k_1, k_2, k_3} := \mathcal{P}_{k_1}^f \cap \mathcal{P}_{k_2}^g \cap \mathcal{P}_{k_3}^h$$

i neka je $\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$ familija maksimalnih tri-pločica u $\mathcal{P}_{k_1, k_2, k_3}$. Uredimo sve tri-pločice iz $\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$ u niz $Q_1, Q_2, \dots$. Za svaki i promatramo podkolekciju od $\mathcal{P}_{k_1, k_2, k_3}$ koja se sastoji samo od tri-pločica dominiranih s Q_i , tj.

$$\mathcal{T}_i := \{T \in \mathcal{P}_{k_1, k_2, k_3} : T \preceq Q_i\}.$$

Neke od tri-pločica mogu pripadati u više tih kolekcija, ali to dozvoljavamo. Primijetimo da je $\mathcal{T}_i$ konačna konveksna kolekcija tri-pločica s najvećim elementom Q_i obzirom na uređaj $\preceq$. Konveksnost slijedi naprosto iz činjenice da je gustoća $\delta(\cdot, f)$ monotono padajuća obzirom na $\preceq$. Možemo reći da je $\mathcal{T}_i$ (*konveksno*) *stablo* s korijenom Q_i .

Za svako konveksno stablo tri-pločica $\mathcal{T}$ uvodimo formu $\Lambda_{\mathcal{T}}(f, g, h)$, definiranu sasvim istim izrazom kao Λ , ali sumirajući samo po tri-pločicama iz $T \in \mathcal{T}$. Ako je $\mathcal{T}$ neko stablo tri-pločica iz $\mathcal{P}_{k_1, k_2, k_3}$ dobiveno prethodnim postupkom, tada je ključna ocjena koju želimo pokazati

$$|\Lambda_{\mathcal{T}}(f, g, h)| \lesssim 2^{k_1+k_2+k_3} |I_{\mathcal{T}}|, \quad (7.20)$$

gdje je $I_{\mathcal{T}}$ vremenski interval korijena od $\mathcal{T}$. Kako bismo je dokazali označimo korijen od $\mathcal{T}$ naprosto sa Q i nadalje podijelimo $\mathcal{T}$ u tri podkolekcije koje sve sadrže Q , ali su inače disjunktne,

$$\mathcal{T}_0 := \{T \in \mathcal{T} : \Omega_{P_0} \supseteq \Omega_Q\},$$

$$\mathcal{T}_1 := \{T \in \mathcal{T} : \Omega_{P_1} \supseteq \Omega_Q\},$$

$$\mathcal{T}_2 := \{T \in \mathcal{T} : \Omega_{P_2} \supseteq \Omega_Q\}.$$

Primijetimo da $\mathcal{T}_i$ ne moraju nužno biti konveksne. Bez smanjenja općenitosti promatrat ćemo samo $\mathcal{T}_0$. Za tri-pločice $T \in \mathcal{T}_0$ znamo da su im srednje trećine P_1 međusobno disjunktne, kao i da su im gornje trećine P_2 također međusobno disjunktne. Zato su valni paketi w_{P_1} međusobno ortogonalni, a isto vrijedi i za w_{P_2} . Također primijetimo da po lemi 7.15 i konstrukciji vrijedi

$$|I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2}| \leq \|\Pi_T f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \delta(T, f) \leq 2^{k_1+1}.$$

Dakle, možemo ocijeniti:

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_0} |I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} \langle g, w_{P_1} \rangle_{L^2} \langle h, w_{P_2} \rangle_{L^2}| \\ & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_0} 2^{k_1} |\langle g, w_{P_1} \rangle_{L^2} \langle h, w_{P_2} \rangle_{L^2}| \\ & \leq 2^{k_1} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_0} |\langle g, w_{P_1} \rangle_{L^2}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_0} |\langle h, w_{P_2} \rangle_{L^2}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq 2^{k_1} \|\Pi_{\cup \mathcal{T}} g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|\Pi_{\cup \mathcal{T}} h\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \end{aligned}$$

Ovdje se pojavljuje ortogonalna projekcija $\Pi_{\cup\mathcal{T}}$ koja odgovara uniji cijelog stabla $\cup\mathcal{T} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$. Mogli smo je uvesti zahvaljujući lemi 7.14 i činjenici da je kolekcija $\mathcal{T}$ konveksna. Primijetimo da $\Pi_{\cup\mathcal{T}}g$ iščezava izvan $I_{\mathcal{T}}$ i da imamo $\|\Pi_{\cup\mathcal{T}}g\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \lesssim 2^{k_2}$. Kako bismo to vidjeli uzmimo $x \in I_{\mathcal{T}}$ i minimalnu $T_{\min} \in \mathcal{T}$ koja sadrži x . Po lemi 7.14 možemo pisati

$$\Pi_{\cup\mathcal{T}}g = \Pi_{T_{\min}}g + \Pi_{(\cup\mathcal{T}) \setminus T_{\min}}g$$

pa, uz zamjedbu da dvije funkcije na desnoj strani imaju disjunktne vremenske nosače, dobivamo

$$(\Pi_{\cup\mathcal{T}}g)(x) = (\Pi_{T_{\min}}g)(x) \quad \text{ i } \quad |(\Pi_{T_{\min}}g)(x)| \leq \delta(T_{\min}, g) \leq 2^{k_2+1}.$$

Konačno,

$$2^{k_1} \|\Pi_{\cup\mathcal{T}}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|\Pi_{\cup\mathcal{T}}(h)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq 2^{k_1} 2^{k_2} |I_{\mathcal{T}}|^{1/2} 2^{k_3} |I_{\mathcal{T}}|^{1/2},$$

kao što smo i trebali pokazati.

Sada dekomponiramo Λ u sumu formi $\Lambda_{\mathcal{T}}$ po svim $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ i svim stablima $\mathcal{T}$ s korijenima iz $\mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$. Preciznije, Λ je dominirana tom sumom jer se neke tri-pločice mogu ponavljati. Kako bismo završili dokaz od (7.19) koristeći (7.20), preostaje pokazati

$$\sum_{k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}} 2^{k_1+k_2+k_3} \sum_{Q \in \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}} |I_Q| \lesssim_{p, q, r} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r}. \quad (7.21)$$

Glavni trik je sljedeća opservacija. Fiksirajmo neku trojku $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ i neku $Q \in \mathcal{M}_{k_1}^f$. Promotrimo kolekciju svih $Q' \in \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$ takvih da je $Q' \preceq Q$. Takve pločice su neusporedive radi maksimalnosti, ali njihovi frekvencijski intervali $\Omega_{Q'}$ svi sadrže Ω_Q . Dakle, njihovi vremenski intervali $I_{Q'}$ moraju biti disjunkt i sadržani su u I_Q pa vrijedi

$$\sum_{\substack{Q' \in \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3} \\ Q' \preceq Q}} |I_{Q'}| \leq |I_Q|.$$

Sada možemo prosumirati po svim $Q \in \mathcal{M}_{k_1}^f$ i primijetiti da se svaka $Q' \in \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}$ pojavljuje barem jednom na lijevoj strani jer je ona sigurno dominirana nekim maksimalnim elementom iz veće kolekcije. Dakle,

$$\sum_{Q' \in \mathcal{M}_{k_1, k_2, k_3}} |I_{Q'}| \leq \sum_{Q \in \mathcal{M}_{k_1}^f} |I_Q|.$$

Isto vrijedi za $\mathcal{M}_{k_2}^g$ i $\mathcal{M}_{k_3}^h$. Prema tome, preostaje dokazati

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}} 2^{k_1+k_2+k_3} \min \left(\sum_{Q \in \mathcal{M}_{k_1}^f} |I_Q|, \sum_{Q \in \mathcal{M}_{k_2}^g} |I_Q|, \sum_{Q \in \mathcal{M}_{k_3}^h} |I_Q| \right) \\ \lesssim_{p, q, r} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Lema 7.16. *Za $2 < p < \infty$ imamo*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} \sum_{Q \in \mathcal{M}_k^f} |I_Q| \lesssim_p \|f\|_{L^p}^p.$$

Dokaz leme 7.16. Promotrimo sljedeću verziju maksimalne funkcije:

$$M_2 f := \sup_{I \text{ trijadski interval}} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f|^2 \right)^{1/2} \mathbb{1}_I.$$

Jasno je da je $M_2 f$ dominirana drugim korijenom necentrirane maksimalne funkcije primijenjene na $|f|^2$, što nam daje omeđenost od M_2 na $L^p(\mathbb{R}_+)$ za svaki $p \in \langle 2, \infty \rangle$.

