Ime i prezime: _______________________________________ Broj bodova: _______

Matematika, PD Biologija — *Kratki test br. 1*

21. 10. 2011.

1. Pomnožite sljedeće matrice ukoliko je to moguće. Ako produkt ne postoji, onda napišite "NE POSTOJI".

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$ *(1 bod)*

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$ *(1 bod)*

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$ *(1 bod)*

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$ *(1 bod)*

2. Ispitajte da li su vektori

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Čitko napišite odgovor te uključite račun ili obrazloženje.
(3 boda)

Okrenite stranicu!

3. Riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

Zapišite rješenje kao vektor-stupac:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Uključite postupak rješavanja. *(3 boda)*

(Ukupno: 10 bodova)

Rješenja: `http://web.math.hr/~vjekovac/matbio.html`
(Postoji link s moje web stranice.)

Vjekoslav Kovač

Matematika, PD Biologija — *Kratki test br. 1*

21. 10. 2011.

Rješenja

1. Pomnožite sljedeće matrice ukoliko je to moguće. Ako produkt ne postoji, onda napišite "NE POSTOJI".

(a) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \text{ NE POSTOJI}$ *(1 bod)*

(b) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ *(1 bod)*

(c) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \text{ NE POSTOJI}$ *(1 bod)*

(d) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \text{ NE POSTOJI}$ *(1 bod)*

2. Ispitajte da li su vektori

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Čitko napišite odgovor te uključite račun ili obrazloženje.

(3 boda)

Tražimo koeficijente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ takve da je $\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ rješavajući linearni sustav Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & | & 0\\0 & 2 & -2 & | & 0\\1 & -3 & 1 & | & 0\end{bmatrix} \begin{matrix}\text{zamijenimo retke I i III}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & | & 0\\0 & 2 & -2 & | & 0\\-1 & 1 & 1 & | & 0\end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{retku III dodamo redak I}\end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & | & 0\\0 & 2 & -2 & | & 0\\0 & -2 & 2 & | & 0\end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{redak II pomnnožimo s } \frac{1}{2}\\ \text{redak III pomnnožimo s } \frac{1}{2}\end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & | & 0\\0 & 1 & -1 & | & 0\\0 & -1 & 1 & | & 0\end{bmatrix} \begin{matrix}\text{retku I dodamo } 3 \cdot \text{ redak II}\\ \\ \text{retku III dodamo redak II}\end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & | & 0\\0 & 1 & -1 & | & 0\\0 & 0 & 0 & | & 0\end{bmatrix}$$

Time je sustav riješen. Vidimo da je α_3 slobodna varijabla, dok su α_1, α_2 vezane varijable. Ako stavimo $\alpha_3 = \beta$, onda iz drugog retka dobivamo

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \beta,$$

dok iz prvog retka dobivamo

$$\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 2\alpha_3 = 2\beta.$$

Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\beta\\ \beta\\ \beta\end{bmatrix}$ pa specijalno ima netrivijalno rješenje (za $\beta \neq 0$).

Zaključujemo da vektori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ **nisu linearno nezavisni**, tj. da su **linearno zavisni**.

3. Riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

Zapišite rješenje kao vektor-stupac te uključite postupak rješavanja.

(3 boda)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{retku II dodamo } (-1)\cdot \text{ redak I} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{zamijenimo retke II i III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{retku III dodamo } 3\cdot \text{ redak II} \\ \text{retku IV dodamo } (-3)\cdot \text{ redak II} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \text{zamijenimo retke III i IV} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{retku IV dodamo } 3\cdot \text{ redak III} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Vidimo da smo dobili gornje-trokutasti sustav. Iz četvrtog retka:

$$-x_4 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 4.$$

Iz trećeg retka:

$$2x_3 - x_4 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = x_4 + 2 = 4 + 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.$$

Iz drugog retka:

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_3 - x_4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Iz prvog retka:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 + 10 = -2 - 3 - 4 + 10 = 1.$$

Rješenje zapisano kao vektor-stupac:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vjekoslav Kovač

Ime i prezime: ______________________________ Broj bodova: _______

Matematika, PD Biologija — *Kratki test br. 2*

11. 11. 2011.

1. Za koju vrijednost realnog parametra a je matrica

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

singularna, tj. nema inverz? *(2 boda)*

U tom slučaju (tj. za taj a) izračunajte rang gornje matrice. *(2 boda)*

Okrenite stranicu!

2. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(3 boda)

3. Nađite inverz matrice AB, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 boda)

(Ukupno: 10 bodova)

Rješenja: `http://web.math.hr/~vjekovac/matbio.html`
(Postoji link s moje web stranice.)

Vjekoslav Kovač

Matematika, PD Biologija — *Kratki test br. 2*

11. 11. 2011.

