

Ime i prezime: \_\_\_\_\_ JMBAG: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

## Kolokvij 1 — 15. 11. 2013.

Nije dozvoljeno koristiti nikakva pomagala osim pribora za pisanje i brisanje i običnog digitrona.  
Vrijeme rješavanja: **105 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

1. (*ukupno 20 bodova*)

(a) (*5 bodova*) Iskažite princip matematičke indukcije.

(b) (*15 bodova*) Dokažite da za svaki prirodni broj  $n$  vrijedi formula  
 $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ , tj.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

2. (ukupno 20 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite prirodnu domenu  $\mathcal{D}_f$  funkcije zadane formulom

$$f(x) = \sqrt{\frac{2^x - 4}{2 - 2^x}} + \operatorname{arctg}(2x - 3) + \log_{10} |2x - 3|.$$

(b) (5 bodova) Odredite infimum i supremum skupa  $\mathcal{D}_f$  iz (a) dijela zadatka. Ima li taj skup minimum i maksimum?

3. (ukupno 20 bodova)

(a) (15 bodova) Dana je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = 2x|x - 1| - x|2x - 1|.$$

Izračunajte njenu sliku  $\mathcal{R}_f$  te odredite skupove  $f(\langle -1, 1 \rangle)$  i  $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ .

(b) (5 bodova) Je li funkcija  $f$  iz (a) zadatka injekcija na intervalu  $[0, 1]$ ?

4. (ukupno 20 bodova)

(a) (10 bodova) Odredite inverz funkcije  $g: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ,  $g(x) = \operatorname{arctg}((\operatorname{tg} x)^3)$ .

(b) (10 bodova) Odredite inverz funkcije  $h: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1)$ ,  $h(x) = \frac{4^x - 2^{x+1} + 1}{4^x}$ .

5. (ukupno 20 bodova)

(a) (6 bodova) Koje od sljedećih funkcija su injekcije? Zaokružite sva odgovarajuća slova bez obrazlaganja.

$$(A) f: \langle -\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad (B) g: \langle -\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad (C) h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = |x| \quad g(x) = \sqrt{1-x} \quad h(x) = \sqrt{|x|+1}$$

(b) (6 bodova) Koje od sljedećih funkcija su surjekcije? Zaokružite sva odgovarajuća slova bez obrazlaganja.

$$(A) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (B) g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (C) h: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, +\infty)$$
$$f(x) = 2^{\sin x} \quad g(x) = \sqrt{x} \quad h(x) = \operatorname{tg} x$$

(c) (8 bodova) Definirajte kompoziciju funkcija. Što je inverzna funkcija? Kako su karakterizirane funkcije koje imaju inverz?

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

JMBAG: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

## Kolokvij 2 — 24. 1. 2014.

Nije dozvoljeno koristiti nikakva pomagala osim pribora za pisanje i brisanje, običnog digitrona i formula podijeljenih na satu.

Vrijeme rješavanja: **105 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

1. (*ukupno 20 bodova*)

(a) (*10 bodova*) Izračunajte limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2^x - 1}$ .

(b) (*10 bodova*) Derivirajte funkciju zadanu formulom

$$f(x) = -2 \operatorname{arctg}(1 - 2x) + 2 \operatorname{arctg}(1 + 2x) - \ln(1 - 2x + 2x^2) + \ln(1 + 2x + 2x^2).$$

2. (ukupno 20 bodova)

(a) (6 bodova) Što znači da je funkcija konveksna, a što da je konkavna? Opišite kako se pomoću derivacija ispituje konveksnost/konkavnost.

(b) (6 bodova) Koje od sljedećih funkcija su konveksne na cijelom  $\mathbb{R}$ ?

(A)  $f(x) = x^3$

(B)  $f(x) = x^4$

(C)  $f(x) = |x|$

(D)  $f(x) = -x^2 + 1$

(E)  $f(x) = x^4 - x^2$

(F)  $f(x) = x^4 + x^2$

Zaokružite sva odgovarajuća slova bez obrazlaganja.

(c) (8 bodova) Kapital  $K(t)$  neke tvrtke iskazan je kao funkcija vremena  $t$  (u godinama od osnutka) i dan je formulom  $K(t) = t^{-t}$ . U kojem trenutku je kapital te tvrtke najveći?

3. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}.$$



4. (ukupno 20 bodova)

(a) (4 boda) Što je to neodređeni integral?

(b) (8 bodova) Izračunajte  $\int \frac{dx}{(1 + (\arcsin x)^2)\sqrt{1 - x^2}}$ .

(c) (8 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog grafom krivulje  $y = x2^{x^2}$ , osi apscisa i vertikalnim pravcima  $x = 1$  i  $x = \sqrt{2}$ .

5. (ukupno 20 bodova)

(a) (5 bodova) Kako glase jednađbe tangente i normale na graf neke funkcije u proizvoljnoj točki grafa?

(b) (5 bodova) Kakve sve asimptote može imati funkcija? Opišite postupak njihovog nalaženja.