Za svaku $Q \in \mathcal{M}_k^f$ i svaku tri-pločicu $\tilde{Q}$ takvu da je $\tilde{Q} \succ Q$ znamo da zbog maksimalnosti od Q vrijedi $\tilde{Q} \notin \mathcal{P}_k^f$, tj. $\|\Pi_{\tilde{Q}} f\|_{L^\infty} < 2^k$ pa je

$$\|\Pi_Q f\|_{L^\infty} = \delta(Q, f) \geq 2^k.$$

Nadalje, ako vertikalno dekomponiramo Q u pločice P_0, P_1, P_2 , tada po lemi 7.15 možemo odabrati jednu od njih, označenu s P_Q , za koju vrijedi

$$|I_Q|^{-1/2} |\langle f, w_{P_Q} \rangle_{L^2}| \geq \frac{1}{3} 2^k > 2^{k-2}. \quad (7.23)$$

Dakle, za $x \in I_Q$ imamo

$$(M_2 f)(x) \geq \left(\frac{1}{|I_Q|} \int_{I_Q} |f|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{|I_Q|} \int_{I_Q} |f| \geq \frac{|\langle f, \tilde{w}_{P_Q} \rangle_{L^2}|}{|I_Q|} = \frac{|\langle f, w_{P_Q} \rangle_{L^2}|}{|I_Q|^{1/2}} > 2^{k-2},$$

što nam daje

$$I_Q \subseteq A_k := \{M_2 f > 2^{k-2}\}.$$

Primijetimo da u ovom dokazu još nismo koristili nikakvu ortogonalnost. Prisjetimo se da su tri-pločice u $\mathcal{M}_k^f$ međusobno disjunktne (radi maksimalnosti) pa $\{P_Q : Q \in \mathcal{M}_k^f\}$ čini kolekciju disjunktne pločice. Po (7.23) i ortogonalnosti valnih paketa w_{P_Q} imamo

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}_k^f} |I_Q| \lesssim 2^{-2k} \sum_{Q \in \mathcal{M}_k^f} |\langle f, w_{P_Q} \rangle_{L^2}|^2 = 2^{-2k} \sum_{Q \in \mathcal{M}_k^f} |\langle f \mathbb{1}_{A_k}, w_{P_Q} \rangle_{L^2}|^2 \leq 2^{-2k} \|f\|_{L^2(A_k)}^2.$$

Promotrimo kolekciju svim maksimalnih trijadskih intervala J sadržanih u A_k — oni su međusobno disjunktne i potpuno prekrivaju A_k . Za neki takav J neka $\tilde{J}$ označava jedinstveni tri puta veći trijadski interval koji sadrži J , tako da zahvaljujući maksimalnosti znamo

$$\left(\frac{1}{|\tilde{J}|} \int_{\tilde{J}} |f|^2 \right)^{1/2} \leq 2^{k-2},$$

što povlači

$$\int_J |f|^2 \lesssim 2^{2k} |J|.$$

Zbrajanjem po svim takvim J dobivamo

$$\|f\|_{L^2(A_k)}^2 \lesssim 2^{2k} |A_k|.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} \sum_{Q \in \mathcal{M}_k^f} |I_Q| &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(p-2)k} \|f\|_{L^2(A_k)}^2 \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} |A_k| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{pk} |\{M_2 f > 2^{k-2}\}| \sim_p \|M_2 f\|_{L^p}^p \lesssim_p \|f\|_{L^p}^p, \end{aligned}$$

jer je M_2 omeđena na $L^p(\mathbb{R}_+)$. □

Kako bismo omeđili (7.22) rastavljamo sumu na tri dijela, ovisno o tome koji je najveći od brojeva

$$\frac{2^{pk_1}}{\|f\|_{L^p}^p}, \quad \frac{2^{qk_2}}{\|g\|_{L^q}^q}, \quad \frac{2^{rk_3}}{\|h\|_{L^r}^r}.$$

Radi simetrije je dovoljno pokazati kako kontrolirati prvi dio sume kada je $\frac{2^{pk_1}}{\|f\|_{L^p}^p} \geq \frac{2^{qk_2}}{\|g\|_{L^q}^q}$ i $\frac{2^{pk_1}}{\|f\|_{L^p}^p} \geq \frac{2^{rk_3}}{\|h\|_{L^r}^r}$. Zapišimo ga

$$\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \frac{2^{pk_1}}{\|f\|_{L^p}^p} \left(\sum_{Q \in \mathcal{M}_{k_1}^F} |I_Q| \right) \sum_{k_2, k_3} \left(\frac{2^{qk_2} / \|g\|_{L^q}^q}{2^{pk_1} / \|f\|_{L^p}^p} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2^{rk_3} / \|h\|_{L^r}^r}{2^{pk_1} / \|f\|_{L^p}^p} \right)^{\frac{1}{r}} \lesssim_{p,q,r} 1,$$

pozbrojimo dva konvergentna geometrijska reda i konačno iskoristimo lemu 7.16. Time je konačno završen dokaz teorema 7.13.

U ovom poglavlju smo nastojali iznijeti neke tehnike vremensko-frekvencijske analize na primjeru pojednostavljenog modela bilinearne Hilbertove transformacije. Nakon što je čitatelj savladao osnovne ideje, imat će manje poteškoća prilikom čitanja tehnički složenijih dokaza iz članaka [LT97] i [LT99].

Poglavlje 8

Tehnika Bellmanovih funkcija

Ova metoda je dobila ime po primijenjenom matematičaru Bellmanu¹ i inspirirana je njegovim radom iz područja stohastičke optimalne kontrole. U području matematičke analize prvi ju je koristio Burkholder (u varijanti dokaza teorema 6.11), a potom su je razvili Nazarov², Treil³ i Volberg⁴ te mnogi drugi kako bi ponovno dokazali i pojačali mnoge klasične rezultate iz harmonijske analize. Tehnika najbolje radi u dijadskim (ili općenitije Cantorovim) modelima, a u nekom smislu je ekvivalentna ideji tzv. “indukcije po skalama”. Ustvari je to naprosto pažljivo postavljena matematička indukcija.

Ovo je gruba skica pristupa:

- Odaberimo problem koji ima određenu samo-simetriju.
Tipično radimo s dijadskim intervalima, a pod “simetrijom” mislimo invarijantnost na translacije i dilatacije.
- Svedimo problem na omeđivanje neke invarijantne veličine.
Npr. veličina ne ovisi o odabiru dijadskog intervala (tj. njegove “pozicije” i “skale”).
- Zapišimo jednadžbu/nejednadžbu za tu invarijantnu veličinu koristeći simetriju problema.
Npr. rastavimo dijadski interval na lijevu i desnu polovicu.
- Radimo unatrag i omeđimo invarijantnu veličinu uz pretpostavku da već imamo (super-)rješenje izvedene jednadžbe/nejednadžbe.
Ovdje koristimo neku vrstu “indukcije po skalama”.
- Nađimo (super-)rješenje izvedene jednadžbe/nejednadžbe.
Ovo je glavni dio dokaza i često zahtijeva dobru heuristiku te ponešto pogađanja ili eksperimentiranja, a sama provjera je obično direktna.

Obzirom da je gornji plan još uvijek donekle nejasan, detaljno ćemo ga ilustrirati na nekoliko primjera. Primjeri iz odjeljaka 8.1, 8.2 i 8.4 preuzeti su iz preglednog rada [NT96], dok je odjeljak 8.3 posebni slučaj razmatranja iz članka [KS18].

¹Richard Ernest Bellman (1920–1984), američki matematičar.

²Fedor L’vovich Nazarov (1967), rusko-američki matematičar.

³Sergei Treil (1961), rusko-američki matematičar.

⁴Aleksandr L’vovich Volberg (1956), rusko-američki matematičar.

8.1. Dijadski Carlesonov teorem ulaganja

Neka nam (kao i ranije) $\mathcal{D}$ označava kolekciju svih dijadskih intervala u $\mathbb{R}$ i pretpostavimo da je dana kolekcija nenegativnih realnih brojeva $\mu = (\mu_I)_{I \in \mathcal{D}}$ koja zadovoljava tzv. *Carlesonov uvjet*:

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} \mu_J \leq |I| \quad \text{za svaki } I \in \mathcal{D}.$$

Tipični primjer takve kolekcije se dobije ako krenemo od neke Borelove mjere, također označene s μ , na gornjoj poluravnini $\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty \rangle$ koja ima tzv. *dijadsko Carlesonovo svojstvo*

$$\mu(I \times \langle 0, |I| \rangle) \leq |I| \quad \text{za svaki } I \in \mathcal{D}$$

te naprosto stavimo $\mu_I := \mu(I \times \langle \frac{|I|}{2}, |I| \rangle)$. Za svaku nenegativnu lokalno integrabilnu funkciju f i svaki dijadski interval I ćemo kao i ranije označavati $[f]_I := \frac{1}{|I|} \int_I f$. *Dijadski Carlesonov teorem ulaganja* tada glasi

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} \mu_I [f]_I^p \lesssim_p \|f\|_{L^p}^p \quad (8.1)$$

za svaki $1 < p < \infty$, a mi ćemo se radi jednostavnosti usredotočiti na posebni slučaj $p = 2$. Taj rezultat se najčešće dokazuje nekim argumentom zaustavljanja, ali mi ćemo dati elegantan i zaokružen dokaz koji koristi samo “zdravi razum”.

Primijetimo da je dovoljno pokazati

$$\sum_{J \subseteq I} \mu_J [f]_J^2 \lesssim \int_I f^2$$

za svaki interval $I \in \mathcal{D}$, jer se tada željena nejednakost može lako dobiti na limesu kada $N \rightarrow \infty$ posljednjih nejednakosti za $I = [0, 2^N \rangle$ i $I = [-2^N, 0 \rangle$ te korištenjem teorema o monotonij konvergenciji. Nadalje, možemo još sve normalizirati dijeljenjem s $|I|$, tako da zapravo dokazujemo ocjenu:

$$\frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} \mu_J [f]_J^2 \lesssim [f^2]_I. \quad (8.2)$$

Lijeva strana je veličina koja se “lijepo” skalira, kao što se vidi iz

$$\frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} \mu_J [f]_J^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{|I_{\text{lijevo}}|} \sum_{J \subseteq I_{\text{lijevo}}} \mu_J [f]_J^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{|I_{\text{desno}}|} \sum_{J \subseteq I_{\text{desno}}} \mu_J [f]_J^2 + \frac{\mu_I}{|I|} [f]_I^2. \quad (8.3)$$

Također primijetimo koje informacije o f i μ će biti korisno pratiti tijekom induktivnog postupka: trebat ćemo prosjeke $[f]_I$ i $[f^2]_I$ te ćemo također trebati neku kvantifikaciju Carlesonovog uvjeta, npr. veličinu $\frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} \mu_J$.

Zato sada definiramo *apstraktnu Bellmanovu funkciju* kao

$$\mathcal{B}(u, U, M) := \sup_{f, \mu} \frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} \mu_J [f]_J^2,$$

pri čemu se supremum uzima po svim f i μ kao gore koji još zadovoljavaju

$$[f]_I = u, \quad [f^2]_I = U, \quad \frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} \mu_J = M$$

za neke fiksne parametre u, U, M . Primijetimo da gornja veličina ne ovisi o odabiru dijadskog intervala I ; naš cilj je bio konstruirati upravo takvu invarijantnu veličinu.