Rješenja

1. Za koju vrijednost realnog parametra a je matrica

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

singularna, tj. nema inverz? *(2 boda)*

Rješenje. Matrica je singularna točno onda kad joj je determinanta jednaka 0. Računamo determinantu gornje matrice po Sarusovom pravilu:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = a \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - a \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2$$

$$= 2a + 3 - 1 \;=\; 2a + 2\,.$$

Dakle, matrica će biti singularna kada je $2a + 2 = 0$, tj. $a = -1$.

U tom slučaju (tj. za taj a) izračunajte rang gornje matrice. *(2 boda)*

Rješenje. Za $a = -1$ matrica postaje

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Provodimo elementarne (Gaussove) transformacije na recima:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobivena matrica ima prva dva retka linearno nezavisna, pa joj je rang jednak **2**.

2. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(3 boda)

Rješenje. Koristimo Laplaceov razvoj determinante po prvom retku:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Posljednje dvije determinante razvijamo po zadnjim recima:

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Konačno koristimo poznatu formulu za determinantu 2×2 matrice:

$$\begin{aligned} &= 4\,(2 \cdot 3 - 1 \cdot 4) - 6\,(2 \cdot 3 - 1 \cdot 4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

3. Nađite inverz matrice AB, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3 boda)

Rješenje. Najprije izračunamo produkt danih matrica:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada računamo inverz postupkom opisanim na vježbama:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Dakle

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vjekoslav Kovač

Ime i prezime: ____ Broj bodova: _______

Matematika, PD Biologija — *Kolokvij br. 1*

18. 11. 2011.

Nije dozvoljeno koristiti nikakava pomagala osim pribora za pisanje i brisanje.
Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **40**.

1. *(2 boda)* Nađite x i y koji zadovoljavaju jednakost

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. *(3 boda)* Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

izračunajte

$$A^{-1}\big(A^2 + A^{-1}\big)\big(A + A^{-2}\big) - \big(2A^{-1} + A^{-4}\big).$$

3. U sljedećem sustavu linearnih jednadžbi desna strana nije vidljiva.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & \blacksquare \\ x & + & 2y & + & 3z & = & \blacksquare \\ x & - & 2y & - & 5z & = & \blacksquare \end{array}$$

(a) *(3 boda)* Izračunajte rang (neproširene) matrice sustava.

(b) *(1 bod)* Ukoliko je poznato da sustav ima barem jedno rješenje, nađite rang proširene matrice sustava.

(c) *(2 boda)* Koji rezultat s predavanja ste koristili u (b) dijelu zadatka? Navedite ime i formulaciju tog teorema.

4. *(3 boda)* Ispitajte jesu li vektori

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Svoj odgovor obavezno potvrdite računom i/ili obrazloženjem.

5. Neka su A i B dvije kvadratne matrice reda 2011 takve da je

$$\det A = 3, \quad \det B = -2.$$

(a) *(2 boda)* Izračunajte $\det\left(A^2B^3\right)$.

(b) *(2 boda)* Koji rezultat s predavanja ste koristili u (a) dijelu zadatka? Navedite ime i formulaciju tog teorema.

6. *(2 boda)* Riješite jednadžbu

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & x & x \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix} = 20\,.$$

7. (a) *(3 boda)* Izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (b) *(1 bod)* Postoji li inverz gornje matrice?

8. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektori u $\mathbb{R}^3$. Koji od sljedećih izraza su dobro definirani (tj. imaju smisla). Označite svoj odgovor u odgovarajućoj kućici. Obrazloženje nije potrebno.

(a) *(1 bod)*	$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}$	☐ dobro definiran	☐ nije dobro definiran
(b) *(1 bod)*	$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$	☐ dobro definiran	☐ nije dobro definiran
(c) *(1 bod)*	$(\vec{a} \cdot \vec{c}) \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$	☐ dobro definiran	☐ nije dobro definiran
(d) *(1 bod)*	$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	☐ dobro definiran	☐ nije dobro definiran
(e) *(1 bod)*	$\Big((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\Big) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$	☐ dobro definiran	☐ nije dobro definiran

9. (a) *(3 boda)* Ispitajte sijeku li se sljedeća dva pravca zadana jednadžbama u kanonskom obliku:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}, \qquad \frac{x+5}{5} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+5}{4}.$$

Ukoliko se sijeku, nađite njihovu točku presjeka.

(b) *(2 boda)* Izračunajte kut između gornjih pravaca.

10. (a) *(3 boda)* Riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

(b) *(1 bod)* Što je to homogeni sustav linearnih jednadžbi? Da li je gornji sustav homogen?

