Harmonijska analiza

Vjekoslav Kovač

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Skripta predmeta *Harmonijska analiza* na diplomskom studiju teorijske matematike
Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek

Ažurirano: 6. svibnja 2022.

Sadržaj

Pregled oznaka

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	redom skupovi prirodnih brojeva, prirodnih brojeva s nulom, cijelih brojeva, realnih brojeva, kompleksnih brojeva
$\mathbb{T}^d$	d-dimenzionalni euklidski torus, tj. $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$
$\mathcal{P}(S)$	partitivni skup skupa S, tj. skup svih podskupova od S
$\mathbb{1}_S$	karakteristična funkcija skupa S; $\mathbb{1}_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{za } x \in S \\ 0 & \text{za } x \notin S \end{cases}$
id_X ili I_X	identiteta na skupu X; $\mathrm{id}_X(x) := x$; drugu oznaku preferiramo kada je X vektorski prostor
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{sgn} z$	redom realni dio, imaginarni dio i predznak kompleksnog broja z; $\operatorname{sgn} z := \begin{cases} z/\lvert z\rvert & \text{za } z \neq 0 \\ 0 & \text{za } z = 0 \end{cases}$
$\lVert \cdot \rVert_X$	norma na normiranom ili kvazi-normiranom prostoru X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	skalarni produkt na unitarnom prostoru H
$\mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	vektorski prostor svih μ-g.s. klasa kompleksnih $\mathcal{X}$-izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$
$\mathcal{M}^+(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	familija svih μ-g.s. klasa $\mathcal{X}$-izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$ s vrijednostima u $[0, +\infty]$
$\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	vektorski prostor svih μ-g.s. klasa jednostavnih $\mathcal{X}$-izmjerivih kompleksnih funkcija na $\mathbb{X}$ koje iščezavaju izvan skupa konačne mjere
$\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	Lebesgueov prostor μ-g.s. klasa $\mathcal{X}$-izmjerivih p-sumabilnih kompleksnih funkcija na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, $0 < p \leqslant \infty$
$\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$	slabi Lebesgueov prostor na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, $0 < p \leqslant \infty$; vidjeti definiciju u odjeljku 1.2
$\mathcal{B}(X)$	Borelova σ-algebra na topološkom prostoru X; $\mathcal{B}(X)$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene skupove u X
λ ili $\lvert \cdot \rvert$	Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$; općenitije Haarova mjera na lokalno kompaktnoj abelovoj grupi $\mathbb{A}$; piše se bez oznake kada se podrazumijeva
$\mathrm{L}^p(E)$, $\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(E)$	prostori $\mathrm{L}^p(E, \mathcal{B}(E), \lambda\vert_{\mathcal{B}(E)})$, $\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(E, \mathcal{B}(E), \lambda\vert_{\mathcal{B}(E)})$ za $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$\mathrm{L}^p_{\mathrm{lok}}(U)$	prostor g.s. klasa izmjerivih kompleksnih funkcija na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$ koje su p-sumabilne na kompaktima u U
$[f]_Q$	prosjek lokalno integrabilne funkcije f po skupu Q obzirom na Lebesgueovu mjeru; vidjeti definiciju u odjeljku 4.2
$\lvert S\rvert$ ili $\operatorname{card} S$	broj elemenata konačnog skupa S; uzima se $+\infty$ za beskonačni skup S; skupovna funkcija $\lvert\cdot\rvert$ je mjera prebrajanja
$\ell^p(E)$	Lebesgueov prostor $\mathrm{L}^p(E, \mathcal{P}(E), \lvert\cdot\rvert)$ obzirom na mjeru prebrajanja
$\mathrm{C_c}(X)$	prostor neprekidnih kompleksnih funkcija s kompaktnim nosačem na topološkom prostoru X
∂_x ili $\frac{\partial}{\partial x}$ ili ∂_j	parcijalna derivacija po varijabli x, odnosno po j-toj varijabli
∇, ∇_x	gradijent, odnosno parcijalni gradijent po vektorskoj varijabli x
$\mathrm{C}^k_{\mathrm{c}}(U)$	prostor k puta neprekidno diferencijabilnih kompleksnih funkcija s kompaktnim nosačem na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$\lvert v\rvert$	euklidska norma vektora $v \in \mathbb{R}^d$; $\lvert(v_1, \ldots, v_d)\rvert := \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_d^2}$
$\mathrm{B}(x_0, r)$	otvorena kugla sa središtem x_0 i radijusom $r > 0$ u metričkom ili kvazi-metričkom prostoru (X, d); $\mathrm{B}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$; na $\mathbb{R}^d$ se podrazumijeva euklidska metrika
$\operatorname{Cl} S$, $\operatorname{Int} S$, $\operatorname{Bd} S$	redom zatvarač, unutrašnjost i rub skupa S u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$; na $\mathbb{R}^d$ se podrazumijeva euklidska topologija
$\mathbf{0}_V$ ili $\mathbf{0}$	nul-vektor u vektorskom prostoru V
$\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$	redom jezgra i slika linearnog operatora T
$\lVert T\rVert_{X_1\times\cdots\times X_n\to Y}$	operatorska norma multilinearnog operatora $T\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$; vidjeti definiciju u odjeljku 2.1
$\operatorname{span} S$	linearna ljuska skupa S u odgovarajućem vektorskom prostoru; najmanji vektorski potprostor koji sadrži S
$L \oplus M$	ortogonalna suma potprostora L i M nekog unitarnog prostora; $L \oplus M := \{x + y : x \in L, y \in M\}$ i pretpostavlja se $L \perp M$
$f(x) \lesssim_P g(x)$	postoji konačna konstanta C_P takva da za svaki x vrijedi $\lvert f(x)\rvert \leqslant C_P\lvert g(x)\rvert$; vidjeti definiciju u odjeljku 1.3
$f(x) \sim_P g(x)$	vrijedi $f(x) \lesssim_P g(x)$ i $g(x) \lesssim_P f(x)$
$f(x) = O_P(g(x))$, $x \to c$	postoji konačna konstanta C_P takva da $\lvert f(x)\rvert \leqslant C_P\lvert g(x)\rvert$ vrijedi na nekoj okolini točke c; vidjeti definiciju u odjeljku 1.3
$\mathrm{D}^{(p)}_a$, M_b, T_c	redom operatori p-normalizirane dilatacije s faktorom $a > 0$, modulacije za $b \in \mathbb{R}^d$ i translacije za $c \in \mathbb{R}^d$; vidjeti definicije u odjeljku 3.2

Predgovor

Kada pišeš knjigu, gradivo trebaš posložiti upravo onako kako bi volio da si ga i sam naučio.

Elias Menachem Stein (1931–2018)

prilikom jednog ručka na MFO u Oberwolfachu

Što je *harmonijska analiza*? To je grana matematike koja je proizišla iz davnih pokušaja da se funkcije prikažu kao superpozicije nekih osnovnih funkcija s oscilatornom, tj. valnom prirodom. Naime, već riječ *harmonik* ima glazbenu konotaciju, što nas pak podsjeća na činjenicu da se zvuk širi kao akustični val. Ipak, harmonijska analiza je apstrahirala te koncepte i otišla mnogo dalje: danas je vrlo "čista" i egzaktna matematička teorija. Autor ove skripte voli reći da je ona grana matematike koja proučava "lijepa" svojstva funkcija, funkcijskih prostora i operatora na njima.

U ovoj skripti obrađeni su neki najpoznatiji dijelovi tzv. realne harmonijske analize, koja se radi u ambijentu euklidskog prostora $\mathbb{R}^d$. Ipak, autor je u izbor gradiva ugradio i neke vlastite preference, poput isticanja tzv. singularnih integralnih operatora. Oni u modernoj analizi zauzimaju tako važno mjesto da bi se veliki dio harmonijske analize naprosto mogao nazvati *teorija singularnih integrala*.

Gradivo ovog predmeta i skripte posloženo je tako da ćemo u prvi plan staviti tehnike i ideje, dovoljno generalne da imaju brojne primjene, često u vrlo različitim matematičkim granama. U drugom planu će se nalaziti specifičnosti pojedinih teorija, a kad god je moguće, izložit ćemo i međusobni odnos rezultata u tim različitim područjima. Mnogi odjeljci bit će posvećeni samo po jednoj tehnici ili samo po jednoj matematičkoj ideji.

Poglavlje 1 diskutirat će osnovne principe dokazivanja konvergencije kod raznolikih problema iz matematičke analize. Poglavlje 2 će dati osnovne rezultate o interpolaciji Lebesgueovih prostora, moćnoj apstraktnoj tehnici koja često znatno olakšava dokazivanje konkretnih ocjena. U poglavlju 3 započinjemo sistematično proučavanje integralnih operatora i za početak ostajemo na klasi kod koje si, neformalno rečeno, možemo priuštiti da apsolutne vrijednosti ulaze pod integrale. Tim poglavljem će dominirati diskutiranje odnosa simetrija operatora i mogućeg raspona L^p ocjena. Poglavlja 4 i 5 bavit će se klasom Calderón-Zygmundovih operatora, koja se s vremenom izdvojila kao najprirodnija klasa linearnih integralnih operatora sa suptilnim poništavanjem. Shodno tome, trebat ćemo razviti specifične tehnike koje uzimaju u obzir to poništavanje. Usput će se fundirati osnove teorije Fourierovih množitelja i osnove Littlewood-Paleyeve teorije. Konačno, u poglavlju 6 bavit ćemo se tehnikama za dokazivanje maksimalnih ocjena te, posebno, omeđenošću maksimalnih varijanti integralnih operatora.

Odjeljci koji ne ulaze u redovno gradivo predmeta, već služe kao njegova ambicioznija nadopuna, označeni su zvjezdicom $\star$. Čak i u tim odjeljcima mnoge zanimljive teme su samo dotaknute, što ćemo pokušati kompenzirati velikim brojem zadataka za vježbu. Svih 6 poglavlja prožeto je i referencama na naprednију literaturu, kako bi zainteresirani čitatelj imao smjernice za daljnje usavršavanje.

Ovi materijali bili su korišteni kao skripta iz predmeta *Harmonijska analiza* na diplomskom studiju teorijske matematike u ak. god. 2017./2018. i 2021./2022. Zahvaljujem studentima koji su upisali, polazili i položili taj predmet. Također zahvaljujem Aleksandru Bulju i Mariju Stipčiću na korisnim ispravcima teksta. Konačno, zahvalan sam Hrvoju Šikiću što me je, prije dosta godina, uveo u osnove harmonijske analize.

Poglavlje 1

Kvantitativne formulacije kvalitativnih rezultata

Integralnim operatorima se bavi *harmonijska analiza* i ona je načelno "kvantitativna" disciplina. To znači da se većina dokaza provodi uspostavljanjem ocjena (tj. nejednakosti) za uvedene veličine, a potom se interpretira koje je značenje njihove konačnosti, pozitivnosti, ograničenosti i sl. Obično su te veličine pogodno odabrane norme na funkcijskim prostorima. Ponekad je to jedini put prema rješenju problema, makar nam može izgledati kao nepotrebno kompliciranje. U svakom slučaju, kvantitativni dokazi daju više informacija naspram "čisto kvalitativnih". Pokušajmo najprije na nekim jednostavnijim primjerima objasniti razliku između "kvalitativnog" i "kvantitativnog" gledišta na problem, dok ćemo efektivne primjene kvantitativne metode susretati kroz većinu gradiva ove skripte.

1.1. Kvalitativni i kvantitativni rezultati

Pretpostavimo da želimo dokazati konvergenciju nekog danog niza kompleksnih brojeva $(z_n)_{n=0}^{\infty}$. Ako nemamo očitog kandidata za limes, onda je jedini način pokušati dokazati da je niz Cauchyjev[1], tj.

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, k \in \mathbb{N}_0)\big(\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0 \cap [k, +\infty\rangle\big)\big(|z_m - z_n| < \varepsilon\big). \tag{1.1}$$

Za fiksirani $\varepsilon > 0$ uvodimo *broj ε-skokova* niza $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ kao najveći broj $N \in \mathbb{N}_0$ za koji postoje indeksi

$$m_1 < n_1 \leqslant m_2 < n_2 \leqslant \cdots \leqslant m_N < n_N$$

takvi da vrijedi $|z_{m_j} - z_{n_j}| \geqslant \varepsilon$ za $j = 1, 2, \ldots, N$. Ako pak postoje po volji veliki takvi brojevi N, tada uzimamo da je broj ε-skokova jednak ∞. Primijetimo da također

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francuski matematičar.

dozvoljavamo $N = 0$, u kojem slučaju uopće nema indeksâ s traženim svojstvom. Nije teško vidjeti da se uz ovu terminologiju tvrdnja (1.1) može zapisati:

$$\text{Za svaki } \varepsilon > 0 \text{ niz } (z_n)_{n=0}^{\infty} \text{ ima konačno mnogo } \varepsilon\text{-skokova.} \tag{1.2}$$

Ova preformulacija otvara mogućnost jednom kvantitativnom načinu dokazivanja konvergencije: fiksiramo $\varepsilon > 0$ i naprosto brojimo ε-skokove niza.

Ipak, ne moramo ovdje stati. Za fiksirani parametar $\varrho \in [1, \infty\rangle$ definiramo ϱ-*varijaciju* niza $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ kao broj

$$\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\varrho} := \Bigg(|z_0|^\varrho + \sup_{\substack{N\in\mathbb{N} \\ 0\leqslant m_1<n_1\leqslant\cdots\leqslant m_N<n_N}} \sum_{j=1}^{N} |z_{m_j} - z_{n_j}|^\varrho \Bigg)^{1/\varrho} \in [0, +\infty].$$

Dakle, ovdje promatramo bilo kojih N skokova niza i objedinimo ih ℓ^ϱ normom. Taj supremum se neće promijeniti ako dodamo i eventualne "međuskokove"

$$|z_0 - z_{m_1}|, \ |z_{n_1} - z_{m_2}|, \ \ldots, \ |z_{n_{N-1}} - z_{m_N}|$$

pa se ista definicija može zapisati malo elegantnije:

$$\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\varrho} := \Bigg(|z_0|^\varrho + \sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ 0=n_0<n_1<\cdots<n_M}} \sum_{j=1}^{M} |z_{n_{j-1}} - z_{n_j}|^\varrho \Bigg)^{1/\varrho}. \tag{1.3}$$

Član $|z_0|^\varrho$ je bilo nužno pridodati kako bi gornja veličina imala svojstvo norme; vidjeti zadatak 1.1(a). Nama je ključna opservacija da ako niz zadovoljava $A := \|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\varrho} < +\infty$, tada on ima najviše $(A/\varepsilon)^\varrho$ ε-skokova za svaki $\varepsilon > 0$, što je preciznija verzija od (1.2). Naime, ako je $|z_{m_j} - z_{n_j}| \geqslant \varepsilon$ za $j = 1, 2, \ldots, N$ i indeksi su kao i ranije, tada imamo

$$N\varepsilon^\varrho \leqslant \sum_{j=1}^{N} |z_{m_j} - z_{n_j}|^\varrho \leqslant \|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\varrho}^\varrho = A^\varrho.$$

U ovom slučaju imamo čak i vrlo konkretnu gornju ocjenu na broj ε-skokova niza.

Definicija ϱ-varijacije se lako prilagođava funkcijama realne varijable. Naprimjer, ϱ-varijacija funkcije $z\colon [0, +\infty\rangle \to \mathbb{C}$ se definira kao

$$\|z\|_{\mathrm{V}^\varrho} := \Bigg(|z(0)|^\varrho + \sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_M}} \sum_{j=1}^{M} |z(t_{j-1}) - z(t_j)|^\varrho \Bigg)^{1/\varrho}. \tag{1.4}$$

Čitatelj se zasigurno već susreo s 1-varijacijom funkcije, tj. $\|z\|_{\mathrm{V}^1}$, čija interpretacija je duljina parametrizirane krivulje z. Razlog uvođenja općenitijih veličina je u činjenici da V^ϱ-norme padaju po ϱ pa klasa nizova ili funkcija za koje su konačne raste. To znači da je umjesto $\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^1} < +\infty$ lakše dokazati npr. $\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^3} < +\infty$, što je još uvijek dovoljno za konvergenciju. Ponekad je moguće kontrolirati samo varijacijske norme za $\varrho > 2$; pogledajte napomenu 6.15. Napomenimo još kako V^{ϱ}-norme nisu sasvim intuitivne za $\varrho > 1$, jer kod njih doista moramo promatati supremum po svim konačnim podnizovima, vidjeti zadatak 1.1(b).

* * *

Prilično često niz čiju konvergenciju želimo provjeriti nije sasvim proizvoljan, već se pojavljuje u nekom složenijem kontekstu. Osim toga, moguće je promatrati točkovnu konvergenciju niza funkcija $z_n\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}$ na nekom prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, tj. konvergenciju nizova $(z_n(x))_{n=0}^{\infty}$ za razne vrijednosti varijable $x \in \mathbb{X}$.

Iskazat ćemo sada nekoliko rezultata koji će biti detaljno dokazani i komentirani tek u poglavlju 6. Neka čitatelj pokuša privremeno zanemariti detalje, pogotovo pojmove koje još nismo uveli, i neka se koncentrira na uočavanje njihove formalne sličnosti. U svakom od tih rezultata tvrdi se konvergencija g.s. nekog niza ili indeksirane familije kompleksnih funkcija.

(1) Za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ i za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|\mathrm{B}(x,r)|} \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(y)dy$$
i jednak je $f(x)$.

(2) Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$ sustav koji čuva mjeru; precizna definicija će biti dana u idućem odjeljku. Tada za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i za μ-gotovo svaki $x \in \mathbb{X}$ postoji limes
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x).$$

(3) Fundamentalno rješenje jednadžbe provođenja $\partial_t h(x,t) = \Delta h(x,t)$ u $\mathbb{R}^d \times \langle 0, +\infty\rangle$ uz početni uvjet $h(x,0) = f(x)$ dano je formulom
$$h(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy; \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0.$$
Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 \leqslant p < \infty$, tada za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes $\lim\limits_{t\to 0^+} h(x,t)$ i iznosi $f(x)$.

(4) Poissonov[2] integral funkcije f dan je formulom
$$u(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{y}{\pi((x-t)^2 + y^2)} dt; \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

[2]Siméon Denis Poisson (1781–1840), francuski matematičar, fizičar i injženjer.

Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ za $1 \leqslant p < \infty$, tada za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji limes $\lim_{y \to 0^+} u(x,y)$ i iznosi $f(x)$.

(5) Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, tada za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji limes

$$(Hf)(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\{t \in \mathbb{R} \,:\, |t| \geqslant \varepsilon\}} f(x-t)\, \frac{dt}{t}.$$

Na taj način definirana funkcija Hf zove se Hilbertov[3] transformat od f.

Još jednom napomenimo kako je jedini razlog preuranjenog navođenja ovih rezultata ukazati na njihovu sličnost, premda oni pripadaju raznolikim granama matematike. Znači li to da su njihovi dokazi u nekoj mjeri analogni, ili možda čak neki od rezultata logički impliciraju ostale? Zapravo je to uvelike točno. Barem prvi korak u dokazima tvrdnji (1)–(5) je uvijek formalno isti. U svakom od njih će nam biti očigledno kako tvrdnja vrijedi za funkcije iz nekog prirodnog gustog potprostora. Potom ćemo tvrdnju za općenite funkcije svesti na dokazivanje kvantitativne ocjene za po jedan maksimalni operator, redom definiran sa

$$(M_1 f)(x) := \sup_{r \in \langle 0, +\infty \rangle} \frac{1}{|\mathrm{B}(x,r)|} \Big| \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(y) dy \Big|,$$

$$(M_2 f)(x) := \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \Big| \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x) \Big|,$$

$$(M_3 f)(x) := \sup_{t \in \langle 0, +\infty \rangle} |h(x,t)|,$$

$$(M_4 f)(x) := \sup_{y \in \langle 0, +\infty \rangle} |u(x,y)|,$$

$$(M_5 f)(x) := \sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} \frac{1}{\pi} \Big| \int\limits_{\{t \in \mathbb{R} \,:\, |t| \geqslant \varepsilon\}} f(x-t)\, \frac{dt}{t} \Big|.$$

Zato ćemo taj zajednički dio dokaza apstrahirati i formulirati kao općenite teoreme 1.6 i 1.7 u idućem odjeljku.

Još je zanimljivija činjenica da su i ocjene za gornjih pet maksimalnih operatora M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 međusobno povezane. Npr. trik kojim ćemo iz ocjena za M_1 izvesti ocjene za M_2 prezentirat ćemo u odjeljku 6.3, a ocjene za M_5 ćemo također svesti na M_1 u odjeljku 6.4.

* * *

[3] David Hilbert (1862–1943), njemački matematičar.

Zadatak 1.1.

(a) Fiksirajmo $\varrho \in [1,\infty\rangle$. Dokažite da familija kompleksnih nizova za koje je $\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\varrho} < +\infty$ čini vektorski prostor i da je formulom (1.3) na njemu definirana norma.

(b) Pokažite da je zapravo $\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^1} = |z_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |z_{n-1} - z_n|$, a protuprimjerom opovrgnite tvrdnju $\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\varrho}^{\varrho} = |z_0|^\varrho + \sum_{n=1}^{\infty} |z_{n-1} - z_n|^\varrho$ za $\varrho > 1$.

1.2. Dva općenita principa konvergencije

Za početak ćemo formulirati jednostavni, ali često korišteni princip konvergencije po normi u Banachovim[4] prostorima. Obzirom da će to uglavnom biti neki prostori funkcija, njihove elemente ćemo označavati f, g, itd.

Teorem 1.1. (Princip konvergencije po normi) *Neka su X, Y Banachovi prostori i S gusti podskup od X te neka su $T_n\colon X \to Y$; $n \in \mathbb{N}$ linearni operatori. Pretpostavimo sljedeće:*

(1) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C_n \geqslant 0$ takva da za svaki $f \in X$ vrijedi $\|T_n f\|_Y \leqslant C_n \|f\|_X$.

(2) Postoji konstanta $C \geqslant 0$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $g \in S$ vrijedi $\|T_n g\|_Y \leqslant C \|g\|_X$.

(3) Za svaki $g \in S$ postoji limes $\lim_{n\to\infty} T_n g \in Y$.

Tada za svaki $f \in X$ postoji limes $\lim_{n\to\infty} T_n f \in Y$.

Uvjet (1) znači individualnu ograničenost svakog od operatora T_n na cijelom prostoru X, dok uvjet (2) znači uniformnu ograničenost svih operatora na gustom podskupu S. Ovako smo ih formulirali kako bismo naglasili da zapravo ne trebamo pretpostaviti uniformnu organičenost na cijelom prostoru, već će ona biti jednostavna posljedica.

Dokaz. Uzmimo $f \in X$ i $\varepsilon > 0$. Zbog gustoće od S postoji $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} \|T_n f\|_Y &\leqslant \|T_n g\|_Y + \|T_n(f-g)\|_Y \overset{(1),(2)}{\leqslant} C\|g\|_X + C_n\|f-g\|_X \\ &\leqslant C\|f\|_X + C\|g-f\|_X + C_n\|f-g\|_X < C\|f\|_X + (C+C_n)\varepsilon. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, f \in X)(\|T_n f\|_Y \leqslant C\|f\|_X). \tag{1.5}$$

[4]Stefan Banach (1892–1945), poljski matematičar.

Uzmimo opet $f \in X$ i $\varepsilon > 0$. Postoji $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \frac{\varepsilon}{3(C+1)}$. Nadalje, zbog Cauchyjevosti niza $(T_n g)_{n=1}^{\infty}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za $m, n \in \mathbb{N} \cap [k, \infty\rangle$ vrijedi

$$\|T_m g - T_n g\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sada za prirodne brojeve m, n takve da je $m, n \geqslant k$ imamo

$$\begin{aligned} \|T_m f - T_n f\|_Y &\leqslant \|T_m(f-g)\|_Y + \|T_m g - T_n g\|_Y + \|T_n(g-f)\|_Y \\ &\overset{(1.5)}{\leqslant} C\|f-g\|_X + \frac{\varepsilon}{3} + C\|g-f\|_X < 2C\frac{\varepsilon}{3(C+1)} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(T_n f)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjev niz u Y pa on i konvergira. □

Uz gornje pretpostavke sada znamo da je formulom $T_\infty f := \lim_{n\to\infty} T_n f$ dobro definiran linearni operator $T_\infty \colon X \to Y$, a iz (1.5) odmah slijedi da za svaki $f \in X$ imamo $\|T_\infty f\|_Y \leqslant C\|f\|_X$.

Napomena 1.2. Obrat teorema 1.1 je također istinit zahvaljujući potpunosti prostora X i Y. Naime, ukoliko za svaki $f \in X$ postoji $\lim_{n\to\infty} T_n f$, onda posebno znamo da je taj niz ograničen, tj.

$$(\forall f \in X)\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n f\|_Y < +\infty\Big).$$

Princip uniformne ograničenosti daje

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{X\to Y} < +\infty,$$

pri čemu $\|\cdot\|_{X\to Y}$ označava operatorsku normu. Stoga za $n \in \mathbb{N}$ i $f \in X$ imamo $\|T_n f\|_Y \leqslant C\|f\|_X$, što povlači (1) i (2).

* * *

Dajmo jednostavni primjer primjene teorema 1.1. To su jedan klasični rezultat J. von Neumanna[5] i njegov elegantni dokaz F. Riesza.[6]

Propozicija 1.3. *Neka je U unitarni operator na Hilbertovom prostoru H. Za svaki vektor $v \in H$ postoji limes $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k v \in H$.*

Dokaz. Očigledno za operatore $T_n \colon H \to H$; $n \in \mathbb{N}$ uzimamo

$$T_n v := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k v. \tag{1.6}$$

[5] John von Neumann (1903–1957), mađarsko-američki matematičar.
[6] Frigyes Riesz (1880–1956), mađarski matematičar.

Primijetimo da su uvjeti (1) i (2) ispunjeni po nejednakosti trokuta i korištenjem izometričnosti od U:

$$\|T_n v\|_H \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|U^k v\|_H = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k-1}\|v\|_H = \|v\|_H.$$

Čak za konstante C_n i C možemo uzeti 1. Preostaje provjeriti (3), tj. konvergenciju na gustom podskupu od H.

Tvrdimo da se H može prikazati kao ortogonalna suma jezgre i zatvarača slike od $U-I$, tj.

$$H = \operatorname{Ker}(U-I) \oplus \operatorname{Cl}(\operatorname{Im}(U-I)).$$

Naime, vektor $v \in H$ je ortogonalan na cijeli potprostor $\operatorname{Im}(U-I)$ ako i samo ako za svaki $w \in H$ imamo

$$0 = \langle (U-I)w, v\rangle_H = \langle w, (U^*-I)v\rangle_H = \langle w, U^{-1}v - v\rangle_H,$$

što pak vrijedi samo kada je $Uv = v$, tj. $(U-I)v = \mathbf{0}$. Dakle, ortogonalni komplement od $\operatorname{Im}(U-I)$ je upravo $\operatorname{Ker}(U-I)$, a ortogonalni komplement zatvarača potprostora je isti kao i ortogonalni komplement samog tog potprostora.

Sada vidimo da je $\operatorname{Ker}(U-I) \oplus \operatorname{Im}(U-I)$ gusti potprostor od H. Svaki vektor iz te sume potprostora je oblika $v = v_1 + v_2$, pri čemu je $v_1 \in \operatorname{Ker}(U-I)$ i $v_2 \in \operatorname{Im}(U-I)$. Za v_1 po konstrukciji imamo $Uv_1 = v_1$. Nadalje, po definiciji slike postoji $w \in H$ takav da je $v_2 = (U-I)w = Uw - w$. Konačno možemo računati:

$$T_n v = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{U^k v_1}_{=v_1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(U^{k+1}w - U^k w) = v_1 + \frac{1}{n}(U^n w - w),$$

pri čemu je u drugoj sumi došlo do teleskopiranja, tj. kraćenja većine članova. Posljednji izraz očigledno konvergira po normi prema vektoru v_1. $\square$

Primijetimo da smo usput dokazali i da operatori T_n konvergiraju u jakoj operatorskoj topologiji prema operatoru $H \to H$, $v \mapsto v_1$, što je ortogonalni projektor na zatvoreni potprostor $\operatorname{Ker}(U-I)$; vidjeti zadatak 1.7(a).

Premda smo u argumentu aproksimacije kod propozicije 1.3 koristili kvantitativnu ocjenu normi operatora (tj. njihovu uniformnu ograničenost), rezultat koji smo dobili je još uvijek kvalitativan, jer ne govori ništa o “brzini” konvergencije ergodičkih usrednjenja (1.6). Možemo kao i u prethodnom odjeljku brojati skokove niza $(T_n v)_{n=1}^{\infty}$, ovog puta u normi prostora H, odnosno formirati odgovarajuću varijacijsku veličinu. Takav rezultat su dali R. L. Jones, I. V. Ostrovskii i J. M. Rosenblatt [JOR96].