Diskutirajmo neka svojstva tako definirane funkcije $\mathcal{B}$.

(B1) *Domena*:

$$u, U, M \geq 0, \quad u^2 \leq U, \quad 0 \leq M \leq 1.$$

Prvi uvjet je Jensenova nejednakost: $u^2 = (\frac{1}{|I|} \int_I f)^2 \leq \frac{1}{|I|} \int_I f^2 = U$, dok je $0 \leq M \leq 1$ naprosto pretpostavljeni Carlesonov uvjet. Trebalo bi još uložiti nešto truda da se pokaže i obrat: za takve parametre u, U, M postoje f i μ kao gore pa se supremum doista uzima po nepraznom skupu. Ipak, to nam neće strogo trebati u dokazu pa preskačemo taj detalj.

(B2) *Slika*:

$$0 \leq \mathcal{B}(u, U, M) \lesssim U.$$

Ovo je naprosto naša slutnja da ocjena (8.2) doista vrijedi.

(B3) *Skaliranje*:

$$\mathcal{B}(u, U, M) \geq \frac{1}{2} \mathcal{B}(u_1, U_1, M_1) + \frac{1}{2} \mathcal{B}(u_2, U_2, M_2) + M_3 u^2$$

kad god je $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, $U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$, $M = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) + M_3$ i sve tri trojke varijabli leže u domeni.

Ova nejednakost se dobiva iz skalirajuće jednakosti (8.3) uzimanjem supremuma po svim f i μ takvima da je $[f]_{I_{\text{lijevo}}} = u_1$, $[f]_{I_{\text{desno}}} = u_2$, $[f^2]_{I_{\text{lijevo}}} = U_1$, $[f^2]_{I_{\text{desno}}} = U_2$, $\frac{1}{|I_{\text{lijevo}}|} \sum_{J \subseteq I_{\text{lijevo}}} \mu_J = M_1$, $\frac{1}{|I_{\text{desno}}|} \sum_{J \subseteq I_{\text{desno}}} \mu_J = M_2$, $\frac{\mu_I}{|I|} = M_3$. U definiciji od $\mathcal{B}(u, U, M)$ pak uzimamo supremum po većem skupu (npr. određeni su prosjeci od f i f^2 samo na cijelom intervalu I) pa je to razlog što imamo nejednakost (ali ne i jednakost).

Važniji dio metode (i zapravo jedini relevantan za sam dokaz od (8.2)) je obrat navedenih opservacija. Pretpostavljajući da već imamo neku funkciju $\mathcal{B}$ sa svojstvima (B1)–(B3) izvodimo traženu ocjenu (8.2). Uzmimo dakle nenegativnu funkciju f i kolekciju μ koja zadovoljava Carlesonov uvjet. Primijenjujući n puta svojstvo (B3) dobivamo

$$\begin{aligned} & |I| \mathcal{B}\left([f]_I, [f^2]_I, \frac{1}{|I|} \sum_{K \subseteq I} \mu_K\right) \\ & \geq \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}, J \subseteq I \\ |J| = 2^{-n}|I|}} |J| \mathcal{B}\left([f]_J, [f^2]_J, \frac{1}{|J|} \sum_{K \subseteq J} \mu_K\right) + \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}, J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} \mu_J [f]_J^2 \end{aligned}$$

pa korištenjem nenegativnosti od $\mathcal{B}$ i druge nejednakosti iz (B2) slijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J| > 2^{-n}|I|}} \mu_J [f]_J^2 \leq \mathcal{B}([f]_I, [f^2]_I, \frac{1}{|I|} \sum_{K \subseteq I} \mu_K) \lesssim [f^2]_I.$$

Uzimanjem $n \rightarrow \infty$ doista proizlazi (8.2).

Poanta cijele ove priče je da je tražena ocjena (8.2) ekvivalentna s postojanjem funkcije $\mathcal{B}$ koja udovoljava svojstva (B1)–(B3). Obzirom da smo primarno zainteresirani za dokazivanje (8.2), jedna od dvije implikacije nam nije od presudne važnosti, ali je ugodno znati da naš pristup ne vodi u stranputicu: ukoliko vjerujemo u (8.2), tada tražena funkcija $\mathcal{B}$ mora postojati, premda je možda nije lako eksplicitno pronaći.

* * *

Sada ćemo koristiti nešto heuristike kako bismo našli neku sasvim određenu funkciju $\mathcal{B}$ sa svojstvima (B1)–(B3). Naprimjer, ograničit ćemo potragu samo na funkcije $\mathcal{B}$ koje su klase C^∞ . Lako se vidi da je tada skalirajuća nejednakost (B3) ekvivalentna sa:

- $\mathcal{B}$ je konkavna kao funkcija triju realnih varijabli,
- $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial M} \geq u^2$.

Iz (B2) naslućujemo linearno ponašanje u varijabli U pa pretpostavimo da $\mathcal{B}$ poprima oblik

$$\mathcal{B}(u, U, M) = cU - \alpha(u, M)$$

pri čemu je $c > 0$ neka konstanta, a α zadovoljava:

- $\alpha: [0, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je C^∞ -funkcija,
- $|\alpha(u, M)| \lesssim u^2$,
- α je konveksna,
- $\frac{\partial \alpha}{\partial M} \leq -u^2$.

Motivirani drugim svojstvom uvodimo konačnu supstituciju

$$\alpha(u, M) = \gamma(M)u^2$$

za neku C^∞ -funkciju $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Drugi uvjet na α je sada naprosto omeđenost od γ na $[0, 1]$, dok je četvrti uvjet $\gamma'(M) \leq -1$. Hesseova matrica od α glasi

$$\begin{bmatrix} 2\gamma(M) & 2\gamma'(M)u \\ 2\gamma'(M)u & \gamma''(M)u^2 \end{bmatrix}$$

i ona će biti pozitivno semidefinitna ako je $\gamma(M) > 0$ i $\gamma(M)\gamma''(M) - 2\gamma'(M)^2 \geq 0$. Obzirom da je

$$\frac{d^2}{dM^2} \gamma(M)^{-1} = \frac{1}{2} \gamma(M)^{-3} (2\gamma'(M)^2 - \gamma(M)\gamma''(M)),$$

posljednji uvjet je ekvivalentan s konkavnosti od $M \mapsto \gamma(M)^{-1}$. Najjednostavniji odabir je $\gamma(M)^{-1} = a(1 + M)$, tj. $\gamma(M) = \frac{b}{1+M}$ za neku konstantu $b > 0$. Iz $\gamma'(M) \leq -1$ zaključujemo $b \geq 4$ pa je jedan dobar odabir od γ dan sa $\gamma(M) = \frac{4}{1+M}$. Vidimo da možemo uzeti $c = 4$ te je konačno jedna *konkretna Bellmanova funkcija* dana formulom

$$\mathcal{B}(u, U, M) = 4 \left(U - \frac{u^2}{1 + M} \right).$$

Gornji dokaz daje konstantu 4 za Carlesonov teorem ulaganja u slučaju $p = 2$. Može se pokazati da je ta konstanta najbolja moguća, dok je za općeniti $1 < p < \infty$ optimalna konstanta u (8.1) jednaka $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$. Bellmanova funkcija koja daje najbolju konstantu za općeniti eksponent p nađena je u radu [VV09], dok je modifikacija gornje konstrukcije u svrhu dokaza nejednakosti (8.1) s optimalnom konstantom pregledno izložena u diplomskom radu [Buz15].

8.2. Dijadska maksimalna funkcija

U ovom se odjeljku prisjećamo dijadske maksimalne funkcije M_{dij} , koja je bila definirana formulom (6.8). U korolaru 6.9 smo već bili dokazali L^p ocjene za operator M_{dij} i tamo navedena konstanta $p/(p-1)$ je najbolja moguća. Ovdje radi jednostavnosti razmatramo slučaj $p = 2$, ne marimo za optimalnu konstantu i dajemo dokaz tehnikom Bellmanovih funkcija, koji je koristan iz metodičkih razloga.

Za proizvoljnu nenegativnu lokalno integrabilnu funkciju g dokazujemo

$$\int_{\mathbb{R}} (M_{\text{dij}} g)^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}} g^2. \quad (8.4)$$

Naivni pristup lokalizaciji gornje ocjene bi bio da pokušamo dokazati $[(M_{\text{dij}} g)^2]_I \lesssim [g^2]_I$ za svaki dijadski interval $I \in \mathcal{D}$. Ipak, odmah vidimo da ta formulacija ne bi bila dobra, jer vrijednosti od g izvan intervala I ne utječu na desnu, ali utječu na lijevu stranu nejednakosti. Pristup možemo popraviti tako da desnoj strani dodamo član koji ovisi i o takvim vrijednostima od g . Vidjet ćemo da je praktično za proizvoljnu nenegativnu lokalno integrabilnu funkciju f i proizvoljni interval $I \in \mathcal{D}$ dokazivati

$$\left[\sup_{J \in \mathcal{D}} [f]_J^2 \mathbb{1}_J \right]_I \lesssim [f^2]_I + \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I}} [f]_J^2. \quad (8.5)$$

Argumentirajmo zašto su ocjene (8.4) i (8.5) ekvivalentne.