(c) *(2 boda)* Koliko rješenja ima homogeni linearni sustav od 2000 jednadžbi s 2011 nepoznanica? Argumentirajte odgovor pozivajući se na tvrdnje s predavanja ili obrazložite svojim riječima.

Rješenja i rezultati: `http://web.math.hr/~vjekovac/matbio.html`

Rezultati će na web stranici biti objavljeni samo pod JMBAG-om i matičnim brojem.

Vjekoslav Kovač

Matematika, PD Biologija — *Rješenja kolokvija br. 1*

18. 11. 2011.

1. *(2 boda)* Nađite x i y koji zadovoljavaju jednakost

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Množenjem matrica na lijevoj strani dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$x + 2y = 2, \qquad 3 - y = 4\,.$$

Iz druge jednadžbe odmah nalazimo y, a potom iz prve jednadžbe nalazimo x. Rezultat je $x = 4,\ y = -1$.

2. *(3 boda)* Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

izračunajte

$$A^{-1}\big(A^2 + A^{-1}\big)\big(A + A^{-2}\big) - \big(2A^{-1} + A^{-4}\big).$$

Rješenje. Najprije pojednostavljujemo izraz za općenitu matricu A, a tek potom uvrštavamo konkretnu gornju matricu.

$$\begin{aligned}
&A^{-1}\big(A^2 + A^{-1}\big)\big(A + A^{-2}\big) - \big(2A^{-1} + A^{-4}\big) \\
&= A^{-1}\big(A^3 + I + I + A^{-3}\big) - 2A^{-1} - A^{-4} \\
&= A^2 + 2A^{-1} + A^{-4} - 2A^{-1} - A^{-4} \\
&= A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. U sljedećem sustavu linearnih jednadžbi desna strana nije vidljiva.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
3x & + & 2y & + & z & = & \blacksquare \\
x & + & 2y & + & 3z & = & \blacksquare \\
x & - & 2y & - & 5z & = & \blacksquare
\end{array}$$

(a) *(3 boda)* Izračunajte rang (neproširene) matrice sustava.

(b) *(1 bod)* Ukoliko je poznato da sustav ima barem jedno rješenje, nađite rang proširene matrice sustava.

(c) *(2 boda)* Koji rezultat s predavanja ste koristili u (b) dijelu zadatka? Navedite ime i formulaciju tog teorema.

Rješenje.

(a) Računamo rang provođenjem elementarnih transformacija na recima.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{zamijenimo retke I i II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{retku II dodamo } (-3)\cdot \text{ redak I} \\ \text{retku III dodamo } (-1)\cdot \text{ redak I} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{redak II pomnnožimo s } (-\frac{1}{4}) \\ \text{redak III pomnnožimo s } (-\frac{1}{4}) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{retku III dodamo } (-1)\cdot \text{ redak II} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dobivena matrica ima prva dva retka linearno nezavisna pa joj je rang jednak 2.

(b) Kako sustav ima rješenja, prema Konecker-Capellijevom teoremu znamo da je rang proširene matrice sustava jednak rangu matrice sustava, a on je prema prothodnom zadatku jednak 2.

(c) Teorem (*Kronecker-Capelli*). Linearni sustav ima (barem jedno) rješenje ako i samo ako je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava.

4. *(3 boda)* Ispitajte jesu li vektori

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Svoj odgovor obavezno potvrdite računom i/ili obrazloženjem.

Rješenje. Provjeravamo ima li sustav $\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} + \alpha_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ili ima i netrivijalnih rješenja. Sustav se može riješiti Gaussovom metodom eliminacije.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{retku II dodamo } 3\cdot \text{ redak I} \\ \\ \text{retku IV dodamo } (-2)\cdot \text{ redak I} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{redak II pomnožimo s } \frac{1}{9} \\ \text{redak II pomnožimo s } (-\frac{1}{2}) \\ \text{redak II pomnožimo s } (-\frac{1}{7}) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{retku III dodamo } (-1) \cdot \text{ redak II} \\ \text{retku IV dodamo } (-1) \cdot \text{ redak II} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Varijabla α_3 je slobodna pa uzimamo $\alpha_3 = t$ za proizvoljni realni broj t. Iz drugog retka dobivamo $\alpha_2 = -t$, a potom iz prvog retka $\alpha_1 = -2t$. Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja pa vektori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ nisu linearno nezavisni, tj. linearno su zavisni.

5. Neka su A i B dvije kvadratne matrice reda 2011 takve da je

$$\det A = 3, \quad \det B = -2.$$

(a) *(2 boda)* Izračunajte $\det\left(A^2 B^3\right)$.

(b) *(2 boda)* Koji rezultat s predavanja ste koristili u (a) dijelu zadatka? Navedite ime i formulaciju tog teorema.

