Matematičko-fizički list, god. 50. (1999./2000.), br. 4./200., str. 222.-228.

Nizovi razlika

Vjekoslav Kovač, student, Matematički odjel PMF-a, Zagreb

U ovom članku pozabavit ćemo se primjenom jedne jednostavne ideje na vrlo raznolike zadatke koji (možda indirektno) uključuju nizove cijelih, realnih odnosno kompleksnih brojeva.

Polazimo od niza (kompleksnih) brojeva: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$.

Nizom razlika od $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ nazvat ćemo niz $a_0^{(1)},\ a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ \ldots, a_n^{(1)},\ a_{n+1}^{(1)},\ \ldots$, definiran ovako: $a_n^{(1)} := a_{n+1} - a_n$ za $n\in\mathbf{N}_0$.

Nizom razlika drugog reda niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ zovemo niz $a_0^{(2)},\ a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ \ldots, a_n^{(2)},\ a_{n+1}^{(2)},\ \ldots$, definiran s: $a_n^{(2)} := a_{n+1}^{(1)} - a_n^{(1)}$ za n=0, 1, 2, ...

Sada općenito definiramo **niz razlika *k*-tog reda** niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ pomoću niza razlika reda k-1 na sljedeći način: $a_n^{(k)} := a_{n+1}^{(k-1)} - a_n^{(k-1)}$ za svaki $n\in\mathbf{N}_0$ i fiksirani $k\in\mathbf{N}$.

Vidimo da uz oznaku $a_n^{(0)} := a_n$ sve gornje nizove možemo pregledno pisati u obliku trokutaste **tablice razlika** (1), iz koje lako čitamo da je svaki broj jednak razlici dvaju brojeva u redu iznad njega ("gornji desni minus gornji lijevi").

$$\begin{array}{l}
a_0^{(0)}\ \ a_1^{(0)}\ \ a_2^{(0)}\ \ \ldots\ \ a_{n-1}^{(0)}\ \ a_n^{(0)}\ \ a_{n+1}^{(0)}\ \ \ldots \\
\quad a_0^{(1)}\ \ a_1^{(1)}\ \ a_2^{(1)}\ \ \ldots\ \ a_{n-1}^{(1)}\ \ a_n^{(1)}\ \ a_{n+1}^{(1)}\ \ \ldots \\
\qquad a_0^{(2)}\ \ a_1^{(2)}\ \ a_2^{(2)}\ \ \ldots\ \ a_{n-1}^{(2)}\ \ a_n^{(2)}\ \ a_{n+1}^{(2)}\ \ \ldots \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\quad a_0^{(k)}\ \ a_1^{(k)}\ \ a_2^{(k)}\ \ \ldots\ \ a_{n-1}^{(k)}\ \ a_n^{(k)}\ \ a_{n+1}^{(k)}\ \ \ldots \\
\qquad\qquad a_0^{(k+1)} a_1^{(k+1)} a_2^{(k+1)} \ldots a_{n-1}^{(k+1)} a_n^{(k+1)} a_{n+1}^{(k+1)} \ldots \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{1}$$

Pomoću nultih članova nizova $(a_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}_0}$ možemo eksplicitno odrediti sve članove naše tablice te posebno niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$. Drugim riječima, vrijedi formula:

$$a_n^{(k)} = \binom{n}{0}a_0^{(k)} + \binom{n}{1}a_0^{(k+1)} + \binom{n}{2}a_0^{(k+2)} + \ldots + \binom{n}{n}a_0^{(k+n)}, \tag{2}$$

tj. $a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_0^{(k+i)}$, gdje je $\binom{n}{r} := \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$, $n,r\in\mathbf{N}_0$, $r\le n$

binomni koeficijent. (Dogovorno uzimamo da je $\binom{n}{r} = 0$ za $r\in\mathbf{Z}$, r<0 ili r>n.)