Dokaz od (8.4) $\implies$ (8.5). Koristeći (8.4) za $g = f \mathbb{1}_I$ možemo pisati

$$\left[\sup_{J \in \mathcal{D}} [f]_J^2 \mathbb{1}_J \right]_I \lesssim \left[\sup_{J \in \mathcal{D}} [f \mathbb{1}_I]_J^2 \mathbb{1}_J \right]_I + \left[\sup_{J \in \mathcal{D}} [f \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus I}]_J^2 \mathbb{1}_J \right]_I \stackrel{(8.4)}{\lesssim} [f^2]_I + \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I}} [f \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus I}]_J^2,$$

čime je dokazano (8.5). □

Dokaz od (8.5) $\implies$ (8.4). Kao prvo, dovoljno je dokazati (8.4) za funkcije g koje iščezavaju izvan $[0, +\infty)$ ili iščezavaju izvan $\langle -\infty, 0 \rangle$; bez smanjenja općenitosti usredotočimo se samo na slučaj pozitivnog realnog polupravca. Nadalje, uzmimo $N \in \mathbb{N}$ te iskoristimo (8.5) uz $I = [0, 2^N)$ i $f = g \mathbb{1}_{[0, 2^N)}$:

$$\begin{aligned} \int_{[0, +\infty)} \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq [0, 2^N)}} [g]_J^2 \mathbb{1}_J &= \int_{[0, 2^N)} \sup_{J \in \mathcal{D}} [f]_J^2 \mathbb{1}_J \\ &\stackrel{(8.5)}{\lesssim} \int_{[0, 2^N)} f^2 + 2^N [f]_{[0, 2^N)}^2 \leq 2 \int_{[0, 2^N)} f^2 \lesssim \int_{[0, +\infty)} g^2. \end{aligned}$$

Konačno, puštanjem $N \rightarrow \infty$ i korištenjem teorema o monotonij konvergenciji doista dobivamo (8.4). $\square$

Postavlja se pitanje izbora kontrolnih parametara, a oblik od (8.5) već sugerira da je potrebno “pamtiti” prosjeke od f i f^2 na I ,

$$u = [f]_I \quad \text{i} \quad U = [f^2]_I,$$

kao i maksimum prosjeka funkcije f na svim dijadskim intervalima koji sadrže I ,

$$v = \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I}} [f]_J.$$

Ovog puta definiramo apstraktnu Bellmanovu funkciju kao

$$\mathcal{B}(u, U, v) := \sup_f \left[\sup_{J \in \mathcal{D}} [f]_J^2 \mathbb{1}_J \right]_I, \quad (8.6)$$

pri čemu se supremum uzima po funkcijama f koje zadovoljavaju

$$[f]_I = u, \quad [f^2]_I = U, \quad \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I}} [f]_J = v$$

za neke fiksirane parametre u, U, v .

Opet diskutiramo svojstva od $\mathcal{B}$.

(B1) *Domena:*

$$u, U, v \geq 0, \quad u^2 \leq U, \quad u \leq v.$$

Uvjet $u^2 \leq U$ je ponovno Jensenova nejednakost, dok je $u \leq v$ očigledno po definiciji. Ni sada ne marimo za dokaz postojanja funkcije f kojoj odgovara proizvoljna trojka parametara iz domene.

(B2) *Slika:*

$$v^2 \leq \mathcal{B}(u, U, v) \lesssim U + v^2.$$

Naime, izraz čiji prosjek na I gledamo je barem v^2 na čitavom tom intervalu, što daje $\mathcal{B}(u, U, v) \geq v^2$. Druga nejednakost je upravo naše vjerovanje u (8.5).

(B3) *Skaliranje*:

$$\mathcal{B}(u, U, v) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1, U_1, \max\{u_1, v\}) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2, U_2, \max\{u_2, v\})$$

kad god sve tri trojke varijabli leže u domeni i vrijede relacije $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ i $U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$.

Ovdje se uzima supremum po nenegativnim funkcijama f takvima da je $[f]_{I_{\text{lijevo}}} = u_1$, $[f]_{I_{\text{desno}}} = u_2$, $[f^2]_{I_{\text{lijevo}}} = U_1$, $[f^2]_{I_{\text{desno}}} = U_2$ i $\sup_{J \in \mathcal{D}, J \supseteq I} [f]_J = v$ te uočava

$$\sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I_{\text{lijevo}}}} [f]_J = \max \left\{ [f]_{I_{\text{lijevo}}}, \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I}} [f]_J \right\} = \max\{u_1, v\}, \quad \sup_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \supseteq I_{\text{desno}}}} [f]_J = \max\{u_2, v\}.$$

Pritom je potrebno malo više pažnje jer funkcije koje aproksimiraju supremume na I_{lijevo} i I_{desno} ne možemo uzimati nezavisno. Ostavimo zato dokaz nejednakosti (B3) čitatelju; nama je ionako važniji obratni izvod.

Pretpostavimo da već raspolažemo funkcijom $\mathcal{B}$ sa svojstvima (B1)–(B3) te izvedimo željenu ocjenu (8.5). Uzmimo nenegativnu lokalno integrabilnu funkciju f i proizvoljni $I \in \mathcal{D}$. Ako n puta primijenimo svojstvo (B3) višestruko koristeći

$$\max \left\{ [f]_{J_{\text{lijevo}}}, \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J}} [f]_K \right\} = \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J_{\text{lijevo}}}} [f]_K, \quad \max \left\{ [f]_{J_{\text{desno}}}, \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J}} [f]_K \right\} = \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J_{\text{desno}}}} [f]_K,$$

dobit ćemo

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}([f]_I, [f^2]_I, \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq I}} [f]_K) \\ & \geq 2^{-n} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}, J \subset I \\ |J|=2^{-n}|I|}} \mathcal{B}([f]_J, [f^2]_J, \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J}} [f]_K). \end{aligned}$$

Potom korištenjem (B2) odavde dobivamo

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \in \mathcal{D}, J \subset I \\ |J|=2^{-n}|I|}} |J| \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq J}} [f]_K^2 \lesssim [f^2]_I + \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq I}} [f]_K^2,$$

tj.

$$\left[\sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ |K| \geq 2^{-n}}} [f]_K^2 \mathbb{1}_J \right]_I \lesssim [f^2]_I + \sup_{\substack{K \in \mathcal{D} \\ K \supseteq I}} [f]_K^2.$$

Uzimanjem $n \rightarrow \infty$ i korištenjem teorema o monotonij konvergenciji slijedi (8.5).

* * *

Preostaje doista i naći Bellmanovu funkciju koja zadovoljava uvjete (B1)–(B3). Obzirom da varijabla U ima isti red veličine kao u^2 , dok varijable u i v imaju jednake redove veličina, pokušajmo ovog puta pronaći Bellmanovu funkciju u obliku polinoma

$$\mathcal{B}(u, U, v) = Au^2 + Buv + Cv^2 + DU$$

za neke realne parametre A, B, C, D . Isprobavanjem dolazimo do $A = 0$, $B = -4$, $C = 2$, $D = 4$, tj.

$$\mathcal{B}(u, U, v) = 4U - 4uv + 2v^2.$$

Taj izbor je dobar za (B2), jer za $u, U, v \geq 0$, $u^2 \leq U$, $u \leq v$ imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, U, v) - v^2 &= 4U - 4uv + v^2 \geq 4u^2 - 4uv + v^2 = (2u - v)^2 \geq 0, \\ 4(U + v^2) - \mathcal{B}(u, U, v) &= 4uv + 2v^2 \geq 0, \end{aligned}$$

dok za trojke varijabli iz domene koje zadovoljavaju $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ i $U = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, U, v) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1, U_1, \max\{u_1, v\}) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2, U_2, \max\{u_2, v\}) \\ = -4uv + 2u_1 \max\{u_1, v\} + 2u_2 \max\{u_2, v\} + 2v^2 - \max\{u_1, v\}^2 - \max\{u_2, v\}^2. \end{aligned}$$

Razlikovanjem slučajeva posljednji izraz možemo zapisati

$$\begin{cases} -4uv + 2u_1v + 2u_2v + 2v^2 - v^2 - v^2 = 0 & \text{ako je } v \geq \max\{u_1, u_2\}, \\ -4uv + 2u_1v + 2u_2^2 + 2v^2 - v^2 - u_2^2 = (u_2 - v)^2 \geq 0 & \text{ako je } u_1 \leq v < u_2, \\ (u_1 - v)^2 \geq 0 & \text{ako je } u_2 \leq v < u_1 \end{cases}$$

pa smo provjerili i (B3).

Traženje optimalne konstante zahtijeva malo pažljiviji pristup i vodi na tzv. homogeni Monge⁵-Ampèreovu⁶ parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Nju se pak može riješiti metodom karakteristika te na taj način čak naći formulu za apstraktnu Bellmanovu funkciju (8.6); to je detaljno raspisano u diplomskom radu [Buz15].

8.3. Dijadski paraprodukt

Dijadski paraprodukt je trilinearna forma

$$\Lambda(f, g, h) := \sum_{I \in \mathcal{D}} |I|^{-1} \langle f, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle g, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \langle h, \mathbb{h}_I \rangle_{L^2(\mathbb{R})},$$

pri čemu su $\mathbb{h}_I$ Haarovi valići na $\mathbb{R}$ normalizirani u L^2 -normi, dani formulom (5.2). Kako bi forma bila dobro definirana (i kasniji argumenti bili konačni) možemo pretpostaviti da su funkcije f, g, h konačne linearne kombinacije karakterističnih funkcija dijadskih

⁵Gaspard Monge (1746–1818), francuski matematičar.

⁶André-Marie Ampère (1775–1836), francuski fizičar i matematičar.

intervala. U terminima prosjeka na intervalima gornji izraz je do na multiplikativnu konstantu moguće zapisati kao

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} |J| [f]_J ([g]_{J_{\text{lijevo}}} - [g]_{J_{\text{desno}}}) ([h]_{J_{\text{lijevo}}} - [h]_{J_{\text{desno}}}).$$

Dobro je poznato da paraproduct zadovoljava ocjenu

$$|\Lambda(f, g, h)| \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} \|h\|_{L^r(\mathbb{R})} \quad (8.7)$$

za eksponente $1 < p, q, r < \infty$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Takva ocjena se tipično pokazuje tako da formu kontroliramo dijadskom maksimalnom funkcijom (6.8) i dijadskom kvadratnom funkcijom (6.14); pogledajte zadatak 8.1. Ovdje ćemo dati direktni dokaz (bez interpolacije i sl.) od (8.7), a radi jednostavnosti ćemo se ograničiti na odabir $p = q = r = 3$.