Rješenje.

(a) Prema Binet-Cauchyjevom teoremu je

$$\begin{aligned} \det\left(A^2 B^3\right) &= \det\left(AABBB\right) = (\det A)(\det A)(\det B)(\det B)(\det B) \\ &= (\det A)^2 (\det B)^3 = 3^2(-2)^3 = 9 \cdot (-8) = -72 \end{aligned}$$

(b) Teorem (*Binet-Cauchy*). Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, onda vrijedi $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
Općenitija formulacija: Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kvadratne matrice istog reda, onda vrijedi $\det\left(A_1 A_2 \ldots A_n\right) = (\det A_1)(\det A_2)\ldots(\det A_n)$.

6. *(2 boda)* Riješite jednadžbu

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & x & x \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix} = 20\,.$$

Rješenje. Determinantu na lijevoj strani možemo početi računati tako da najprije oduzmemo prvi redak od drugog i trećeg, a potom napravimo Laplaceov razvoj po drugom stupcu.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & x & x \\ 3 & x & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x-1 & 0 & x-2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -x\big(2(x-1) - 2(x-2)\big) = -2x$$

Prema tome, jednažba postaje naprosto $-2x = 20$, što ima za rješenje $x = -10$.

Alternativno, mogli smo izračinati determinantu primjenom Sarusovog pravila za 3×3 matrice.

7. (a) *(3 boda)* Izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) *(1 bod)* Postoji li inverz gornje matrice?

Rješenje.

(a) Determinantu računamo višestrukom primjenom Laplaceovog razvoja, najpije po prvom retku, a potom po trećim recima dobivenih matrica.

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6(2-4) - 2(2-4) = -8 \end{aligned}$$

(b) Kako je $\det A \neq 0$, matrica A je regularna, tj. ima inverz.

8. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektori u $\mathbb{R}^3$. Koji od sljedećih izraza su dobro definirani (tj. imaju smisla). Označite svoj odgovor u odgovarajućoj kućici. Obrazloženje nije potrebno.

(a) *(1 bod)* $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}$ ☐ dobro definiran ☐ nije dobro definiran

(b) *(1 bod)* $\big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big)\vec{c} - \big(\vec{b} \cdot \vec{c}\big)\vec{a}$ ☐ dobro definiran ☐ nije dobro definiran

(c) *(1 bod)* $\big(\vec{a} \cdot \vec{c}\big) \times \big(\vec{b} \cdot \vec{c}\big)$ ☐ dobro definiran ☐ nije dobro definiran

(d) *(1 bod)* $\big(\vec{a} \times \vec{c}\big) \cdot \big(\vec{b} \times \vec{c}\big)$ ☐ dobro definiran ☐ nije dobro definiran

(e) *(1 bod)* $\Big(\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \times \vec{c}\Big) \cdot \big(\vec{a} \times \vec{b}\big)$ ☐ dobro definiran ☐ nije dobro definiran

Rješenje.

(a) nije dobro definiran
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ je skalar dok je $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor pa ih ne možemo zbrojiti.

(b) dobro definiran
Naprimjer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ je skalar koji množi vektor $\vec{c}$.

(c) nije dobro definiran
$\vec{a} \cdot \vec{c}$ i $\vec{b} \cdot \vec{c}$ su skalari pa njihov vektorski produkt nema smisla.

(d) dobro definiran
Ovo je skalarni produkt dva vektora.

(e) dobro definiran
Ovo je opet skalarni produkt dva vektora. U prvoj zagradi se pojavljuje vektorski produkt vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$.

9. (a) *(3 boda)* Ispitajte sijeku li se sljedeća dva pravca zadana jednadžbama u kanonskom obliku:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}, \qquad \frac{x+5}{5} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+5}{4}.$$

Ukoliko se sijeku, nađite njihovu točku presjeka.

(b) *(2 boda)* Izračunajte kut između gornjih pravaca.

Rješenje.

(a) Parametarska jednadžba prvog pravca je

$$x = 2 + 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = 1 + 2s,$$

a parametarska jednadžba drugog pravca je

$$x = -5 + 5t, \quad y = 5 - 3t, \quad z = -5 + 4t.$$

Izjednačimo li gornje izraze, dobivamo linearni sustav (po s, t):

$$\begin{aligned} 2 + 2s &= -5 + 5t \\ 3 + s &= 5 - 3t \\ 1 + 2s &= -5 + 4t \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcr} 2s & - & 5t & = & -7 \\ s & + & 3t & = & 2 \\ 2s & - & 4t & = & -6 \end{array}$$