(c) (10 bodova) Odredite sve točke u kojima je tangenta na graf funkcije  $f(x) = xe^{-x^2}$  paralelna asimptoti te funkcije.

---

Rezultate ćete dobiti idući tjedan u terminu vježbi iz kolegija, u četvrtak 30.1. 8–10 u A102.

Tom prilikom ćete moći iznijeti eventualne primjedbe na svoje ispravljene testove.

Taj dan u 10 sati će se održati i upis ocjena za studente koji su zadovoljni dobivenom ocjenom na kolokvijima.

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

Pismeni ispit — 19. 2. 2014.

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i obični kalkulator.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

Usmeni ispit će se održati u petak 21. 2. 2014. u 9 sati u predavaonici 105. U slučaju preklapanja s nekim drugim ispitima, javite se što prije radi dogovora alternativnog termina.

Rezultati će biti objavljeni večeras na mojoj web stranici i na oglasnoj ploči PMF-MO.

Vjekoslav Kovač

1. (20 bodova) Dokažite da broj  $2^{2^{n+1}}$  završava znamenkom 6 za svaki prirodni broj  $n$ .  
(Uputa: Koristite matematičku indukciju.)

2. (20 bodova) Funkcija  $f$  je zadana formulom

$$f(x) = |\sqrt{x} - 1|.$$

Što je prirodna domena  $\mathcal{D}_f$  funkcije  $f$ ? Ispitajte je li funkcija  $f$  injekcija i odredite joj sliku  $\mathcal{R}_f$ . Nađite njoj inverznu funkciju na intervalu  $[0, 1]$ .

3. (20=10+10 bodova) Izračunajte limese

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \left( \ln \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \right),$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{th} x - \operatorname{sh} x}.$

4. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

5. (a) (10 bodova) Izračunajte integral  $\int \ln(x^2 + 1) dx$ .
- (b) (10 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog koordinatnim osima i krivuljom s jednađbom  $y = 1 - x^3$ .  
(Uputa: Lik se nalazi u prvom kvadrantu.)

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

Pismeni ispit — 23. 4. 2014.

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i obični kalkulator.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

Usmeni ispit će se održati u četvrtak 24. 4. 2014. u 13 sati u predavaonici 108. U slučaju preklapanja s nekim drugim ispitima, javite se što prije radi dogovora alternativnog termina.

Rezultati će biti objavljeni večeras na mojoj web stranici i na oglasnoj ploči PMF-MO.

Vjekoslav Kovač

1. (*20 bodova*) Dokažite da za svaki prirodni broj  $n$  vrijedi

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$



2. (20 bodova) Odredite prirodnu domenu  $\mathcal{D}_f$  funkcije zadane formulom

$$f(x) = \arcsin(1 + \sqrt[3]{x}).$$

Potom izračunajte sliku te funkcije, tj.  $\mathcal{R}_f = f(\mathcal{D}_f)$ .

3. (20=10+10 bodova) Izračunajte limese

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 3^n}{x^3 + 5^n},$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^3}.$

4. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

5. (20=10+10 bodova) Izračunajte integrale

(a)  $\int_{-1}^1 (x^2 + |x|) dx,$

(b)  $\int \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) dx}{\operatorname{sh}^3 x}.$

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

Pismeni ispit — 26. 6. 2014.

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i obični kalkulator.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

Usmeni ispit će se održati u ponedjeljak 30. 6. 2014. u 12 sati u predavaonici 108. U slučaju preklapanja s nekim drugim ispitima, javite se što prije emailom radi dogovora alternativnog termina.

Rezultati će biti objavljeni večeras na mojoj web stranici i na oglasnoj ploči PMF-MO.

Vjekoslav Kovač

1. (20 bodova) Dokažite da za svaki prirodni broj  $n \geq 4$  vrijedi  $2^n \geq n^2$ .

2. (20 bodova) Odredite prirodnu domenu  $\mathcal{D}_f$  funkcije zadane formulom

$$f(x) = \sqrt{\arcsin x}.$$

Potom izračunajte sliku te funkcije, tj.  $\mathcal{R}_f = f(\mathcal{D}_f)$ .  
Je li funkcija  $f$  injekcija?

3. (20 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 2^n + n^3 3^n + n^2 4^n}{n^4 2^{n+1} + n^3 3^{n+1} + n^2 4^{n+1}}.$$

4. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}.$$



5. (20 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama

$$y^2 - x - 1 = 0 \quad \text{i} \quad y^2 + x - 1 = 0.$$

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

Pismeni ispit — 9. 7. 2014.

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i obični kalkulator.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

Usmeni ispit (i uvidi u ispravljene pismeni) će se održati u petak 11. 7. 2014. u 9 sati u predavaonici A101. U slučaju preklapanja s nekim drugim ispitima, javite se što prije radi dogovora alternativnog termina.

Rezultati će biti objavljeni večeras na mojoj web stranici i na oglasnoj ploči PMF-MO.