Možemo pretpostaviti da su f, g, h nenegativne jer ih inače rastavimo na realne i imaginarne te pozitivne i negativne dijelove. Nadalje, praktično je zamijeniti desnu stranu $\|f\|_{L^3} \|g\|_{L^3} \|h\|_{L^3}$ većom veličinom $\frac{1}{3}(\|f\|_{L^3}^3 + \|g\|_{L^3}^3 + \|h\|_{L^3}^3)$. Dakle, dokazujemo nehomogenu nejednakost

$$\sum_J |J| [f]_J | [g]_{J_{\text{lijevo}}} - [g]_{J_{\text{desno}}} | | [h]_{J_{\text{lijevo}}} - [h]_{J_{\text{desno}}} | \lesssim \int_{\mathbb{R}} f^3 + \int_{\mathbb{R}} g^3 + \int_{\mathbb{R}} h^3.$$

Ako želimo odavde izvesti (8.7), trebamo se samo sjetiti da je ta ocjena homogena pa ju je ustvari bilo dovoljno dokazati kada je $\|f\|_{L^3} = \|g\|_{L^3} = \|h\|_{L^3} = 1$. Označimo li

$$\Phi_I(f, g, h) := \frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} |J| [f]_J | [g]_{J_{\text{lijevo}}} - [g]_{J_{\text{desno}}} | | [h]_{J_{\text{lijevo}}} - [h]_{J_{\text{desno}}} |,$$

možemo željenu nejednakost zapisati u normaliziranom obliku kao

$$\Phi_I(f, g, h) \lesssim [f^3]_I + [g^3]_I + [h^3]_I. \quad (8.8)$$

Kasnije se može naprosto pustiti da I “iscrpljuje” $[0, +\infty)$ i $(-\infty, 0)$ te iskoristiti teorem o monotonij konvergenciji. Rastavimo $\sum_{J \subseteq I}$ na $\sum_{J \subseteq I_{\text{lijevo}}}$, $\sum_{J \subseteq I_{\text{desno}}}$ i $J = I$ kako bismo dobili

$$\begin{aligned} \Phi_I(f, g, h) &= \frac{1}{2} \Phi_{I_{\text{lijevo}}}(f, g, h) + \frac{1}{2} \Phi_{I_{\text{desno}}}(f, g, h) \\ &\quad + [f]_I | [g]_{I_{\text{lijevo}}} - [g]_{I_{\text{desno}}} | | [h]_{I_{\text{lijevo}}} - [h]_{I_{\text{desno}}} |, \end{aligned} \quad (8.9)$$

odakle vidimo da se i ovaj problem “prikladno skalira”.

Najprije definiramo apstraktnu Bellmanovu funkciju kao

$$\mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) := \sup_{f, g, h} \Phi_I(f, g, h),$$

gdje se supremum uzima po svim nenegativnim funkcijama f, g, h takvim da je $[f]_I = u$, $[g]_I = v$, $[h]_I = w$, $[f^3]_I = U$, $[g^3]_I = V$, $[h^3]_I = W$. Primijetimo da (zbog skalirajuće invarijantnosti prosjeka) ovaj izraz ne ovisi o intervalu I . Diskutirajmo neka svojstva tako definirane funkcije $\mathcal{B}$.

(B1) Domena:

$$u, v, w, U, V, W \geq 0, \quad u^3 \leq U, \quad v^3 \leq V, \quad w^3 \leq W.$$

Ovo je naprosto Jensenova nejednakost: $u^3 = (\frac{1}{|I|} \int_I f)^3 \leq \frac{1}{|I|} \int_I f^3 = U$. Obratno, za svake $u, v, w, U, V, W \geq 0$ koji zadovoljavaju $u^3 \leq U, v^3 \leq V, w^3 \leq W$ lako je naći funkcije na I koje poprimaju samo po dvije različite vrijednosti i takve su da vrijedi $[f]_I = u, [g]_I = v, [h]_I = w, [f^3]_I = U, [g^3]_I = V, [h^3]_I = W$. Ovo potpuno određuje domenu funkcije $\mathcal{B}$.

(B2) Slika:

$$0 \leq \mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) \lesssim U + V + W.$$

Ovo je naprosto naše vjerovanje da doista vrijedi (8.8).

(B3) Skaliranje:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) &\geq \frac{1}{2} \mathcal{B}(u_1, v_1, w_1, U_1, V_1, W_1) + \frac{1}{2} \mathcal{B}(u_2, v_2, w_2, U_2, V_2, W_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (u_1 + u_2) |v_1 - v_2| |w_1 - w_2| \end{aligned}$$

kad god je

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2), & v &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2), & w &= \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \\ U &= \frac{1}{2}(U_1 + U_2), & V &= \frac{1}{2}(V_1 + V_2), & W &= \frac{1}{2}(W_1 + W_2) \end{aligned}$$

i sve šestorke varijabli pripadaju domeni.

Za dokaz naprosto uzmemo supremum u (8.9) po svim f, g, h takvima da je $[f]_{I_{\text{lijevo}}} = u_1, [f^3]_{I_{\text{lijevo}}} = U_1$, itd.

Obratno, pretpostavimo da smo već našli $\mathcal{B}$ sa svojstvima (B1)–(B3). Uzmimo neke nenegativne funkcije f, g, h ; želimo pokazati nejednakost (8.8). Primijenimo li n puta (B3), dobit ćemo

$$\begin{aligned} &|I| \mathcal{B}([f]_I, [g]_I, [h]_I, [f^3]_I, [g^3]_I, [h^3]_I) \\ &\geq \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=2^{-n}|I|}} |J| \mathcal{B}([f]_J, [g]_J, [h]_J, [f^3]_J, [g^3]_J, [h^3]_J) \\ &\quad + \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|>2^{-n}|I|}} [f]_J \left| [g]_{J_{\text{lijevo}}} - [g]_{J_{\text{desno}}} \right| \left| [h]_{J_{\text{lijevo}}} - [h]_{J_{\text{desno}}} \right| \end{aligned}$$

pa korištenjem nenegativnosti od $\mathcal{B}$ i druge nejednakosti iz (B2) slijedi

$$\frac{1}{|I|} \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|>2^{-n}|I|}} [f]_J \left| [g]_{J_{\text{lijevo}}} - [g]_{J_{\text{desno}}} \right| \left| [h]_{J_{\text{lijevo}}} - [h]_{J_{\text{desno}}} \right| \lesssim [f^3]_I + [g^3]_I + [h^3]_I.$$

Prelaskom na limes kada $n \rightarrow \infty$ doista izvodimo (8.8). Dakle, ocjena (8.8) je ekvivalentna postojanju funkcije $\mathcal{B}$ sa svojstvima (B1)–(B3).

* * *

Tragamo za Bellmanovom funkcijom $\mathcal{B}$ među funkcijama oblika

$$\mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) = c(U + V + W) - \alpha(u, v, w),$$

pri čemu je $c > 0$ dovoljno velika konstanta, a $\alpha: [0, +\infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ treba zadovoljavati

$$|\alpha(u, v, w)| \lesssim u^3 + v^3 + w^3$$

i nejednakost

$$\begin{aligned} & \alpha\left(\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{w_1 + w_2}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{2}\alpha(u_1, v_1, w_1) + \frac{1}{2}\alpha(u_2, v_2, w_2) - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)|v_1 - v_2||w_1 - w_2| \end{aligned}$$

za $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0$. To je sasvim razumna pretpostavka jer (B2) sugerira linearni rast od $\mathcal{B}(u, v, w, U, V, W)$ u U, V, W . Supstituirajući $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$, $\Delta u = \frac{u_1 - u_2}{2}$, itd., posljednja nejednakost se može zapisati kao

$$\frac{1}{2}\alpha(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) + \frac{1}{2}\alpha(u - \Delta u, v - \Delta v, w - \Delta w) - \alpha(u, v, w) \geq 4u|\Delta v||\Delta w| \quad (8.10)$$

za $u, v, w \geq 0$ i $|\Delta u| \leq u$, $|\Delta v| \leq v$, $|\Delta w| \leq w$. Dodatno pretpostavljamo da je funkcija α koju tražimo klase C^∞ .

Koristeći Taylorovu formulu za α u točki (u, v, w) dobivamo infinitezimalnu verziju od (8.10):

$$\sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j \alpha(x) \Delta x_i \Delta x_j \geq 8x_1 |\Delta x_2| |\Delta x_3|$$

za $x = (x_1, x_2, x_3) \in \langle 0, +\infty \rangle^3$ i za proizvoljne realne brojeve $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Ovdje smo radi jednostavnosti notacije zamijenili u, v, w sa x_1, x_2, x_3 . Primijetimo da su

$$\sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j \alpha(x) \Delta x_i \Delta x_j \geq \pm 8x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

dvije nejednakosti između kvadratnih formi i mogu se preformulirati kao pozitivna semi-definitnost matrica

$$\begin{bmatrix} \partial_u^2 \alpha & \partial_u \partial_v \alpha & \partial_u \partial_w \alpha \\ \partial_u \partial_v \alpha & \partial_v^2 \alpha & \partial_v \partial_w \alpha \pm 4u \\ \partial_u \partial_w \alpha & \partial_v \partial_w \alpha \pm 4u & \partial_w^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

u svakoj točki $(u, v, w) \in \langle 0, +\infty \rangle^3$. Ključna je opservacija da je ova infinitezimalna ocjena zapravo ekvivalentna s globalnom ocjenom (8.10). To se lako vidi ako znamo da za $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^2 vrijedi

$$\frac{1}{2}\gamma(-1) + \frac{1}{2}\gamma(1) - \gamma(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - |t|) \gamma''(t) dt,$$

odakle zaključujemo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\alpha(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) + \frac{1}{2}\alpha(x_1-\Delta x_1, x_2-\Delta x_2, x_3-\Delta x_3) - \alpha(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-|t|) \left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j \alpha(x_1+t\Delta x_1, x_2+t\Delta x_2, x_3+t\Delta x_3) \Delta x_i \Delta x_j \right) dt. \end{aligned}$$

Dakle, infinitezimalna verzija implicira

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\alpha(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) + \frac{1}{2}\alpha(x_1-\Delta x_1, x_2-\Delta x_2, x_3-\Delta x_3) - \alpha(x_1, x_2, x_3) \\ & \geq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-|t|) 8(x_1+t\Delta x_1)|\Delta x_2||\Delta x_3| dt = 4x_1|\Delta x_2||\Delta x_3|, \end{aligned}$$

što je upravo (8.10).