Taj sustav možemo naprimjer riješiti Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & -5 & | & -7 \\ 1 & 3 & | & 2 \\ 2 & -4 & | & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{zamijenimo retke I i II} \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 2 \\ 2 & -5 & | & -7 \\ 2 & -4 & | & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{retku II dodamo } (-2) \cdot \text{redak I} \\ \text{retku III dodamo } (-2) \cdot \text{redak I} \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & -11 & | & -11 \\ 0 & -10 & | & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{redak II pomnožimo s } (-\frac{1}{11}) \\ \text{redak III pomnožimo s } (-\frac{1}{10}) \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{retku III dodamo } (-1) \cdot \text{redak II} \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iz druge retka dobivamo $t = 1$, dok iz prvog retka jednadžba $s + 3t = 2$ potom daje $s = -1$. Dakle, pravci se sijeku. Uvrštavajući u parametarsku jednadžbu prvog pravca dobivamo

$$x = 0, \quad y = 2, \quad z = -1$$

pa je točka presjeka $(0, 2, -1)$.

(b) Vektor smjera prvog pravca je $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, a vektor smjera drugog pravca je $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Ako s φ označimo kut između njih, onda je

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\,\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2}} \\ &= \frac{15}{\sqrt{9}\sqrt{50}} = \frac{15}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

Odavde vidimo $\varphi = 45°$ pa je kut između pravaca $45°$.

10. (a) *(3 boda)* Riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$

(b) *(1 bod)* Što je to homogeni sustav linearnih jednadžbi? Da li je gornji sustav homogen?

(c) *(2 boda)* Koliko rješenja ima homogeni linearni sustav od 2000 jednadžbi s 2011 nepoznanica? Argumentirajte odgovor pozivajući se na tvrdnje s predavanja ili obrazložite svojim riječima.

Rješenje.

(a)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{retku II dodamo } (-2) \cdot \text{redak I} \\ \text{retku III dodamo } (-3) \cdot \text{redak I} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{zamijenimo retke II i III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{redak II pomnožimo s } (-\frac{1}{2}) \\ \text{redak II pomnožimo s } (-\frac{1}{3}) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{retku IV dodamo } (-4) \cdot \text{redak II} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -10 & | & -2 \end{bmatrix} \text{ retku IV dodamo } 11 \cdot \text{ redak II}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Sada iz redaka IV, III, II, I redom dobivamo

$$x_4 = -2, \quad x_3 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 1$$

pa je rješenje

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Linearni sustav je homogen ako je slobodni član svake od jednadžbi jednak 0. Gornji sustav nije homogen jer četvrta jednadžba s desne strane ima -2.

(c) Odgovor: beskonačno mnogo rješenja.
Homogeni linearni sustav koji ima manje jednadžbi nego nepoznanica uvijek ima beskonačno mnogo rješenja. To se može vidjeti tako da se provodi Gaussova metoda eliminacije sve dok se ne dobije "stepeničasti oblik" matrice. Kako imamo više varijabli nego jednadžbi, barem jedna varijabla će biti slobodna, što vodi na beskonačno mnogo rješenja. Također treba napomenuti da sustav svakako ima rješenja, tj. nikad nećemo naići na kontradikciju, jer homogeni linearni sustav uvijek ima trivijalno rješenje: kada su sve varijable jednake 0.

Vjekoslav Kovač

Ime i prezime: ________________________________ Broj bodova: _______

Matematika, PD Biologija — *Kratki test br. 3*

20. 1. 2012.

1. Nađite jednadžbu normale na krivulju
$$y^3 = x + 8$$
u točki $(0, 2)$. *(3 boda)*

2. Izračunajte limes
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(\mathrm{tg} x)^2}\,.$$
(3 boda)

Okrenite stranicu!

3. Cijena nekog proizvoda (u kunama) je funkcija vremena $t \geq 1$ proteklog od proizvodnje (u danima) i zadana je formulom

$$f(t) = t^{-\ln t} \cdot \ln t\,.$$

U kojem trenutku $t_0 \geq 1$ će cijena tog proizvoda biti najveća?
(*Napomena*: Ne trebate numerički računati brojevni izraz.) *(4 boda)*

(Ukupno: 10 bodova)

Rješenja i rezultati: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/matbio.html`

Vjekoslav Kovač

Matematika, PD Biologija — *Kratki test br. 3*

20. 1. 2012.