$$\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{a_0^{(k)}}\quad a_1^{(k)}\quad a_2^{(k)}\quad \ldots\quad a_{n-2}^{(k)}\quad a_{n-1}^{(k)}\quad \boldsymbol{a_n^{(k)}}\ \ \ldots \\
\quad \boldsymbol{a_0^{(k+1)}}\ \ a_1^{(k+1)}\ \ a_2^{(k+1)}\ \ \ldots\ \ a_{n-2}^{(k+1)}\ \ a_{n-1}^{(k+1)}\ \ \ldots \\
\qquad \boldsymbol{a_0^{(k+2)}}\ \ a_1^{(k+2)}\ \ a_2^{(k+2)}\ \ \ldots\ \ a_{n-2}^{(k+2)}\ \ \ldots \\
\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad \boldsymbol{a_0^{(k+n-1)}}\ \ a_1^{(k+n-1)}\ldots \\
\qquad\qquad\quad \boldsymbol{a_0^{(k+n)}}\ \ \ldots \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots
\end{array}$$

Formula se lako dokazuje matematičkom indukcijom po $n \in \mathbf{N}_0$. Za $n=0$ formula postaje $a_0^{(k)} = \binom{0}{0} a_0^{(k)} = a_0^{(k)}$ pa je (2) trivijalno ispunjeno. Za $n=1$ formula glasi $a_1^{(k)} = \binom{1}{0} a_0^{(k)} + \binom{1}{1} a_0^{(k+1)} = a_0^{(k)} + a_0^{(k+1)}$ pa tvrdnja također vrijedi. Pretpostavimo sada da (2) vrijedi za neki prirodni broj n. Dokažimo da tada vrijedi i $a_{n+1}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a_0^{(k+i)}$. Lagano raspisivanje uz korištenje definicije od $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}_0}$ i svojstva $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$, $n, i \in \mathbf{N}$, $1 \le i \le n$ daje

$$a_{n+1}^{(k)} = a_n^{(k)} + a_n^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_0^{(k+i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_0^{(k+i+1)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_0^{(k+i)} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a_0^{(k+i)} =$$

$$= a_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} a_0^{(k+i)} + \binom{n}{i-1} a_0^{(k+i)} \right] + a_0^{(k+n+1)} = a_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a_0^{(k+i)} + a_0^{(k+n+1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a_0^{(k+i)}$$

Time je dokazan korak indukcije i tvrdnja zadatka. Specijalno, za $k=0$ jednakost (2) eksplicitno izražava n-ti član polaznog niza pomoću nultih članova pripadnih nizova razlika k-tog reda.

$$a_n = \binom{n}{0} a_0^{(0)} + \binom{n}{1} a_0^{(1)} + \binom{n}{2} a_0^{(2)} + \ldots + \binom{n}{n} a_0^{(n)} \tag{3}$$

To je formula koju ćemo višestruko koristiti u daljnjem tekstu.

Sasvim analogno dokazali bismo i formulu koja izražava članove nizova razlika pomoću članova početnog niza. (Čitatelj to može učiniti za vježbu.)

$$a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a_{n+i} \tag{4}$$

Primjer 1. Dokažite binomni teorem: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$, $n \in \mathbf{N}_0$, $a, b \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$).

Rješenje. Najprije dokažimo identitet $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$, $n \in \mathbf{N}_0$, $x \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$). U tu svrhu pogledajmo niz $a_n := (1+x)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}_0$. Za taj niz raspišimo tablicu (1). Odredimo $a_n^{(k)}$ za $n, k \in \mathbf{N}_0$. Indukcijom se lako pokaže $a_n^{(k)} = x^k (1+x)^n$. Naime, $a_n^{(k+1)} = a_{n+1}^{(k)} - a_n^{(k)} = x^k (1+x)^{n+1} - x^k (1+x)^n = x^{k+1} (1+x)^n$, što daje korak indukcije. Prema formuli (3) vrijedi: $(1+x)^n = a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_0^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$. Binomni teorem dobijemo ako u posljednju jednakost uvrstimo $x := \frac{b}{a}$, $a \neq 0$. (Za $a = 0$ tvrdnja trivijalno vrijedi.)

Q. E. D.

Jednostavna posljedica binomnog teorema je poznati identitet:
$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 1^{n-i}\cdot 1^{i}=(1+1)^{n}=2^{n}$, koji ćemo kasnije primijeniti.