Propozicija 1.4. *Neka je U unitarni operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru H. Za dani vektor $v \in H$ i za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $T_n v$ formulom (1.6). Tada vrijedi ocjena*

$$\Big(\sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ 1\leqslant n_0<n_1<\cdots<n_M}} \sum_{j=1}^{M} \big\|T_{n_{j-1}}v - T_{n_j}v\big\|_H^2 \Big)^{1/2} \leqslant 10\|v\|_H. \tag{1.7}$$

Dokaz. Glavni dio dokaza će se odvijati u jednodimenzionalnom prostoru H, tj. naprosto u skupu kompleksnih brojeva. Dakle, najprije tvrdnju pokazujemo u posebnom slučaju kada je $H = \mathbb{C}$, $v = 1$, a unitarni operator $U\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je dan sa $Uz = e^{i\theta}z$ za neki $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. Ako je $\theta = 0$, tada je $T_n 1 = 1$ pa je lijeva strana od (1.7) jednaka 0. Zato pretpostavimo $\theta \neq 0$ pa je

$$T_n 1 = \frac{1}{n}\big(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{(n-1)i\theta}\big) = \frac{1 - e^{ni\theta}}{n(1 - e^{i\theta})}$$

i vidimo da trebamo dokazati

$$\sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ 1\leqslant n_0<n_1<\cdots<n_M}} \sum_{j=1}^{M} \left| \frac{1 - e^{n_{j-1}i\theta}}{n_{j-1}(1 - e^{i\theta})} - \frac{1 - e^{n_j i\theta}}{n_j(1 - e^{i\theta})} \right|^2 \leqslant 100.$$

Dostatno je promatrati $\theta \in \langle 0, \pi\rangle$ i tada je zbog

$$|1 - e^{i\theta}|^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2} \geqslant 4\Big(\frac{2}{\pi}\frac{\theta}{2}\Big)^2 = \frac{4}{\pi^2}\theta^2$$

i zbog $\frac{\pi^2}{4} < \frac{5}{2}$ dovoljno pokazati

$$\sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ 1\leqslant n_0<n_1<\cdots<n_M}} \sum_{j=1}^{M} \big|F(n_{j-1}\theta) - F(n_j\theta)\big|^2 \leqslant 40, \tag{1.8}$$

pri čemu smo označili $F(\vartheta) := (1 - e^{i\vartheta})/\vartheta$. Također primijetimo da je

$$|F(\vartheta)| = \frac{2|\sin\frac{\vartheta}{2}|}{|\vartheta|} \leqslant 1. \tag{1.9}$$

Fiksirat ćemo indekse $n_0, n_1, \ldots, n_M$ i lijevu stranu u (1.8) rastaviti na dvije sume: Σ_1 će biti suma po indeksima j takvima da je $n_j - n_{j-1} < \theta^{-1}$, a Σ_2 će biti suma po indeksima j takvima da je $n_j - n_{j-1} \geqslant \theta^{-1}$. Za ocjenu prve sume pribrojnike omeđujemo korištenjem Cauchy-Schwarzove[7] nejednakosti kao

$$\big|F(n_j\theta) - F(n_{j-1}\theta)\big|^2 = \Big| \int_{n_{j-1}\theta}^{n_j\theta} F'(\vartheta)d\vartheta \Big|^2 \leqslant \underbrace{(n_j\theta - n_{j-1}\theta)}_{<1} \int_{n_{j-1}\theta}^{n_j\theta} |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta$$

[7]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), njemački matematičar.

pa imamo

$$\Sigma_1 \leqslant \sum_j \int_{n_{j-1}\theta}^{n_j\theta} |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta \leqslant \int_0^\infty |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta.$$

Iz izraza $F'(\vartheta) = -(1 - e^{i\vartheta} + i\vartheta e^{i\vartheta})/\vartheta^2$ je lako vidjeti da je posljednji integral konačan, a ako baš marimo za eskplicitne konstante, tada konturnom integracijom možemo izračunati

$$\int_0^\infty |F'(\vartheta)|^2 d\vartheta = \int_0^\infty \frac{(1-\cos\vartheta - \vartheta\sin\vartheta)^2 + (\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)^2}{\vartheta^4} d\vartheta = \frac{\pi}{3} < 2.$$

U drugoj sumi naprosto ocijenimo

$$\big|F(n_j\theta) - F(n_{j-1}\theta)\big|^2 \leqslant 2|F(n_j\theta)|^2 + 2|F(n_{j-1}\theta)|^2.$$

Ako su odgovarajući indeksi $j_1 < j_2 < \cdots < j_L$, tada iz očigledne indukcije proizlazi $n_{j_l} \geqslant l/\theta$ za $l = 1, 2, \ldots, L$. Kako je

$$\begin{aligned}
&|F(n_{j_l}\theta)| \leqslant \frac{2}{n_{j_l}\theta} \leqslant \frac{2}{l}, \quad l = 1, 2, \ldots, L, \\
&|F(n_{j_l-1}\theta)| \leqslant \frac{2}{n_{j_l-1}\theta} \leqslant \frac{2}{n_{j_{l-1}}\theta} \leqslant \frac{2}{l-1}, \quad l = 2, \ldots, L, \\
&|F(n_{j_1-1}\theta)| \overset{(1.9)}{\leqslant} 1,
\end{aligned}$$

možemo pisati

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\leqslant 2\sum_{l=1}^{L} \big(|F(n_{j_l}\theta)|^2 + |F(n_{j_l-1}\theta)|^2\big) \leqslant 8\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{l^2} + 8\sum_{l=2}^{L} \frac{1}{(l-1)^2} + 2 \\
&\leqslant 16\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} + 2 = 16 \cdot \frac{\pi^2}{6} + 2 < 29.
\end{aligned}$$

Sveukupno imamo $\Sigma_1 + \Sigma_2 < 2 + 29 < 40$, što je i trebalo dokazati.

Radi jednostavnosti izlaganja sada ćemo tvrdnju dokazati za konačno-dimenzionalni unitarni prostor H. Svaki unitarni operator se može dijagonalizirati i svojstvene vrijednosti su mu po modulu jednake 1. Precizinije, možemo naći ortonormiranu bazu $(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ od H takvu da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, d\}$ postoji $\theta_m \in [0, 2\pi\rangle$ za kojeg vrijedi $Uv_m = e^{i\theta_m} v_m$. Raspišimo i vektor v u toj bazi kao $v = \sum_{m=1}^{d} \alpha_m v_m$ za neke koeficijente $\alpha_m \in \mathbb{C}$. Fiksirajmo indekse $n_0, n_1, \ldots, n_M \in \mathbb{N}$ takve da je $n_0 < n_1 < \cdots < n_M$. Primijetimo da je

$$T_n v = \sum_{m=1}^{d} \alpha_m T_n v_m = \sum_{m=1}^{d} \alpha_m \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ki\theta_m}\Big) v_m$$

i da za bilo koji $j \in \{1,2,\dots,M\}$ vrijedi

$$\big\|T_{n_{j-1}}v - T_{n_j}v\big\|_H^2 = \sum_{m=1}^{d} |\alpha_m|^2 \Big| \frac{1}{n_{j-1}} \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} e^{ki\theta_m} - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} e^{ki\theta_m} \Big|^2. \tag{1.10}$$

Po prethodno dokazanom jednodimenzionalnom slučaju slijedi

$$\sum_{j=1}^{M} \Big| \frac{1}{n_{j-1}} \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} e^{ki\theta} - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} e^{ki\theta} \Big|^2 \leqslant 100 \quad \text{za svaki } \theta \in [0,2\pi\rangle. \tag{1.11}$$

Kombiniranje (1.10) i (1.11) daje

$$\sum_{j=1}^{M} \big\|T_{n_{j-1}}v - T_{n_j}v\big\|_H^2 \leqslant 100 \sum_{m=1}^{d} |\alpha_m|^2 = 100\|v\|_H^2,$$

čime je dokaz završen.

Konačno, za čitatelja koji poznaje osnove spektralne teorije možemo dovršiti dokaz na općenitom (beskonačno-dimenzionalnom) Hilbertovom prostoru H. Prema spektralnom teoremu za unitarni operator postoji regularna Borelova[8] projektorska mjera P na jediničnoj kružnici $\mathrm{S}^1 = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\gamma| = 1\}$ takva da je

$$U = \int_{\mathrm{S}^1} \gamma \, dP(\gamma),$$

a posljedično vrijedi i

$$U^n = \int_{\mathrm{S}^1} \gamma^n dP(\gamma), \quad (U^n)^* = \int_{\mathrm{S}^1} \overline{\gamma^n} dP(\gamma)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Za dani $v \in H$ i indekse $n_0 < n_1 < \cdots < n_M$ traženu nejednakost (1.7) možemo zapisati

$$\Big\langle \Big(100I - \sum_{j=1}^{M} (T_{n_{j-1}} - T_{n_j})^* (T_{n_{j-1}} - T_{n_j}) \Big) v, v \Big\rangle_H \geqslant 0,$$

i ona postaje

$$\int_{\mathrm{S}^1} \underbrace{\Big(100 - \sum_{j=1}^{M} \Big| \frac{1}{n_{j-1}} \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} \gamma^k - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} \gamma^k \Big|^2 \Big)}_{\geqslant 0 \text{ zbog } (1.11)} d\langle Pv, v\rangle(\gamma) \geqslant 0$$

te je opet direktna posljedica ključne ocjene (1.11). Čitatelj može pronaći tehničke detalje o spektralnom teoremu u knjizi [Fol95]. □

[8] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956), francuski matematičar i političar.

Iz ocjene (1.7) posebno vidimo da niz $(T_n v)_{n=1}^{\infty}$ ima najviše $100\varepsilon^{-2}\|v\|_H^2$ skokova veličine barem $\varepsilon > 0$ po normi od H. Dakle, propozicija 1.4 je "ultimativno kvantitativna" verzija propozicije 1.3.

* * *

Uglavnom ćemo Teorem 1.1 primjenjivati na Lebesgueove[9] prostore. Prisjetimo se da za prostor mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i za eksponent $p \in \langle 0, \infty\rangle$ definiramo $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ formulom

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} := \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p}$$

za svaku $\mathcal{X}$-izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}$. Ovu definiciju upotpunjujemo slučajem $p = \infty$, kada stavljamo

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} &:= \inf\Big\{\sup_{x\in\mathbb{X}\setminus Z} |f(x)| \,:\, Z \in \mathcal{X},\ \mu(Z) = 0\Big\}\\ &= \min\Big\{\alpha \in [0, +\infty] \,:\, \mu\big(\{|f| > \alpha\}\big) = 0\Big\},\end{aligned}$$

pri čemu kratko pišemo $\{|f| > \alpha\}$ umjesto $\{x \in \mathbb{X} : |f(x)| > \alpha\}$. Uvodimo relaciju ekvivalencije $\overset{\text{g.s.}}{=}$ na familiji $\mathcal{X}$-izmjerivih kompleksnih funkcija na $\mathbb{X}$ tako da stavimo $f_1 \overset{\text{g.s.}}{=} f_2$ ako i samo ako je $\mu(\{x \in \mathbb{X} : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$. Ako klasu ekvivalencije kojoj pripada funkcija f označimo sa $[f]_{\text{g.s.}}$, tada

$$\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \big\{[f]_{\text{g.s.}} : \|f\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty\big\}, \quad p \in \langle 0, \infty]$$

nazivamo *Lebesgueov* L^p *prostor* i to je kompleksni vektorski prostor. U literaturi postoje manja odstupanja u definicijama prostora L^∞ i pripadne L^∞ norme, ali sve se te definicije podudaraju kada je prostor mjere σ-konačan ili čak samo semikonačan (taj pojam ćemo definirati u odjeljku 2.1), što će kod nas uglavnom biti ispunjeno. U slučaju $p \in [1, \infty]$ je $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ čak Banachov prostor s normom $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$. Za $p \in \langle 0, 1\rangle$ je veličina $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ samo *kvazinorma*, što znači da umjesto nejednakosti trokuta postoji konačna konstanta $C_p > 0$ takva da za svake $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^p$ vrijedi

$$\|f_1 + f_2\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C_p\big(\|f_1\|_{\mathrm{L}^p} + \|f_2\|_{\mathrm{L}^p}\big);$$

vidjeti zadatak 1.4(a). Obično elemente L^p prostora naprosto zovemo funkcijama te tako s njima i postupamo, imajući na umu da zapravo radimo s predstavnicima klasa gornje relacije ekvivalencije.

Sustav koji čuva mjeru je uređena četvorka $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$, pri čemu je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ vjerojatnosni prostor, tj. $\mu(\mathbb{X}) = 1$, a $S\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ je bijekcija takva da za svaki $A \in \mathcal{X}$

[9] Henri Léon Lebesgue (1875–1941), francuski matematičar.

vrijedi $S^{-1}(A), S(A) \in \mathcal{X}$ i $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A) = \mu(S(A))$. Kratko kažemo da su S i S^{-1} *izmjerive* i da *čuvaju mjeru*. Preslikavanje S možemo iterirati,

$$S^0 := \mathrm{id}_{\mathbb{X}}, \quad S^n := \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n} \text{ za } n \in \mathbb{N}, \quad S^{-n} := (S^{-1})^n \text{ za } n \in \mathbb{N},$$

te za svaku točku $x \in \mathbb{X}$ ima smisla gledati njenu *orbitu* $(S^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ i duž nje evaluirati razne funkcije. Tako npr. prosjeke

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x)$$

zovemo *ergodička usrednjenja*. Takvim sustavima se bavi *ergodička teorija*, a u njoj se često promatraju i neinvertibilna preslikavanja S, no mi ćemo ostati kod naše manje generalne definicije. Samo ćemo napomenuti da postoje izvjesni trikovi (npr. tzv. trik podizanja) kojima se, uz nešto topološke strukture na $\mathbb{X}$, neinvertibilni slučaj može svesti na gore navedenu situaciju.

Korolar 1.5. (Von Neumannov ergodički teorem po normi) *Ako je* $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$ *sustav koji čuva mjeru i* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *za* $p \in [1, \infty\rangle$, *tada niz funkcija* $\big(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n\big)_{N=1}^{\infty}$ *konvergira u* $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, *tj. po* L^p *normi.*

Dokaz. Označimo $T_N f := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f \circ S^n$. Slučaj $p = 2$ je direktna posljedica propozicije 1.3. Uzmimo $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i promotrimo linearni operator $U\colon H \to H$ definiran sa $Uf := f \circ S$, čiji inverz je dan sa $U^{-1} f = f \circ S^{-1}$. Činjenica da je U izometrija slijedi iz općenitog teorema o integriranju po slici mjere μ obzirom na izmjerivu transformaciju S,

$$\int g \, d(\mu \circ S^{-1}) = \int (g \circ S) d\mu, \tag{1.12}$$

primijenjenog na $g = |f|^2$ i uz važeću pretpostavku $\mu \circ S^{-1} = \mu$. Dakle, U je unitarni operator pa niz usrednjenja $(T_N f)_{N=1}^{\infty}$ konvergira po L^2 normi.

Uzmimo sada općeniti $p \in [1, \infty\rangle$. Opet se iz nejednakosti trokuta i primjenom (1.12) odmah vidi da su operatori T_N; $N \in \mathbb{N}$ uniformno ograničeni, tj. $\|T_N f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p}$ za svaku $f \in \mathrm{L}^p$ i svaki $N \in \mathbb{N}$. Time su ispunjene pretpostavke (1) i (2) teorema 1.1 pa za njegovu primjenu još treba provjeriti uvjet (3). Zbog konačnosti mjere je $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ gusti potprostor od $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ pa preostaje dokazati da za svaku $f \in \mathrm{L}^\infty$ vrijedi

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{N})(\forall\, M, N \geqslant K)\big(\|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^p} < \varepsilon\big). \tag{1.13}$$

Po prethodnom dijelu dokaza već znamo

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K \in \mathbb{N})(\forall\, M, N \geqslant K)\big(\|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon\big).$$

Zato za $p < 2$ tvrdnja (1.13) naprosto slijedi iz

$$\|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Ako je pak $p > 2$, tada imamo

$$\begin{aligned}\|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^p} &\leqslant \|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^\infty}^{1-2/p} \|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^2}^{2/p} \\ &\leqslant (2\|f\|_{\mathrm{L}^\infty})^{1-2/p} \|T_M f - T_N f\|_{\mathrm{L}^2}^{2/p},\end{aligned}$$

što opet povlači (1.13). □

Iz propozicije 1.4 pak dobivamo kvantitativnu ocjenu konvergencije ergodičkih usrednjenja po L^2 normi:

$$\sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ 1\leqslant N_0<N_1<\cdots<N_M}} \sum_{j=1}^{M} \Big\| \frac{1}{N_{j-1}} \sum_{n=0}^{N_{j-1}-1} f\circ S^n - \frac{1}{N_j} \sum_{n=0}^{N_j-1} f\circ S^n \Big\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant 100\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Time je dan još jedan dokaz korolara 1.5 u slučaju $p = 2$.

* * *

Dokazivanje konvergencije po točkama je u pravilu teže i u tu svrhu navodimo drugi općeniti princip. Prije toga se još prisjetimo slabih Lebesgueovih prostora i normi. Neka je opet $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ općeniti prostor mjere i uzmimo $p \in \langle 0, \infty\rangle$. Definiramo $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}$ formulom

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} := \Big(\sup_{\alpha\in\langle 0,+\infty\rangle} \alpha^p\, \mu\big(\{|f| > \alpha\}\big)\Big)^{1/p}$$

za svaku $\mathcal{X}$-izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}$. Osim toga, za $p = \infty$ dogovorno uzimamo $\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} := \|f\|_{\mathrm{L}^p}$. *Slabi Lebesgueov* L^p *prostor* je kompleksni vektorski prostor

$$\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \{[f]_{\text{g.s.}} : \|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} < +\infty\}, \quad p \in \langle 0, \infty].$$

Veličina $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}$ je kvazinorma (vidjeti zadatak 1.4(b)), a direktna posljedica tzv. *Markov-Čebiševljeve nejednakosti*

$$\mu(\{|f| > \alpha\}) \leqslant \frac{\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p}{\alpha^p}, \quad \alpha \in \langle 0, +\infty\rangle,\ p \in \langle 0, \infty\rangle \tag{1.14}$$

je

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \quad \text{i} \quad \mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \subseteq \mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu).$$

Formalna sličnost između uobičajene (jake) i slabe L^p kvazinorme je poznati identitet

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \Big(\int_{\langle 0,+\infty\rangle} p\alpha^{p-1} \mu\big(\{|f| > \alpha\}\big) d\alpha \Big)^{1/p} \tag{1.15}$$

za $p \in \langle 0, \infty\rangle$, kojeg ćemo često koristiti, a ostavljen je kao zadatak 1.3.

Za operator T definiran na nekom Banachovom prostoru X, koji poprima vrijednosti u skupu $\mathcal{X}$-izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$ i koji zadovoljava ocjenu

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant C\|f\|_X, \quad \text{tj. } (\forall\, \alpha > 0)\Big(\mu\big(\{|Tf| > \alpha\}\big) \leqslant \frac{C^p\|f\|_X^p}{\alpha^p}\Big)$$

za neku konačnu konstantu $C \geqslant 0$, neki eksponent $p \in \langle 0, \infty\rangle$ i sve $f \in X$ često neformalno kažemo da je *slabo ograničen.* Uobičajena ograničenost sa X u L^p svakako povlači slabu ograničenost, a obrat općenito ne vrijedi. Ako je baš $X = \mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$, tada slabu ograničenost sa L^p u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}$ naprosto zovemo *slaba* L^p *ograničenost.*

Teorem 1.6. (Princip konvergencije gotovo svuda) *Neka su X Banachov prostor, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$ prostor mjere, $p \in \langle 0, \infty\rangle$ eksponent i S gusti podskup od X te neka su $T_n \colon X \to \mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$; $n \in \mathbb{N}$ linearni operatori. Pretpostavimo sljedeće:*

(1) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C_n \geqslant 0$ takva da za svaki $f \in X$ vrijedi $\|T_n f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant C_n\|f\|_X$.

(2) Postoji konstanta $C \geqslant 0$ takva da za svaki $g \in S$ vrijedi

$$\Big\|\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n g|\Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant C\|g\|_X.$$

(3) Za svaki $g \in S$ za μ-gotovo svaki $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{n\to\infty}(T_n g)(y) \in \mathbb{C}$.

Tada za svaki $f \in X$ za μ-gotovo svaki $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{n\to\infty}(T_n f)(y) \in \mathbb{C}$.

Uvjet (1) znači individualnu slabu ograničenost svakog of operatora T_n na cijeloj domeni. Uvjet (2) znači slabu ograničenost maksimalnog operatora

$$T_\star f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f| \tag{1.16}$$

na gustom podskupu S. U primjenama su često uvjeti (1) i (3) očigledni pa trud treba usmjeriti prema dokazivanju maksimalne ocjene (2), a činjenica da radimo samo s elementima gustog podskupa nam može tehnički olakšati rezoniranje. Naravno da bismo u teoremu slabu ograničenost mogli zamijeniti uobičajenom (jakom), ali time bi rezultat postao nešto slabiji i manje primjenjiv.

Dokaz. Uzmimo $f \in X$, $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Postoji $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Koristit ćemo zadatak 1.4(b) kao nadomjestak za nejednakost trokuta za kvazinormu $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}$,

$$\Big\|\max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n f|\Big\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant \Big\|\max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n g| + \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n(f-g)|\Big\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1.18)}{\leqslant} 2^p \Big\| \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n g| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}^p + 2^p \Big\| \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n(f-g)| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}^p \\
&\leqslant 2^p \Big\| \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n g| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}^p + 2^p \Big\| \sum_{n=1}^{N} |T_n(f-g)| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}^p \\
&\overset{(1.18)}{\leqslant} 2^p \Big\| \max_{n\in\mathbb{N}} |T_n g| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}^p + 2^p N^p \sum_{n=1}^{N} \|T_n(f-g)\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}^p \\
&\overset{(1),(2)}{\leqslant} 2^p C^p \|g\|_X^p + 2^p N^p (C_1^p + \cdots + C_N^p) \|f-g\|_X^p \\
&\leqslant 2^p C^p \big(\|f\|_X + \varepsilon\big)^p + 2^p N^p (C_1^p + \cdots + C_N^p) \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo

$$\Big\| \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n f| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant 2C\|f\|_X,$$

tj.

$$(\forall\, \alpha > 0)\bigg(\mu\Big(\Big\{ \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T_n f| > \alpha \Big\}\Big) \leqslant \Big(\frac{2C\|f\|_X}{\alpha}\Big)^p\bigg),$$

a puštanjem $N \to \infty$ potom dobivamo ocjenu

$$(\forall\, \alpha > 0)\bigg(\mu(\{T_\star f > \alpha\}) \leqslant \Big(\frac{2C\|f\|_X}{\alpha}\Big)^p\bigg),$$

tj.

$$(\forall\, f \in X)\big(\|T_\star f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant 2C\|f\|_X\big) \tag{1.17}$$

za maksimalni operator (1.16).

Uzmimo $f \in X$ i proizvoljni $\delta > 0$. Označimo

$$E_\delta := \Big\{ y \in \mathbb{Y} \,:\, \lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geqslant k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| > \delta \Big\}.$$

Za neki $\varepsilon > 0$ odaberimo $g \in S$ takav da je $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Iz

$$|(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| \leqslant |T_m(f-g)(y)| + |(T_m g)(y) - (T_n g)(y)| + |T_n(g-f)(y)|$$

slijedi

$$\sup_{m,n\geqslant k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| \;\leqslant\; 2 \sup_{n\geqslant k} |T_n(f-g)(y)| + \sup_{m,n\geqslant k} |(T_m g)(y) - (T_n g)(y)|.$$

Po pretpostavci (3) i $g \in S$ postoji $F \in \mathcal{Y}$, $\mu(F) = 0$ takav da za svaki $y \in \mathbb{Y} \setminus F$ imamo

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geqslant k} |(T_m g)(y) - (T_n g)(y)| = 0$$

te posljedično

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geqslant k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| \leqslant 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f-g)(y)|.$$

Dakle, $E_\delta \subseteq \{T_\star(f-g) > \frac{\delta}{2}\} \cup F$ pa radi ocjene (1.17) vrijedi

$$\mu(E_\delta) \leqslant \frac{\|T_\star(f-g)\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}}{(\delta/2)^p} \overset{(1.17)}{\leqslant} \frac{2^p C^p \|f-g\|^p_X}{(\delta/2)^p} < \frac{4^p C^p \varepsilon^p}{\delta^p}.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, zaključujemo $\mu(E_\delta) = 0$ za svaki $\delta > 0$. Zbog monotonosti skupova E_δ i σ-subaditivnosti mjere μ je $\mu\big(\bigcup_{\delta>0} E_\delta\big) = \mu\big(\bigcup_{l=1}^\infty E_{1/l}\big) = 0$. Konačno primijetimo da za svaki $y \in \mathbb{Y} \setminus \big(\bigcup_{\delta>0} E_\delta\big)$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geqslant k} |(T_m f)(y) - (T_n f)(y)| = 0,$$

tj. postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n f)(y)$. □

Napomenimo da smo usput dokazali kako su maksimalni operator $T_\star$ i limes T_∞, koji je μ-g.s. definiran sa $T_\infty f := \lim\limits_{n\to\infty} T_n f$, slabo ograničeni operatori sa X u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$.

Zanimljivo je i ovog puta se zapitati vrijedi li obrat teorema 1.6; tj. ako je $(T_n)_{n=1}^\infty$ niz slabo ograničenih linearnih operatora sa X u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}$ takav da za svaki $f \in X$ za μ-g.s. $y \in \mathbb{Y}$ postoji $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n f)(y)$, mora li nužno maksimalni operator (1.16) biti slabo ograničen? Nažalost, ta tvrdnja općenito nije točna (vidjeti zadatak 1.6); čak ni uniformna jaka ograničenost niza sa X u L^p ne može pomoći. U jednom od kasnijih poglavlja ćemo ipak dokazati jedan rezultat tog tipa, koji govori da spomenuti obrat vrijedi u određenim zanimljivim situacijama.

Za familiju operatora indeksiranu neprekidnim parametrom, npr. $(T_r)_{r\in\langle 0,+\infty\rangle}$ i ako nas zanima konvergencija kada $r \to 0^+$ ili $r \to +\infty$, oba teorema ostaju vrijediti uz očigledne modifikacije. Navedimo jednu takvu varijantu teorema 1.6.

Teorem 1.7. *Neka su X Banachov prostor, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$ prostor mjere, $p \in \langle 0, \infty\rangle$ eksponent i S gusti podskup od X te neka su $T_r\colon X \to \mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$; $r \in \langle 0, +\infty\rangle$ linearni operatori takvi da je za svaki $f \in X$ i za μ-g.s. $y \in \mathbb{Y}$ funkcija $r \mapsto (T_r f)(y)$ neprekidna. Pretpostavimo sljedeće:*

(1) Za svaki $r \in \langle 0, +\infty\rangle$ postoji konstanta $C_r \geqslant 0$ takva da za svaki $f \in X$ vrijedi $\|T_r f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant C_r \|f\|_X$.

(2) Postoji konstanta $C \geqslant 0$ takva da za svaki $g \in S$ vrijedi

$$\Big\| \sup_{r\in\langle 0,+\infty\rangle} |T_r g| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant C \|g\|_X.$$

(3) Za svaki $g \in S$ za μ-g.s. $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{r\to 0^+}(T_r g)(y) \in \mathbb{C}$.

Tada za svaki $f \in X$ za μ-g.s. $y \in \mathbb{Y}$ postoji limes $\lim_{r\to 0^+}(T_r f)(y) \in \mathbb{C}$. (Analogna tvrdnja vrijedi za limese kada $r \to +\infty$.)

Neprekidnost od $(T_r f)(y)$ po parametru r nam je korisna već radi same izmjerivosti u definiciji maksimalnog operatora, jer se supremum efektivno uzima po prebrojivom skupu:

$$(T_\star f)(y) := \sup_{r\in\langle 0,+\infty\rangle} |(T_r f)(y)| = \sup_{r\in\langle 0,+\infty\rangle\cap\mathbb{Q}} |(T_r f)(y)|.$$

Primjeri primjena teorema 1.6 i 1.7 su pet rezultata navedenih u prethodnom odjeljku, ali da bismo mogli dovršiti njihove dokaze, morat ćemo u jednom od kasnijih poglavlja naučiti dokazivati maksimalne ocjene.

Teoremi 1.1 i 1.6 su dorađene verzije rezultata iz knjige [Kra99], u kojoj ih autor naziva "dva fundamentalna principa funkcionalne analize". Neke varijante se mogu naći u [Fol99].