Rješenja

1. Nađite jednadžbu normale na krivulju

$$y^3 = x + 8$$

u točki $(0, 2)$. *(3 boda)*

Rješenje. Krivulju možemo zapisati i kao graf funkcije

$$y = y(x) = \sqrt[3]{x+8} = (x+8)^{\frac{1}{3}}\,.$$

Deriviranje daje

$$y'(x) = \frac{1}{3}(x+8)^{-\frac{2}{3}}$$

te je specijalno

$$y'(0) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\,.$$

Koeficijent smjera normale je

$$-\frac{1}{y'(0)} = -12$$

pa je njena jednadžba

$$y - 2 = -12(x - 0)\,,$$

tj.

$$y = -12x + 2\,.$$

Alternativno rješenje. Derivaciju u točki 0 smo mogli naći i implicitnim deriviranjem:

$$3y^2 y' = 1\,,$$

odakle je

$$y'(0) = \frac{1}{3 \cdot y(0)^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}\,.$$

Sada se jednadžba pravca nalazi kao i u prvom rješenju.

2. Izračunajte limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(\mathrm{tg} x)^2}\,.$$

(3 boda)

Rješenje. Najprije transformiramo izraz:

$$\frac{e^{x^2} - 1}{(\mathrm{tg} x)^2} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(\mathrm{tg} x)^2} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot (\cos x)^2\,.$$

Sada koristimo tablične limese

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

kako bismo izračunali

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{(\mathrm{tg}x)^2}=1\cdot 1^2\cdot 1^2=1\,.$$

3. Cijena nekog proizvoda (u kunama) je funkcija vremena $t\geq 1$ proteklog od proizvodnje (u danima) i zadana je formulom

$$f(t)=t^{-\ln t}\cdot\ln t\,.$$

U kojem trenutku $t_0\geq 1$ će cijena tog proizvoda biti najveća?
(*Napomena*: Ne trebate numerički računati brojevni izraz.) *(4 boda)*

Rješenje. Primijetimo da derivaciju $f'(t)$ možemo izračunati trikom logaritamskog deriviranja.

$$\begin{aligned} f(t)&=t^{-\ln t}\cdot\ln t && \text{logaritmirajmo}\\ \ln f(t)&=-(\ln t)^2+\ln(\ln t) && \text{derivirajmo (po } t)\\ \frac{f'(t)}{f(t)}&=-2(\ln t)\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t} \end{aligned}$$

Sređivanje daje:

$$f'(t)=f(t)\cdot\frac{1-2(\ln t)^2}{t\ln t}\,.$$

Rješavanje jednadžbe $f'(t)=1$ za $t>1$ daje samo rješenje

$$t=t_0=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,.$$

Da je to doista točka maksimuma vidi se iz

	1 — $e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ — ∞
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	$\searrow$

Vjekoslav Kovač

Ime i prezime: ________________________________ Broj bodova: _______

Matematika, PD Biologija — *Kolokvij br. 2*

26. 1. 2012.

Nije dozvoljeno koristiti nikakava pomagala osim pribora za pisanje i brisanje te tablica limesa, derivacija i integrala.
Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **40**.

1. U točki $(1, 2)$ konstruirane su tangenta na krivulju $xy = 2$ i tangenta na krivulju $y^2 = 4x$.

   (a) (*6 bodova*) Nađite jednadžbe tih tangenti.

   (b) (*2 boda*) Izračunajte $\operatorname{tg} \varphi$, pri čemu je φ kut između tih tangenti.

2. (a) (*3 boda*) Provjerite da li je $y = \frac{2}{1+e^{-6x}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = 3y(2-y)$.

(b) (*2 boda*) Kako se zove ta diferencijalna jednadžba?

(c) (*3 boda*) Izračunajte prvu i drugu derivaciju funkcije $f(x) = x^{3x}$ te provjerite da f zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xf(x)f''(x) - xf'(x)^2 - 3f(x)^2 = 0$.

3. (a) (*4 boda*) Odredite realni parametar a tako da funkcija zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{e^x - 1} & \text{za } x < 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x^2} & \text{za } x > 0 \\ a & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$.

(b) (*4 boda*) Izračunajte limes $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{e^{x-3}-1}$.

4. (*8 bodova*) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

5. (a) (*3 boda*) Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, x\, dx$.

(b) (*2 boda*) Koji rezultat/formulu koristimo prilikom računanja određenih integrala? Iskažite taj rezultat.

(c) (*3 boda*) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = x^2 - 2x - 4$ i $y = -x^2 - 2x + 4$.

Rješenja i rezultati: `http://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/matbio.html`

Vjekoslav Kovač

Matematika, PD Biologija — *Rješenja kolokvija br. 2*

26. 1. 2012.

1. U točki $(1,2)$ konstruirane su tangenta na krivulju $xy = 2$ i tangenta na krivulju $y^2 = 4x$.

   (a) (*6 bodova*) Nađite jednadžbe tih tangenti.

   (b) (*2 boda*) Izračunajte $\operatorname{tg}\varphi$, pri čemu je φ kut između tih tangenti.

   Rješenje.