Obzirom da također trebamo $|\alpha(u, v, w)| \lesssim u^3 + v^3 + w^3$, a znamo da je

$$uvw \lesssim u^2v + uv^2 + v^2w + vw^2 + w^2u + wu^2 \lesssim u^3 + v^3 + w^3,$$

pokušat ćemo konstruirati $\alpha(u, v, w)$ kao homogeni polinom trećeg stupnja u varijablama u, v, w . Primijetimo da $\alpha(u, v, w)$ možemo simetrizirati, tj. zamijeniti polinomom

$$\alpha(u, v, w) + \alpha(u, w, v) + \alpha(v, w, u) + \alpha(v, u, w) + \alpha(w, u, v) + \alpha(w, v, u),$$

koji zadržava ista svojstva, osim što mu implicitna omeđujuća konstanta može postati 6 puta veća. Dakle, možemo još pretpostaviti da je α simetričan, tj. oblika

$$\alpha(u, v, w) = A(u^3 + v^3 + w^3) + B(u^2v + uv^2 + v^2w + vw^2 + w^2u + wu^2) + Cuvw$$

za neke konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$. Nakon nešto eksperimentiranja lako dolazimo do izbora $A = 6$, $B = 3$, $C = 0$, tj.

$$\alpha(u, v, w) = 6(u^3 + v^3 + w^3) + 3(u^2v + uv^2 + v^2w + vw^2 + w^2u + wu^2).$$

Uz taj izbor matrice (8.11) postaju

$$\begin{bmatrix} 36u + 6v + 6w & 6u + 6v & 6u + 6w \\ 6u + 6v & 6u + 36v + 6w & \pm 4u + 6v + 6w \\ 6u + 6w & \pm 4u + 6v + 6w & 6u + 6v + 36w \end{bmatrix}.$$

One su pozitivno definitne po Sylvesterovom kriteriju jer su im glavne minore:

$$\begin{aligned} & 36u + 6v + 6w > 0, \\ & 36(5u^2 + 5v^2 + w^2 + 35uv + 7uw + 7vw) > 0, \\ & 96(6u^3 + 9v^3 + 9w^3 + 65u^2v + 65u^2w + 78uv^2 + 78uw^2 + 81v^2w + 81vw^2 + 456uvw) > 0 \end{aligned}$$

ili

$$96(9v^3 + 9w^3 + 95u^2v + 95u^2w + 84uv^2 + 84uw^2 + 81v^2w + 81vw^2 + 462uvw) > 0.$$

Time smo provjerili sva svojstva koja smo zahtijevali od α . Konkretna Bellmanova funkcija je npr.

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(u, v, w, U, V, W) \\ &= 100(U + V + W) - 6(u^3 + v^3 + w^3) - 3(u^2v + uv^2 + v^2w + vw^2 + w^2u + wu^2). \end{aligned}$$

Napomena 8.1. Jednom kad imamo formulu za Bellmanovu funkciju možemo i direktno provjeriti da ona zadovoljava $(\mathcal{B}3)$, što slijedi iz računa za pripadni α :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\alpha(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) + \frac{1}{2}\alpha(u-\Delta u, v-\Delta v, w-\Delta w) - \alpha(u, v, w) \\ &= u(3\Delta u + \Delta v)^2 + u(3\Delta u + \Delta w)^2 + 3v(\Delta u + \Delta v)^2 + 3w(\Delta u + \Delta w)^2 \\ & \quad + 3(v+w)(\Delta v + \Delta w)^2 + (2u+12v)(\Delta v)^2 + (2u+12w)(\Delta w)^2 \\ & \geq 2u((\Delta v)^2 + (\Delta w)^2) \geq 4u|\Delta v||\Delta w|. \end{aligned}$$

Za neki drugi izbor eksponenata Bellmanova funkcija će svakako izgledati nešto drugačije; pokušajte riješiti zadatak 8.2. U općenitom slučaju eksplicitna formula jedne moguće Bellmanove funkcije nađena je u [KS18].

* * *

Zadatak 8.1. Dajte klasični dokaz omeđenosti dijadskog paraprodukta korištenjem korolara 6.9 i 6.13.

Uputa: Ocjenjivanje započnite sa

$$\Lambda(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{I \in \mathcal{D}} \frac{\langle f, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2}}{|I|} \mathbb{1}_I \langle g, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2} \frac{\mathbb{1}_I}{|I|^{1/2}} \langle h, \mathbb{1}_I \rangle_{L^2} \frac{\mathbb{1}_I}{|I|^{1/2}}.$$

Zadatak 8.2. Metodom Bellmanovih funkcija dokažite ocjenu (8.7) u slučaju $p = 2$, $q = r = 4$.

8.4. Ocjena za dijadske A_∞ težine

Za svaku funkciju $w: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ iz konkavnosti logaritma i Jensenove nejednakosti slijedi

$$e^{[\ln w]_J} \leq [w]_J$$

za svaki interval J . Takva funkcija se naziva *dijadska A_∞ težina* ako postoji konstanta $c \in \langle 0, +\infty \rangle$ takva da za svaki $J \in \mathcal{D}$ vrijedi i “obrnuta nejednakost”,

$$[w]_J \leq ce^{[\ln w]_J}.$$

Jedan od rezultata iz članka [Buc93] (čija varijanta se pojavljuje i u [FKP91]) je

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{D} \\ J \subseteq I}} |J| \left(\frac{[w]_{J_{\text{lijevo}}} - [w]_{J_{\text{desno}}}}{[w]_J} \right)^2 \lesssim_c |I|$$

za svaki $I \in \mathcal{D}$. Dokažimo tu ocjenu metodom Bellmanovih funkcija.

Apstraktnu Bellmanovu funkciju ovdje definiramo kao

$$\mathcal{B}(u, v) := \sup_w \frac{1}{|I|} \sum_{J \subseteq I} |J| \left(\frac{[w]_{J_{\text{lijevo}}} - [w]_{J_{\text{desno}}}}{[w]_J} \right)^2,$$

pri čemu se supremum uzima po svim A_∞ težinama w s konstantom c koje zadovoljavaju $[w]_I = u$ i $[\ln w]_I = v$. Njena svojstva su sljedeća.

(B1) *Domena*:

$$e^v \leq u \leq ce^v.$$

Ovo su Jensenova nejednakost i A_∞ uvjet.

(B2) *Slika*:

$$0 \leq \mathcal{B}(u, v) \lesssim_c 1.$$

Ovo je naše vjerovanje da tvrdnja doista vrijedi.

(B3) *Skaliranje*:

$$\mathcal{B}(u, v) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1, v_1) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2, v_2) + \left(\frac{u_1 - u_2}{u}\right)^2$$

kad god je $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ i svi parovi varijabli leže u domeni.

Obratno, pretpostavimo da imamo funkciju $\mathcal{B}$ koja zadovoljava (B1)–(B3). Uzmimo težinu w i dijadski interval I . Iteriranjem svojstva (B3) dobivamo

$$|I|\mathcal{B}([w]_I, [\ln w]_I) \geq \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=2^{-n}|I|}} |J|\mathcal{B}([w]_J, [\ln w]_J) + \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|>2^{-n}|I|}} |J|\left(\frac{[w]_{J_{\text{lijevo}}} - [w]_{J_{\text{desno}}}}{[w]_J}\right)^2.$$

Preostaje iskoristiti (B2) i pustiti na limes kada $n \rightarrow \infty$.

* * *

U ovoj prigodi možemo lako pogoditi jednu traženu funkciju $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}(u, v) = 8(\ln u - v)$$

i vrlo je lako direktno provjeriti da ona ima željena svojstva. Naime, (B2) je ispunjeno zbog

$$0 \leq \mathcal{B}(u, v) \leq 8 \ln c,$$

dok (B3) slijedi iz

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, v) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_1, v_1) - \frac{1}{2}\mathcal{B}(u_2, v_2) &= 4 \ln \frac{u^2}{u_1 u_2} \\ &= -4 \ln \left(1 - \left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right)^2\right) \geq 4 \left(\frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\right)^2 = \left(\frac{u_1 - u_2}{u}\right)^2. \end{aligned}$$

U ovom slučaju se pronađena konkretna Bellmanova funkcija čak podudara s apstraktno definiranom (zadatak 8.3) pa je posebno optimalna.