Inspirirani propozicijom 1.4 mogli bismo poželjeti dati kvanitativniji opis konvergencije gotovo svuda. Jedna mogućnost je za neke $\varrho, p \in [1,\infty\rangle$ dokazati ocjenu

$$\big\| \|(T_n f)_{n=1}^\infty\|_{\mathrm{V}^\varrho} \big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C\|f\|_X$$

za niz operatora $(T_n)_{n=1}^\infty$ i za svaki $f \in X$. U tom slučaju je

$$\big\| \big((T_n f)(y)\big)_{n=1}^\infty \big\|_{\mathrm{V}^\varrho} < +\infty$$

za μ-g.s. $y \in \mathbb{Y}$ pa opet postoji limes $\lim_{n\to\infty}(T_n f)(y)$.

* * *

Zadatak 1.2. Dokažite jednostavni posebni slučaj nejednakosti iz propozicije 1.4 uz bolju konstantu:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big\|T_{2^{j-1}}v - T_{2^j}v\big\|_H^2 \leqslant \|v\|_H^2.$$

Uputa: Najprije dokažite da za linearni operator $V\colon H \to H$ norme $\|V\|_{H\to H} \leqslant 1$ i za svaki $u \in H$ vrijedi

$$\|u - \tfrac{1}{2}(u+Vu)\|_H^2 \leqslant \|u\|_H^2 - \|\tfrac{1}{2}(u+Vu)\|_H^2.$$

Zadatak 1.3. Dokažite identitet (1.15) za $p \in \langle 0,\infty\rangle$ i za $\mathcal{X}$-izmjerivu kompleksnu funckiju f.

Uputa: Ako je prostor mjere σ-konačan, zamijenite integrale po $\mathbb{X}$ i po $\langle 0,+\infty\rangle$. U općenitom slučaju koristite da je za $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ skup $\{f \neq 0\}$ uvijek σ-konačne mjere μ.

Zadatak 1.4.

(a) Dokažite da za $p \in \langle 0,1\rangle$ i za funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_N \in \mathrm{L}^p$ vrijedi nejednakost

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_N\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant N^{\frac{1}{p}-1}\big(\|f_1\|_{\mathrm{L}^p} + \|f_2\|_{\mathrm{L}^p} + \cdots + \|f_N\|_{\mathrm{L}^p}\big)$$

pa je posebno $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ kvazinorma. Osim toga, pokažite primjerom da je konstanta na desnoj strani najbolja moguća. Usput primijetimo da se konstante na desnoj strani približavaju 1 kada $p \to 1^-$.

(b) Dokažite da za $p \in \langle 0,\infty\rangle$ i za svake $f_1, f_2, \ldots, f_N \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}$ vrijedi nejednakost

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_N\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \leqslant N^p\big(\|f_1\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} + \|f_2\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} + \cdots + \|f_N\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}\big). \tag{1.18}$$

Nadalje, pokažite da je $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}}$ kvazinorma za svaki $p \in \langle 0,\infty\rangle$.

Zadatak 1.5. Neka je $K\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ izmjeriva funkcija koja za neke konstante $C \geqslant 0$ i $\gamma > 0$ zadovoljava:

$$|K(x,y)| \leqslant \frac{C}{(1+|x-y|)^{d+\gamma}} \quad \text{za svake } x,y \in \mathbb{R}^d,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)dy = 1 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}^d.$$

Definirajmo linearne operatore $(T_r)_{r\in\langle 0,+\infty\rangle}$ formulom

$$(T_r f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{r^d} K\big(\tfrac{x}{r}, \tfrac{y}{r}\big) f(y)dy; \quad r \in \langle 0,+\infty\rangle.$$

Dokažite da za svaki $p \in [1,\infty\rangle$ i za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\lim\limits_{r\to 0^+} \|T_r f - f\|_{\mathrm{L}^p} = 0$.

Zadatak 1.6. Dokažite da je formulom

$$(T_n f)(x) := \int_{[x+n-1,x+n\rangle} f(y)dy, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiran uniformno ograničeni niz linearnih operatora na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ takav da za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n f)(x) = 0$. Nadalje pokažite da maksimalni operator $T_\star$ definiran sa (1.16) ipak nije slabo L^1 ograničen.

Zadatak 1.7. Dokažite sljedeće varijante teorema iz ovog odjeljka.

(a) Ako u teoremu 1.1 uz operatore $(T_n)_{n=1}^\infty$ imamo još jedan ograničeni linearni operator $T\colon X \to Y$ te ako uz (1) i (2) pretpostavimo

(3') Za svaki $g \in S$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} T_n g = Tg$.

tada za svaki $f \in X$ mora biti $\lim_{n\to\infty} T_n f = Tf$.

Uputa: Ne morate ponavljati dokaz, već samo koristite argument jednakosti ograničenih linearnih operatora na gustom podskupu.

(b) Ako u teoremu 1.6 uz operatore $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ imamo još jedan slabo ograničeni linearni operator $T\colon X \to \mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mu)$ te ako uz (1) i (2) pretpostavimo

(3') Za svaki $g \in S$ za μ-g.s. $y \in \mathbb{Y}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} (T_n g)(y) = (Tg)(y)$.

tada za svaki $f \in X$ za μ-gotovo svaki $y \in \mathbb{Y}$ mora biti $\lim_{n\to\infty} (T_n f)(y) = (Tf)(y)$.

(c) Dokažite teorem 1.7.

Uputa: Ovdje ipak imitirajte dokaz teorema 1.6, umjesto da ga pokušate direktno iskoristiti. Time ćete izbjeći poteškoće s neprebrojivo mnogo skupova mjere nula.

1.3. Hardy-Vinogradovljeva i Bachmann-Landauova notacija

Poznati matematičar Terence Tao[10] je jednom prilikom ustvrdio kako je matematička analiza 20. stoljeća naglo počela ostvarivati veliki napredak djelimice zato što je prestala mariti za konstante. Naime, mnogi argumenti postaju tehnički jednostavniji i čitljiviji ako u njima ne spominjemo eksplicitne numeričke vrijednosti. Tako se naprimjer dokaz tvrdnje u propoziciji 1.4 može nešto pojednostaviti ako konstantu 10 zamijenimo neodređenom konstantom C, čija točna vrijednost ionako nije važna. Najbolju moguću takvu konstantu C ionako teško možemo naći.

Za dvije funkcije $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ definirane na istom skupu X pisat ćemo

$$f(x) \lesssim g(x)$$

ako postoji konačna konstanta $C \geqslant 0$ takva da za svaki $x \in X$ vrijedi $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$. Ukoliko skup X nije jasan iz konteksta, onda ga posebno naglašavamo. Pretpostavimo sada da još imamo neku kolekciju P varijabli koje sve ovise o nezavisnoj varijabli x; najčešće ih doživljavamo kao svojevrsne "parametre". Ako implicitna veličina C zapravo nije konstanta, već ovisi o parametrima iz P i samo o njima, tada ćemo to notacijski naglasiti:

$$f(x) \lesssim_P g(x).$$

[10]Terence Chi-Shen Tao (1975), australsko-američki matematičar.

Tako naprimjer za trojke pozitivnih brojeva (a, b, p) možemo pisati

$$(a + b)^p \lesssim_p a^p + b^p,$$

jer vrijedi

$$(a + b)^p \leqslant a^p + b^p \text{ za } p \in \langle 0, 1], \quad (a + b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p) \text{ za } p \in \langle 1, \infty\rangle,$$

a ovisnost o p smo morali istaknuti jer najbolja moguća implicitna "konstanta" $C_p = \max\{2^{p-1}, 1\}$ neograničeno raste kada $p \to \infty$. Ukoliko za funkcije f i g istovremeno vrijedi $f(x) \lesssim_P g(x)$ i $g(x) \lesssim_P f(x)$, tada pišemo

$$f(x) \sim_P g(x).$$

Zapravo za pozitivne brojeve a, b, p imamo $2(a + b)^p \geqslant a^p + b^p$ pa je štoviše

$$(a + b)^p \sim_p a^p + b^p.$$

Postoje razni simboli koji se ponekad koriste umjesto $\lesssim$. Hardy[11] je pisao $\preceq$, a Vinogradov[12] je uveo $\ll$. Još jedna alternativa koja se često nalazi u knjigama je naprosto pisati C kao generičku oznaku za konstantu koja se može mijenjati iz retka u redak, ali tada je teže istaknuti kada doista marimo za neku određenu konstantu. Umjesto znaka $\sim$ u mnogim granama matematike se koristi $\asymp$, a valja biti i oprezan jer $\sim$ ponekad ima drukčije značenje. Odlučili smo se za kombinaciju $\lesssim$ i $\sim$ jer se ona često koristi u novijoj literaturi iz harmonijske analize.

Svojstva relacije $\lesssim$ su krajnje očigledna, a navodimo ih radi potpunosti.

- Ako je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in X$, tada vrijedi: $f(x) \lesssim g(x) \;\Leftrightarrow\; \sup_{x\in X} \big|\frac{f(x)}{g(x)}\big| < +\infty.$
- $f(x) \lesssim_f 1 \;\Leftrightarrow\; f$ je omeđena.
- $f_1(x) \lesssim g(x),\ f_2(x) \lesssim g(x),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \lesssim g(x).$
- $f_1(x) \lesssim g_1(x),\ f_2(x) \lesssim g_2(x) \;\Rightarrow\; f_1(x)f_2(x) \lesssim g_1(x)g_2(x).$
- $f(x) \lesssim g(x),\ g(x) \lesssim h(x) \;\Rightarrow\; f(x) \lesssim h(x).$
- Ako je $f(y) \lesssim g(y)$, tada vrijedi $f(h(x)) \lesssim g(h(x))$ kad god kompozicija ima smisla.

[11] Godfrey Harold Hardy (1877–1947), engleski matematičar.
[12] Ivan Matvejevič Vinogradov (1891–1983), ruski matematičar.

Drugi tip notacije koju koristimo je lokalan, tj. on govori o dominaciji na nekoj okolini (konačne ili beskonačne) točke. Za funkcije $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ na nekom topološkom prostoru X i za točku $c \in X$ pišemo

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to c$$

ako postoje $C \geqslant 0$ i okolina U točke c tako da za svaki $x \in U \setminus \{c\}$ vrijedi $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$. Ako želimo naglasiti da implicitna veličina C ovisi o nekom skupu parametara P, tada taj skup parametara navodimo u donjem indeksu:

$$f(x) = O_P(g(x)),\ x \to c.$$

Ponekad se točka c podrazumijeva pa izostavljamo dodatak "$x \to c$", ali trudit ćemo se biti precizni. Oznaku "O" prvi je predložio P. Bachmann,[13] a E. Landau[14] je još uveo i simbol "o", kojeg nećemo koristiti.

Kod korištenja ove notacije često dozvoljavamo sljedeću nepreciznost u svrhu elegantnijeg zapisa. U izrazima pišemo samo $O(g(x))$ na mjestu neke (možda nepoznate) funkcije $f(x)$ koja zadovoljava $f(x) = O(g(x))$. Tako naprimjer pišemo:

- $f(x) = e^x\big(3x + 2 + O(\frac{1}{x})\big),\ x \to +\infty$ sa značenjem $f(x) = e^x\big(3x + 2 + g(x)\big)$, $g(x) = O(\frac{1}{x}),\ x \to +\infty$.
- $O(2^n) + O(n!) + O(n^n) = O(n^n),\ n \to \infty$ sa značenjem: ako je $f(n) = O(2^n)$, $g(n) = O(n!)$, $h(n) = O(n^n)$, $n \to \infty$, tada vrijedi $f(n) + g(n) + h(n) = O(n^n)$, $n \to \infty$.

Svojstva simbola O su također evidentna.

- Ako postoji okolina U od c takva da je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{c\}$, tada vrijedi: $f(x) = O(g(x)),\ x \to c \ \Leftrightarrow\ \limsup\limits_{x\to c} \big|\frac{f(x)}{g(x)}\big| < +\infty$.
- $f(x) = O_f(1),\ x \to c \ \Leftrightarrow\ f$ je omeđena na nekoj okolini od c.
- $f_1(x) = O(g(x)),\ f_2(x) = O(g(x)),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \ \Rightarrow\ \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = O(g(x))$.
- $f_1(x) = O(g_1(x)),\ f_2(x) = O(g_2(x)) \ \Rightarrow\ f_1(x) f_2(x) = O(g_1(x) g_2(x))$.
- $f(x) = O(g(x)),\ g(x) = O(h(x)) \ \Rightarrow\ f(x) = O(h(x))$.
- $f \in \mathrm{C}^{n+1}(\langle c-\delta, c+\delta\rangle),\ n \in \mathbb{N}_0 \ \Rightarrow\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + O_f((x-c)^{n+1})$, $x \to c$.

[13] Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837–1920), njemački matematičar.
[14] Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938), njemački matematičar.

- Ako je $f(y) = O(g(y))$, $y \to d$, zatim $\lim\limits_{x\to c} h(x) = d$ te još postoji okolina U od c takva da je $h(x) \neq d$ za sve $x \in U \backslash \{c\}$, tada vrijedi $f(h(x)) = O(g(h(x)))$, $x \to c$. (Kao da smo supstituirali $y = h(x)$.)

Zanimljivo je da nam lokalne ocjene uz određena kvalitativna svojstva mogu dati kvantitativne ocjene na cijeloj domeni. Dajmo dva jednostavna primjera.

Primjer 1.8. Ako je $f : \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da vrijedi

$$f(x) = O\Big(\frac{1}{x-1}\Big),\ x \to 1^+ \quad \text{i} \quad f(x) = O(1),\ x \to +\infty,$$

pokažimo da vrijedi $f(x) \lesssim \frac{x}{x-1}$ za svaki $x \in \langle 1, +\infty\rangle$.

Dokaz. Po definiciji simbola "O" postoje $1 < \alpha < \beta$ i $C_1, C_2 > 0$ takvi da vrijedi

$$|f(x)| \leqslant \frac{C_1}{x-1} \text{ za } x \in \langle 1, \alpha\rangle \quad \text{i} \quad |f(x)| \leqslant C_2 \text{ za } x \in \langle \beta, +\infty\rangle.$$

Na segmentu $[\alpha, \beta]$ je funkcija f neprekidna pa je i ograničena, tj. postoji konstanta $C_3 > 0$ takva da je $|f(x)| \leqslant C_3$ za $x \in [\alpha, \beta]$. Primijetimo konačno da za svaki $x \in \langle 1, +\infty\rangle$ zbog $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x-1}$ i $\frac{x}{x-1} > 1$ imamo

$$|f(x)| \leqslant \max\{C_1, C_2, C_3\} \frac{x}{x-1}. \qquad \square$$

Primjer 1.9. Dokažimo da za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vrijedi

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k \ln k}} \lesssim \sqrt{\frac{n}{\ln n}}.$$

Dokaz. Najprije ocijenimo gornju sumu odozgo integralom

$$I(n) := \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x \ln x}}.$$

Supstitucijom $t = \sqrt{\frac{\ln x}{2}}$, tj. $x = e^{2t^2}$ dobivamo

$$I(n) = \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} \frac{e^{2t^2} 4t\,dt}{e^{t^2}\sqrt{2}\,t} = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\frac{\ln n}{2}}} e^{t^2} dt = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{erfi}\Big(\sqrt{\frac{\ln n}{2}}\Big),$$

pri čemu je

$$\mathrm{erfi}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt$$

tzv. *imaginarna funkcija greške*. Koristeći poznatu asimptotiku

$$\begin{aligned}\operatorname{erfi}(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{z^2}\Big(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^3}+O\Big(\frac{1}{z^5}\Big)\Big),\ z\to+\infty\\ &= O\Big(\frac{e^{z^2}}{z}\Big),\ z\to+\infty\end{aligned}$$

dobivamo

$$I(n)=O\bigg(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\bigg),\ n\to\infty.$$

Posebno je

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k\ln k}}=O\bigg(\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\bigg),\ n\to\infty$$

pa tvrdnja slijedi za dovoljno velike n, dok je za prvih konačno mnogo vrijednosti od n trivijalna. $\square$

* * *

Zadatak 1.8. Neka je $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ prostor mjere. Dokažite da za svaki $p\in\langle 0,\infty\rangle$ i za svaku $\mathcal{X}$-izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p\sim_p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{pk}\mu\big(\{|f|>2^k\}\big).$$

Napomena: Ovdje $\mathbb{X},\mathcal{X},\mu,f$ smatramo “varijablama” pa implicitne konstante ne ovise o njima, već samo o eksponentu p.

Zadatak 1.9. Lako je vidjeti da za svaki $x\in\mathbb{R}$ jednadžba $t+\ln t=x$ ima jedinstveno rješenje $t=f(x)>0$. Dokažite:

$$f(x)=x-\ln x+\frac{\ln x}{x}+O\Big(\frac{1}{x}\Big),\ x\to+\infty.$$

Zadatak 1.10. Koristeći literaturu za fiksirani parametar $\beta>1$ izračunajte prva tri člana asimpotskog razvoja funkcije $I_\beta(R):=\displaystyle\int_R^{+\infty}\frac{dx}{(x\ln x)^\beta}$ kada $R\to+\infty$.
Uputa: Pronađite asimptotski razvoj tzv. *nepotpune gamma funkcije*

$$\Gamma(s,z):=\int_z^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$$

kada $z\to+\infty$.

Zadatak 1.11. Neka je $\|\cdot\|$ općenita *kvazinorma* na nekom kompleksnom vektorskom prostoru X, tj.

$$\|f\| \geqslant 0, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}, \quad \|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|, \quad \|f+g\| \lesssim \|f\| + \|g\|$$

za sve $f, g \in X$ i $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Ako su $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ i $f_1, f_2, \ldots, f_N \in X$ takvi da vrijedi $\|f_n\| \lesssim e^{-\varepsilon n}$ za $n = 1, 2, \ldots, N$, dokažite $\|\sum_{n=1}^{N} f_n\| \lesssim_\varepsilon 1$.

(b) Pokažite da postoji dovoljno veliki broj $A \in \langle 0, +\infty\rangle$ takav da ako su $N \in \mathbb{N}$ i $f_1, f_2, \ldots, f_N \in X$ takvi da vrijedi $\|f_n\| \lesssim n^{-A}$ za $n = 1, 2, \ldots, N$, tada je $\|\sum_{n=1}^{N} f_n\| \lesssim_A 1$.

Napomena: Poanta gornjih ocjena je da ne ovise o broju vektora N. Implicitnu konstantu u definiciji kvazinorme smatramo apsolutnom, tj. o njoj smiju ovisiti broj A i implicitne konstante u (a) i (b).

Zadatak 1.12. Dokažite sljedeću *nejednakost Steina*[15] *i Weissa*[16]: Za $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_N \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}$ na nekom prostoru mjere vrijedi

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_N\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}} \lesssim (\ln N)\big(\|f_1\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}} + \|f_2\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}} + \cdots + \|f_N\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}}\big).$$

Osim toga, pokažite primjerom da se faktor $\ln N$ ne smije izostaviti.

Napomena: Implicitna konstanta je univerzalna, tj. ne ovisi niti o prostoru mjere niti o funkcijama. Ova nejednakost pokazuje da kvazinorma $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}}$ samo "logaritamski odstupa" od norme, što možemo usporediti s "potencijskim odstupanjem" $N^{1/p-1}$ kvazinorme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ za $p < 1$; vidjeti zadatak 1.4.

Uputa: Odgovarajućom normalizacijom svedite nejednakost na ocjenu od $\mu(\{|f_1 + f_2 + \cdots + f_N| > 1\})$. Potom svedite na slučaj kada za svaki j vrijedi $\frac{1}{2N} \leqslant |f_j| \leqslant 1$. Za takve funkcije f_j je jaka L^1 norma najviše $O(\ln N)$ puta veća od slabe L^1 kvazinorme.

Zadatak 1.13. Posebni slučaj tzv. Orliczove[17] norme na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ je $\|\cdot\|_{e^{\mathrm{L}}}$ definirana sa

$$\|f\|_{e^{\mathrm{L}}} := \inf\Big\{a \in \langle 0, +\infty\rangle : \int_{\mathbb{X}} \big(e^{|f|/a} - 1\big) d\mu \leqslant 1\Big\},$$

pri čemu smatramo $\inf \emptyset = +\infty$. Pripadni funkcijski prostor je

$$e^{\mathrm{L}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \big\{f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{C} : f \text{ je } \mathcal{X}\text{-izmjeriva}, \ \|f\|_{e^{\mathrm{L}}} < +\infty\big\}.$$

[15]Elias Menachem Stein (1931–2018), američki matematičar belgijskog porijekla.
[16]Guido Leopold Weiss (1928), američki matematičar talijanskog porijekla.
[17]Władysław Roman Orlicz (1903–1990), poljski matematičar.

(a) Provjerite da je $\|\cdot\|_{e^{\mathrm{L}}}$ doista norma na $e^{\mathrm{L}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.

Napomena: Opet identificiramo funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0.

(b) Dokažite da za vjerojatnosni prostor $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $\mathcal{X}$-izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi

$$\|f\|_{e^{\mathrm{L}}} \sim \sup_{p\in[1,\infty\rangle} \big(p^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p}\big)$$

te da imamo

$$f \in e^{\mathrm{L}} \;\Leftrightarrow\; \|f\|_{\mathrm{L}^p} = O(p),\; p \to \infty.$$

Uputa: Razvijte eksponencijalnu funkciju u Taylorov[18] red i pomoću Stirlingove[19] formule ocijenite faktorijele.

[18]Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar. Još ranije ga je otkrio James Gregory (1638–1675), škotski matematičar i astronom.

[19]James Stirling (1692–1770), škotski matematičar.

Poglavlje 2

Multilinearna interpolacija L^p prostora

Interpolacija je vrlo korisna tehnika koja omogućava da iz ocjena u svojevrsnim "rubnim" slučajevima zaključimo kako odgovarajuće ocjene vrijede i u čitavom rasponu funkcijskih prostora. Ovdje ćemo se baviti isključivo interpolacijom Lebesgueovih L^p prostora. (Općenitiji koncept interpolacije, ali samo u linearnom ili sublinearnom slučaju, čitatelj može naći u knjizi [BL76].) Dvije su metode interpolacije: realna i kompleksna. Mi ćemo dati malu prednost prvoj od njih; formulirat ćemo je elegantnije i općenitije nego je predstavljena u većini klasične literature, uvelike inspirirani pristupom iz [Thi06] i [Tao07]. Pokušat ćemo realnu interpolaciju dočarati kao jednostavnu posljedicu općenitog načela: "dekomponiraj, ocijeni, pozbroji". Kod kompleksne interpolacije ćemo pokazati praktičnost multilinearnog pristupa. Usporedo s glavnom linijom razmatranja u ovom poglavlju, pokazat ćemo i neke trikove za baratanje funkcijama iz prostora L^p i $\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}$, koje će čitatelj potom moći iskušati na zadacima 2.8 i 2.9, koji bi inače bili prilično teški.

2.1. Dualnost

Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ zasad sasvim proizvoljni prostor mjere, koji se podrazumijeva u daljnjem tekstu. Radi potpunosti najprije navodimo osnovne nejednakosti za L^p norme.

Lema 2.1.

(a) (Hölderova nejednakost) *Ako su $p, q, r \in \langle 0, +\infty]$ eksponenti takvi da je $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, tada da svake izmjerive kompleksne funkcije f i g vrijedi*

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

(b) (Log-konveksnost L^p normi) *Ako su $p, q, r \in \langle 0, +\infty]$ eksponenti takvi da je $0 < p < r < q \leqslant \infty$ i ako je $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ određen sa $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$, tada za svaku*

izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p}^{1-\theta} \|f\|_{\mathrm{L}^q}^{\theta}.$$

(c) (Nejednakost Minkowskog) *Za $p \in [1, \infty]$ i za svake izmjerive kompleksne funkcije f i g vrijedi*

$$\|f + g\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} + \|g\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Dokaz. Dat ćemo vrlo kratke (i ponešto nestandardne) dokaze ovih tvrdnji. Pretpostavimo da su u svakoj od njih spomenuti eksponenti konačni, jer su u protivnom dokazi još jednostavniji.

(a) Možemo pretpostaviti $0 < \|f\|_{\mathrm{L}^p}, \|g\|_{\mathrm{L}^q} < +\infty$, jer je inače tvrdnja trivijalna, a zbog homogenosti tražene nejednakosti zasebno u f i g čak smijemo normalizirati $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \|g\|_{\mathrm{L}^q} = 1$. Označimo $\vartheta = \frac{r}{q}$, tako da je $1 - \vartheta = \frac{r}{p}$. Nejednakost

$$a^{1-\vartheta} b^{\vartheta} \leqslant (1 - \vartheta)a + \vartheta b; \quad a, b \in [0, +\infty\rangle \tag{2.1}$$

očigledno slijedi logaritmiranjem i korištenjem konkavnosti logaritamske funkcije. Uvrštavanje $a = |f(x)|^p$, $b = |g(x)|^q$ i integriranje po mjeri μ u varijabli x daju traženu nejednakost.

(b) Naprosto primijenimo dio (a) na funkcije $|f|^{1-\theta}$, $|f|^{\theta}$ i eksponente $\frac{p}{1-\theta}$, $\frac{q}{\theta}$, r:

$$\|f\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant \big\||f|^{1-\theta}\big\|_{\mathrm{L}^{p/(1-\theta)}} \big\||f|^{\theta}\big\|_{\mathrm{L}^{q/\theta}}.$$

(c) Opet smijemo pretpostaviti $0 < \|f\|_{\mathrm{L}^p}, \|g\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$. Ovog puta ćemo korištenjem istovremene homogenosti u f i g normalizirati $\|f\|_{\mathrm{L}^p} + \|g\|_{\mathrm{L}^p} = 1$ te označiti $\vartheta = \|g\|_{\mathrm{L}^p}$, tako da je $1 - \vartheta = \|f\|_{\mathrm{L}^p}$. Nejednakost

$$\big((1 - \vartheta)a + \vartheta b\big)^p \leqslant (1 - \vartheta)a^p + \vartheta b^p; \quad a, b \in [0, +\infty\rangle$$

je posljedica konveksnosti opće potencije s eksponentom $p \geqslant 1$. Uvrštavanjem $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}}$, $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathrm{L}^p}}$ i integriranjem po μ dobivamo traženu tvrdnju. □

U literaturi se nejednakost Minkowskog najčešće dokazuje pomoću Hölderove nejednakosti. Instruktivno je pokušati dokazati dio (b) prethodne leme dvostrukim deriviranjem funkcije $t \mapsto \ln \|f\|_{\mathrm{L}^{1/t}}$ i uočiti koje komplikacije se pojavljuju. Ocjena (2.1) se ponekad naziva i *težinska (ponderirana) geometrijsko-aritmetička nejednakost*.

U posebnim slučajevima prostora mjere imamo još jednostavnije, također često korištene ocjene.

Lema 2.2.

(a) Ako je mjera μ vjerojatnosna (tj. $\mu(\mathbb{X}) = 1$), tada za eksponente p, q takve da je $0 < p < q \leqslant \infty$ vrijedi $\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}$.

(b) Ako je μ mjera prebrajanja na nekom skupu $\mathbb{X}$, tada za eksponente p,q takve da je $0<p<q\leqslant\infty$ vrijedi $\|f\|_{\ell^p(\mathbb{X})}\geqslant\|f\|_{\ell^q(\mathbb{X})}$.

Dokaz. Opet možemo pretpostaviti $q<\infty$, jer je slučaj $q=\infty$ trivijalan.

(a) Iz leme 2.1(a) primijenjene na funkcije f i $\mathbb{1}_{\mathbb{X}}$ te eksponente $q,\frac{pq}{q-p},p$ imamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p}=\|f\mathbb{1}_{\mathbb{X}}\|_{\mathrm{L}^p}\leqslant\|f\|_{\mathrm{L}^q}\|\mathbb{1}_{\mathbb{X}}\|_{\mathrm{L}^{pq/(q-p)}}=\|f\|_{\mathrm{L}^q}.$$

(b) Zbog homogenosti smijemo normalizirati $\|f\|_{\ell^p}=1$, a očigledna posljedica je $|f(x)|\leqslant1$ za svaki $x\in\mathbb{X}$. Kako za $\vartheta\in[0,1]$ vrijedi $\vartheta^q\leqslant\vartheta^p$, možemo ocijeniti

$$\|f\|_{\ell^q}^q=\sum_{x\in\mathbb{X}}|f(x)|^q\leqslant\sum_{x\in\mathbb{X}}|f(x)|^p=\|f\|_{\ell^p}^p=1$$

pa doista imamo $\|f\|_{\ell^q}\leqslant1$. □

Dogovorimo se da ćemo za svaki $q\in[1,\infty]$ sa q' označavati njemu *konjugirani eksponent*, tj. jedinstveni $q'\in[1,\infty]$ takav da je $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Pritom uzimamo $\frac{1}{\infty}=0$. Eksplicitno,

$$q':=\begin{cases}\infty & \text{za } q=1,\\ \frac{q}{q-1} & \text{za } 1<q<\infty,\\ 1 & \text{za } q=\infty.\end{cases}$$

Za prostor mjere $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ neka $\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ označava vektorski prostor svih μ-g.s. klasa jednostavnih $\mathcal{X}$-izmjerivih kompleksnih funkcija na $\mathbb{X}$ koje iščezavaju izvan skupa konačne mjere. Dakle, $\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ se sastoji od funkcija oblika

$$f=\sum_{l=1}^{M}\alpha_l\mathbb{1}_{F_l};\quad M\in\mathbb{N},\ F_1,\ldots,F_M\in\mathcal{X},\ \alpha_1,\ldots,\alpha_M\in\mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Nadalje, $\mathcal{M}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ će nam označavati prostor svih μ-g.s. klasa kompleksnih $\mathcal{X}$-izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$, a $\mathcal{M}^+(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ familiju svih μ-g.s. klasa $\mathcal{X}$-izmjerivih funkcija na $\mathbb{X}$ s vrijednostima u $[0,+\infty]$.