   (a) Krivulje su zapravo grafovi funkcija

   $$f(x) = \frac{2}{x}, \qquad g(x) = 2\sqrt{x}\,.$$

   Deriviranje daje

   $$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -2, \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad g'(1) = 1\,.$$

   Jednadžba tangente na prvu krivulju je

   $$y - 2 = -2(x-1)\,, \qquad \text{tj.} \quad y = -2x + 4\,,$$

   dok je jednadžba tangente na drugu krivulju

   $$y - 2 = 1(x-1)\,, \qquad \text{tj.} \quad y = x + 1\,.$$

   (b) Koeficijenti smjera tangenti su -2 i 1 pa je

   $$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{1-(-2)}{1+(-2)\cdot 1}\right| = 3\,.$$

2. (a) (*3 boda*) Provjerite da li je $y = \frac{2}{1+e^{-6x}}$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = 3y(2-y)$.

   (b) (*2 boda*) Kako se zove ta diferencijalna jednadžba?

   (c) (*3 boda*) Izračunajte prvu i drugu derivaciju funkcije $f(x) = x^{3x}$ te provjerite da f zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xf(x)f''(x) - xf'(x)^2 - 3f(x)^2 = 0$.

   Rješenje.

(a) Kako je

$$y' = \frac{12e^{-6x}}{(1+e^{-6x})^2}\,,$$

imamo

$$y' - 3y(2-y) = \frac{12e^{-6x}}{(1+e^{-6x})^2} - 3 \cdot \frac{2}{1+e^{-6x}} \cdot \frac{2e^{-6x}}{1+e^{-6x}} = 0\,.$$

(b) To je *logistička diferencijalna jednadžba*.

(c) Koristimo trik logaritamskog deriviranja:

$$\begin{aligned}
\ln f(x) &= 3x \ln x \qquad \text{derivirajmo}\\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= 3\ln x + 3x \cdot \frac{1}{x}\\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= 3(\ln x + 1)\\
f'(x) &= x^{3x} \cdot 3(\ln x + 1)
\end{aligned}$$

Za drugu derivaciju naprosto koristimo formulu za derivaciju produkta i netom dobivenu formulu za $(x^{3x})'$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (x^{3x})' \cdot 3(\ln x + 1) + x^{3x} \cdot \frac{3}{x}\\
&= x^{3x} \cdot 3(\ln x + 1) \cdot 3(\ln x + 1) + x^{3x} \cdot \frac{3}{x}\\
&= x^{3x}\Big(9(\ln x + 1)^2 + \frac{3}{x}\Big)
\end{aligned}$$

Konačno računamo:

$$xf(x)f''(x) - xf'(x)^2 - 3f(x)^2 = x^{6x}\Big(9x(\ln x+1)^2 + 3 - 9x(\ln x + 1)^2 - 3\Big) = 0\,.$$

3. (a) (*4 boda*) Odredite realni parametar a tako da funkcija zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{e^x - 1} & \text{za } x < 0\\ \dfrac{\cos x - 1}{x^2} & \text{za } x > 0\\ a & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$.

(b) (*4 boda*) Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x-2)}{e^{x-3}-1}$.

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x) = a \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = (\text{tablični limes}) = a \cdot 1 = a \\
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = (\text{tablični limes}) = -\frac{1}{2} \\
&f(0) = a
\end{aligned}$$

Te tri vrijednosti moraju biti jednake, što je moguće samo za $a = -\frac{1}{2}$.

(b) Najprije uvedimo supstituciju $t = x - 3$ tako da $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{e^{x-3}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} = (\text{tablični limesi}) = 1 \cdot 1 = 1$$

4. (*8 bodova*) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Rješenje. Domena funkcije: $x \neq 1$, tj. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Nultočka funkcije: $x = 0$. Predznak funkcije:

	$-\infty$ do 0	0 do 1	1 do ∞
f	$-$	$-$	$+$

Prva derivacija: $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

	$-\infty$ do 0	0 do 1	1 do 2	2 do ∞
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

U $x = 0$ je lokalni maksimum i iznosi $f(0) = 0$.
U $x = 2$ je lokalni minimum i iznosi $f(2) = 4$.