Napomena 8.2. Jedan mogući način da sistematično izvedemo gornju funkciju $\mathcal{B}$ je zapisujući skalirajuću nejednakost kao

$$\mathcal{B}(u, v) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(u + \Delta u, v + \Delta v) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(u - \Delta u, v - \Delta v) + \left(\frac{2\Delta u}{u}\right)^2$$

i prelaskom na njenu infinitezimalnu verziju

$$\frac{1}{2}\partial_u^2\mathcal{B}(u,v)(\Delta u)^2 + \frac{1}{2}\partial_v^2\mathcal{B}(u,v)(\Delta v)^2 + \partial_u\partial_v\mathcal{B}(u,v)(\Delta u)(\Delta v) \leq -\frac{4(\Delta u)^2}{u^2}.$$

Ipak, ove dvije ocjene nisu ekvivalentne, jer ovog puta domena nije konveksan skup. Svejedno, pokušajmo naći funkciju koja zadovoljava čak jednakost u infinitezimalnoj nejednakosti za sve točke (u, v) u domeni. Izjednačavanje dviju kvadratnih formi vodi na jednostavni sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\partial_u^2\mathcal{B} = -\frac{8}{u^2}, \quad \partial_v^2\mathcal{B} = 0, \quad \partial_u\partial_v\mathcal{B} = 0.$$

Oдавde dobivamo $\mathcal{B}(u, v) = 8\ln u + Av + B$, a konstante A, B se odrede iz (B1) i (B2). Na kraju je ipak potrebna i provjera svojstva (B3).

* * *

Zadatak 8.3. Provjerite da u ovom primjeru apstraktna Bellmanova funkcija (definirana supremumom) zadovoljava upravo formulu $\mathcal{B}(u, v) = 8(\ln u - v)$.

8.5. Bellmanova funkcija u faznoj ravnini

Završimo ovo poglavlje kratkim primjerom kombinacije tehnike Bellmanovih funkcija i vremensko-frekvencijske analize. Prisjetimo se forme

$$\Lambda(f, g, h) = \sum_T |I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} \langle g, w_{P_1} \rangle_{L^2} \langle h, w_{P_2} \rangle_{L^2}|.$$

iz odjeljka 7.7 i dajmo jednostavniji dokaz (za čiju ideju je zaslužan Nazarov) ocjene

$$\Lambda(f, f, f) \lesssim \|f\|_{L^3(\mathbb{R}_+)}^3. \quad (8.12)$$

Opet se možemo ograničiti samo na promatranje tri-pločica T sadržanih u $[0, 3^N) \times [0, 3^N)$, što usput znači i da je $3^{-N+1} \leq |I_T| \leq 3^N$. Ukoliko je tri-pločica T vertikalno podijeljena na pločice P_0, P_1, P_2 , a horizontalno na pločice Q_0, Q_1, Q_2 , tada iz svojstava valnih paketa slijedi

$$\begin{aligned} w_{Q_0} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(w_{P_0} + w_{P_1} + w_{P_2}), \\ w_{Q_1} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(w_{P_0} + \omega^2 w_{P_1} + \omega w_{P_2}), \\ w_{Q_2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(w_{P_0} + \omega w_{P_1} + \omega^2 w_{P_2}), \end{aligned}$$

a daljnja posljedica su jednakosti

$$\begin{aligned}\langle f, w_{Q_0} \rangle_{L^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} + \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} + \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}), \\ \langle f, w_{Q_1} \rangle_{L^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} + \omega \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} + \omega^2 \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}), \\ \langle f, w_{Q_2} \rangle_{L^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} + \omega^2 \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} + \omega \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}).\end{aligned}$$

Ovog puta nećemo metodično tražiti Bellmanovu funkciju, nego ćemo naprosto za svaki $j \in \mathbb{Z}$, $-N \leq j \leq N$ definirati izraz

$$\mathcal{B}_j := \sum_{\substack{P \subseteq [0, 3^N] \times [0, 3^N] \\ |I_P| = 3^{-j}}} |I_P|^{-1/2} |\langle f, w_P \rangle_{L^2}|^3,$$

pri čemu se sumira po trijadskim pločicama P čiji vremenski interval I_P ima duljinu 3^{-j} . Primjenom zadatka 7.7(b) na brojeve

$$a = \langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2}, \quad b = \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2}, \quad c = \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}$$

i dijeljenjem s $3|I_T|^{1/2}$ dobivamo

$$\begin{aligned}& |I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2}| |\langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2}| |\langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}| \\ & \lesssim |I_{Q_0}|^{-1/2} |\langle f, w_{Q_0} \rangle_{L^2}|^3 + |I_{Q_1}|^{-1/2} |\langle f, w_{Q_1} \rangle_{L^2}|^3 + |I_{Q_2}|^{-1/2} |\langle f, w_{Q_2} \rangle_{L^2}|^3 \\ & \quad - |I_{P_0}|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2}|^3 - |I_{P_1}|^{-1/2} |\langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2}|^3 - |I_{P_2}|^{-1/2} |\langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}|^3.\end{aligned}$$

Zbrajanje po svim tri-pločicama T sadržanim u $[0, 3^N] \times [0, 3^N]$ i takvim da je $|I_T| = 3^{-j}$ daje

$$\sum_{\substack{T \subseteq [0, 3^N] \times [0, 3^N] \\ |I_T| = 3^{-j}}} |I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}| \lesssim \mathcal{B}_{j+1} - \mathcal{B}_j,$$

a potom sumiranje po $-N \leq j \leq N-1$ i teleskopiranje desne strane konačno vode na

$$\begin{aligned}& \sum_{T \subseteq [0, 3^N] \times [0, 3^N]} |I_T|^{-1/2} |\langle f, w_{P_0} \rangle_{L^2} \langle f, w_{P_1} \rangle_{L^2} \langle f, w_{P_2} \rangle_{L^2}| \\ & \lesssim \mathcal{B}_N = \sum_{\substack{I \text{ trijadski int.} \\ I \subseteq [0, 3^N] \\ |I| = 3^{-N}}} |I|^{-1/2} |\langle f, w_{I \times [0, 3^N]} \rangle_{L^2}|^3 \\ & \leq \sum_{\substack{I \text{ trijadski int.} \\ I \subseteq [0, 3^N] \\ |I| = 3^{-N}}} |I|^{-2} \left(\int_I |f(x)| dx \right)^3 \\ & \leq \sum_{\substack{I \text{ trijadski int.} \\ I \subseteq [0, 3^N] \\ |I| = 3^{-N}}} \int_I |f(x)|^3 dx = \int_{[0, 3^N]} |f(x)|^3 dx.\end{aligned}$$

Puštanjem $N \rightarrow \infty$ završava dokaz ocjene (8.12).

Čitatelj može primijetiti da ovdje zapravo uopće nismo odredili kontrolne parametre te konstruirani izraz zapravo samo imitira svojstva Bellmanovih funkcija. Još neki primjeri ovakve poopćene interpretacije metode Bellmanovih funkcija s primjenama na multilinearne ocjene u analizi mogu se naći u [Kov11a], [Kov11b] i [Kov13], a moguća je i primjena na multilinearne martingalne ocjene u teoriji vjerojatnosti [KS15].

Bibliografija

- [AK15] H. Abraham, V. Kovač, *From electrostatic potentials to yet another triangle center*, Forum Geom. **15** (2015), 73–89.
- [Ald11] J. M. Aldaz, *The weak type $(1, 1)$ bounds for the maximal function associated to cubes grow to infinity with the dimension*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 2, 1013–1023.
- [AS08] N. Alon, J. H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, treće izdanje, John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [AHMTT02] P. Auscher, S. Hofmann, C. Muscalu, T. Tao, C. Thiele, *Carleson measures, trees, extrapolation, and $T(b)$ theorems*, Publ. Mat. **46** (2002), no. 2, 257–325.
- [BMS97] A. Baerstein, S. Montgomery-Smith, *Some conjectures about integral means of ∂f and $\overline{\partial f}$* , Complex analysis and Differential Equations, Proc. of the Marcus Wallenberg symposium in honour of Matts Essén, Uppsala, Sweden, 1997, 92–109.
- [Bec75] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. (2) **102** (1975), no. 1, 159–182.
- [BL76] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [Buc93] S. M. Buckley, *Summation conditions on weights*, Michigan Math. J. **40** (1993), no. 1, 153–170.
- [Bur66] D. L. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.
- [Bur84] D. L. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Probab. **12** (1984), 647–702.
- [Bur85] D. L. Burkholder, *An elementary proof of an inequality of R. E. A. C. Paley*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985) 474–478.
- [Bur87] D. L. Burkholder, *A Sharp and Strict L^p -Inequality for Stochastic Integrals*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 1, 268–273.
- [Bur88a] D. L. Burkholder, *A proof of Pelczyński’s conjecture for the Haar system*, Studia Math. **91** (1988), no. 1, 79–83.
- [Bur88b] D. L. Burkholder, *Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals*, Colloque Paul Lévy (Palaiseau, 1987), Astérisque **157–158** (1988), 75–94.
- [Buz15] M. Bužančić, *Tehnika Bellmanovih funkcija u matematičkoj analizi*, diplomski rad (voditelj V. Kovač), Sveučilište u Zagrebu, 2015.

- [Cal65] A.-P. Calderón, *Commutators of Singular Integral Operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1092–1099.
- [Cal68] A.-P. Calderón, *Ergodic theory and translation-invariant operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **59** (1968), 349–353.
- [Cal77] A.-P. Calderón, *Cauchy Integrals on Lipschitz Curves and Related Operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), no. 4, 1324–1327.
- [CZ52] A.-P. Calderón, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.
- [Car66] L. Carleson, *On Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series*, Acta Math. **116** (1966), 135–157.
- [Coh13] D. L. Cohn, *Measure Theory*, drugo izdanje, Birkhäuser Advanced Texts, Springer, New York, 2013.
- [CK01a] M. Christ and A. Kiselev, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 409–425.
- [CK01b] M. Christ and A. Kiselev, *WKB asymptotic behavior of almost all generalized eigenfunctions for one-dimensional Schrödinger operators with slowly decaying potentials*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 426–447.
- [CJS89] R. R. Coifman, P. W. Jones, S. Semmes, *Two elementary proofs of the L^2 boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 3, 553–564.
- [CMM82] R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L^2 integral de Cauchy définit un opérateur borné sur le courbes Lipschitziennes*, Ann. of Math. **116** (1982), 361–387.
- [CM97] R. Coifman, Y. Meyer, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **48**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Dau92] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Series Appl. Math., SIAM, Philadelphia, 1992.
- [DJ84] G. David, J. L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) **120** (1984), no. 2, 371–397.
- [Dem08] C. Demeter, *Divergence of combinatorial averages and the unboundedness of the trilinear Hilbert transform*, Ergodic Theory Dynam. Systems Volume **28** (2008), no. 5, 1453–1464.
- [Duo01] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, AMS, Providence, 2001.
- [Dur10] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Fef71] C. Fefferman, *The Multiplier Problem for the Ball*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), no. 2, 330–336.
- [Fef73] C. Fefferman, *Pointwise convergence of Fourier series*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 551–571.
- [FKP91] R. A. Fefferman, C. E. Kenig, J. Pipher, *The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 65–124.