Vektorski prostor $\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ će nam u ovom poglavlju služiti kao pogodni "testni prostor" ili kao prirodna "polazna domena" raznih operatora, jer još uvijek nemamo na raspolaganju nikakvu diferencijabilnu ili makar topološku strukturu; usporedite npr. narednu lemu sa zadatkom 2.2. Pretpostavka da radimo s jednostavnim funkcijama je samo kvalitativne naravi te nam pomaže kako bi svi argumenti koji slijede bili smisleni, a sve operacije opravdane. Premda znamo da se svaka funkcija $f\in\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ može zapisati u obliku (2.2), ne želimo o brojevima $M,\alpha_1,\ldots,\alpha_M$ i skupovima $F_1,\ldots,F_M$ pretpostavljati ništa što ne bi slijedilo iz ocjena veličina $\|f\|_{\mathrm{L}^p}$. Samo tako ćemo moći uspješno koristiti poznatu činjenicu da je $\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ gusti potprostor od $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)$ za svaki $p\in[1,+\infty\rangle$; vidjeti [Coh13] ili [Fol99].

Ponekad moramo dodati blage tehničke pretpostavke na mjeru s kojom radimo, koje u praksi gotovo nikad ne predstavljaju problem. Prostor mjere $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ je *σ-konačan* kada postoji niz $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ u $\mathcal{X}$ takav da je $\mathbb{X}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ i $\mu(F_n)<+\infty$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Kažemo da je prostor mjere *semikonačan* ako za svaki $E\in\mathcal{X}$ mjere $\mu(E)=+\infty$ postoji skup $F\in\mathcal{X}$ takav da je $F\subseteq E$ i $0<\mu(F)<+\infty$.

Lema 2.3. (Obrat Hölderove nejednakosti) *Neka je* $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ *prostor semikonačne mjere i uzmimo* $q\in[1,\infty]$. *Pretpostavimo da* $\mathcal{X}$*-izmjeriva funkcija* $g\colon\mathbb{X}\to\mathbb{C}$ *zadovoljava:*

- *Za svaku* $f\in\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ *je* $fg\in\mathrm{L}^1(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$.
- $M:=\sup\big\{\big|\int_{\mathbb{X}}fgd\mu\big| : f\in\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu),\ \|f\|_{\mathrm{L}^{q'}}=1\big\}<+\infty.$

Tada vrijedi $g\in\mathrm{L}^q(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ *i* $\|g\|_{\mathrm{L}^q}=M$.

Dokaz. Najprije ćemo konstruirati niz funkcija $(\operatorname{sgn}_k)_{k=1}^{\infty}$ sa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ koje uniformno aproksimiraju kompleksnu funkciju signum (tj. funkciju predznaka), a jednostavne su i Borelove. Za svaki $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ postoji jedinstveni $\vartheta\in[0,1\rangle$ takav da je $z=|z|e^{2\pi i\vartheta}$. Tada je $\operatorname{sgn}z=e^{2\pi i\vartheta}$, a mi za svaki $k\in\mathbb{N}$ definirajmo

$$\operatorname{sgn}_k z:=e^{2\pi i\lfloor k\vartheta\rfloor/k},$$

pri čemu $\lfloor\cdot\rfloor$ označava funkciju "najveće cijelo". Dakle, $\frac{\lfloor k\vartheta\rfloor}{k}$ zapravo zaokružuje ϑ na prvi manji ili jednaki broj iz skupa $\{0,\frac{1}{k},\ldots,\frac{k-1}{k}\}$. Osim toga je $\operatorname{sgn}0=0$ pa i mi stavimo $\operatorname{sgn}_k 0=0$. Ocjenjujući duljinu tetive duljinom pripadnog luka, odmah se vidi da za svaki $z\in\mathbb{C}$ imamo

$$|\operatorname{sgn}_k z-\operatorname{sgn}z|\leqslant\frac{2\pi}{k}.$$

Odavde pak kvadriranjem slijedi

$$\operatorname{Re}\big(\overline{\operatorname{sgn}_k z}\operatorname{sgn}z\big)=1-\frac{1}{2}|\operatorname{sgn}_k z-\operatorname{sgn}z|^2\geqslant 1-\frac{2\pi^2}{k^2}. \tag{2.3}$$

Razlikovat ćemo dva slučaja. Neka je prvo $q<\infty$. Trebat će nam zaključiti da je uopće skup $\{g\neq 0\}$ σ-konačan. Preciznije, tvrdimo da skup $\big\{|g|>\frac{1}{n}\big\}$ ima konačnu mjeru za svaki $n\in\mathbb{N}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $n\in\mathbb{N}$ takav da je $\mu\big(\big\{|g|>\frac{1}{n}\big\}\big)=+\infty$. Definirajmo

$$\alpha:=\sup\Big\{\mu(F)\ :\ F\in\mathcal{X},\ F\subseteq\big\{|g|>\tfrac{1}{n}\big\},\ \mu(F)<+\infty\Big\}.$$

Želimo pokazati da je $\alpha=+\infty$ pa pretpostavimo $\alpha<+\infty$. Tada postoji niz $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ $\mathcal{X}$-izmjerivih podskupova od $\big\{|g|>\frac{1}{n}\big\}$ koji imaju konačnu mjeru i zadovoljavaju $\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)=\alpha$. Stavimo $F_\infty:=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$. Tada je $F_\infty\in\mathcal{X}$, $F_\infty\subseteq\big\{|g|>\frac{1}{n}\big\}$

i zbog monotonosti mjere vrijedi $\mu(F_\infty) \geqslant \alpha$. S druge strane, kako se konačne unije $\bigcup_{k=1}^{K} F_k$ nalaze u gornjoj familiji, imamo

$$\mu(F_\infty) = \lim_{K\to\infty} \underbrace{\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{K} F_k\Big)}_{\leqslant\alpha} \leqslant \alpha$$

pa zaključujemo da mora biti $\mu(F_\infty) = \alpha < +\infty$. Sada imamo

$$\mu\big(\big\{|g| > \tfrac{1}{n}\big\} \setminus F_\infty\big) = +\infty$$

pa zbog semikonačnosti mjere μ postoji $G \in \mathcal{X}$ takav da je $G \subseteq \big\{|g| > \frac{1}{n}\big\} \setminus F_\infty$ i $0 < \mu(G) < +\infty$. Tada je $F_\infty \cup G$ izmjerivi podskup od $\big\{|g| > \frac{1}{n}\big\}$ takav da je

$$\alpha < \mu(F_\infty \cup G) = \alpha + \mu(G) < +\infty,$$

što je u kontradikciji s definicijom od α. Timo smo pokazali $\alpha = +\infty$ pa zapravo postoji niz $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ podskupova od $\big\{|g| > \frac{1}{n}\big\}$ koji imaju pozitivnu i konačnu mjeru i za koje vrijedi $\lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = +\infty$. Promotrimo funkcije

$$h_k := \mu(F_k)^{-1/q'}\, \overline{\operatorname{sgn}_{10} \circ g}\, \mathbb{1}_{F_k}.$$

Za njih odmah vidimo $\|h_k\|_{\mathrm{L}^{q'}} = 1$ te

$$\operatorname{Re}(h_k g) \overset{(2.3)}{\geqslant} \Big(1 - \frac{\pi^2}{50}\Big)\mu(F_k)^{-1/q'}|g|\mathbb{1}_{F_k} \gtrsim \tfrac{1}{n}\,\mu(F_k)^{-1/q'}\mathbb{1}_{F_k}$$

pa zbog pretpostavke iz iskaza leme imamo

$$M \geqslant \Big|\int_{\mathbb{X}} h_k g d\mu\Big| \geqslant \operatorname{Re}\int_{\mathbb{X}} h_k g d\mu = \int_{\mathbb{X}} \operatorname{Re}(h_k g) d\mu \gtrsim \frac{1}{n}\,\mu(F_k)^{1/q}.$$

Puštanjem $k \to \infty$ dobivamo kontradikciju s $M < +\infty$, iz koje potom zaključujemo $\mu\big(\big\{|g| > \frac{1}{n}\big\}\big) < +\infty$.

Postoji niz $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ $\mathcal{X}$-izmjerivih jednostavnih funkcija sa $\mathbb{X}$ u $\mathbb{C}$ koji po točkama konvergira prema g i takav je da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|\varphi_n| \leqslant |g|$. Nadalje stavimo $g_n := \varphi_n \mathbb{1}_{\{|g|>1/n\}}$, tako da je po prethodno dokazanom $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ niz u $\mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ s istim svojstvima. Konačno definirajmo

$$f_n := \frac{|g_n|^{q-1}\,\overline{\operatorname{sgn}_n \circ g}}{\|g_n\|_{\mathrm{L}^q}^{q-1}} \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ dovoljno velike da je nazivnik strogo pozitivan, pri čemu izraz 0^0 (koji se može pojaviti u brojniku kod $q = 1$) shvaćamo kao 0. Primijetimo

$$\|f_n\|_{\mathrm{L}^{q'}} = 1, \quad \|f_n g_n\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{\mathbb{X}} |f_n g_n| d\mu = \|g_n\|_{\mathrm{L}^q}$$

i

$$\mathrm{Re}(f_n g) = \frac{|g_n|^{q-1}|g|}{\|g_n\|_{\mathrm{L}^q}^{q-1}} \mathrm{Re}(\overline{\mathrm{sgn}_n \circ g}\ \mathrm{sgn} \circ g) \overset{(2.3)}{\geqslant} \Big(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\Big)|f_n g|,$$

odakle je

$$\int_{\mathbb{X}} \mathrm{Re}(f_n g) d\mu \geqslant \Big(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\Big)\|f_n g\|_{\mathrm{L}^1}.$$

Prema Fatouovoj[1] lemi konačno imamo:

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{X}} |g|^q d\mu\Big)^{1/q} &\leqslant \Big(\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} |g_n|^q d\mu\Big)^{1/q} = \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_{\mathrm{L}^q} = \liminf_{n\to\infty} \|f_n g_n\|_{\mathrm{L}^1} \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n g\|_{\mathrm{L}^1} = \liminf_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\Big)\|f_n g\|_{\mathrm{L}^1} \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} \mathrm{Re}(f_n g) d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \Big| \int_{\mathbb{X}} f_n g d\mu\Big| \leqslant M.\end{aligned}$$

Zato je $g \in \mathrm{L}^q$ i $\|g\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant M$. Obratna nejednakost je direktna posljedica leme 2.1(a).

Dokažimo sada slučaj $q = \infty$. Za fiksirani $\varepsilon > 0$ označimo $A_\varepsilon := \{|g| > M + \varepsilon\}$. Želimo dokazati $\mu(A_\varepsilon) = 0$ pa pretpostavimo $\mu(A_\varepsilon) > 0$. Postoji $B \in \mathcal{X}$, $B \subseteq A_\varepsilon$ takav da je $0 < \mu(B) < +\infty$. Naime, to slijedi iz semikonačnosti mjere μ ako je $\mu(A_\varepsilon) = +\infty$, a očigledno je ako je $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$. Definirajmo

$$f_n := \frac{\overline{\mathrm{sgn}_n \circ g}\, \mathbb{1}_B}{\mu(B)} \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Očigledno je $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = 1$ te

$$\mathrm{Re}(f_n g) = \frac{|g|\mathbb{1}_B}{\mu(B)} \mathrm{Re}(\overline{\mathrm{sgn}_n \circ g}\ \mathrm{sgn} \circ g) \geqslant \Big(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\Big)\frac{|g|\mathbb{1}_B}{\mu(B)}$$

pa imamo

$$M \geqslant \Big|\int_{\mathbb{X}} f_n g d\mu\Big| \geqslant \int_{\mathbb{X}} \mathrm{Re}(f_n g) d\mu \geqslant \Big(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\Big)\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| d\mu \geqslant \Big(1 - \frac{2\pi^2}{n^2}\Big)(M + \varepsilon).$$

Prelaskom na limes kada $n \to \infty$ dobivamo kontradikciju i zaključujemo $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Dakle, $g \in \mathrm{L}^\infty$ i $\|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant M + \varepsilon$ pa puštanjem $\varepsilon \to 0$ slijedi jedna nejednakost, dok je druga opet trivijalna posljedica leme 2.1(a). □

Pripomenimo da lema 2.3 ostaje vrijediti (uz čak nešto jednostavniji dokaz) i za funkciju $g\colon \mathbb{X} \to [0, +\infty]$, pri čemu izraz $\big|\int f g d\mu\big|$ treba zamijeniti sa $\int |f| g\, d\mu$. Ova varijanta nam može koristiti dok još uopće ne znamo da je kompleksna funkcija g dobro definirana i konačna u gotovo svakoj točki. Osim toga primijetimo da se dokaz pojednostavljuje ako je prostor mjere σ-konačan, što je obično slučaj.

[1] Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929), francuski matematičar i astronom.

Lema 2.3 je korisna jer nam pomaže da "dualiziramo" ocjene. Neka su $X_1,\ldots,X_n$ kompleksni normirani prostori, $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ prostor semikonačne mjere i $q\in[1,\infty]$. Pretpostavimo da za dani operator $T\colon X_1\times\cdots\times X_n\to\mathcal{M}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ želimo dokazati ocjenu

$$\|T(f_1,\ldots,f_n)\|_{\mathrm{L}^q}\lesssim\|f_1\|_{X_1}\cdots\|f_n\|_{X_n} \tag{2.4}$$

za svake $f_1\in X_1,\ldots,f_n\in X_n$. Zahvaljujući lemi 2.3 dovoljno je provjeriti da je forma

$$\Lambda\colon\mathcal{S}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)\times X_1\times\cdots\times X_n\to\mathbb{C},\quad \Lambda(f_0,f_1,\ldots,f_n):=\int_{\mathbb{X}}f_0\,T(f_1,\ldots,f_n)\,d\mu$$

dobro definirana (u smislu da je podintegralna funkcija uvijek apsolutno integrabilna) i da zadovoljava ocjenu

$$|\Lambda(f_0,f_1,\ldots,f_n)|\lesssim\|f_0\|_{\mathrm{L}^{q'}}\|f_1\|_{X_1}\cdots\|f_n\|_{X_n}.$$

Za operator T koji zadovoljava nejednakost (2.4) kažemo da je *ograničen*, a najmanju konstantu koja može stajati na desnoj strani te nejednakosti zovemo *operatorska norma* od T i označavamo $\|T\|_{X_1\times\cdots\times X_n\to\mathrm{L}^q}$. Analogno se definira *norma forme* te u prethodnom slučaju čak imamo

$$\|\Lambda\|_{\mathrm{L}^{q'}\times X_1\times\cdots\times X_n\to\mathbb{C}}=\|T\|_{X_1\times\cdots\times X_n\to\mathrm{L}^q}.$$

Ukoliko je T još i multilinearan (tj. linearan u svakoj od n koordinata), tada je T neprekidan, pri čemu na $X_1\times\cdots\times X_n$ pretpostavljamo produkt topologija generiranih pripadnim normama. Ukoliko dodatno pretpostavimo da su dani eksponenti $p_1,p_2,\ldots,p_n\in[1,\infty\rangle$ i neki prostori mjera $(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)$; $j=1,2,\ldots,n$ te da je upravo $X_j=\big(\mathcal{S}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j),\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p_j}}\big)$, tada po argumentu gustoće T ima jedinstveno ograničeno multilinearno proširenje

$$\widetilde{T}\colon\prod_{j=1}^{n}\mathrm{L}^{p_j}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)\to\mathrm{L}^q(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu),$$

koje čak ima istu operatorsku normu, tj.

$$\big\|\widetilde{T}\big\|_{\mathrm{L}^{p_1}\times\cdots\mathrm{L}^{p_n}\to\mathrm{L}^q}=\|T\|_{X_1\times\cdots\times X_n\to\mathrm{L}^q}.$$

Slična napomena vrijedi i za formu Λ.

Za kraj ovog odjeljka spomenimo da nam multilinearna forma može biti i polazni objekt te generirati multilinearni operator. Radi jednostavnosti formuliramo samo bilinearni slučaj.

Lema 2.4. *Neka su X kompleksni normirani prostor i $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ prostor mjere. Pretpostavimo da je $p\in\langle1,\infty\rangle$ i μ bilo kakva mjera ili da je $p=1$ i mjera μ σ-konačna. Za svaku ograničenu bilinearnu formu $\Lambda\colon X\times\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)\to\mathbb{C}$ postoji jedinstveni ograničeni linearni operator $T\colon X\to\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ takav da je*

$$\int_{\mathbb{X}}(Tf)g\,d\mu=\Lambda(f,g) \tag{2.5}$$

za svake $f\in X$ i $g\in\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$. Štoviše, tada je $\|\Lambda\|_{X\times\mathrm{L}^p\to\mathbb{C}}=\|T\|_{X\to\mathrm{L}^{p'}}$.

Dokaz. Poznata je činjenica (vidjeti [Coh13]) da uz uvjete leme vrijedi

$$\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)^* \cong \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu), \tag{2.6}$$

tj. preciznije, da je svaki ograničeni linearni funkcional na L^p oblika $g \mapsto \int_{\mathbb{X}} ghd\mu$ za jedinstvenu $h \in \mathrm{L}^{p'}$. Iz spomenute jedinstvenosti odmah slijedi i da postoji najviše jedan operator T kao u iskazu leme.

Dokažimo sada egzistenciju traženog operatora T. Za svaki $f \in X$ je $\mathrm{L}^p \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \Lambda(f, g)$ neprekidni linearni funkcional pa zbog (2.6) postoji jedinstvena funkcija iz $\mathrm{L}^{p'}$, označimo je sa Tf, takva da vrijedi (2.5) za svaku $g \in \mathrm{L}^p$. Na taj način je definiran operator $T\colon X \to \mathrm{L}^{p'}$ koji već zadovoljava traženu jednakost. On je linearan jer za svaku $g \in \mathrm{L}^p$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{X}} T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) g d\mu = \Lambda(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) \\
&= \alpha_1 \Lambda(f_1, g) + \alpha_2 \Lambda(f_2, g) = \int_{\mathbb{X}} (\alpha_1 T f_1 + \alpha_2 T f_2) g d\mu
\end{aligned}$$

pa opet možemo primijeniti jedinstvenost iz prikaza (2.6). Kako imamo

$$\Big| \int_{\mathbb{X}} (Tf) g d\mu \Big| = |\Lambda(f, g)| \leqslant \|\Lambda\|_{X \times \mathrm{L}^p \to \mathbb{C}} \|f\|_X \|g\|_{\mathrm{L}^p},$$

iz leme 2.3 slijedi da je T ograničen i $\|T\|_{X \to \mathrm{L}^{p'}} \leqslant \|\Lambda\|_{X \times \mathrm{L}^p \to \mathbb{C}}$. Obratna nejednakost je opet očigledna po lemi 2.1. $\square$

Jedna primjena posljednje leme je da se krene od ograničenog linearnog operatora

$$T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu), \quad p, q \in \langle 1, \infty \rangle,$$

prijeđe na ograničenu bilinearnu formu

$$\Lambda\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \times \mathrm{L}^{q'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \to \mathbb{C}, \quad \Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{X}} (Tf)\, g\, d\mu$$

pa lema 2.4 primijenjena na $(g, f) \mapsto \Lambda(f, g)$ generira jedinstveni ograničeni linearni operator

$$T^\tau\colon \mathrm{L}^{q'}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \to \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$$

takav da je

$$\int_{\mathbb{Y}} f(y)(T^\tau g)(y) d\nu(y) = \Lambda(f, g) = \int_{\mathbb{X}} (Tf)(x) g(x) d\mu(x).$$

Takav operator T^τ zove se *dualni* ili *transponirani* ili *adjungirani operator* od T i iz svega navedenog se odmah vidi da T i T^τ imaju iste operatorske norme. U slučaju $p = q = 2$ on nije baš jednak hermitski adjungiranom operatoru obzirom na standardne L^2 skalarne produkte, već je hermitski adjungirani operator od T zapravo $g \mapsto \overline{T^\tau \overline{g}}$.

Analogna konstrukcija je moguća i za ograničeni multilinearni operator, uz napomenu da tada n-linearni operator ima n adjungiranih operatora.

* * *

Zadatak 2.1. Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-konačni prostori mjera. Za funkciju $f \in \mathcal{M}(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \mu\times\nu)$ i eksponente $p, q \in [1, \infty]$ ima smisla promatrati tzv. *mješovite Lebesgueove norme*:

$$\begin{aligned}\|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^p_x(\mathrm{L}^q_y)} &:= \big\|\|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^q_y}\big\|_{\mathrm{L}^p_x},\\ \|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^q_y(\mathrm{L}^p_x)} &:= \big\|\|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^p_x}\big\|_{\mathrm{L}^q_y}.\end{aligned}$$

Ovdje u indeksima označavamo po kojoj varijabli se uzima uobičajena L^p norma. Te dvije mješovite norme općenito ne moraju biti jednake pa moramo pripaziti kako čitamo oznake i kojim redoslijedom računamo. Pokažite da ipak vrijedi sljedeće.

(a) Ako je $p = q$, tada je $\|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^p_x(\mathrm{L}^q_y)} = \|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^q_y(\mathrm{L}^p_x)}$.

(b) Ako je $p < q$, tada je $\|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^p_x(\mathrm{L}^q_y)} \geqslant \|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^q_y(\mathrm{L}^p_x)}$.

(c) Ako je $p > q$, tada je $\|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^p_x(\mathrm{L}^q_y)} \leqslant \|f(x,y)\|_{\mathrm{L}^q_y(\mathrm{L}^p_x)}$.

Zadatak 2.2. Dokažite glatku varijantu obrata Hölderove nejednakosti: Neka je U otvoreni podskup od $\mathbb{R}^d$ te neka je $q \in [1, \infty]$. Pretpostavimo da je $g\colon U \to \mathbb{C}$ Borel-izmjeriva funkcija koja zadovoljava:

- Za svaku $f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(U)$ je $fg \in \mathrm{L}^1(U)$.
- $M := \sup\big\{\big|\int_U f(x)g(x)dx\big| : f \in \mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(U),\ \|f\|_{\mathrm{L}^{q'}} = 1\big\} < +\infty$.

Tada vrijedi $g \in \mathrm{L}^q(U)$ i $\|g\|_{\mathrm{L}^q} = M$.

2.2. Realna metoda interpolacije

Neka su $(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \ldots, n$ prostori mjera. Reći ćemo da je

$$\Lambda\colon \prod_{j=0}^{n} \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \to [0, +\infty] \text{ ili } \mathbb{C}$$

multisublinearna forma ako vrijedi

$$|\Lambda(f_0, \ldots, f_{j-1}, \alpha f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)| = |\alpha||\Lambda(f_0, \ldots, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, \ldots, f_n)|$$

i

$$\begin{aligned}&|\Lambda(f_0, \ldots, f_{j-1}, g + h, f_{j+1}, \ldots, f_n)|\\ &\leqslant |\Lambda(f_0, \ldots, f_{j-1}, g, f_{j+1}, \ldots, f_n)| + |\Lambda(f_0, \ldots, f_{j-1}, h, f_{j+1}, \ldots, f_n)|\end{aligned}$$

za svaki $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, svaki $\alpha \in [0, +\infty]$ ili $\mathbb{C}$ i svake jednostavne funkcije $f_1, \ldots, f_n$, g, h koncentrirane na skupovima konačnih mjera. Primjer bisublinearne forme koja nije bilinearna se dobije dualizacijom Hardy-Littlewoodove[2] maksimalne funkcije u kojoj će biti riječ u poglavlju 6:

$$\Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{R}} \sup_{\varepsilon \in \langle 0, +\infty \rangle} \Big| \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon \rangle} f(y) dy \Big| \, |g(x)| dx. \tag{2.7}$$

U daljnjem promatramo isključivo eksponente $p_0, p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$. Multisublinearna forma Λ je *jakog tipa* $P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n})$ ako za svaki izbor funkcija $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi ocjena

$$|\Lambda(f_0, f_1, \ldots, f_n)| \lesssim_{p_0, p_1, \ldots, p_n} \prod_{j=0}^{n} \|f_j\|_{\mathrm{L}^{p_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)}. \tag{2.8}$$

Multisublinearna forma Λ je *restringiranog tipa* $P = (\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n})$ ako za svaki izbor skupova $E_j \in \mathcal{X}_j$ takvih da je $\mu_j(E_j) < +\infty$; $j = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi ocjena

$$|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n})| \lesssim_{p_0, p_1, \ldots, p_n} \prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{\frac{1}{p_j}}. \tag{2.9}$$

Pritom podrazumijevamo $\frac{1}{\infty} = 0$ i dogovorno uzimamo

$$\mu_j(E_j)^0 = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \mu_j(E_j) > 0, \\ 0 & \text{ako je } \mu_j(E_j) = 0. \end{cases}$$

Premda se u ovim definicijama pojavljuje samo jedna $(n+1)$-torka eksponenata, želimo notacijski naglasiti da sve buduće implicitne konstante smiju ovisiti o eksponentima. Očigledno je svojstvo (2.9) slabije od svojstva (2.8), naprosto jer je $\|\mathbb{1}_{E_j}\|_{\mathrm{L}^{p_j}} = \mu_j(E_j)^{1/p_j}$. Naravno da obrat ne vrijedi (pogledajte zadatak 2.3), ali važno je upozoriti na sljedeću moguću grešku u rasuđivanju. Raspisujući svaku od jednostavnih funkcija $f_0, f_1, \ldots, f_n$ kao linearnu kombinaciju karakterističnih funkcija izmjerivih skupova mogli bismo pomisliti kako nejednakost (2.8) slijedi iz nekoliko primjena nejednakosti (2.9), ali to nije točno! Kod spomenutog raspisa ne bismo imali nikakvu kontrolu broja karakterističnih funkcija koje se pojavljuju niti veličina koeficijenata koji uz njih dolaze. Glavni rezultat ovog odjeljka će reći kako nekad ipak možemo iz nekoliko ocjena (2.9) zaključiti jake ocjene (2.8) u čitavom rasponu Lebesgueovih prostora.

Iz zadatka 2.4 se vidi da ne bi imalo smisla promatrati multisublinearne forme koje su restringiranog tipa P ako bi za neki j vrijedilo $0 < p_j < 1$. Zanimljivo je pripomenuti da je ipak moguće i korisno modificirati definiciju restringirane omeđenosti čak i kada

[2] John Edensor Littlewood (1885–1977), engleski matematičar.

za neki eksponent vrijedi $p_j < 0$, vidjeti [GT03] ili [Thi06], ali mi ćemo ostati samo kod eksponenata $p_j \geqslant 1$.

Odlučili smo raspon ocjena (2.8) ili (2.9) za formu Λ opisivati $(n+1)$-torkama

$$P = (\tfrac{1}{p_0}, \tfrac{1}{p_1}, \ldots, \tfrac{1}{p_n}) \in [0,1]^{n+1}$$

pa ponekad naprosto kažemo da je Λ jakog ili restringiranog tipa u točki P. Da je promatrati recipročne vrijednosti eksponenata bio dobar izbor pokazuje već sljedeća vrlo jednostavna opservacija.

Lema 2.5. *Skup točaka u kojima je multisublinearna forma Λ restringiranog tipa je uvijek konveksan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Λ restringiranog tipa

$$Q = \Big(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \ldots, \frac{1}{q_n}\Big) \text{ i } R = \Big(\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_1}, \ldots, \frac{1}{r_n}\Big)$$

te neka je $(n+1)$-torka eksponenata $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ definirana pomoću

$$(\tfrac{1}{p_0}, \tfrac{1}{p_1}, \ldots, \tfrac{1}{p_n}) = (1-\theta)(\tfrac{1}{q_0}, \tfrac{1}{q_1}, \ldots, \tfrac{1}{q_n}) + \theta(\tfrac{1}{r_0}, \tfrac{1}{r_1}, \ldots, \tfrac{1}{r_n})$$

za neki $\theta \in \langle 0, 1\rangle$. Uzmimo skupove $E_j \in \mathcal{X}_j$; $j = 0, 1, \ldots, n$ konačnih mjera. Za svaki j imamo

$$\mu_j(E_j)^{\frac{1}{p_j}} = \Big(\mu_j(E_j)^{\frac{1}{q_j}}\Big)^{1-\theta} \Big(\mu_j(E_j)^{\frac{1}{r_j}}\Big)^{\theta}$$

pa množenje daje

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{\frac{1}{p_j}} &= \Big(\prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{\frac{1}{q_j}}\Big)^{1-\theta} \Big(\prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{\frac{1}{r_j}}\Big)^{\theta} \\
&\gtrsim_{Q,R,\theta} |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n})|^{1-\theta} |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n})|^{\theta} \\
&= |\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n})|.
\end{aligned}$$

□

Sljedeća lema govori o dekompozicijama funkcija i bit će prvi korak prema jakim ocjenama.