Druga derivacija: $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

	$-\infty$ do 1	1 do ∞
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

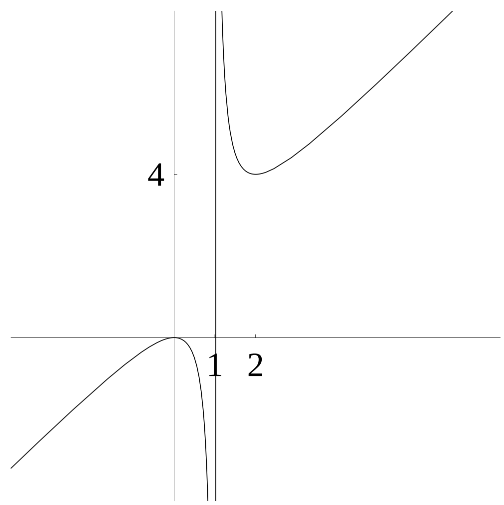
Vertikalna asimptota je $x = 1$ jer vrijedi:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left(\frac{1}{0}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \left(\frac{1}{0}\right) = +\infty\,.$$

Horizontalnih asimptota nema jer vrijedi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Skica grafa funkcije:



5. (a) (*3 boda*) Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, x\, dx$.

   (b) (*2 boda*) Koji rezultat/formulu koristimo prilikom računanja određenih integrala?

   (c) (*3 boda*) Iskažite taj rezultat. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = x^2 - 2x - 4$ i $y = -x^2 - 2x + 4$.

Rješenje.

(a) Supstituirajmo $t = x^2$ tako da je $dt = 2xdx$, tj. $xdx = \frac{1}{2}dt$. Granice integriranja se mijenjaju prema pravilu:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \qquad x = \sqrt{\pi} \;\Rightarrow\; t = \pi$$

tako da integral računamo:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\big(1-(-1)\big) = 1$$

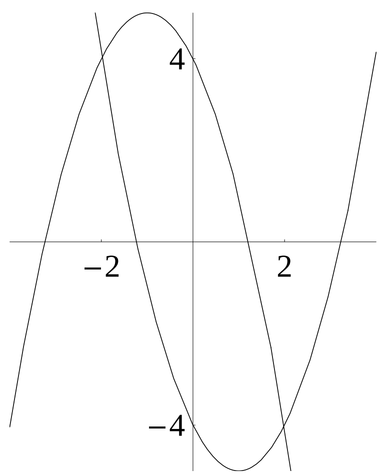
(b) Prilikom računanja određenih integrala koristimo *Leibniz-Newton-ovu formulu*: Ako je $F'(x) = f(x)$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(b) - F(a) \;=\; F(x)\Big|_a^b$$

(c) Najprije tražimo presjek krivulja rješavanjem:

$$x^2 - 2x - 4 = y = -x^2 - 2x + 4\,,$$

što daje točke $(x_1, y_1) = (-2, 4)$ i $(x_2, y_2) = (2, -4)$. Te krivulje su parabole pa slika izgleda otprilike ovako.



Tražena površina je

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{2} \Big((-x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 2x - 4)\Big)dx \\ &= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx \\ &= \Big(8x - \frac{2x^3}{3}\Big)\Big|_{-2}^{2} \\ &= \frac{32}{3} - \big(-\frac{32}{3}\big) \;=\; \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Vjekoslav Kovač

Ime i prezime: ______________________________ Broj bodova: _______

Matematika, PD Biologija — *Popravni kolokvij*

3. 2. 2012.

Nije dozvoljeno koristiti nikakava pomagala osim pribora za pisanje i brisanje te tablica limesa, derivacija i integrala.
Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **80**.

1. *(8 bodova)* Riješite sljedeći sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

2. *(8 bodova)* Ispitajte jesu li vektori-stupci

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni. Svoj odgovor obavezno potvrdite računom i/ili obrazloženjem.

3. *(8 bodova)* Riješite jednadžbu

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 & x \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ x & -2 & x & x \end{vmatrix} = -12\,.$$

4. Zadani su vektori

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \qquad \vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}\,.$$

Izračunajte svaki od sljedećih izraza (ukoliko je dobro definiran) ili napišite "nije definirano".

(a) *(2 boda)* $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(b) *(2 boda)* $\vec{a} \cdot \left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right)$

(c) *(2 boda)* $\vec{b} \times \vec{c}$

(d) *(2 boda)* $\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \times \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

5. *(8 bodova)* Ispitajte sijeku li se sljedeća dva pravca zadana jednadžbama u kanonskom obliku:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad \frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-4}{1}.$$

Ukoliko se sijeku, nađite njihovu točku presjeka.

6. *(8 bodova)* Nađite jednadžbu tangente na parabolu $y = x^2$ koja siječe os apscisu u točki $(1, 0)$.

7. *(8 bodova)* Izračunajte prvu i drugu derivaciju funkcije

$$y = f(x) = e^x \sin(2x)$$

te provjerite da li je ona rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2y' + 5y = 0\,.$$

8. *(8 bodova)* Izračunajte limese

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{tg}(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{1-\cos(3x)}.$$

9. *(8 bodova)* Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}\,.$$

10. *(8 bodova)* Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = -x^2$ i pravcem $y = x - 6$.