Vjekoslav Kovač

1. (20 bodova) Dokažite da za svaki prirodni broj  $n$  vrijedi

$$10 \sum_{k=1}^n k^4 + 2 \sum_{k=1}^n k^2 = n^2(n+1)^2(2n+1),$$

tj.

$$10(1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = n^2(n+1)^2(2n+1).$$

2. (20 bodova) Funkcija  $f$  je zadana formulom

$$f(x) = \left| \left| |x - 1| - 2 \right| - 3 \right|.$$

- (a) Što je prirodna domena  $\mathcal{D}_f$  funkcije  $f$ ?
- (b) Odredite sliku  $\mathcal{R}_f$  funkcije  $f$ .
- (c) Odredite skupove  $f([0, 4])$  i  $f^{-1}([0, 1])$ .
- (d) Ispitajte je li funkcija  $f$  injekcija na intervalu  $[0, 4)$ .

3. (20=10+10 bodova)

(a) Izračunajte limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{tg} x)}$ .

(b) Izračunajte derivaciju funkcije  $y = y(x)$  implicitno zadane jednažbom  $\sin(xy) = x - y$ .

4. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

5. (20 bodova) Izračunajte integral  $\int e^{x^3} x^5 dx$ .

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

Pismeni ispit — 3. 9. 2014.

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i obični kalkulator.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

Usmeni ispit (i uvidi u ispravljene pismeni) će se održati u ponedjeljak 8. 9. 2014. u 10 sati u predavaonici 108. U slučaju preklapanja s nekim drugim ispitima, javite se što prije radi dogovora alternativnog termina.

Rezultati će biti objavljeni večeras na mojoj web stranici i na oglasnoj ploči PMF-MO.

Vjekoslav Kovač

1. (*20 bodova*) Dokažite da je za svaki neparni prirodni broj  $n$  zadnja znamenka broja  $11^n - 9^n$  jednaka 2.

2. (20 bodova) Funkcija  $f$  je zadana formulom

$$f(x) = \log_2(1 - 3^x).$$

- (a) Što je prirodna domena  $\mathcal{D}_f$  funkcije  $f$ ?
- (b) Odredite sliku  $\mathcal{R}_f$  funkcije  $f$ .
- (c) Odredite skup  $f^{-1}([-1, 1])$ .
- (d) Ispitajte je li funkcija  $f$  injekcija na cijeloj svojoj domeni  $\mathcal{D}_f$ .



3. (20=10+10 bodova)

(a) Izračunajte derivaciju funkcije zadane formulom  $f(x) = \sin(\cos x) - \cos(\sin x)$ .

(b) Izračunajte limes  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} - 2^{x+2}}{5^{x+3} + 2^{x+4}}$ .

4. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

5. (20=10+10 bodova)

(a) Izračunajte neodređeni integral  $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$ .

(b) Izračunajte određeni integral  $\int_1^e x \ln x dx$ .

Ime i prezime: \_\_\_\_\_

# MATEMATIKA 1

Integrirani preddiplomski studij biologije i kemije nastavničkog smjera

Pismeni ispit — 17. 9. 2014.

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i obični kalkulator.

Vrijeme rješavanja: **120 minuta**. Ukupni broj bodova: **100**.

Usmeni ispit (i uvidi u ispravljene pismeni) će se održati u ponedjeljak 22. 9. 2014. u 12 sati u predavaonici 108. U slučaju preklapanja s nekim drugim ispitima, javite se što prije radi dogovora alternativnog termina.

Rezultati će biti objavljeni večeras na mojoj web stranici i na oglasnoj ploči PMF-MO.

Vjekoslav Kovač

1. (20 bodova) Dokažite da za svaki prirodni broj  $n$  vrijedi

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2,$$

tj.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

2. (20 bodova) Funkcija  $f$  je zadana formulom

$$f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}.$$

- (a) Odredite prirodnu domenu  $\mathcal{D}_f$  funkcije  $f$ .
- (b) Odredite sliku  $\mathcal{R}_f$  funkcije  $f$ .
- (c) Ispitajte je li funkcija  $f$  injekcija na cijeloj svojoj domeni  $\mathcal{D}_f$ .
- (d) Izračunajte  $f^{-1}([-1, 1])$ .

3. (20=10+10 bodova)

(a) Izračunajte derivaciju funkcije  $y = y(x)$  implicitno zadane jednažbom

$$\operatorname{sh}(x + y) - y^3 = \sin(x - y) - x^3.$$

(b) Odredite jednažbu tangente na graf funkcije  $f(x) = \ln x$  u točki  $(1, 0)$ .

4. (20 bodova) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}.$$

5. (20=10+10 bodova)

(a) Izračunajte neodređeni integral  $\int \frac{x \operatorname{arctg}(x^2)}{x^4 + 1} dx$ .

(b) Izračunajte površinu lika u prvom kvadrantu omeđenog krivuljom  $e^y = x$ , osi  $x$  i pravcem  $x = e$ .