Lema 2.6. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor mjere.*

(a) Dana je realna funkcija $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ koja zadovoljava $\mathbf{0} \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_F$ za neki skup $F \in \mathcal{X}$ takav da je $\mu(F) < +\infty$. Tada se f može prikazati kao konačna konveksna kombinacija

$$f = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \mathbb{1}_{F_l}$$

za neki $N \in \mathbb{N}$, za neke $F_1, \ldots, F_N \in \mathcal{X}$ podskupove od F i za neke koeficijente $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \geqslant 0$ takve da je $\sum_{l=1}^{N} \alpha_l = 1$.

(b) Svaka funkcija $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *se može dekomponirati kao*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k f_k, \tag{2.10}$$

pri čemu su f_k *jednostavne* $\mathcal{X}$*-izmjerive funkcije takve da vrijedi*

$$|f_k| \leqslant \mathbb{1}_{F_k} \text{ za neki } F_k \in \mathcal{X} \text{ takav da je } \mu(F_k) \leqslant 2^k,$$

a koeficijenti $\beta_k \in [0, +\infty\rangle$ *zadovoljavaju*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \beta_k^p \leqslant 4\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p \quad \text{za svaki } p \in [1, +\infty\rangle.$$

Štoviše, suma (2.10) *je efektivno konačna, tj. samo konačno mnogo njenih pribrojnika je različito od* 0*.*

Dokaz. (a) Označimo

$$\begin{aligned}
G_1 &:= \{f \geqslant \tfrac{1}{2}\} \in \mathcal{X}, \\
G_2 &:= \big\{f - \tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{G_1} \geqslant \tfrac{1}{4}\big\} \in \mathcal{X}, \\
G_3 &:= \big\{f - \tfrac{1}{2}\mathbb{1}_{G_1} - \tfrac{1}{4}\mathbb{1}_{G_2} \geqslant \tfrac{1}{8}\big\} \in \mathcal{X}, \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

tj. rekurzivno

$$G_m := \Big\{f - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k}\mathbb{1}_{G_k} \geqslant 2^{-m}\Big\}.$$

Po konstrukciji vidimo da za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$0 \leqslant f - \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\mathbb{1}_{G_k} \leqslant 2^{-m},$$

tako da imamo $f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\mathbb{1}_{G_k}$.

Neka funkcija f poprima M različitih ne-nul vrijednosti i to na skupovima $H_1, H_2, \ldots, H_M \in \mathcal{X}$. Svaki skup G_k je unija nekih od skupova $H_1, \ldots, H_M$. Zato među njima ima samo konačno mnogo različitih; nazovimo ih $F_1, \ldots, F_N$. Tvrdnja slijedi ako definiramo

$$\alpha_l := \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ G_k = F_l}} 2^{-k}; \quad l = 1, 2, \ldots, N$$

i primijetimo $\sum_{l=1}^{N} \alpha_l = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} = 1$.

(b) Definirajmo

$$\beta_k := \min\big\{\alpha \in [0,+\infty\rangle : \mu(\{|f| > \alpha\}) \leqslant 2^{k-1}\big\}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Gornji skup je svakako neprazan (jer je f ograničena) te je oblika $\langle\gamma,+\infty\rangle$ ili $[\gamma,+\infty\rangle$ za neki $\gamma \geqslant 0$. Ako je $(\gamma_m)_{m=1}^{\infty}$ strogo padajući niz koji konvergira prema γ, tada zbog neprekidnosti mjere u odnosu na rastuće nizove skupova imamo

$$\mu(\{|f| > \gamma\}) = \mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{|f| > \gamma_m\}\Big) = \lim_{m\to\infty}\mu(\{|f| > \gamma_m\}) \leqslant 2^{k-1}$$

pa zaključujemo da se i γ nalazi u tom skupu, što znači da se gornji minimum doista postiže. Primijetimo da se brojevi β_k smanjuju (ne nužno strogo) kako indeks $k \in \mathbb{Z}$ raste. Obzirom da f iščezava izvan skupa konačne mjere, za dovoljno velike $k \in \mathbb{Z}$ imamo $\beta_k = 0$. S druge strane, za dovoljno male $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\beta_k = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Nadalje uzmimo

$$F_k := \{\beta_{k+1} < |f| \leqslant \beta_k\}$$

tako da i za dovoljno velike i za dovoljno male $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi $F_k = \emptyset$ te skupovi $(F_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ čine particiju od $\{f \neq 0\}$. Po konstrukciji je

$$\mu(F_k) \leqslant \mu(\{|f| > \beta_{k+1}\}) \leqslant 2^k.$$

Također definirajmo

$$f_k := \begin{cases} \beta_k^{-1} f \mathbb{1}_{F_k} & \text{ako je } \beta_k > 0, \\ \mathbf{0} & \text{ako je } \beta_k = 0. \end{cases}$$

Na taj način zasigurno vrijedi $|f_k| \leqslant \mathbb{1}_{F_k}$ i tražena dekompozicija (2.10). Ako je $K \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je $\beta_K = 0$, tada imamo

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p &\overset{(1.15)}{\geqslant} \sum_{k=-K}^{K-1} \int_{[\beta_{k+1},\beta_k\rangle} p\alpha^{p-1}\mu(\{|f| > \alpha\})d\alpha \geqslant \sum_{k=-K}^{K-1} 2^{k-1} \int_{[\beta_{k+1},\beta_k\rangle} p\alpha^{p-1} d\alpha \\ &= \sum_{k=-K}^{K-1} 2^{k-1}(\beta_k^p - \beta_{k+1}^p) = \sum_{k=-K+1}^{K-1} 2^{k-2}\beta_k^p + \underbrace{2^{-K-1}\beta_{-K}^p}_{\geqslant 0} - \underbrace{2^{K-2}\beta_K^p}_{=0}. \end{aligned}$$

Preostaje pustiti $K \to \infty$ kako bismo dobili traženu ocjenu za koeficijente. $\square$

Pogledajte zadatak 2.5 za geometrijski dokaz leme 2.6(a). Ipak, dali smo prednost dokazu kojeg smo naveli jer on ima smisla i za funkcije koje nisu jednostavne, samo što onda konveksna kombinacija iz prikaza od f ne mora biti konačna. Primijetimo usput da su funkcije f_k iz leme 2.6(b) čak koncentrirane na međusobno disjunktnim skupovima F_k.

Lema 2.7. *Ako je* $\kappa\colon \mathbb{Z}^{n+1} \to [0, +\infty\rangle$ *diskretna funkcija koja za svaki* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *zadovoljava*

$$\sup_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{(k_0,k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}\\ k_j=l}} \kappa(k_0, k_1, \ldots, k_n) \lesssim 1 \tag{2.11}$$

i ako su $p_0, p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ *eksponenti takvi da je* $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j} \geqslant 1$, *tada vrijedi*

$$\sum_{k_0,k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}} \kappa(k_0, k_1, \ldots, k_n)\big|\gamma_{k_0}^{(0)}\big|\big|\gamma_{k_1}^{(1)}\big| \cdots \big|\gamma_{k_n}^{(n)}\big| \lesssim \prod_{j=0}^{n} \big\|\big(\gamma_k^{(j)}\big)_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z})} \tag{2.12}$$

za proizvoljne dvostrane nizove kompleksnih brojeva $(\gamma_k^{(j)})_{k\in\mathbb{Z}}$; $j = 0, 1, \ldots, n$.

Dokaz. Označimo

$$f_j\colon \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{C}, \quad f_j(k_0, k_1, \ldots, k_n) := \kappa(k_0, k_1, \ldots, k_n)^{1/p_j}\gamma_{k_j}^{(j)}; \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

uz interpretaciju $\kappa^{1/\infty} = \kappa^0 = 1$ te stavimo $f := f_0 f_1 \cdots f_n$. Lijevu stranu od (2.12) možemo interpretirati kao $\ell^1(\mathbb{Z}^{n+1})$ normu funkcije f pa ako je $p \in \langle 0, 1]$ eksponent takav da je $\frac{1}{p} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j}$, tada zbog leme 2.2(b) i leme 2.1(a) imamo

$$\|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^{n+1})} \leqslant \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^{n+1})} \leqslant \prod_{j=0}^{n} \|f_j\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z}^{n+1})}.$$

Za $p_j < \infty$ po pretpostavci vrijedi

$$\begin{aligned}
\|f_j\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z}^{n+1})}^{p_j} &= \sum_{(k_0,k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}} \kappa(k_0, k_1, \ldots, k_n)\big|\gamma_{k_j}^{(j)}\big|^{p_j} \\
&\leqslant \Big(\sup_{k_j\in\mathbb{Z}} \sum_{(\ldots,k_{j-1},k_{j+1},\ldots)\in\mathbb{Z}^n} \kappa(k_0, k_1, \ldots, k_n)\Big)\Big(\sum_{k_j\in\mathbb{Z}} \big|\gamma_{k_j}^{(j)}\big|^{p_j}\Big) \lesssim \big\|\big(\gamma_k^{(j)}\big)_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z})}^{p_j},
\end{aligned}$$

dok je za $p_j = \infty$ upravo $\|f_j\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^{n+1})} = \big\|\big(\gamma_k^{(j)}\big)_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$. $\square$

Alternativni dokaz leme 2.7 u slučaju konačnih eksponenata p_j i $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$ se može provesti tako da zbog homogenosti normaliziramo $\big\|\big(\gamma_k^{(j)}\big)_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^{p_j}(\mathbb{Z})} = 1$, primijetimo očiglednu posljedicu ocjene (2.1),

$$\big|\gamma_{k_0}^{(0)}\big|\big|\gamma_{k_1}^{(1)}\big| \cdots \big|\gamma_{k_n}^{(n)}\big| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j}\big|\gamma_{k_j}^{(j)}\big|^{p_j},$$

pomnožimo je sa $\kappa(k_0, k_1, \ldots, k_n)$, prosumiramo po $k_0, k_1, \ldots, k_n$ te iskoristimo pretpostavku.

Konačno raspolažemo svim pripremnim rezultatima potrebnima za dokaz glavnog teorema ovog odjeljka. Prije njegovog iskaza fiksirajmo jednu hiperravninu $\mathcal{H}$ u $\mathbb{R}^{n+1}$ koja nije paralelna niti s jednom koordinatnom osi. To znači da je $\mathcal{H}$ oblika

$$\mathcal{H} = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \cdots + \tau_n t_n = \tau\}$$

za neke $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\tau \in \mathbb{R}$. Osim toga možemo pretpostaviti da $\mathcal{H}$ siječe unutrašnjost kocke $[0,1]^{n+1}$, jer bi inače tvrdnja teorema bila isprazna.

Teorem 2.8. *(Marcinkiewiczev*[3] *teorem interpolacije) Ako je multisublinearna forma restringiranog tipa u svim točkama nekog podskupa $\mathcal{P}$ hiperravnine $\mathcal{H}$, tada je ona jakog tipa u svim točkama $P = \big(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\big)$ koje se nalaze u unutrašnjosti (obzirom na $\mathcal{H}$) konveksne ljuske od $\mathcal{P}$ i zadovoljavaju $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j} \geqslant 1$. Implicitne konstante u* (2.8) *ovise samo o eksponentima i o implicitnim konstantama iz* (2.9)*.*

Napomenimo još jednom da se unutrašnjost uzima u relativnoj topologiji hiperavnine $\mathcal{H}$. Iz teorema će slijediti kako je dovoljno provjeriti da je forma restringiranog tipa u samo $n+1$ točaka ravnine $\mathcal{H}$ koje su u općenitom položaju (tj. nisu sve sadržane u manje-dimenzionalnoj ravnini) kako bismo mogli zaključiti da je ona jakog tipa za čitavi odgovarajući neprazni raspon eksponenata.

Dokaz. Najprije po lemi 2.5 znamo da je ta forma, nazovimo je Λ, restringiranog tipa u svim točkama konveksne ljuske od $\mathcal{P}$. Uzmimo dakle točku $P = \big(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\big)$ iz unutrašnjosti te konveksne ljuske koja još zadovoljava $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j} \geqslant 1$. Iz činjenice da je Λ restringiranog tipa na nekoj okolini od P slijedi $1 < p_j < \infty$; $j = 0, 1, \ldots, n$ te da postoji dovoljno mali $\varepsilon > 0$ takav da je Λ restringiranog tipa u svim točkama Q takvim da vektor $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ima barem n (od ukupno $n+1$) koordinata u skupu $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$. Preostala kooordinata je određena sa n spomenutih. Označimo sa $\mathcal{Q}$ kolekciju tih točaka $Q = \big(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \ldots, \frac{1}{q_n}\big)$; ona je konačna jer ima najviše $(n+1)2^n$ elemenata.

Krenimo od proizvoljnih funkcija $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ i rastavimo ih koristeći lemu 2.6(b):

$$f_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k} f_{j,k}, \ |f_{j,k}| \leqslant \mathbb{1}_{F_{j,k}}, \ \mu_j(F_{j,k}) \leqslant 2^k, \tag{2.13}$$

$$\beta_{j,k} \in [0, +\infty\rangle, \ \big\|(\beta_{j,k} 2^{k/p_j})_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^{p_j}} \lesssim \|f_j\|_{\mathrm{L}^{p_j}}. \tag{2.14}$$

Koristeći multisublinearnost od Λ i (2.13) možemo pisati

$$|\Lambda(f_0, f_1, \ldots, f_n)| \leqslant \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_n \in\mathbb{Z}} \beta_{0,k_0} \beta_{1,k_1} \cdots \beta_{n,k_n} |\Lambda(f_{0,k_0}, f_{1,k_1}, \ldots, f_{n,k_n})|. \tag{2.15}$$

[3] Józef Marcinkiewicz (1910–1940), poljski matematičar.

Prisjetimo se da se svaka kompleksna funkcija g može rastaviti

$$g = (g_1 - g_2) + i(g_3 - g_4),$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} g_1 &= (\operatorname{Re} g)_+ = \max\{\operatorname{Re} g, 0\}, \quad g_2 = (\operatorname{Re} g)_- = \max\{-\operatorname{Re} g, 0\}, \\ g_3 &= (\operatorname{Im} g)_+ = \max\{\operatorname{Im} g, 0\}, \quad g_4 = (\operatorname{Im} g)_- = \max\{-\operatorname{Im} g, 0\}. \end{aligned}$$

Primjenjujući taj rastav na funkcije f_{j,k_j} pa potom koristeći lemu 2.6(a) vidimo da iz restringirane ocjene tipa $Q = \big(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n}\big)$ slijedi

$$|\Lambda(f_{0,k_0}, f_{1,k_1}, \dots, f_{n,k_n})| \lesssim_Q \prod_{j=0}^{n} \mu_j(F_{j,k_j})^{1/q_j}, \tag{2.16}$$

uz povećanje implicitne konstante na desnoj strani od (2.9) najviše 4^{n+1} puta. Variranjem točke $Q \in \mathcal{Q}$ i kombiniranjem (2.13), (2.15), (2.16) zaključujemo

$$\begin{aligned} |\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_n)| &\lesssim_{\mathcal{Q}} \sum_{k_0,k_1,\dots,k_n \in \mathbb{Z}} \Big(\prod_{j=0}^{n} \beta_{j,k_j}\Big)\Big(\min_{Q\in\mathcal{Q}} \prod_{j=0}^{n} 2^{\frac{k_j}{q_j}}\Big) \\ &= \sum_{k_0,k_1,\dots,k_n \in \mathbb{Z}} \min_{Q\in\mathcal{Q}} 2^{\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})k_j} \prod_{j=0}^{n} \beta_{j,k_j} 2^{\frac{k_j}{p_j}}. \end{aligned}$$

Ako još provjerimo da

$$\kappa(k_0, k_1, \dots, k_n) := \min_{Q\in\mathcal{Q}} 2^{\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j})k_j}$$

zadovoljava uvjet (2.11), tada će iz leme 2.7 i nejednakosti za koeficijente (2.14) slijediti jaka ocjena tipa P za formu Λ.

Zbog simetrije je dovoljno pokazati

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n} \kappa(l, k_1, \dots, k_n) \lesssim_{P,\mathcal{Q},\varepsilon} 1 \tag{2.17}$$

za svaki $l \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem formule za hiperravninu $\mathcal{H}$ slijedi

$$\Big(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_0}\Big)l + \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\Big)k_j = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\Big)\Big(k_j - \frac{\tau_j}{\tau_0}l\Big).$$

Rastavit ćemo n-terostruku sumu na 2^n dijelova, ovisno o tome je li $k_j \leqslant \frac{\tau_j}{\tau_0}l$ ili $k_j > \frac{\tau_j}{\tau_0}l$ za svaki pojedini indeks j. Bez smanjenja općenitosti neka je prvi slučaj ispunjen za $j = 1, \dots, s$, a drugi za $j = s+1, \dots, n$. Odaberimo $Q \in \mathcal{Q}$ tako da je

$$\frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} = \begin{cases} \varepsilon & \text{za } j = 1, \dots, s, \\ -\varepsilon & \text{za } j = s+1, \dots, n. \end{cases}$$

Odgovarajući dio sume iz (2.17) je tada ocijenjen sa

$$\prod_{j=1}^{s} \sum_{\substack{k_j\in\mathbb{Z}\\ k_j\leqslant\frac{\tau_j}{\tau_0}l}} 2^{\varepsilon(k_j-\frac{\tau_j}{\tau_0}l)} \prod_{j=s+1}^{n} \sum_{\substack{k_j\in\mathbb{Z}\\ k_j>\frac{\tau_j}{\tau_0}l}} 2^{-\varepsilon(k_j-\frac{\tau_j}{\tau_0}l)}.$$

Na taj smo način dobili produkt od n geometrijskih redova; početni član svakog je najviše 1, a svima im je kvocijent $2^{-\varepsilon}$. Dakle, posljednji izraz je najviše

$$(1+2^{-\varepsilon}+2^{-2\varepsilon}+\cdots)^n = \frac{1}{(1-2^{-\varepsilon})^n} \lesssim_{n,\varepsilon} 1. \qquad \square$$

* * *

Bilo nam je praktično raditi s formama koje su definirane samo na jednostavnim funkcijama, dok u praksi često želimo dobiti ocjene koje vrijede za sve izmjerive funkcije. Želimo naglasiti da to nipošto ne smanjuje općenitost i primjenjivost interpolacijskog argumenta, jer konkretne forme obično zadovoljavaju barem nekakvu vrstu neprekidnosti koja omogućava aproksimaciju jednostavnim funkcijama. U narednoj napomeni ćemo dati tri takva argumenta, koji u raznim situacijama automatski pojačavaju zaključak teorema 2.8. U kasnijim poglavljima ćemo često takva rezoniranja podrazumijevati bez posebnog isticanja.

Napomena 2.9. (a) Ponekad o formi Λ na koju želimo primijeniti interpolaciju imamo više podataka, npr. znamo da je Λ definirana i ograničena na Kartezijevom produktu cijelih Lebesgueovih prostora $\prod_{j=0}^{n}\mathrm{L}^{q_j}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)$ za barem jedan izbor eksponenata $q_0,\ldots,q_n\in[1,\infty\rangle$ te da je čak multilinearna (a ne samo multisublinearna). Uspijemo li iskoristiti realnu interpolaciju, za neki raspon eksponenata $p_0,\ldots,p_n\in[1,\infty]$ ćemo zaključiti da je jaka ocjena (2.8) ispunjena, ali samo za funkcije $f_j\in\mathcal{S}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)$; $j=0,\ldots,n$. Obzirom da je Λ inicijalno bila definirana na većem prostoru, željeli bismo raspolagati istom ocjenom za sve funkcije $f_j\in\mathrm{L}^{q_j}$; $j=0,\ldots,n$. (Zapravo, zanimljive su jedino $f_j\in\mathrm{L}^{q_j}\cap\mathrm{L}^{p_j}$, jer je inače desna strana u (2.8) beskonačna.) To doista možemo, a za dokaz naprosto treba iskoristiti neprekidnost od Λ na $\prod_{j=0}^{n}\mathrm{L}^{q_j}$ te gustoću od $\mathcal{S}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)$ u $\mathrm{L}^{q_j}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)$.

(b) Isti zaključak kao u (a) vrijedi i za sublinearnu formu

$$\Lambda\colon \prod_{j=0}^{n}\mathcal{M}^{+}(\mathbb{X}_j,\mathcal{X}_j,\mu_j)\to[0,+\infty]$$

kod koje (umjesto ograničenosti) zahtijevamo svojevrsnu "monotonu neprekidnost" u smislu da za svaki $j\in\{0,1,\ldots,n\}$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty}\Lambda(f_0,\ldots,f_{j-1},f_{j,k},f_{j+1},\ldots,f_n) = \Lambda(f_0,\ldots,f_{j-1},f_j,f_{j+1},\ldots,f_n)$$

kad god je $(f_{j,k})_{k=1}^{\infty}$ rastući niz u $\mathcal{M}^+(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ koji po točkama konvergira prema f_j.

Kao primjer promotrimo formu (2.7) koja je upravo tog tipa ako se ograničimo na funkcije $f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$. Naime, ukoliko je $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ rastući niz u $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$ koji μ_j-g.s. konvergira prema f, tada zahvaljujući mogućoj zamjeni $\lim_{k\to\infty}$ sa $\sup_{k\in\mathbb{N}}$ i teoremu o monotonoj konvergenciji za fiksirani $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon,x+\varepsilon\rangle} f_k(y)dy &= \sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon,x+\varepsilon\rangle} f_k(y)dy \\ &= \sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon,x+\varepsilon\rangle} f(y)dy\end{aligned}$$

pa još jednom primjenom teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \Lambda(f_k, g) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \bigg(\sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon,x+\varepsilon\rangle} f_k(y)dy \bigg) g(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\langle x-\varepsilon,x+\varepsilon\rangle} f(y)dy \bigg) g(x)dx = \Lambda(f, g).\end{aligned}$$

Još lakše se provjeri isti uvjet u drugoj koordinati. Ako na kraju želimo neku ocjenu proširiti na kompleksne funkcije f i g, onda jedino trebamo primijetiti $\Lambda(f, g) \leqslant \Lambda(|f|, |g|)$.

Još jedan takav primjer su tzv. *pozitivne forme* oblika

$$\Lambda(f_0, \ldots, f_n) := \int_{\mathbb{X}_0\times\cdots\times\mathbb{X}_n} K(x_0, \ldots, x_n) f_0(x_0) \cdots f_n(x_n)\, d(\mu_0 \times \cdots \times \mu_n)(x_0, \ldots, x_n),$$

pri čemu je funkcija $K\colon \mathbb{X}_0\times\cdots\times\mathbb{X}_n \to [0, +\infty]$ izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{X}_0\times\cdots\times\mathcal{X}_n$ i $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Ovdje dodatno pretpostavljamo da su prostori mjera σ-konačni, kako bismo mogli koristiti Fubini[4]-Tonellijev[5] teorem o integriranju u odnosu na produktnu mjeru:

$$\Lambda(f_0, \ldots, f_n) = \int_{\mathbb{X}_0} \cdots \bigg(\int_{\mathbb{X}_n} K(x_0, \ldots, x_n) f_0(x_0) d\mu_0(x_0) \bigg) \cdots f_n(x_n) d\mu_n(x_n).$$

(c) U iskazu teorema 2.8 smo naglasili o čemu ovise implicitne konstante za ocjene jakog tipa. Posebno primijetimo da one ne zavise o samoj multisublinearnoj formi. U praksi je ponekad forma Λ dana kao limes $\lim_{r\to 0^+} \Lambda_r$ ili supremum $\sup_{r>0} |\Lambda_r|$ “jednostavnijih” formi Λ_r, koje zadovoljavaju restringirane ocjene s istim konstantama (neovisnima o r). Obično je svaka od formi Λ_r nekog od gornja dva tipa pa na nju možemo primijeniti i interpolaciju i aproksimacijske argumente. Puštanjem $r \to 0^+$ ili uzimanjem supremuma potom dobivamo ocjene i za formu Λ. Nekoliko primjera ovog načina zaključivanja ćemo imati u kasnijim poglavljima; usporedite i s napomenom nakon korolara 2.16.

[4]Guido Fubini (1879–1943), talijanski matematičar.
[5]Leonida Tonelli (1885–1946), talijanski matematičar.

Dajmo jedan jednostavni primjer na kojem ćemo efektno ilustrirati prednosti testiranja restringirane ograničenosti i korištenja realne interpolacije.

Primjer 2.10. *Hardyjev operator* je definiran formulom

$$(Tf)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt; \quad f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\langle 0,+\infty\rangle),\ x \in \langle 0,+\infty\rangle. \tag{2.18}$$

Dokažimo da je on ograničen na $\mathrm{L}^p(\langle 0,+\infty\rangle)$ za svaki $p \in \langle 1,+\infty]$, ali nije ograničen na $\mathrm{L}^1(\langle 0,+\infty\rangle)$.

Dokaz. Ograničenost na $\mathrm{L}^\infty(\langle 0,+\infty\rangle)$ je očigledna. Za eksponente $p \in \langle 1,+\infty\rangle$ zapravo trebamo pokazati da je bisublinearna forma

$$\Lambda(f,g) := \int_0^{+\infty}\int_0^x \frac{1}{x}|f(t)||g(x)|dtdx, \tag{2.19}$$

koja dominira $\int_{\langle 0,+\infty\rangle} |(Tf)(x)||g(x)|dx$, jakog tipa $(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})$, a zbog teorema 2.8 je ustvari dovoljno provjeriti da je Λ restringiranog tipa $(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})$ za svaki takav p.

Uzmimo proizvoljne izmjerive skupove $F,G \subseteq \langle 0,+\infty\rangle$ koji imaju konačnu i strogo pozitivnu Lebesgueovu mjeru. Zapišemo li

$$\Lambda(\mathbb{1}_F,\mathbb{1}_G) = \int_F \Big(\int_{G\cap[t,+\infty\rangle} \frac{dx}{x}\Big)dt$$

i primijetimo da je podintegralna funkcija $t \mapsto \int_{G\cap[t,+\infty\rangle} \frac{dx}{x}$ padajuća, možemo iskoristiti zadatak 2.6. Na taj način dobivamo

$$\Lambda(\mathbb{1}_F,\mathbb{1}_G) \leqslant \int_{\langle 0,|F|]} \Big(\int_{G\cap[t,+\infty\rangle} \frac{dx}{x}\Big)dt = \int_G \frac{\min\{|F|,x\}}{x}dx.$$

Sada pak uočimo da je funkcija $x \mapsto \frac{\min\{|F|,x\}}{x}$ također padajuća pa opet po zadatku 2.6 imamo

$$\Lambda(\mathbb{1}_F,\mathbb{1}_G) \leqslant \int_{\langle 0,|G|]} \frac{\min\{|F|,x\}}{x}dx,$$

a računanje integrala s desne strane daje

$$\begin{aligned} &\Lambda(\mathbb{1}_F,\mathbb{1}_G) \leqslant |G| && \text{za } |F| \geqslant |G|,\\ &\Lambda(\mathbb{1}_F,\mathbb{1}_G) \leqslant |F| + |F|\ln(|G|/|F|) && \text{za } |F| < |G|. \end{aligned}$$

Korištenjem poznate nejednakosti $\ln s \leqslant s-1$ za $s>0$ možemo ocijeniti

$$|F| + |F|\ln\tfrac{|G|}{|F|} \;=\; |F| + p'|F|\ln\tfrac{|G|^{1/p'}}{|F|^{1/p'}} \;\leqslant\; p'|F|^{1/p}|G|^{1/p'}$$

pa je doista $\Lambda(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) \lesssim_p |F|^{1/p}|G|^{1/p'}$ za svaki $p \in \langle 1, +\infty\rangle$.

Što se tiče neograničenosti na L^1, promotrimo funkcije $f_n(x) := \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$; $n \in \mathbb{N}$. Za $x \in [1, n]$ računamo

$$(Tf_n)(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{\ln x}{x},$$

tako da je

$$\|Tf_n\|_{\mathrm{L}^1} \geqslant \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

S druge strane imamo $\|f_n\|_{\mathrm{L}^1} = \ln n$, a nejednakost $\frac{1}{2}(\ln n)^2 \lesssim \ln n$ je lako opovrgnuti dijeljenjem s desnom stranom i puštanjem $n \to \infty$. □

Naravno, omeđenost Hardyjevog operatora nije težak rezultat pa su mogući i razni direktni dokazi; vidjeti zadatak 2.7.

Nešto općenitije i primjenjivije su sljedeće posljedice realne interpolacije. Najprije navedimo jednu karakterizaciju slabe L^p norme funkcije $f \geqslant 0$ u terminima integrala njenih produkata s karakterističnim funkcijama $\mathbb{1}_E$. U nekom smislu će ta karakterizacija biti analogon leme 2.3.