Pri rješavanju nekih zadataka s polinomima od koristi može biti tvrdnja:
Ako u polinom stupnja $s\in\mathbf{N}_0$ redom uvrštavamo 0, 1, 2, 3, ..., dobijemo niz $a_n=P_s(n)=c_s n^s+\ldots+c_1 n+c_0,\ c_0,c_1,\ldots,c_n\in\mathbf{R}\,(\mathbf{C})$. Tada je $a_n^{(k)}=P_{s-k}(n)$ za $1\le k\le s$, gdje je P_{s-k} neki polinom stupnja s-k, dok je $a_n^{(k)}=0$ za $k>s$.
Za dokaz tvrdnje dovoljno je primijetiti:

$$a_n^{(1)}=a_{n+1}-a_n=c_s\left[(n+1)^s-n^s\right]+\ldots+c_1\left[(n+1)-n\right]$$

i da je prema netom dokazanom binomnom teoremu:

$$(n+1)^i-n^i=\binom{i}{1}n^{i-1}+\ldots+\binom{i}{i-1}n+\binom{i}{i},\ i=1,\ldots,s.$$

Dakle, $a_n^{(1)}$ je polinom (s-1)-vog stupnja u varijabli n. Sada dalje analogno dokažemo tvrdnju za k=2, ..., s, spuštajući stupanj polinoma za 1. U s-tom koraku dolazimo do konstante, a u (s+1)-vom koraku do nul-polinoma. U narednim recima očito će također biti samo nule.

Primjer 2. (MFL, zadatak **2583**.) Za polinom $P(x)$ n-tog stupnja je $P(k)=2^k$, za k=0, 1, ..., n. Koliko je $P(n+1)$?

Rješenje. Promotrimo niz $a_m := P(m)$, $m\in\mathbf{N}_0$. Njemu pridružena tablica razlika iščezava nakon n+1 redaka, tj. $a_m^{(k)}=0$ za $k>n$. Osim toga, nije teško uočiti da je (zbog uvjeta zadatka) $a_0^{(k)}=1$ za k=0, 1, ..., n.

$$\begin{array}{l}
P(0)\quad P(1)\quad P(2)\quad P(3)\ \ \ldots\ \ P(n-1)\quad P(n)\quad P(n+1)\quad P(n+2)\ \ \ldots\\
=1\quad\ =2\quad =2^2\quad =2^3\ \ \ldots\ \ =2^{n-1}\quad =2^n\qquad ?\qquad\quad ?\quad\ \ldots\\
\qquad 1\qquad 2\qquad 2^2\ \ \ldots\ \ 2^{n-2}\qquad 2^{n-1}\qquad ?\qquad\ ?\quad \ldots\\
\qquad\quad 1\qquad 2\ \ \ldots\ \ 2^{n-3}\qquad 2^{n-2}\qquad ?\qquad ?\quad \ldots\\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad\qquad\quad 1\qquad 2\qquad 2^2\qquad ?\qquad ?\quad \ldots\\
\qquad\qquad\qquad 1\qquad 2\qquad ?\qquad ?\quad \ldots\\
\qquad\qquad\qquad\quad 1\qquad ?\qquad ?\ \ldots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0\qquad 0\qquad 0\ \ldots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0\qquad 0\qquad 0\ \ldots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Formula (3) na kraju daje $P(n+1)=a_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a_0^{(i)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}=2^{n+1}-1$.

Primjer 3. Suma m-tih potencija prvih n prirodnih brojeva, $\sum_{i=1}^{n} i^m$, $m\in\mathbf{N}$, obično se računa rekurzivno. Mi ćemo pokazati kako je takvu sumu moguće dobiti direktno pomoću formule (3).

Postupak ćemo opisati na primjeru m=3. (Naravno da on “funkcionira” za svaki $m\in\mathbf{N}$.)