-
- [Fol89] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals of Mathematics Studies **122**, Princeton University Press, Princeton, 1989.
 - [Fol95] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1994.
 - [Fol99] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, drugo izdanje, John Wiley and Sons, New York, 1999.
 - [FJW91] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, Regional Conference Series in Mathematics, AMS, Providence, 1991.
 - [GJ78] J. B. Garnett, P. W. Jones, *The Distance in BMO to L^∞* , Ann. of Math. (2) **108** (1978), 373–393.
 - [Gra92] L. Grafakos, *On multilinear fractional integrals*, Studia Math. **102** (1992), no. 1, 49–56.
 - [Gra94] L. Grafakos, *An elementary proof of the square summability of the discrete Hilbert transform*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 5, 456–458.
 - [GT03] L. Grafakos, T. Tao, *Multilinear interpolation between adjoint operators*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 379–385.
 - [Gri95] G. Gripenberg, *A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet*, Studia Math. **114** (1995), 207–226.
 - [Haa10] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. **69** (1910), 331–371.
 - [Hed72] L. I. Hedberg, *On certain convolution inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 505–510.
 - [Hei11] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Basel, 2011.
 - [HRT96] C. Heil, J. Ramanathan, P. Topiwala, *Linear independence of time-frequency translates*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 9, 2787–2795.
 - [HW96] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1996.
 - [HR62] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, svesci I i II, Springer-Verlag, New York, 1962./1969.
 - [Hun67] R. A. Hunt, *On the Convergence of Fourier Series*, Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues, Proc. Conf. Edwardsville (1967), 235–255.
 - [JOR96] R. L. Jones, I. V. Ostrovskii, J. M. Rosenblatt, *Square functions in ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 2, 267–305.
 - [Kov06] V. Kovač, *$T(1)$ teorem u klasičnoj i dijadskoj harmonijskoj analizi*, magistrski rad (voditelj H. Šikić), Sveučilište u Zagrebu, 2006.
 - [Kov11a] V. Kovač, *Applications of the Bellman Function Technique in Multilinear and Nonlinear Harmonic Analysis*, doktorska disertacija (voditelj C. Thiele), University of California, Los Angeles, 2011.

- [Kov11b] V. Kovač, *Bellman function technique for multilinear estimates and an application to generalized paraproducts*, Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), no. 3, 813–846.
- [Kov12] V. Kovač, *Boundedness of the twisted paraproduct*, Rev. Mat. Iberoam. **28** (2012), no. 4, 1143–1164.
- [Kov13] V. Kovač, *On a trilinear form related to the Carleson theorem*, J. Math. Anal. Appl. **405** (2013), no. 1, 220–226.
- [Kov14] V. Kovač, *Time-frequency analysis and singular integrals*, skripta mini-kolegija, University of Wrocław, 2014.
- [KS15] V. Kovač, K. A. Škreb, *One modification of the martingale transform and its applications to paraproducts and stochastic integrals*, J. Math. Anal. Appl. **426** (2015), no. 2, 1143–1163.
- [KS18] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bellman functions and L^p estimates for paraproducts*, Probab. Math. Statist. **38** (2018), no. 2, 459–479.
- [Kra99] S. G. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis*, Carus Mathematical Monographs **27**, MAA, Washington, D.C., 1999.
- [Lac00] M. Lacey, *The bilinear maximal functions map into L^p for $2/3 < p \leq 1$* , Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 35–57.
- [LL10] M. Lacey, X. Li, *On a conjecture of E. M. Stein on the Hilbert transform on vector fields*, Mem. Amer. Math. Soc. **205** (2010), no. 965.
- [LT97] M. Lacey, C. Thiele, *L^p Estimates on the Bilinear Hilbert Transform for $2 < p < \infty$* , Ann. of Math. (2) **146** (1997), no. 3, 693–724.
- [LT99] M. Lacey, C. Thiele, *On Calderón’s conjecture*, Ann. of Math. (2) **149** (1999), no. 2, 475–496.
- [LT00] M. Lacey, C. Thiele, *A proof of boundedness of the Carleson operator*, Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 4, 361–370.
- [Lep76] D. Lépingle, *La variation d’ordre p des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **36** (1976), no. 4, 295–316.
- [Lie09] V. Lie, *The (weak- L^2) boundedness of the quadratic Carleson operator*, Geom. Funct. Anal. **19** (2009), no. 2, 457–497.
- [LW49] L. H. Loomis, H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961–962.
- [Men23] D. E. Menchoff, *Sur les séries des fonctions orthogonales*, Fund. Math. **4** (1923), 92–105.
- [Mey92] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [NT96] F. L. Nazarov, S. R. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis* (na ruskom), Algebra i Analiz **8** (1996), no. 5, 32–162; engleski prijevod u St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.
- [NS14] M. Nielsen, H. Šikić, *On stability of Schauder bases of integer translates*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 4, 2281–2293.

- [OSTTW12] R. Oberlin, A. Seeger, T. Tao, C. Thiele, and J. Wright, *A variation norm Carleson theorem*, J. Eur. Math. Soc. **14** (2012), no. 2, 421–464.
- [Ose12] A. Osekowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences, Mathematical Monographs **72**, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.
- [Pal15] Lj. Palle, *Fourierova analiza na lokalno kompaktnim abelovim grupama i neke primjene*, diplomski rad (voditelj V. Kovač), Sveučilište u Zagrebu, 2015.
- [Per01] M. C. Pereyra, *Lecture Notes on Dyadic Harmonic Analysis*, Contemporary Mathematics **289**, AMS, Providence, 2001, 1–61.
- [Per15] A. Perković, *Babenko-Becknerov teorem*, diplomski rad (voditelj V. Kovač), Sveučilište u Zagrebu, 2015.
- [Pic72] S. K. Pichorides, *On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov*, Studia Math. **44** (1972), 165–179.
- [Pro04] P. E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Rad22] H. Rademacher, *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*, Math. Ann. **87** (1922), 112–138.
- [Rad14] M. Radulović, *Matematičke formulacije principa neodređenosti*, diplomski rad (voditelj V. Kovač), Sveučilište u Zagrebu, 2014.
- [RY99] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Rud87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, treće izdanje, McGraw-Hill, 1987.
- [Sar02] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [Ste61] E. M. Stein, *On limits of sequences of operators*, Ann. of Math. **74** (1961), 140–170.
- [Ste70] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series **30**, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [Ste82] E. M. Stein, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), no. 2, 359–376.
- [Ste93] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [Ste98] E. M. Stein, *Singular Integrals: The Roles of Calderón and Zygmund*, Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998), no. 9, 1130–1140.
- [SS83] E.M. Stein, J.O. Strömberg, *Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n* , Ark. Mat. **21** (1983), no. 2, 250–269.
- [SW59] E. M. Stein, G. Weiss, *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*, J. Math. Mech. **8** (1959), 263–284.
- [SW71] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Mathematical Series **32**, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [Sti15] M. Stipčić, *Valične karakterizacije Soboljevljevih prostora*, diplomski rad (voditelj V. Kovač), Sveučilište u Zagrebu, 2015.

- [Tao] T. Tao, *What's new*, blog dostupan na <http://terrytao.wordpress.com>.
- [Tao01] T. Tao, *Harmonic analysis in the phase plane*, skripta kolegija, UCLA, 2001.
- [Tao07] T. Tao, *Graduate Fourier analysis*, skripta kolegija, UCLA, 2006./2007.
- [Thi95] C. Thiele, *Time-frequency Analysis in the Discrete Phase Plane*, Ph.D. Dissertation (advisor R. R. Coifman), Yale University, 1995.
- [Thi06] C. Thiele, *Wave Packet Analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **105**, AMS, Providence, 2006.
- [Thi11] C. Thiele, *Lectures on Real Analysis*, skripta kolegija, Sveučilište u Bonnu, 2010./2011.
- [VV09] V. Vasyunin, A. Volberg, *Monge-Ampère equation and Bellman optimization of Carleson embedding theorems*, Linear and complex analysis, 195–238, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 226, Amer. Math. Soc., Providence, 2009.
- [Vuk14] M. Vukić, *Teoremi reprezentacije martingala s diskretnim vremenom*, diplomski rad (voditelj V. Kovač), Sveučilište u Zagrebu, 2014.
- [Wal23] J. L. Walsh, *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math. **45** (1923), no. 1, 5–24.
- [Wan95] X. Wang, *The study of wavelets from the properties of the their Fourier transform*, Ph.D. Thesis (advisor G. L. Weiss), Washington University, 1995.
- [Wol82] T. H. Wolff, *A note on interpolation spaces*, dio knjige *Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **908**, Springer, Berlin-New York, 1982, 199–204.
- [Wut98] The Wutam Consortium, *Basic Properties of Wavelets*, J. Fourier Anal. Appl. **4** (1998), no. 4 and 5, 575–594.
- [Yan51] S. Yano, *Notes on Fourier analysis. XXIX. An Extrapolation Theorem*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951), no. 2, 296–305.
- [Zyg71] A. Zygmund, *Intégrales Singulières*, Lecture Notes in Math. **204**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.