Lema 2.11. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljni prostor mjere. Za svaki eksponent $p \in \langle 1, \infty]$, svaku $\mathcal{X}$-izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ i svaki $E \in \mathcal{X}$ vrijedi*

$$\int_E f d\mu \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \mu(E)^{1/p'}. \tag{2.20}$$

Ako je prostor mjere semikonačan, tada štoviše imamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \sim_p \sup\Big\{\mu(E)^{-\frac{1}{p'}}\int_E f d\mu \,:\, E \in \mathcal{X},\ 0 < \mu(E) < +\infty\Big\}.$$

Usput primijetimo da se (2.20) može još "logičnije" zapisati

$$\int_{\mathbb{X}} f\mathbb{1}_E d\mu \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}} \|\mathbb{1}_E\|_{\mathrm{L}^{p'}},$$

čime donekle sliči na Hölderovu nejednakost. Osim toga pripomenimo da ocjena tipa (2.20) nije moguća za $p = 1$. To pokazuje primjer $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) = \big(\langle 0, +\infty\rangle, \mathcal{B}(\langle 0, +\infty\rangle), \lambda\big)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $E = \langle 0, 1]$, kod kojeg imamo $\|f\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}} = 1$, ali je lijeva strana beskonačna.

Dokaz. Najprije dokažimo ocjenu (2.20) za $1 < p < \infty$. Fiksirajmo skup $E \in \mathcal{X}$ takav da je $0 < \mu(E) < +\infty$. Primijetimo da je ta nejednakost homogena i u funkciji f i u mjeri μ. Naime, ako zamijenimo mjeru μ njenim višekratnikom $c\mu$ za neki $c > 0$, tada se $\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}$ poveća $c^{1/p}$ puta, dok se $\mu(E)^{1/p'}$ poveća $c^{1/p'}$ puta. To ukupno množi desnu stranu sa c, a i lijeva strana se poveća s istim faktorom. Homogenost u f

je trivijalna. Zato smijemo normalizirati $\|f\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}} = 1$ i $\mu(E) = 1$. Skup $\{f = +\infty\}$ ima mjeru 0, a skup $\{f = 0\}$ možemo ignorirati kod ocjenjivanja integrala $\int_E f d\mu$. Imamo

$$E \cap \{0 < f < +\infty\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big(E \cap \{2^k < f \leqslant 2^{k+1}\}\big),$$

a po definiciji slabe L^p norme je $\mu(\{f > 2^k\}) \leqslant 2^{-pk}$. Stoga možemo ocijeniti

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{E\cap\{2^k<f\leqslant 2^{k+1}\}} f d\mu \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k+1} \min\{\underbrace{\mu(E)}_{=1}, 2^{-pk}\} \\ &= 2\sum_{k=-1}^{-\infty} 2^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(p-1)k} \lesssim_p 1.\end{aligned}$$

Ako je pak $p = \infty$, onda je po definiciji $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty_{\text{slabi}}} = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$ pa je nejednakost trivijalna.

Za dokaz druge tvrdnje u slučaju $p < \infty$ je dovoljno još dokazati ocjenu

$$\sup_{\alpha\in\langle 0,+\infty\rangle} \alpha\, \mu(\{f > \alpha\})^{1/p} \leqslant \sup_{\substack{E\in\mathcal{X} \\ 0<\mu(E)<+\infty}} \mu(E)^{-1/p'} \int_E f d\mu. \tag{2.21}$$

Fiksirajmo $\alpha \in \langle 0, +\infty\rangle$ takav da je $\mu(\{f > \alpha\}) > 0$ i definirajmo

$$\beta := \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{X},\ E \subseteq \{f > \alpha\},\ \mu(E) < +\infty\}.$$

Po definiciji supremuma postoji niz $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ izmjerivih podskupova od $\{f > \alpha\}$ takvih da je $\mu(E_n) < +\infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \beta$.

Tvrdimo da je $\beta = \mu(\{f > \alpha\})$. To je svakako očigledno kada je $\mu(\{f > \alpha\}) < +\infty$ ili $\beta = +\infty$ pa jedino trebamo dobiti kontradikciju u slučaju $\mu(\{f > \alpha\}) = +\infty$, $\beta < +\infty$. Za uniju $E_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ zbog monotonosti mjere svakako mora vrijediti $\mu(E_\infty) \geqslant \beta$. S druge strane, za svaki $N \in \mathbb{N}$ je $\bigcup_{n=1}^{N} E_n$ izmjerivi podskup od $\{f > \alpha\}$ konačne mjere pa imamo

$$\mu(E_\infty) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big)}_{\leqslant\beta} \leqslant \beta.$$

Prema tome je $\mu(E_\infty) = \beta < +\infty$ i posljedično $\mu(\{f > \alpha\} \setminus E_\infty) = +\infty$. Zbog semikonačnosti mjere μ postoji skup $F \in \mathcal{X}$ takav da je $F \subseteq \{f > \alpha\} \setminus E_\infty$ i $0 < \mu(F) < +\infty$. Za skup $E_\infty \cup F$ vrijedi $E_\infty \cup F \in \mathcal{X}$, $E_\infty \cup F \subseteq \{f > \alpha\}$ i $\beta < \mu(E_\infty \cup F) < +\infty$, što je u kontradikciji s definicijom od β.

Za dovoljno velike n da je $0 < \mu(E_n) < +\infty$ naprosto iz $E_n \subseteq \{f > \alpha\}$ slijedi

$$\int_{E_n} f d\mu \geqslant \int_{E_n} \alpha d\mu = \alpha\mu(E_n),$$

što se može zapisati

$$\alpha\mu(E_n)^{1/p} \leqslant \mu(E_n)^{-1/p'}\int_{E_n} f d\mu \leqslant \sup_{\substack{E\in\mathcal{X}\\ 0<\mu(E)<+\infty}} \mu(E)^{-1/p'}\int_E f d\mu.$$

Puštanjem $n\to\infty$ lijeva strana konvergira prema $\alpha\beta^{1/p} = \alpha\,\mu(\{f>\alpha\})^{1/p}$ i to završava dokaz od (2.21).

U slučaju $p=\infty$ umjesto (2.21) trebamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \sup_{\substack{E\in\mathcal{X}\\ 0<\mu(E)<+\infty}} \mu(E)^{-1}\int_E f d\mu.$$

Označimo desnu stranu s γ i pretpostavimo $\gamma<+\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Fiksirajmo $\varepsilon>0$. Tvrdimo da je $\mu(\{f>\gamma+\varepsilon\})=0$. U protivnom bi zbog semi-konačnosti mjere μ postojao $E\in\mathcal{X}$ takav da je $E\subseteq\{f>\gamma+\varepsilon\}$ i $0<\mu(E)<+\infty$ pa bismo s jedne strane po definiciji od γ imali $\int_E f d\mu \leqslant \gamma\mu(E)$, a s druge strane bi bilo

$$\int_E f d\mu \geqslant \int_E (\gamma+\varepsilon) d\mu \geqslant (\gamma+\varepsilon)\mu(E) > \gamma\mu(E).$$

Zbog proizvoljnosti od $\varepsilon>0$ zaključujemo $\mu(\{f>\gamma\})=0$, tj. $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\leqslant\gamma$. □

Korolar 2.12. (Schurov[6] test slabog tipa) *Neka su* $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ *i* $(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)$ *dva* σ*-konačna prostora mjera i pretpostavimo da je* $K\colon\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{C}$ *funkcija izmjeriva u paru* $(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *koja zadovoljava*

$$\|K(x,\cdot)\|_{\mathrm{L}^{q'}_{\text{slabi}}(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)} \lesssim_q 1 \quad \textit{za } \mu\textit{-g.s. } x\in\mathbb{X},$$
$$\|K(\cdot,y)\|_{\mathrm{L}^{p'}_{\text{slabi}}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \lesssim_p 1 \quad \textit{za } \nu\textit{-g.s. } y\in\mathbb{Y},$$

pri čemu su p,q *eksponenti takvi da je* $1<p<\infty$, $1<q<\infty$. *Tada je formulom*

$$\Lambda(f,g) := \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} K(x,y)f(x)g(y)d(\mu\times\nu)(x,y)$$

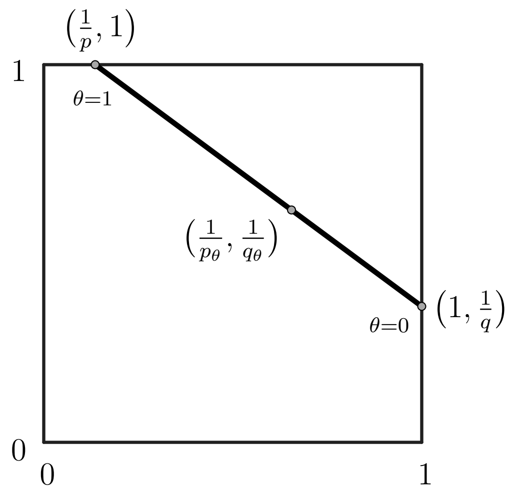
dobro definirana bilinearna forma na $\mathrm{L}^{p_\theta}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)\times\mathrm{L}^{q_\theta}(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)$ *za koju vrijedi*

$$|\Lambda(f,g)| \lesssim_{p,q,\theta} \|f\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}\|g\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)}$$

za svaki $\theta\in\langle 0,1\rangle$ *i eksponente* p_θ,q_θ *definirane sa* $p_\theta=\frac{p}{p-(p-1)\theta}$, $q_\theta=\frac{q}{1+(q-1)\theta}$, *tj. ekvivalentno određene sa*

$$1<p_\theta,q_\theta<\infty, \quad \frac{1}{q'p_\theta}+\frac{1}{p'q_\theta}=1-\frac{1}{pq}.$$

[6] Issai Schur (1875–1941), njemački matematičar.



Slika 2.1: Raspon eksponenata iz korolara 2.12.

Ovdje nam $K(x,\cdot)$ označava funkciju dobivenu fiksiranjem prve varijable, tj. funkciju $y \mapsto K(x,y)$, te slično tumačimo $K(\cdot,y)$.

Dokaz. Ako označimo $p_0 = 1$, $p_1 = p$, $q_0 = q$, $q_1 = 1$, tada za svaki $0 < \theta < 1$ imamo

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Kao u napomeni 2.9 promatramo bisublinearnu formu

$$\widetilde{\Lambda}(f,g) := \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |K(x,y)||f(x)||g(y)|d(\mu\times\nu)(x,y).$$

Zbog teorema 2.8 je jedino potrebno provjeriti da je $\widetilde{\Lambda}$ restringiranog tipa $(1,\frac{1}{q})$ i $(\frac{1}{p},1)$. Naime, ovdje je hiperravnina $\mathcal{H}$ zapravo pravac koji prolazi tim dvjema točkama, prikazan na slici 2.1.

Uzmimo skupove $F \in \mathcal{X}$ i $G \in \mathcal{Y}$ takve da je $\mu(F) < +\infty$, $\nu(G) < +\infty$. Korištenjem nejednakosti (2.20) za funkciju $|K(x,\cdot)|$ i prve pretpostavke na K dobivamo

$$\int_{\mathbb{Y}} |K(x,y)|\, \mathbb{1}_G(y) d\nu(y) \leqslant \|K(x,\cdot)\|_{\mathrm{L}^{q'}_{\mathrm{slabi}}} \nu(G)^{1/q} \lesssim_q \nu(G)^{1/q}$$

za μ-g.s. $x \in \mathbb{X}$, a množenje s $\mathbb{1}_F(x)$ i integriranje po x zajedno s Fubini-Tonellijevim teoremom daju

$$\widetilde{\Lambda}(\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G) = \int_{\mathbb{X}} \Big(\int_{\mathbb{Y}} |K(x,y)|\, \mathbb{1}_G(y) d\nu(y) \Big) \mathbb{1}_F(x) d\mu(x) \lesssim_q \mu(F)\nu(G)^{1/q}.$$

To upravo znači da je $\widetilde{\Lambda}$ restringiranog tipa $(1,\frac{1}{q})$. Analogno se korištenjem druge pretpostavke na K pokazuje da je $\widetilde{\Lambda}$ i restringiranog tipa $(\frac{1}{p},1)$. $\square$

Ponekad želimo interpolirati slabe L^p ocjene za sami operator i to nam opet omogućuje kombinacija teorema 2.8 i leme 2.11. Formulirajmo jedan takav rezultat koji je varijanta interpolacijskih teorema iz klasičnih udžbenika [SW71] i [Fol99]. Kažemo da je operator T *sublinearan* ako za svaki skalar α i za svake funkcije iz domene f i g vrijedi

$$|T(\alpha f)| = |\alpha||Tf| \quad \text{i} \quad |T(f+g)| \leqslant |Tf| + |Tg|.$$

Korolar 2.13. (Marcinkiewiczev teorem interpolacije za sublinearni operator) *Neka su* $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *i* $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ *prostori mjera i neka su* $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ *eksponenti takvi da je* $p_0 \leqslant q_0$, $p_1 \leqslant q_1$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. *Neka je* $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *sublinearni operator takav da vrijedi*

$$\|T\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{q_0}_{\mathrm{slabi}}} \lesssim_{p_0,q_0} \|\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{p_0}} \quad i \quad \|T\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{q_1}_{\mathrm{slabi}}} \lesssim_{p_1,q_1} \|\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{p_1}}$$

za svaki skup $F \in \mathcal{Y}$ *konačne mjere* ν. *Tada* T *zadovoljava i ocjenu*

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}} \lesssim_{p_0,p_1,q_0,q_1,\theta} \|f\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}}$$

za svaku $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$, *svaki* $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ *i eksponente* p_θ, q_θ *određene sa* $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Dokaz. U slučaju $\min\{q_0, q_1\} > 1$ dokaz je direktna posljedica prethodnih razmatranja. Naime, radi leme 2.11 i pretpostavki na T imamo

$$\int_{\mathbb{X}} |T\mathbb{1}_F|\mathbb{1}_G d\mu \lesssim_{q_i} \|T\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{q_i}_{\mathrm{slabi}}} \mu(G)^{1/q_i'} \lesssim_{p_i,q_i} \nu(F)^{1/p_i}\mu(G)^{1/q_i'}; \quad i = 0,1$$

pa je pripadna bisublinearna forma

$$\Lambda(f,g) := \int_{\mathbb{X}} |Tf||g| d\mu$$

restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0'})$ i $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1'})$. Primijetimo

$$\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{q_\theta'} = 1 + (1-\theta)\underbrace{\Big(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}\Big)}_{\geqslant 0} + \theta\underbrace{\Big(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\Big)}_{\geqslant 0} \geqslant 1.$$

Iz teorema 2.8 znamo da je Λ jakog tipa $(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta'})$ za sve $\theta \in \langle 0, 1\rangle$, a lema 2.3 tada daje traženu ocjenu za T.

Pretpostavimo sada da je recimo $q_0 = 1$, što znači da je $1 < q_1 \leqslant \infty$. Dovoljno nam je pokazati da za svaki $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ i svaki $F \in \mathcal{Y}$ konačne mjere vrijedi

$$\|T\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}_{\mathrm{slabi}}} \lesssim_{p_0,p_1,q_1} \|\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}},$$

tj.

$$\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_\theta} \lesssim_{p_0,p_1,q_1} \alpha^{-1}\nu(F)^{1/p_\theta} \quad \text{za } \alpha > 0. \tag{2.22}$$

Nakon toga ćemo moći primijeniti interpolaciju kao u prethodnom slučaju, ali na točke $(\frac{1}{p_\delta}, \frac{1}{q'_\delta})$ i $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q'_1})$, pri čemu je $0 < \delta < 1$ po volji blizu nuli.

Ako je $q_1 < \infty$, tada za dokaz od (2.22) naprosto iskoristimo pretpostavke na T:

$$\begin{aligned} &\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_\theta} = \big(\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_0}\big)^{1-\theta}\big(\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_1}\big)^{\theta} \\ &\lesssim_{p_0,p_1,q_1} \big(\alpha^{-1}\nu(F)^{1/p_0}\big)^{1-\theta}\big(\alpha^{-1}\nu(F)^{1/p_1}\big)^{\theta} = \alpha^{-1}\nu(F)^{1/p_\theta}. \end{aligned}$$

Ako je pak $q_1 = \infty$, tada je (2.22) netrivijalno samo za $\alpha < \|T\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^\infty}$, kada imamo:

$$\begin{aligned} &\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_\theta} = \big(\mu(\{|T\mathbb{1}_F| > \alpha\})^{1/q_0}\big)^{1-\theta} \lesssim_{p_0} \big(\alpha^{-1}\nu(F)^{1/p_0}\big)^{1-\theta} \\ &= \alpha^{-1}\nu(F)^{(1-\theta)/p_0}\alpha^{\theta} \leqslant \alpha^{-1}\nu(F)^{(1-\theta)/p_0}\|T\mathbb{1}_F\|_{\mathrm{L}^\infty}^{\theta} \lesssim_{p_1} \alpha^{-1}\nu(F)^{(1-\theta)/p_0}\nu(F)^{\theta/p_1}. \quad \square \end{aligned}$$

Napomena 2.14. Slično kao u napomeni 2.9 istaknimo da, ako za neke $p, q \in [1, \infty\rangle$ zapravo imamo linearni operator $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathrm{L}^q_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ koji zadovoljava slabu ocjenu

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^q_{\mathrm{slabi}}} \lesssim_{p,q} \|f\|_{\mathrm{L}^p}; \quad \text{za } f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \tag{2.23}$$

te ako interpolacijom kao u korolaru 2.13 zaključimo da još vrijedi

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}} \lesssim_{p_\theta,q_\theta} \|f\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}}; \quad \text{za } f \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu), \tag{2.24}$$

tada se posljednja ocjena automatski proširuje na sve $f \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^{p_\theta}$. Naime, za uzmemo li niz $(\varphi_k)_{k=1}^\infty$ funkcija iz $\mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ koji ν-g.s. konvergira prema nekoj $g \in \mathrm{L}^p \cap \mathrm{L}^{p_\theta}$ i zadovoljava $|\varphi_k| \leqslant |g|$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada po teoremu o dominiranoj konvergenciji imamo $\varphi_k \longrightarrow g$ u normama od L^p i L^{p_θ}. Iz (2.24) slijedi da je niz $(T\varphi_k)_{k=1}^\infty$ Cauchyjev u prostoru L^{q_θ} pa onda i konvergira prema nekoj funkciji $h \in \mathrm{L}^{q_\theta}$. Zbog (1.14) ta ista kongvergencija mora vrijediti i po mjeri, tj.

$$(\forall \alpha > 0)\Big(\lim_{k\to\infty} \mu\big(\big\{|T\varphi_k - h| > \alpha\big\}\big) = 0\Big).$$

S druge strane, radi ocjene (2.23) imamo

$$(\forall \alpha > 0)\Big(\lim_{k\to\infty} \mu\big(\big\{|T\varphi_k - Tg| > \alpha\big\}\big) = 0\Big).$$

Odavde lako slijedi $Tg = h$ μ-g.s. pa je

$$\|Tg\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}} = \|h\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}} = \lim_{k\to\infty} \|T\varphi_k\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}} \lesssim_{p_\theta,q_\theta} \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}} = \|g\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}}.$$

* * *

U dokazu korolara 2.13 vidi se jedan mali nedostatak naše interpolacijske metode. Eksponenti q_0 i q_1 su morali biti strogo veći od 1 kako bismo mogli primijeniti lemu 2.11, a u ekstremnom slučaju $\min\{q_0, q_1\} = 1$ smo se morali snaći i "pomaknuti" rubne točke interpolacije malo prema unutrašnjosti kvadrata $[0,1]^2$. Primjer Hardyjevog operatora pokazuje da je to doista bilo nužno. Kasnije ćemo vidjeti da on slabo L^1 ograničen, ali već sada nam je jasno da pripadna forma (2.19) nije restringiranog tipa $(1,0)$. Naime,

$$\Lambda(\mathbb{1}_{\langle 0,1]}, \mathbb{1}_{\langle 1,n]}) = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

ne može biti dominirano sa

$$\big|\langle 0,1]\big|^1 \big|\langle 1,n]\big|^0 = 1.$$

Iz toga možemo zaključiti kako teorem 2.8 odlično funkcionira kada interpoliramo ocjene za eksponente u otvorenom intervalu $\langle 1,\infty\rangle$, ali nije uvijek lako primjenjiv kada nam pretpostavke garantiraju npr. samo slabe L^1 ocjene. Pokazat ćemo zato još jedan trik kojim se može nadomjestiti spomenuti nedostatak, tj. lema 2.11 za eksponent $p = 1$.

Lema 2.15. *Neka je $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljni prostor mjere. Za svaku $\mathcal{X}$-izmjerivu funkciju $f\colon \mathbb{X} \to [0,+\infty]$ i svaki $E \in \mathcal{X}$ takav da je $\mu(E) < +\infty$ postoji skup $\widetilde{E} \in \mathcal{X}$ sa svojstvima $\widetilde{E} \subseteq E$, $\mu(\widetilde{E}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(E)$ i*

$$\int_{\widetilde{E}} f d\mu \leqslant 2\|f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}}.$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti $0 < \mu(E) < +\infty$ i $0 < \|f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}} < +\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Označimo $\alpha := 2\mu(E)^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}}$ i stavimo $\widetilde{E} := E \setminus \{f > \alpha\}$. Po definiciji slabe L^1 norme je

$$\mu(\{f > \alpha\}) \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}} = \tfrac{1}{2}\mu(E)$$

pa zbilja vrijedi $\mu(\widetilde{E}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(E)$. Konačno, zbog $\widetilde{E} \subseteq \{f \leqslant \alpha\}$ imamo

$$\int_{\widetilde{E}} f d\mu \leqslant \alpha\mu(\widetilde{E}) \leqslant \alpha\mu(E) = 2\|f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}}. \qquad \square$$

Posljednja lema je gotovo trivijalna, ali ipak ima zanimljive posljedice. Neka su $(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0,1,\ldots,n$ neki σ-konačni prostori mjera i pretpostavimo da je $K\colon \prod_{j=0}^n \mathbb{X}_j \to \mathbb{C}$ ograničena $\big(\prod_{j=0}^n \mathcal{X}_j\big)$-izmjeriva funkcija koja iščezava izvan Kartezijevog produkta skupova konačnih mjera. Tada su dobro definirani $(n+1)$-linearna forma

$$\Lambda\colon \prod_{j=0}^n \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \to \mathbb{C},$$

$$\Lambda(f_0, f_1, \ldots, f_n) := \int_{\prod_{j=0}^n \mathbb{X}_j} K(x_0, x_1, \ldots, x_n) \prod_{j=0}^n f_j(x_j) \prod_{j=0}^n d\mu_j(x_j)$$

i pripadni n-linearni operatori $T_0, T_1, \ldots, T_n$ takvi da vrijedi

$$\Lambda(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \int_{\mathbb{X}_j} T_j(f_0, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots, f_n)\, f_j \, d\mu_j; \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Kažemo da su operatori $T_0, T_1, \ldots, T_n$ međusobno adjungirani.

Korolar 2.16. *Ako operatori $T_0, T_1, \ldots, T_n$ zadovoljavaju ocjene*

$$\big\| T_j\big(\mathbb{1}_{E_0}, \ldots, \mathbb{1}_{E_{j-1}}, \mathbb{1}_{E_{j+1}}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)} \lesssim \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\neq j}} \mu_k(E_k)^{1/n} \tag{2.25}$$

za $j = 0, 1, \ldots, n$ i za svake skupove konačnih mjera $E_0, E_1, \ldots, E_n$, tada vrijedi

$$|\Lambda(f_0, f_1, \ldots, f_n)| \lesssim_{p_0,\ldots,p_n} \prod_{j=0}^{n} \|f_j\|_{\mathrm{L}^{p_j}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)}$$

za svake eksponente $p_0, \ldots, p_n \in \langle n, \infty\rangle$, $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j} = 1$ i svake funkcije $f \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \ldots, n$.

Zahtjevi na K su samo tehničke prirode i u iskazu korolara se nigdje eksplicitno ne spominje $\|K\|_{\mathrm{L}^\infty}$ ili mjera od $\{K \neq 0\}$. U praksi se operatorima s ovakvim jezgrama zapravo samo aproksimiraju zanimljiviji operatori, tako da konstante ne smiju kvantitativno ovisiti o dodatnim pretpostavkama na K. Dualizacijom jake ocjene za Λ se naravno odmah dobivaju i odgovarajuće L^p ocjene za $T_0, T_1, \ldots, T_n$.

Dokaz. Zbog teorema 2.8 je dovoljno dokazati da je Λ restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \ldots, \frac{1}{p_n})$ za eksponente kao iz iskaza i to s implicitnom konstantom koja ovisi samo o eksponentima i o konstantama iz (2.25). Fiksirajmo eksponente i definirajmo

$$C := \sup\left\{ \frac{|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n})|}{\prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{1/p_j}} \;:\; E_j \in \mathcal{X}_j,\ 0<\mu_j(E_j)<+\infty;\ j = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Dakle, C je najbolja moguća konstanta za restringiranu ocjenu tipa $(\frac{1}{p_0}, \ldots, \frac{1}{p_n})$. Radi naše pretpostavke na K i $(n+1)$-linearnog analogona korolara 2.12 znamo da je C konačna. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i odaberimo skupove $E_0, \ldots, E_n$ tako da gornji razlomak bude veći od $C - \varepsilon$. Označimo neke moguće konstante u (2.25) sa B_j. Zapišimo

$$(\tfrac{1}{p_0}, \ldots, \tfrac{1}{p_n}) = \sum_{j=0}^{n} \theta_j (\underbrace{\ldots, \tfrac{1}{n}}_{j-1}, 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots}_{n-j+1})$$

za neke $\theta_0, \ldots, \theta_n > 0$ takve da je $\sum_{j=0}^{n} \theta_j = 1$. Kako je broj

$$\prod_{j=0}^{n} B_j^{\theta_j} \prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{1/p_j}$$

geometrijska sredina brojeva $B_j \prod_{k\neq j} \mu_k(E_k)^{1/n}$ s težinama $\theta_0,\ldots,\theta_n$, zaključujemo da je veći ili jednak od barem jednog od njih, bez smanjenja općenitosti od $B_0 \prod_{k=1}^{n} \mu_k(E_k)^{1/n}$.

Po lemi 2.15 postoji skup $\widetilde{E}_0 \in \mathcal{X}_0$ takav da je $\widetilde{E}_0 \subseteq E_0$, $\mu_0(\widetilde{E}_0) \geqslant \frac{1}{2}\mu_0(E_0)$ te

$$\begin{aligned}\big|\Lambda\big(\mathbb{1}_{\widetilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big| &\leqslant \int_{\mathbb{X}_0} \big|T_0\big(\mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big| \mathbb{1}_{\widetilde{E}_0} d\mu_0 \\ &\leqslant 2\big|T_0\big(\mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}} \leqslant 2B_0 \prod_{k=1}^{n} \mu_k(E_k)^{1/n} \leqslant 2 \prod_{j=0}^{n} B_j^{\theta_j} \prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{1/p_j}.\end{aligned}$$

S druge pak strane, po definiciji od C imamo

$$\big|\Lambda\big(\mathbb{1}_{E_0\setminus\widetilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big| \leqslant C\mu_0(E_0 \setminus \widetilde{E}_0)^{1/p_0} \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_j)^{1/p_j} \leqslant C2^{-1/p_0} \prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{1/p_j}.$$

Konačno, zbog multisublinearnosti od $|\Lambda|$ imamo

$$|\Lambda(\mathbb{1}_{E_0}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n})| \leqslant \big|\Lambda\big(\mathbb{1}_{\widetilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big| + \big|\Lambda\big(\mathbb{1}_{E_0\setminus\widetilde{E}_0}, \mathbb{1}_{E_1}, \ldots, \mathbb{1}_{E_n}\big)\big|,$$

što nakon dijeljenja s $\prod_{j=0}^{n} \mu_j(E_j)^{1/p_j}$ možemo zapisati

$$C - \varepsilon \leqslant 2 \prod_{j=0}^{n} B_j^{\theta_j} + C2^{-1/p_0}$$

pa puštanjem $\varepsilon \to 0$ slijedi

$$C \leqslant 2\big(1 - 2^{-1/p_0}\big)^{-1} \prod_{j=0}^{n} B_j^{\theta_j} \lesssim_{p_0,\ldots,p_n} 1. \qquad \square$$

Posebni slučaj korolara 2.16 za $n = 1$ je *Wolffov*[7] *teorem interpolacije* [Wol82]. Razlog zašto taj rezultat nije bio odavno poznat leži u činjenici da isprva ne posjedujemo nikakve ocjene za eksponente u rasponu $\langle 1, \infty\rangle$ s kojima bismo mogli interpolirati dane rubne ocjene.

* * *

Zadatak 2.3. Neka je $1 < p < \infty$. Pokažite da je bilinearna forma

$$(f, g) \mapsto \bigg(\int_0^{+\infty} f(x)\frac{dx}{x^{1/p'}}\bigg)\bigg(\int_0^{+\infty} g(x)\frac{dx}{x^{1/p}}\bigg)$$

restringiranog, ali ne i jakog tipa $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$.