Dakle, stavimo $a_n := \sum_{i=0}^{n} i^3$, $n \in \mathbf{N}_0$. Raspišimo za taj niz tablicu (1). Iz $a_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n = (n+1)^3$, $n \in \mathbf{N}_0$ vidimo da je $a_n^{(1)}$ polinom 3. stupnja u varijabli n. Prema prethodnim razmatranjima je $a_n^{(k)} = 0$, $\forall n,k \in \mathbf{N}$, $k \geq 5$. Zato je dovoljno izračunati $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$, $a_0^{(3)}$, $a_0^{(4)}$ i uvrstiti ih u (3).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \dots \\
1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & \dots & & \\
& 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & \dots & & & \\
& & 12 & & 18 & & 24 & & \dots & & & & \\
& & & 6 & & 6 & & \dots & & & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & \dots & & & &
\end{array}$$

$$a_n = \binom{n}{0}\cdot 0 + \binom{n}{1}\cdot 1 + \binom{n}{2}\cdot 7 + \binom{n}{3}\cdot 12 + \binom{n}{4}\cdot 6 =$$

$$= n + 7\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 12\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Da su nam nizovi razlika od pomoći kod vrlo raznolikih zadataka, govori sljedeći (nešto teži) primjer.

Primjer 4. Dan je n-člani niz cijelih brojeva: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$. Od njega napravimo novi niz: $|x_2 - x_1|, |x_3 - x_2|, |x_4 - x_3|, \dots, |x_n - x_{n-1}|, |x_1 - x_n|$. Nađite sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje ćemo nakon konačno mnogo koraka (tj. primjena navedene operacije) doći do niza samih nula, neovisno o početnom nizu.

Rješenje. Svi takvi brojevi su $n = 2^l$, $l \in \mathbf{N}$.

1° Dokažimo da $n = 2^l$ zadovoljava. Tvrdimo da će nakon nekog broja koraka svi članovi niza postati parni. Da bismo to pokazali formirajmo tablicu razlika niza $(a_i)_{i \in \mathbf{N}_0}$, gdje je $a_i := x_{i+1}$ za i=0, 1, ..., n-1 te $a_i := a_{i-n}$ za $i \geq n$. Odmah je jasno da se svi nizovi razlika periodički ponavljaju. Broj $a_i^{(k)}$, $0 \leq i \leq n-1$ općenito nije jednak (i+1)-vom članu niza dobivenog nakon k transformacija niza $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ (zbog apsolutnih vrijednosti u zadatku), ali se lako vidi da su ta dva broja iste parnosti. (Naime, brojevi $|a-b|$ i $c-d$ su iste parnosti ako su a i c, odnosno b i d iste parnosti.) Sada računamo ostatak pri dijeljenju broja $a_i^{(2^l)}$ s 2. Iskoristit ćemo formulu (4) i činjenicu da je broj $\binom{2^l}{j}$ paran ako su l i j prirodni te $j \leq 2^l$-1. (Dokazat ćemo je kasnije; vidjeti zadatak 2.)

$$a_i^{(2^l)} = \sum_{j=0}^{2^l} (-1)^{2^l - j}\binom{2^l}{j} a_{i+j} \equiv a_i + a_{i+2^l} = 2a_i \equiv 0 \pmod 2$$

Dakle, $a_i^{(2^l)}$ je paran za svaki i pa su svi članovi niza dobivenog iz $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ pomoću 2^l operacija također parni. Možemo ih "u mislima" podijeliti s 2 i nastaviti postupak. Opet ćemo doći do parnih brojeva, što znači da su svi članovi novodobivenog niza djeljivi s 4. Ponavljajući taj proces zaključujemo da će nakon dovoljnog broja koraka svi članovi niza biti djeljivi s proizvoljno velikom potencijom broja 2. S druge strane, svi članovi nizova dobivenih iz $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ su nenegativni i najviše jednaki $\max\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}\}$, gdje je $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ niz dobiven nakon jedne transformacije. (To je očito jer je $x_j^{(1)}, x_{j+1}^{(1)} \geq 0$ i $\left|x_{j+1}^{(1)} - x_j^{(1)}\right| \leq \max\{x_j^{(1)}, x_{j+1}^{(1)}\}$.) Dakle, kad-tad stižemo do niza samih nula.