[7] Thomas Wolff (1954–2000), američki matematičar.

Zadatak 2.4. Uzmimo da su svi prostori mjere upravo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ i da su eksponenti $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \langle 0, \infty]$ takvi da je $p_j < 1$ za barem jedan indeks j. Dokažite da ne postoji multisublinearna forma Λ koja je restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n})$ i netrivijalna (tj. nije identički jednaka 0).

Zadatak 2.5. Dokažite da se svaka točka iz d-dimenzionalne jedinične kocke $[0,1]^d$ može prikazati kao konveksna kombinacija od najviše $d+1$ njenih vrhova. (Ovo je posebni slučaj Carathéodoryjevog[8] teorema iz konveksne geometrije.) Potom iskoristite tu tvrdnju kako biste dali drugi dokaz leme 2.6(a).

Zadatak 2.6. Neka je $\varphi\colon \langle 0, +\infty\rangle \to [0, +\infty]$ padajuća funkcija. Ako je $E \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$ izmjerivi skup takav da je $0 < |E| < +\infty$, dokažite da vrijedi

$$\int_E \varphi(x)dx \leqslant \int_{\langle 0,|E|]} \varphi(x)dx.$$

Zadatak 2.7.

(a) Dokažite pojačanu verziju *Hardyjeve nejednakosti* na ograničenom intervalu $[0, R]$:

$$\int_0^R \Big|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Big|^p dx \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^R |f(x)|^p \bigg(1 - \Big(\frac{x}{R}\Big)^{\frac{p-1}{p}}\bigg) dx$$

za izmjerivu funkciju $f\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{C}$, $p > 1$ i $R > 0$.

(b) Puštanjem $R \to +\infty$ zaključite da Hardyjev operator (2.18) za $1 < p < \infty$ zadovoljava

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p(\langle 0,+\infty\rangle)} \leqslant \frac{p}{p-1} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\langle 0,+\infty\rangle)}$$

to potom dokažite da je konstanta $\frac{p}{p-1}$ najbolja moguća, tj. da je norma od T na $\mathrm{L}^p(\langle 0, +\infty\rangle)$ upravo jednaka $\frac{p}{p-1}$.

Zadatak 2.8. Dokažite da za $N \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_N \in \mathrm{L}^p_{\text{slabi}}$ na nekom semikonačnom prostoru mjere vrijedi

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_N\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}} \lesssim_p \|f_1\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}} + \|f_2\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}} + \cdots + \|f_N\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}}.$$

Uputa: Iskoristite drugu tvrdnju leme 2.11.

Napomena: Implicitna konstanta ovisi samo o eksponentu p, ali ne i o broju funkcija N. U tom smislu se kvazinorme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}}$; $p > 1$ praktično ponašaju kao norme. U zadatku 1.12 smo vidjeli da takva nejednakost ne može vrijediti za $p = 1$.

[8] Constantin Carathéodory (1873–1950), grčko-njemački matematičar.

Zadatak 2.9. *(Lorentzove[9] kvazinorme)* Neka je $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ prostor mjere. Za $p,q\in\langle 0,\infty\rangle$ definiramo *Lorentzovu kvazinormu* $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p,q}}$ formulom

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{p,q}} := \Big(\int_0^{+\infty} p\alpha^{q-1}\mu(\{|f|>\alpha\})^{q/p}d\alpha\Big)^{1/q}.$$

Primijetimo da je $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p,p}} = \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ radi formule (1.15), a također je razumno staviti $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p,\infty}} := \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}}$. *Lorentzov prostor* $\mathrm{L}^{p,q}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ definiramo kao skup svih μ-g.s. klasa funkcija za koje je $\|f\|_{\mathrm{L}^{p,q}}<+\infty$.

(a) Dokažite da je $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p,q}}$ doista kvazinorma na vektorskom prostoru $\mathrm{L}^{p,q}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$.

(b) Neka su $a,b,p,q\in\langle 0,\infty\rangle$ i promotrimo funkciju

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_{a,b}(t) := \frac{1}{t^a(\ln t)^b}\mathbb{1}_{[e,+\infty\rangle}(t).$$

Radi stjecanja intuicije pokažite da je $f_{a,b}\in\mathrm{L}^{p,q}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ ako i samo ako je $a>\frac{1}{p}$ ili $a=\frac{1}{p}$, $b>\frac{1}{q}$.

Napomena: Ovaj podzadatak ilustrira da je eksponent p na neki način "dominantan", dok eksponent q čini suptilnu razliku za prostore s istim p.

(c) Dokažite da dekompozicija (2.10) iz dokaza leme 2.6 ima još i svojstvo da koeficijenti β_k zadovoljavaju

$$\big\|\big(2^{k/p}\beta_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}\lesssim_{p,q}\|f\|_{\mathrm{L}^{p,q}}$$

za $0<p<\infty$ i $0<q\leqslant\infty$.

Napomena: Ova činjenica nam omogućava da teorem 2.8 proširimo i na Lorentzove prostore, ali takvo poopćenje nećemo trebati.

(d) Dokažite *Hölderovu nejednakost za Lorentzove kvazinorme*:

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^{p,q}}\lesssim_{p_1,p_2,q_1,q_2}\|f\|_{\mathrm{L}^{p_1,q_1}}\|g\|_{\mathrm{L}^{p_2,q_2}}$$

za eksponente $p,p_1,p_2\in\langle 0,\infty\rangle$, $q,q_1,q_2\in\langle 0,\infty]$ takve da je $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ i $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$.

Uputa: Koristite (c) dio ovog zadatka i zadatak 1.11(a).

Zadatak 2.10. Dokažite *Yanov teorem ekstrapolacije* [Yan51]: Neka su $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ i $(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)$ vjerojatnosni prostori i neka je $T\colon\mathcal{S}(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)\to\mathcal{M}(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ sublinearni operator takav da vrijedi

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}\lesssim\frac{1}{p-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)}$$

[9] George Lorentz (1910–2006), rusko-njemački matematičar.

za svaki $p \in \langle 1, 2]$. Dokažite da tada T zadovoljava i ocjenu

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}\log\mathrm{L}(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)},$$

pri čemu je $\|\cdot\|_{\mathrm{L}\log\mathrm{L}}$ posebni slučaj Birnbaum-Orliczove norme definiran sa

$$\|f\|_{\mathrm{L}\log\mathrm{L}} := \inf\Big\{a \in \langle 0, +\infty\rangle : \int_{\mathbb{Y}} \frac{|f|}{a} \ln\Big(e + \frac{|f|}{a}\Big) d\nu \leqslant 1\Big\}.$$

2.3. Kompleksna metoda interpolacije

Do kraja poglavlja ćemo promatrati isključivo multilinearne forme

$$\Lambda\colon \prod_{j=0}^{n} \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \to \mathbb{C}$$

za proizvoljne prostore mjera.

Teorem 2.17. *(Riesz[10]-Thorinov[11] teorem interpolacije) Ako je multilinearna forma* Λ *jakog tipa u svim točkama nekog skupa* $\mathcal{P} \subseteq [0,1]^{n+1}$*, tada je ona jakog tipa i u svim točkama njegove konveksne ljuske* $\operatorname{conv}\mathcal{P}$*. Nadalje, pripadne norme* $\|\Lambda\|_P$ *(definirane kao najmanja moguća konstanta na desnoj strani od* (2.8)*) su log-konveksna funkcija u varijabli* $P \in \operatorname{conv}\mathcal{P}$.

Primijetimo da teorem 2.17 ima često korištenu posljedicu:

$$(\forall\, P \in \mathcal{P})\big(\|\Lambda\|_P \leqslant C\big) \;\Rightarrow\; (\forall\, P \in \operatorname{conv}\mathcal{P})\big(\|\Lambda\|_P \leqslant C\big)$$

za bilo koju konstantu $C \geqslant 0$.

Dokaz. Ako za točke $P_0, P_1 \in [0,1]^{n+1}$ i $\theta \in [0,1]$ stavimo $P_\theta = (1-\theta)P_0 + \theta P_1$, trebamo dokazati $\|\Lambda\|_{P_\theta} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, uz pretpostavku da je $M_i := \|\Lambda\|_{P_i} < +\infty$ za $i \in \{1,2\}$. Smijemo pretpostaviti da $(n+1)$-torke P_0 i P_1 nemaju jednakih koordinata, jer inače funkcije na tim mjestima možemo fiksirati i interpolirati multilinearnu formu koja ovisi o preostalim funkcijama. Posljedica toga je $P_\theta \in \langle 0,1\rangle^{n+1}$ za $0 < \theta < 1$. Uz to neka su $M_0, M_1 > 0$, jer je u slučaju $\min\{M_0, M_1\} = 0$ riječ o nul-formi.

Fiksirajmo $\theta \in \langle 0,1\rangle$ te neka je $P_\theta = \Big(\frac{1}{p_0^{(\theta)}}, \ldots, \frac{1}{p_n^{(\theta)}}\Big)$ i $P_i = \Big(\frac{1}{p_0^{(i)}}, \ldots, \frac{1}{p_n^{(i)}}\Big)$ za $i \in \{1,2\}$. Uzmimo funkcije $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$; $j = 0, 1, \ldots, n$ i raspišimo ih kao

$$f_j = \sum_{k=1}^{M_j} \alpha_{j,k} \mathbb{1}_{E_{j,k}}$$

[10] Marcel Riesz (1886–1969), mađarsko-švedski matematičar.
[11] Olof Thorin (1912–2004), švedski matematičar.

za $M_j \in \mathbb{N}$, disjunktne skupove $E_{j,1}, \ldots, E_{j,M_j} \in \mathcal{X}_j$ i koeficijente $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,M_j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zahvaljujući homogenosti možemo ih normalizirati $\|f_j\|_{\mathrm{L}^{p_j^\theta}} = 1$; $j = 0, 1, \ldots, n$. Označimo

$$\tau_j(z) := \frac{1-z}{p_j^{(0)}} + \frac{z}{p_j^{(1)}}; \quad z \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \ldots, n,$$

potom

$$f_j^{(z)} := \sum_{k=1}^{M_j} |\alpha_{j,k}|^{\tau_j(z)/\tau_j(\theta)} \operatorname{sgn} \alpha_{j,k} \mathbb{1}_{E_{j,k}}; \quad z \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \ldots, n$$

te još

$$\Phi(z) := \frac{\Lambda\big(f_0^{(z)}, f_1^{(z)}, \ldots, f_n^{(z)}\big)}{M_0^{1-z} M_1^z}.$$

Zbog multilinearnosti od Λ imamo

$$\Phi(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} \sum_{k_0=1}^{M_0} \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{M_n} \Big(\prod_{j=0}^{n} |\alpha_{j,k}|^{\tau_j(z)/\tau_j(\theta)} \Big) \Big(\prod_{j=0}^{n} \operatorname{sgn} \alpha_{j,k} \Big) \Lambda(\mathbb{1}_{E_{0,k_0}}, \mathbb{1}_{E_{1,k_1}}, \ldots, \mathbb{1}_{E_{n,k_n}}),$$

što je očigledno cijela funkcija, tj. holomorfna funkcija na cijeloj kompleksnoj ravnini. Za $a \in \langle 0, +\infty \rangle$ i $w \in \mathbb{C}$ imamo $|a^w| = a^{\operatorname{Re} w}$ pa je

$$|\Phi(z)| \leqslant M_0^{\operatorname{Re} z - 1} M_1^{-\operatorname{Re} z} \sum_{k_0=1}^{M_0} \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{M_n} \Big(\prod_{j=0}^{n} |\alpha_{j,k}|^{\operatorname{Re} \tau_j(z)/\tau_j(\theta)} \Big) |\Lambda(\mathbb{1}_{E_{0,k_0}}, \mathbb{1}_{E_{1,k_1}}, \ldots, \mathbb{1}_{E_{n,k_n}})|,$$

iz čega se vidi da je Φ omeđena na pruzi $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$. Primijetimo da za svaki $\beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$\big|f_j^{(i\beta)}\big| = |f_j|^{\tau_j(0)/\tau_j(\theta)} = |f_j|^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(0)}}, \quad \big|f_j^{(1+i\beta)}\big| = |f_j|^{\tau_j(1)/\tau_j(\theta)} = |f_j|^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(1)}}$$

pa je po pretpostavci teorema

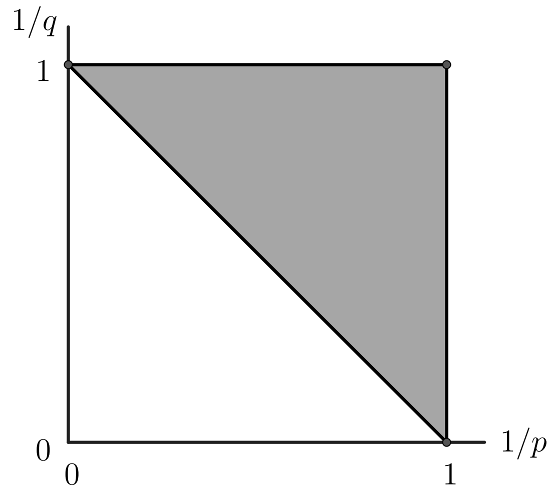
$$|\Phi(i\beta)| = M_0^{-1} \big|\Lambda\big(f_0^{(i\beta)}, \ldots, f_n^{(i\beta)}\big)\big| \leqslant \prod_{j=0}^{n} \big\|f_j^{(i\beta)}\big\|_{\mathrm{L}^{p_j^{(0)}}} = \prod_{j=0}^{n} \|f_j\|_{\mathrm{L}^{p_j^{(\theta)}}}^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(0)}} = 1,$$

$$|\Phi(1+i\beta)| = M_1^{-1} \big|\Lambda\big(f_0^{(1+i\beta)}, \ldots, f_n^{(1+i\beta)}\big)\big| \leqslant \prod_{j=0}^{n} \big\|f_j^{(1+i\beta)}\big\|_{\mathrm{L}^{p_j^{(1)}}} = \prod_{j=0}^{n} \|f_j\|_{\mathrm{L}^{p_j^{(\theta)}}}^{p_j^{(\theta)}/p_j^{(1)}} = 1.$$

Po principu maksimuma modula za prugu (vidjeti [Rud87] ili [Fol99]) zaključujemo da je $|\Phi(z)| \leqslant 1$ za svaki $z \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. Posebno uzimajući $z = \theta$ dobivamo

$$|\Lambda(f_0, f_1, \ldots, f_n)| = \big|\Lambda\big(f_0^{(\theta)}, f_1^{(\theta)}, \ldots, f_n^{(\theta)}\big)\big| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

a upravo to je trebalo dokazati. □



Slika 2.2: Raspon eksponenata iz primjera 2.18.

Primjer 2.18. Operacija konvolucije je za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definirana formulom

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pokažimo da vrijedi tzv. Youngova[12] nejednakost:

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}, \tag{2.26}$$

kad god eksponenti $p, q, r \in [1, \infty]$ zadovoljavaju $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Dokaz. Definiramo trilinearnu formu

$$\Lambda(f, g, h) := \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)h(x)dx$$

i za nju, zbog dualnosti iz odjeljka 2.1, želimo dokazati jake ocjene

$$|\Lambda(f, g, h)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q} \|h\|_{\mathrm{L}^{r'}} \tag{2.27}$$

u spomenutom rasponu eksponenata. Promatramo skup svih odgovarajućih točaka $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r'}\right)$, a na slici 2.2 smo skicirali njegovu projekciju na prve dvije kooordinate, tj. na $(1/p, 1/q)$-ravninu. Vidimo da je riječ o trokutu s vrhovima $(1, 1)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$ pa je radi teorema 2.17 dovoljno provjeriti (2.27) odnosno (2.26) u tri ekstremna slučaja.

[12] William Henry Young (1863–1942), engleski matematičar.

(a) $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{\mathrm{L}^1} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dy \Big) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx \Big) |g(y)|dy = \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|g\|_{\mathrm{L}^1}\end{aligned}$$

(b) $p = \infty$, $q = 1$, $r = \infty$

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} |g(y)|dy = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \|g\|_{\mathrm{L}^1}$$

(c) $p = 1$, $q = \infty$, $r = \infty$
Postupamo analogno kao u (b).

Time je dokaz završen. $\square$

Naravno da se sada konvolucija po neprekidnosti proširuje na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ za $p, q \in [1, \infty]$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$.

Primjer 2.19. Najklasičnija primjena teorema 2.17 je na L^p ocjene za *Fourierovu*[13] *transformaciju*, koja je inicijalno definirana za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ formulom

$$\hat{f} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx; \ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Ovdje $x \cdot \xi$ označava standardni skalarni produkt u $\mathbb{R}^d$. Ocjenjujući $\big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \big| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx$ odmah vidimo da vrijedi

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Poznata tvrdnja (čiji dokaz čitatelj može naći u [Fol99] ili [SW71]) je *Plancherelov*[14] *identitet*,

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Zato možemo primjeniti kompleksnu interpolaciju na linearni operator $f \mapsto \hat{f}$ (zapravo na bilinearnu formu dobivenu dualizacijom), iz čega će slijedi tzv. *Hausdorff*[15]*-Youngova nejednakost*,

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.28}$$

[13] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), francuski matematičar i fizičar.
[14] Michel Plancherel (1885–1967), švicarski matematičar.
[15] Felix Hausdorff (1868–1942), njemački matematičar.

za $p \in [1,2]$ i $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Vidimo da se za svaki $p \in [1,2]$ Fourierova transformacija $f \mapsto \hat{f}$ proširuje do ograničenog linearnog operatora na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, za kojeg zadržavamo istu oznaku.

Zanimljivo je napomenuti da konstanta 1 na desnoj strani od (2.28) nije optimalna. Za $1 < p < 2$ vrijedi *Babenko*[16]*–Becknerova*[17] *nejednakost* [Bec75],

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Big(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\Big)^{d/2} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.29}$$

u kojoj se jednakost postiže za Gaussove[18] funkcije, npr. $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, za koju nije teško izračunati $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Poznata je i činjenica da je Fourierova transformacija injektivna te da je njezin inverz $\hat{f} \mapsto f$ dan gotovo istom formulom. Preciznije, *inverzna Fourierova transformacija* se definira integralom

$$\check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi; \ x \in \mathbb{R}^d$$

za $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ te je sasvim jasno da $g \mapsto \check{g}$ zadržava sva navedena svojstva. Za svaku funkciju f takvu da su $f, \hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ vrijedi *Fourierova formula inverzije*,

$$(\hat{f})\check{} = (\check{f})\hat{} = f \quad \text{g.s.}, \tag{2.30}$$

a ista formula se po neprekidnosti proširuje npr. na $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Iz navedenoga slijedi i

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leqslant \Big(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\Big)^{d/2} \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^p}, \tag{2.31}$$

također za $1 < p < 2$.

Zanimljivo je napomenuti da nam jača ocjena (2.29) zapravo pojačava i Youngovu nejednakost za konvoluciju iz Primjera (2.18), barem u izvjesnom rasponu eksponenata. Naime, ako označimo $C_p := \big(\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\big)^{d/2}$, tada za $p, q \in \langle 1,2\rangle$, $r \in \langle 2,\infty\rangle$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ vrijedi

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant C_p C_q C_{r'} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{2.32}$$

Za dokaz od (2.32) trebamo poznatu formulu

$$(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}, \tag{2.33}$$

koja za $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ slijedi iz

$$\begin{aligned} (f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \Big) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi} dx \Big) g(y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

[16] Ivan Konstantinovič Babenko, ruski matematičar.
[17] William Beckner (1941), američki matematičar.
[18] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), njemački matematičar.

pri čemu su se integrali smjeli zamijeniti zahvaljujući Fubini-Tonellijevom teoremu i

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dxdy = \|f\|_{\mathrm{L}^1}\|g\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty.$$

Ako redom iskoristimo (2.31), (2.33), Hölderovu nejednakost (uz $\frac{1}{r'} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$) i (2.29), dobivamo

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^r} \leqslant C_{r'}\|(f * g)^{\check{}}\|_{\mathrm{L}^{r'}} \leqslant C_{r'}\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}}\|\hat{g}\|_{\mathrm{L}^{q'}} \leqslant C_{r'}C_pC_q\|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

Pripomenimo da je konstanta na desnoj strani od (2.32) optimalna te da ista nejednakost vrijedi i za sve $p, q, r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. To je također rezultat Becknera [Bec75].

Imat ćemo još primjena kompleksne interpolacije u kasnijim poglavljima.

* * *

Zadatak 2.11. Dokažite da za kompleksne $n \times n$ matrice $A = [a_{i,j}]$ i $B = [b_{i,j}]$ vrijedi nejednakost

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}b_{i,j}|^{2/3}\Big)^{3/2} \leqslant \bigg(\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\Big)^{1/2}\bigg)\bigg(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}|b_{i,j}|^2\Big)^{1/2}\bigg).$$

Zadatak 2.12. Pokažite da za $p \in \langle 1, 2\rangle$ i $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ imamo nejednakost

$$\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big|\sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{\frac{2\pi ijk}{n}}\Big|^{p'}\bigg)^{1/p'} \leqslant \bigg(\sum_{j=0}^{n-1}|z_j|^p\bigg)^{1/p}.$$

Zadatak 2.13. *(Schurov test jakog tipa)* Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ dva σ-konačna prostora mjera i pretpostavimo da je $K\colon \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ funkcija izmjeriva u paru $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ koja zadovoljava

$$\|K(x,\cdot)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)} \leqslant C \quad \text{za } \mu\text{-g.s. } x \in \mathbb{X},$$
$$\|K(\cdot,y)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \leqslant C \quad \text{za } \nu\text{-g.s. } y \in \mathbb{Y}$$

za neku konstantu $C \in [0, +\infty\rangle$. Tada je formulom

$$\Lambda(f, g) := \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} K(x, y)f(x)g(y)d(\mu \times \nu)(x, y)$$

dobro definirana bilinearna forma na $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \times \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ takva da vrijedi

$$|\Lambda(f, g)| \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)}$$

za svaki $p \in [1, \infty]$.

Zadatak 2.14. Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ vjerojatnosni prostori. *Gowersova pravokutna norma* funkcije $f \in \mathcal{M}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$ je definirana sa

$$\|f\|_{\square} := \Big(\int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Y}} f(x,y) \overline{f(x,y') f(x',y)} f(x',y') d\mu(x) d\mu(x') d\nu(y) d\nu(y') \Big)^{1/4}.$$

Dokažite da je doista riječ o normi i da vrijedi

$$\|f\|_{\square} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}, \mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \mu\times\nu)}.$$

Uputa: Ukoliko zadatak želite riješiti interpolacijom, korisno je definirati kvadrilinearnu formu

$$\Lambda(f_1, f_2, f_3, f_4) := \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{Y}} \int_{\mathbb{Y}} f_1(x,y) f_2(x,y') f_3(x',y) f_4(x',y') d\mu(x) d\mu(x') d\nu(y) d\nu(y').$$

Zadatak 2.15. *(Stein-Weissov teorem interpolacije)* Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-konačni prostori mjera te neka su $u_0, u_1 \colon \mathbb{X} \to \langle 0, +\infty\rangle$ i $v_0, v_1 \colon \mathbb{Y} \to \langle 0, +\infty\rangle$ izmjerive funkcije koje su integrabilne na svim skupovima konačnih mjera. Ako je $\Lambda \colon \mathcal{S}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) \times \mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathbb{C}$ bilinearna forma koja zadovoljava

$$|\Lambda(f,g)| \leqslant M_i \|f\|_{\mathrm{L}^{p_i}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, u_i d\mu)} \|g\|_{\mathrm{L}^{q_i}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, v_i d\nu)}; \quad i = 0, 1$$

za neke $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$, $M_0, M_1 \in \langle 0, +\infty\rangle$, tada za svaki $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi

$$|\Lambda(f,g)| \leqslant M_\theta \|f\|_{\mathrm{L}^{p_\theta}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, u_\theta d\mu)} \|g\|_{\mathrm{L}^{q_\theta}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, v_\theta d\nu)},$$

pri čemu je $u_\theta = u_0^{1-\theta} u_1^\theta,\ v_\theta = v_0^{1-\theta} v_1^\theta,\ M_\theta = M_0^{1-\theta} M_1^\theta,\ \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.
Napomena: Ovdje $u d\mu$ označava mjeru $E \mapsto \int_E u d\mu$.
Uputa: Pokušajte imitirati dokaz teorema 2.17.

Poglavlje 3

Pozitivni i apsolutno dominirani integralni operatori

U ovom poglavlju ćemo se baviti integralnim operatorima koje je moguće ograničiti u apsolutnom smislu. To znači da ne posjedujemo (ili da zanemarujemo) bilo kakve "oscilacije" ili "poništavanja" u definiciji operatora, već od njegove jezgre K odmah uzimamo apsolutnu vrijednost $|K|$. Za dokazivanje pozitivnih rezultata (tj. ograničenosti) koristit ćemo tehnike interpolacije (i njihove direktne posljedice) iz prethodnog poglavlja. Upućeni čitatelj može primijetiti da zasad namjerno izbjegavamo metode vremensko-frekvencijske analize i ostavljamo ih za suptilnije objekte u kasnijim poglavljima. S druge strane, već i kod tehnika apsolutne dominacije postoje neki neočekivano generalni principi; prezentirat ćemo jednu takvu prilično novu i iznimno primjenjivu ideju Christa[1] i Kiseleva[2] [CK01a], [CK01b]. Usporedit ćemo je i s klasičnim rezultatom Rademachera[3] i Menšova[4]. Za dokazivanje negativnih rezultata (tj. neograničenosti u nekom rasponu eksponenata) proučavat ćemo simetrije danog operatora, tj. simetrije željenih ocjena.

3.1. Dilatacijske simetrije i raspon L^p ocjena

Prva stvar koju je korisno uočiti kod dane integralne forme su vrste simetrija obzirom na koje je invarijantna. Ako je riječ o dilatacijskim simetrijama, tada one mogu znatno suziti raspon eksponenata za koje ima smisla pokušati dokazati L^p ocjene. Pokazat ćemo to na nekoliko primjera.

Primjer 3.1. Fiksirajmo parametre $d \in \mathbb{N}$ i $0 < s < d$. *Razlomljeni integral* ili *Rieszov*[5]

[1] Michael Christ, američki matematičar.
[2] Alexander Kiselev, rusko-američki matematičar.
[3] Hans Adolph Rademacher (1892–1969), njemačko-američki matematičar.
[4] Dmitrij Evgenevič Menšov (1892–1988), ruski matematičar.
[5] Nazvan je po Marcelu Rieszu.

potencijal je integralni operator I_s definiran na d-dimenzionalnim funkcijama formulom

$$(I_s f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}} dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Prirodno je zapitati se za koje sve eksponente $p, q \in [1, \infty]$ je taj operator ograničen sa $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$, tj. vrijedi ocjena

$$\|I_s f\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.1}$$

Svakako je dovoljno promatrati samo nenegativne funkcije f i g pa je tražena ocjena ekvivalentna s nejednakosti

$$\Lambda_I(f, g) \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{q'}} \tag{3.2}$$

za bisublinearnu formu

$$\Lambda_I(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)||g(x)|}{|x-y|^{d-s}} dx dy.$$

Za bilo koji $a > 0$ označimo sa D_a *operator dilatacije* koji na funkcije djeluje po formuli

$$(\mathrm{D}_a f)(x) := f(a^{-1}x); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ukoliko ocjena (3.2) vrijedi za svake izmjerive funkcije f i g, tada uvrštavanjem $\mathrm{D}_a f$ i $\mathrm{D}_a g$ na njihova mjesta zaključujemo da još i za svaki $a > 0$ mora biti

$$\Lambda_I(\mathrm{D}_a f, \mathrm{D}_a g) \lesssim_{d,p,q,s} \|\mathrm{D}_a f\|_{\mathrm{L}^p} \|\mathrm{D}_a g\|_{\mathrm{L}^{q'}}. \tag{3.3}$$

Proučit ćemo kako se "skaliraju" obje strane u (3.3). Jednostavnom zamjenom varijabli lijeva strana postaje

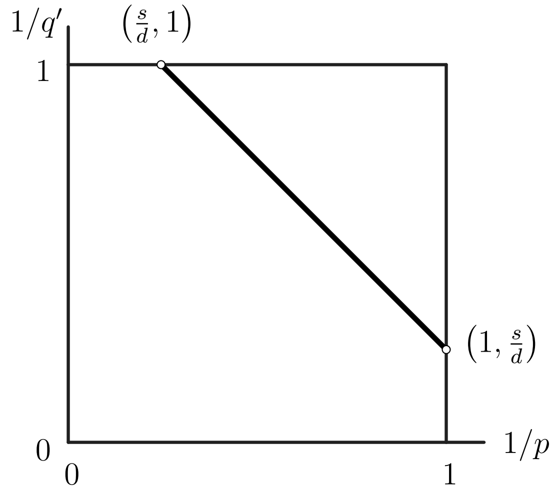
$$\begin{aligned}
\Lambda_I(\mathrm{D}_a f, \mathrm{D}_a g) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(a^{-1}y)||g(a^{-1}x)|}{|x-y|^{d-s}} dx dy = \big[\tilde{x} = a^{-1}x, \ \tilde{y} = a^{-1}y\big] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(\tilde{y})||g(\tilde{x})|}{a^{d-s}|\tilde{x}-\tilde{y}|^{d-s}} a^{2d} d\tilde{x} d\tilde{y} = a^{d+s} \Lambda_I(f, g).
\end{aligned}$$

Potom primijetimo da za svaki $p \in [1, \infty]$ vrijedi formula

$$\|\mathrm{D}_a f\|_{\mathrm{L}^p} = a^{d/p} \|f\|_{\mathrm{L}^p},$$

koja je očigledna za $p = \infty$, a za $p < \infty$ slijedi iz

$$\|\mathrm{D}_a f\|_{\mathrm{L}^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(a^{-1}x)|^p dx = [\tilde{x} = a^{-1}x] = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\tilde{x})|^p a^d d\tilde{x} = a^d \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p.$$



Slika 3.1: Raspon eksponenata iz primjera 3.1.