2° Dokažimo da za ostale prirodne brojeve ne vrijedi tvrdnja zadatka. Neka je n takav da iz odabranog niza $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ možemo dobiti same nule i neka nisu svi brojevi x_j međusobno jednaki. Razmotrimo trenutak kada smo transformacijama dobili niz nula. U prethodnom nizu svi su članovi morali biti jednaki nekom broju a>0, a u nizu prije njega, $x_1', x_2', x_3', ..., x_{n-1}', x_n'$, vrijedilo je (uz oznaku $x_{n+1}' := x_1'$) $\left|x'_{j+1} - x'_j\right| = a, \forall j$ pa je stoga:

$$n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|x'_{j+1} - x'_j\right|}{a} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{x'_{j+1} - x'_j}{a} = 0 \pmod{2}$$

Zato n mora biti paran. Dokažimo da broj $\frac{n}{2}$ također zadovoljava tvrdnju ili je n=1. Pretpostavimo da nije tako, tj. da je $\frac{n}{2} \geq 2$ i da postoji niz $x_1, x_2, x_3, ..., x_{\frac{n}{2}}$ za koji nikad nećemo doći do nul-niza. No, tada i niz $x_1, x_2, x_3, ..., x_{\frac{n}{2}}, x_1, x_2, x_3, ..., x_{\frac{n}{2}}$ ima isto svojstvo pa za n ne bi vrijedila tvrdnja zadatka. Dakle tvrdnja vrijedi i za broj $\frac{n}{2}$ pa je i on paran. Dakle, nakon nekog broja dijeljenja n s 2 dolazimo do broja 1 pa je $n = 2^l$, $l \in \mathbf{N}$. Time je zadatak riješen.

Q. E. D.

Tablica razlika i formule (3) i (4) najelegantnije se primjenjuju kod identiteta koji sadrže binomne koeficijente.

Primjer 5. Dokažite jednakosti:

(a) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbf{N}_0$,

(b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje. Za dokaz od (a) uzeli bismo $a_i := \binom{n+i}{n}$ i zatim lako (indukcijom) dokazali $a_i^{(k)} = \binom{n+i}{n-k}$, $k \leq n$ pa bi iz formule (3) zbog $a_n = \binom{2n}{n}$ i $a_0^{(k)} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ odmah slijedila tvrdnja. U dokazu od (b) postupili bismo slično: $a_i := i \cdot 2^{i-1}$, $a_i^{(k)} = (i+2k) \cdot 2^{i-1}$ pa (3) daje $n \cdot 2^{n-1} = a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_0^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$.

Q. E. D.

Na samom kraju čitatelju ostavljamo nekoliko zadataka za samostalni rad.

ZADACI:

1. Dokažite identitete:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} i^2(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

2. Dokažite malo poopćenje primjera 5. (a).

$\binom{2n}{m} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i+m-n}$, $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{Z}$, $0 \le m \le 2n$, gdje smatramo da je $\binom{n}{r} = 0$ za $r \in \mathbf{Z}$, $r<0$ ili $r>n$. Zatim, koristeći tu jednakost, indukcijom po $l \in \mathbf{N}$ pokažite parnost broja $\binom{2^l}{j}$, $j \in \mathbf{N}, j \le 2^l-1$, što smo koristili u primjeru 4.

3. Pokažite:

(a) $1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + ... + n^2\binom{n}{n} = 2^{n-2}(n^2+n)$, $n \in \mathbf{N}$,

(b) $\frac{1}{1\cdot 2}\binom{n}{0} + \frac{1}{2\cdot 3}\binom{n}{1} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbf{N}_0$,

(c) $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$, $n,k \in \mathbf{N}_0$, $k \le n$,

(d) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\frac{1}{x+i} = \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$, $n \in \mathbf{N}_0$, $x \in \mathbf{C}\backslash\{-n,...,-1,0\}$.

4. Dokažite da je $\sum_{i=1}^{n} i^m$ polinom u varijabli n stupnja $m+1$, a koeficijenti uz n^{m+1} i n^m su mu redom $\frac{1}{m+1}$ i $\frac{1}{2}$.

5. Promotrite niz $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Konstruirajte njegovu trokutastu tablicu razlika, a zatim je rotirajte za 60° u smjeru kazaljke na satu, tako da broj 1 dođe na "vrh". Zamijenite svaki član dobivenog "trokuta" s recipročnom vrijednošću i uklonite predznak. Naposljetku, svaki red podijelite s brojem na početku tog reda. Dokažite da ste tako dobili poznati Paskalov trokut binomnih koeficijenata.

Literatura:

Shklarsky, Chentzov, Yaglom: "The USSR Olympiad Problem Book",
Matematičko-fizički list, br. 194,
Triangle, Vol. 2, No. 2.