Zato je desna strana zapravo

$$\|\mathrm{D}_a f\|_{\mathrm{L}^p} \|\mathrm{D}_a g\|_{\mathrm{L}^{q'}} = a^{d/p+d/q'} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{q'}}.$$

Prema tome, dijeljenjem nejednakosti (3.3) sa a^{d+s} dobivamo

$$\Lambda_I(f,g) \lesssim_{d,p,q,s} a^{d(\frac{1}{p}+\frac{1}{q'})-d-s} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{q'}}. \tag{3.4}$$

Tvrdimo da zbog proizvoljnosti od $a > 0$ mora biti $d\big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}\big) - d - s = 0$.

- Ako bi bilo $d\big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}\big) - d - s < 0$, tada bismo za fiksirane f i g mogli u (3.4) pustiti limes kada $a \to +\infty$. Slijedilo bi da je forma Λ_I identički jednaka 0, što očigledno nije slučaj.
- Ako bi bilo $d\big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}\big) - d - s > 0$, tada bismo za fiksirane f i g mogli pustiti limes $a \to 0^+$ i opet dobiti da je Λ_I identički 0.

Iz ovoga zaključujemo da je ocjena (3.1) moguća jedino za $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1 + \frac{s}{d}$, tj.

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{s}{d}. \tag{3.5}$$

Provjerimo sada da jezgra $K(x,y) := |x-y|^{-d+s}$ zadovoljava

$$\|K(x,\cdot)\|_{\mathrm{L}^{d/(d-s)}_{\text{slabi}}} \lesssim_d 1 \quad \text{i} \quad \|K(\cdot,y)\|_{\mathrm{L}^{d/(d-s)}_{\text{slabi}}} \lesssim_d 1$$

za svake $x, y \in \mathbb{R}^d$. Dovoljno je provjeriti prvi uvjet jer je drugi analogan zbog simetrije;

$$\begin{aligned}\|K(x,\cdot)\|_{\mathrm{L}^{d/(d-s)}_{\text{slabi}}} & \sup_{\alpha>0} \alpha \,\big|\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y|^{-d+s} > \alpha\}\big|^{(d-s)/d} \\ &= \sup_{\alpha>0} \alpha \,\big|\mathrm{B}\big(x, \alpha^{-1/(d-s)}\big)\big|^{(d-s)/d} \\ &= |\mathrm{B}(\mathbf{0},1)| \sup_{\alpha>0} \underbrace{\alpha\big(\alpha^{-d/(d-s)}\big)^{(d-s)/d}}_{=1} \lesssim_d 1.\end{aligned}$$

Prema Schurovom testu slabog tipa (korolar 2.12) znamo da ocjena (3.2) vrijedi kad god je $1 < p, q' < \infty$ i $\frac{d-s}{d}\big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}\big) = 1 - \big(\frac{s}{d}\big)^2$, tj. nejednakost (3.1) je ispunjena za $p, q \in \langle 1, \infty\rangle$ koji zadovoljavaju (3.5).Čitatelju ostavljamo da u sklopu zadatka 3.1 sam nađe protuprimjere za ograničenost kada je $p = 1$ ili $q = \infty$, čime je potpuno okarakteriziran skup parova eksponenata p, q za koje vrijedi (3.1). Ta ocjena se naziva *Hardy-Littlewood-Soboljevljeva*[6] *nejednakost.*

Rieszov potencijal se prirodno pojavljuje npr. u elektrostatici. Potencijal točkastog izvora s nabojem q je dan formulom $V_q(r) = \frac{Cq}{r}$, pri čemu je r udaljenost od izvora do mjesta gdje ga mjerimo, a C je neka (za nas nebitna) konstanta. To je naprosto jedna od formulacija *Coulombovog*[7] *zakona.* Ako pak imamo ravnu ploču $S \subseteq \mathbb{R}^2$ nejednoliko nabijenu nabojem s površinskom gustoćom f, tada po tzv. principu superpozicije elektrostatski potencijal cijele ploče izmjeren u točki x iznosi upravo

$$\int_S V_{f(y)}(|x-y|)dy = \int_S \frac{Cf(y)}{|x-y|}dy = C\, I_1(f\mathbb{1}_S)(x).$$

Ukoliko je S (općeniti, npr. raznostranični) trokut, a f je konstantna (tj. trokut je homogeno nabijen), elementarno ali zanimljivo pitanje je: U kojoj karakterističnoj točki trokuta potencijal poprima najveću vrijednost? Pokazuje se da uvijek postoji jedinstvena točka maksimuma, ali da ona nije niti jedan od klasično poznatih centara trokuta, već se samo može opisati izvjesnim implicitnim relacijama; vidjeti [AK15].

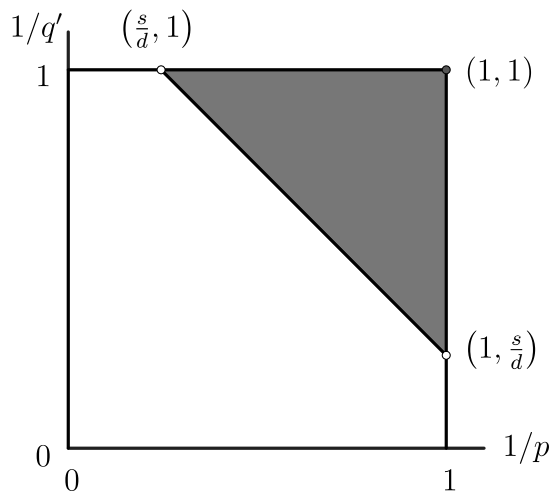
Primjer 3.2. Opet fiksirajmo $d \in \mathbb{N}$ i $0 < s < d$. *Nehomogeni razlomljeni integral* možemo definirati kao integralni operator

$$(J_s f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{(1+|x-y|)^{d-s}}dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Kao i ranije, želimo naći sve eksponente $p, q \in [1, \infty]$ za koje vrijedi

$$\|J_s f\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.6}$$

[6] Sergej Lavovič Soboljev (1908–1989), ruski matematičar.
[7] Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806), francuski fizičar.



Slika 3.2: Raspon eksponenata iz primjera 3.2.

Opet prvo tražimo nužne uvjete na p i q. Uvodimo bisublinearnu formu

$$\Lambda_J(f, g) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)||g(x)|}{(1 + |x - y|)^{d-s}} dx dy$$

te umjesto f i g uvrštavamo $\mathrm{D}_a f$ i $\mathrm{D}_a g$ za proizvoljni $a > 0$. Nažalost, ovog puta nemamo savršeno skaliranje, ali za $a \geqslant 1$ još uvijek možemo ocijeniti

$$\begin{aligned} \Lambda_J(\mathrm{D}_a f, \mathrm{D}_a g) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(a^{-1}y)||g(a^{-1}x)|}{(1 + |x - y|)^{d-s}} dx dy = \big[\tilde{x} = a^{-1}x,\ \tilde{y} = a^{-1}y\big] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(\tilde{y})||g(\tilde{x})|}{(1 + a|\tilde{x} - \tilde{y}|)^{d-s}} a^{2d} d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(\tilde{y})||g(\tilde{x})|}{(a + a|\tilde{x} - \tilde{y}|)^{d-s}} a^{2d} d\tilde{x} d\tilde{y} = a^{d+s} \Lambda_J(f, g), \end{aligned}$$

iz čega analogno slijedi

$$\Lambda_J(f, g) \lesssim_{d,p,q,s} a^{d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{q'}}.$$

Kako smo ovog puta ograničeni na $a \geqslant 1$, možemo jedino pustiti $a \to +\infty$, što nam daje $d(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'}) - d - s \geqslant 0$, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} \geqslant 1 + \frac{s}{d}$, odnosno

$$\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{q} + \frac{s}{d}. \tag{3.7}$$

S druge strane, pokazat ćemo da je (3.6) istinito za sve parove $(p, q) \in [1, \infty]^2$ takve da vrijedi (3.7), $(p, q) \neq (1, d/(d - s))$ i $(p, q) \neq (d/s, \infty)$. Primijetimo da vrijedi

$\Lambda_J(f,g) \leqslant \Lambda_I(f,g)$ pa smo zahvaljujući prethodnom primjeru odmah riješili rubni slučaj (3.5). Kada bi nas zanimala samo unutrašnost raspona (3.7), tada bismo naprosto interpolirali (3.5) s trivijalnom ocjenom tipa $(1,1)$ za Λ_J. Ipak, kako želimo pokriti i ostatak "ruba", postupamo malo drugačije i definiramo $h(x) := (1+|x|)^{-d+s}$, tako da je $J_s f = f * h$. Lako je vidjeti da $\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ vrijedi ako i samo ako je $r(d-s) > d$, tj. $\frac{1}{r} < 1 - \frac{s}{d}$. Pretpostavimo $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{s}{d}$ i uzmimo r baš takav da je

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < 1 - \frac{s}{d}.$$

Korištenjem Youngove nejednakosti za konvoluciju (primjer 2.18) dobivamo

$$\|J_s f\|_{\mathrm{L}^q} = \|f * h\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|h\|_{\mathrm{L}^r} \lesssim_{d,r,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Diskusiju za dvije izuzete točke opet ostavljamo kao zadatak 3.1.

Primjer 3.3. Definirajmo trisublinearnu formu

$$\Lambda(f,g,h) := \int_{\mathbb{R}^3} |f(x,y)g(y,z)h(z,x)|\,dxdydz.$$

i odredimo sve eksponente $p,q,r \in [1,\infty]$ za koje je ispunjena nejednakost

$$\Lambda(f,g,h) \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^2)}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^2)}.$$

Ovog puta forma Λ ima još "više simetrije" pa ćemo za $a,b>0$ definirati *neizotropne dilatacije* $\mathrm{D}_{a,b}$ formulom

$$(\mathrm{D}_{a,b}f)(x,y) := f(a^{-1}x, b^{-1}y); \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Za bilo koje parametre $a,b,c>0$ računamo:

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathrm{D}_{a,b}f, \mathrm{D}_{b,c}g, \mathrm{D}_{c,a}h) &= \int_{\mathbb{R}^3} |f(a^{-1}x, b^{-1}y)g(b^{-1}y, c^{-1}z)h(c^{-1}z, a^{-1}x)|\,dxdydz \\ &= \big[\tilde{x} = a^{-1}x,\ \tilde{y} = b^{-1}y,\ \tilde{z} = c^{-1}z\big] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |f(\tilde{x},\tilde{y})g(\tilde{y},\tilde{z})h(\tilde{z},\tilde{x})|\, abc\, d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} = abc\,\Lambda(f,g,h).\end{aligned}$$

Primjenom pretpostavljene ocjene za Λ na $\mathrm{D}_{a,b}f, \mathrm{D}_{b,c}g, \mathrm{D}_{c,a}h$ dobivamo

$$\Lambda(f,g,h) \lesssim_{p,q,r} a^{1/p+1/r-1} b^{1/p+1/q-1} c^{1/q+1/r-1} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^2)}\|h\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^2)}$$

pa zbog proizvoljnosti od a,b,c mora biti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Jedino rješenje tog sustava jednadžbi je $p = q = r = 2$.

S druge strane, vrijedi

$$\Lambda(f, g, h) \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}$$

i to je tzv. *Loomis*[8]*-Whitneyeva*[9] *nejednakost* [LW49] u tri dimenzije. Kako bismo je dokazali naprije primijenimo Hölderovu nejednakost u varijabli y,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)g(y, z)| dy \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)|^2 dy \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(y, z)|^2 dy \Big)^{1/2}, \tag{3.8}$$

a potom iskoristimo Hölderovu nejednakost u (x, z),

$$\begin{aligned} \Lambda(f, g, h) &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)g(y, z)| dy \Big)^2 dx dz \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |h(z, x)|^2 dx dz \Big)^{1/2} \\ &\overset{(3.8)}{\leqslant} \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Originalna primjena Loomis-Whitneyeve nejednakosti je bila sljedeća. Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^3$ tijelo u koordinatnom xyz prostoru s glatkim rubom $\operatorname{Bd} B$. Primijenimo gornju nejednakost na funkcije

$$f = \mathbb{1}_{B_{xy}}, \quad g = \mathbb{1}_{B_{yz}}, \quad h = \mathbb{1}_{B_{zx}},$$

pri čemu su B_{xy}, B_{yz}, B_{zx} ortogonalne projekcije od B na koordinatne ravnine xy, yz, zx. Kako za svaku točku $(x, y, z) \in B$ imamo $f(x, y) = g(y, z) = h(z, x) = 1$, dobili smo nejednakost

$$|B| \leqslant |B_{xy}|^{1/2} |B_{yz}|^{1/2} |B_{zx}|^{1/2}.$$

Valja pripaziti jer na lijevoj strani $|\cdot|$ označava volumen, a na desnoj površinu. Brojeve $|B_{xy}|$, $|B_{yz}|$, $|B_{zx}|$ možemo vrlo grubo ocijeniti s polovinom oplošja $|\operatorname{Bd} B|$, što nam daje tzv. *izoperimetrijsku nejednakost*

$$|B| \leqslant 2^{-3/2} |\operatorname{Bd} B|^{3/2},$$

ali s neoptimalnom konstantom. Može se pokazati da je najbolja konstanta na desnoj strani $\frac{1}{6\sqrt{\pi}}$ i postiže se samo kada je B kugla.

* * *

Zadatak 3.1. Protuprimjerom pokažite da operatori I_s i J_s iz primjera 3.1 i 3.2 nisu ograničeni niti sa $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{d/(d-s)}(\mathbb{R}^d)$ niti sa $\mathrm{L}^{d/s}(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

[8]Lynn Harold Loomis (1915–1994), američki matematičar.

[9]Hassler Whitney (1907–1989), američki matematičar.

Zadatak 3.2. Ako su $p,q \in \langle 1,\infty\rangle$ takvi da vrijedi (3.5), pokažite da zapravo imamo $\|I_s f\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} = \|J_s f\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}$.

Uputa: Jedna nejednakost je očigledna, a za drugu opet možete spretno iskoristiti dilatacijsku simetriju.

Zadatak 3.3. Dokažite *težinsku Hardy-Littlewood-Soboljevljevu nejednakost* u jednoj dimenziji:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^\alpha |f(x)||y|^\beta |g(y)|}{|x-y|^{1-s}} dxdy \lesssim_{\alpha,\beta,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})},$$

pri čemu su $1<p,q<\infty,\ 0<s<1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$-s \leqslant \alpha+\beta \leqslant 0, \quad \frac{1}{p} < \alpha+1, \quad \frac{1}{q} < \beta+1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \alpha+\beta+s+1.$$

Potom pokažite da ocjena ne može vrijediti ni za koje α,β,p,q,s takve da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \neq \alpha+\beta+s+1$.

Zadatak 3.4. Promotrimo sljedeću bilinearnu varijantu razlomljenog integrala (razmantranu u [Gra92]):

$$T(f,g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(x+t)\frac{dt}{|t|^{d-s}}; \quad x\in\mathbb{R}^d$$

za $d\in\mathbb{N}$ i $0<s<d$. Okarakterizirajte sve eksponente $p,q,r\in\langle 1,\infty\rangle$ za koje vrijedi ocjena $\|T(f,g)\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,r,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}$.

Uputa: Nakon što utvrdite i skicirate mogući raspon ocjena za pripadnu trilinealnu formu Λ, uočit ćete da je radi realne interpolacije i svojevrsne simetrije argumenata dovoljno dokazati nejednakosti restringiranog tipa $(\frac{1}{p},\frac{1}{q},0)$. U izrazu $\Lambda(\mathbb{1}_F,\mathbb{1}_G,\mathbb{1}_H)$ tada možete naprosto ocijeniti $\mathbb{1}_H$ odozgo sa 1, čime zapravo dobivate bilinearnu formu iz primjera 3.1.

Napomena: Činjenica da ovaj zadatak o bilinearnom integralnom operatoru nije ništa teži od primjera 3.1 se može zahvaliti pozitivnosti jezgre $\frac{1}{|t|^{d-s}}$. Kasnije ćemo vidjeti da kod graničnog singularnog slučaja p.v.$\frac{1}{t}$ trebamo drastično složenije tehnike.

3.2. Translacijske simetrije i raspon L^p ocjena

Mnogi važni operatori u analizi posjeduju neku vrstu simetrije u odnosu na translatiranje funkcija. Za bilo koji $c\in\mathbb{R}^d$ označimo s T_c *operator translacije*, definiran na funkcijama sa $\mathbb{R}^d$ u $\mathbb{C}$ kao

$$(\mathrm{T}_c f)(x) := f(x-c); \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Sljedeći općeniti rezultat sužava raspon mogućih L^p ocjena za operatore koji su *translacijski-invarijantni*, tj. komutiraju sa svim operatorima T_c; $c\in\mathbb{R}^d$. Takvi su naprimjer i linearni operatori iz primjera 3.1 i 3.2.

Propozicija 3.4. (Littlewoodov princip) *Neka su dani eksponenti* p, q *takvi da je* $1 \leqslant q < p < \infty$. *Ako je* $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ *ograničeni linearni operator koji komutira s translacijama, tj.* $T\mathrm{T}_c f = \mathrm{T}_c T f$ *za svaki* $c \in \mathbb{R}^d$ *i svaku* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, *tada* T *mora biti nul-operator, tj.* $Tf = \mathbf{0}$ *g.s. za svaku funkciju* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

Princip možemo slikovito izraziti (donekle nepreciznim) uzrečicama: "zanimljivi operatori samo podižu eksponente" ili "viši eksponenti su uvijek na lijevoj strani". Osnovna ideja dokaza je uzeti N kopija neke funkcije f i dovoljno ih "razmaknuti" da su im nosači "načelno disjunktni", tako da norma zbroja raste kao $N^{1/p}$. Tada isti argument zbog translacijske invarijantnosti radi i za Tf, kojoj norma zbroja translata raste "samo" kao $N^{1/q}$. Za rigorozni dokaz će nam trebati sljedeća pomoćna tvrdnja.

Lema 3.5. *Za* $r \in [1, \infty\rangle$ *i* $g, h \in \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$ *vrijedi*

$$\lim_{|c|\to+\infty} \|g + \mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r} = \big(\|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|h\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r}.$$

Dokaz leme 3.5. Tvrdnju leme treba interpretirati:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, R > 0)(\forall\, c \in \mathbb{R}^d,\ |c| > R)\ \Big(\Big|\|g + \mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r} - \big(\|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|h\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r}\Big| < \varepsilon\Big).$$

Lema je trivijalna kada g i h iščezavaju izvan nekog ograničenog skupa, jer ako je $|c|$ dovoljno veliko, tada g i $\mathrm{T}_c h$ imaju disjunktne nosače pa možemo računati:

$$\begin{aligned}\|g + \mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x) + (\mathrm{T}_c h)(x)\big|^r dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \big(|g(x)|^r + |(\mathrm{T}_c h)(x)|^r\big) dx = \|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|\mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r}^r = \|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|h\|_{\mathrm{L}^r}^r.\end{aligned}$$

Za općenite funkcije tvrdnju dokazujemo standardnim aproksimacijskim argumentom, poput onih iz poglavlja 1. Za dane $g, h \in \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$ i $\varepsilon > 0$ najprije zbog gustoće od $\mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$ možemo naći $\varphi, \psi \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$ takve da je $\|\varphi - g\|_{\mathrm{L}^r} < \varepsilon/4$ i $\|\psi - h\|_{\mathrm{L}^r} < \varepsilon/4$. Neka je $R > 0$ dovoljno velik da za svaki $c \in \mathbb{R}^d$ takav da je $|c| > R$ funkcije φ i $\mathrm{T}_c\psi$ imaju disjunktne nosače. Tada znamo da je

$$\|\varphi + \mathrm{T}_c\psi\|_{\mathrm{L}^r} = \big(\|\varphi\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|\psi\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r},$$

a možemo ocijeniti i

$$\Big|\|\varphi + \mathrm{T}_c\psi\|_{\mathrm{L}^r} - \|g + \mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r}\Big| \leqslant \|\varphi - g\|_{\mathrm{L}^r} + \|\mathrm{T}_c\psi - \mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r} < \varepsilon/2$$

te

$$\Big|\big(\|\varphi\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|\psi\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r} - \big(\|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|h\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r}\Big| \leqslant \big(\|\varphi - g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|\psi - h\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r} < \varepsilon/2,$$

što zajedno daje

$$\Big|\|g + \mathrm{T}_c h\|_{\mathrm{L}^r} - \big(\|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|h\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r}\Big| < \varepsilon. \qquad \square$$

Dokaz propozicije 3.4. Pretpostavimo da T nije nul-operator i neka je

$$C := \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} \in \langle 0, +\infty\rangle.$$

Fiksirajmo $0 < \varepsilon < C$. Po definiciji operatorske norme postoji funkcija $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ takva da je

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^q} > (C-\varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Očigledno je $\|f\|_{\mathrm{L}^p} > 0$ i $\|Tf\|_{\mathrm{L}^q} > 0$. Dvostrukom primjenom leme 3.5 i pretpostavke $T\mathrm{T}_c = \mathrm{T}_c T$ dobivamo

$$\begin{aligned}&\lim_{|c|\to+\infty} \|f + \mathrm{T}_c f\|_{\mathrm{L}^p} = 2^{1/p}\|f\|_{\mathrm{L}^p},\\ &\lim_{|c|\to+\infty} \|T(f + \mathrm{T}_c f)\|_{\mathrm{L}^q} = \lim_{|c|\to+\infty} \|Tf + \mathrm{T}_c Tf\|_{\mathrm{L}^q} = 2^{1/q}\|Tf\|_{\mathrm{L}^q}.\end{aligned}$$

Dakle, postoji $c \in \mathbb{R}^d$ takav da je

$$\|f + \mathrm{T}_c f\|_{\mathrm{L}^p} < (2^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^p} \quad \text{i} \quad \|T(f + \mathrm{T}_c f)\|_{\mathrm{L}^q} > (2^{1/q} - \varepsilon)\|Tf\|_{\mathrm{L}^q}.$$

S druge strane, po definiciji od C mora biti

$$\|T(f + \mathrm{T}_c f)\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C\|f + \mathrm{T}_c f\|_{\mathrm{L}^p}$$

pa kombiniranje navedenih nejednakosti i dijeljenje s $\|f\|_{\mathrm{L}^p}$ konačno daju

$$(C-\varepsilon)(2^{1/q} - \varepsilon) < C(2^{1/p} + \varepsilon).$$

Puštanjem $\varepsilon \to 0^+$ dobivamo kontradikciju s $q < p$. □

Alternativni dokaz propozicije 3.4. Možda je nešto sugestivnije pokušati doći do kontradikcije s ograničenošću od T bez razmatranja njegove norme. U tom slučaju uzmemo f takvu da Tf nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$ pa potom za $N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ višestrukom primjenom leme 3.5 dolazimo do "dovoljno razmaknutih" vektora $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{R}^d$ za koje vrijedi

$$\|f_N\|_{\mathrm{L}^p} < (N^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^p} \quad \text{i} \quad \|Tf_N\|_{\mathrm{L}^q} > (N^{1/q} - \varepsilon)\|Tf\|_{\mathrm{L}^q},$$

pri čemu smo stavili $f_N := \sum_{j=1}^{N} \mathrm{T}_{c_j} f$. Zbog ograničenosti od T imamo

$$(N^{1/q} - \varepsilon)\|Tf\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \|Tf_N\|_{\mathrm{L}^q} \lesssim_{d,p,q} \|f_N\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (N^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

pa još jedino trebamo pustiti ε da teži u 0 i podijeliti s $N^{1/q}$ te u

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^q} \lesssim_{d,p,q} N^{1/p-1/q}\|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

pustiti $N \to \infty$. □

Napomenimo da Littlewoodov princip ne vrijedi ako $\mathbb{R}^d$ zamijenimo d-dimenzionalnim torusom $\mathbb{T}^d$. Na njemu translacije shvaćamo putem definicije $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, a mjera je Lebesgueova putem identifikacije $\mathbb{T}^d \equiv [0,1\rangle^d$. Zbog leme 2.2(b) je identiteta ograničeni linearni operator sa $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^d)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^d)$ za svake eksponente $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. S druge strane, isti argument prolazi i u općenitijim strukturama od $\mathbb{R}^d$ kod kojih imamo invarijantnost mjere na translacije i "dovoljno mjesta" da možemo "razmaknuti" funkcije.

* * *

Fourierova transformacija $\mathcal{F}\colon f \mapsto \hat{f}$ ne komutira s translacijama, ali zato posjeduje mnoge druge simetrije. *Operator modulacije* za $b \in \mathbb{R}^d$ je dan sa

$$(\mathrm{M}_b f)(x) := e^{2\pi i b\cdot x} f(x); \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

dok je *operator rotacije* za ortogonalnu transformaciju $S\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiran

$$(\mathrm{R}_S f)(x) := f(S^{-1}x); \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.9}$$

Usput uočimo da za cjelobrojne vektore $b, c \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $\mathrm{T}_c\mathrm{M}_b = \mathrm{M}_b\mathrm{T}_c$. U raznim situacijama imamo potrebu različito normalizirati operator dilatacije pa za $a > 0$ i $p \in [1,\infty]$ stavimo

$$(\mathrm{D}_a^{(p)} f)(x) := a^{-d/p} f(a^{-1}x); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Uz ovakvu normalizaciju je $\big\|\mathrm{D}_a^{(p)} f\big\|_{\mathrm{L}^p} = \|f\|_{\mathrm{L}^p}$. I dalje ćemo kratko pisati D_a za $\mathrm{D}_a^{(\infty)}$.

Lema 3.6. *Vrijedi*

$$\mathcal{F}\mathrm{T}_c = \mathrm{M}_{-c}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{M}_b = \mathrm{T}_b\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{D}_a^{(p)} = \mathrm{D}_{a^{-1}}^{(p')}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{R}_S = \mathrm{R}_S\mathcal{F},$$

tj.

$$(\mathrm{T}_c f)\hat{} = \mathrm{M}_{-c}\hat{f}, \quad (\mathrm{M}_b f)\hat{} = \mathrm{T}_b\hat{f}, \quad (\mathrm{D}_a^{(p)} f)\hat{} = \mathrm{D}_{a^{-1}}^{(p')}\hat{f}, \quad (\mathrm{R}_S f)\hat{} = \mathrm{R}_S\hat{f}$$

za svake $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1,\infty]$, *ortogonalnu transformaciju* S *i funkciju* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Ove relacije ćemo provjeriti za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, ali napomenimo da one ostaju vrijediti i za svako neprekidno proširenje od $\mathcal{F}$ na neki drugi Lebesgueov prostor, naprosto zbog očigledne ograničenosti operatora $\mathrm{T}_c, \mathrm{M}_b, \mathrm{D}_a, \mathrm{R}_S$.

Dokaz. U skladu s definicijama računamo:

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}_c f)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-c) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i (x+c)\cdot\xi} dx \\ &= e^{-2\pi i c\cdot\xi}\hat{f}(\xi) = (\mathrm{M}_{-c}\hat{f})(\xi),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{M}_b f)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{2\pi i x\cdot b}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx = \hat{f}(\xi - b) = (\mathrm{T}_b\hat{f})(\xi),\\
\big(\mathrm{D}_a^{(p)} f\big)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} a^{-d/p} f(a^{-1}x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx = \begin{bmatrix} y = a^{-1}x \\ dx = a^d dy \end{bmatrix}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} a^{-d/p} f(y)e^{-2\pi i a y\cdot\xi}a^d dy\\
&= a^{d/p'}\hat{f}(a\xi) = \big(\mathrm{D}_{a^{-1}}^{(p')}\hat{f}\big)(\xi),\\
(\mathrm{R}_S f)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(S^{-1}x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx = \begin{bmatrix} y = S^{-1}x \\ dx = dy \end{bmatrix}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi i Sy\cdot\xi}dy = [Sy\cdot\xi = y\cdot S^{-1}\xi]\\
&= \hat{f}(S^{-1}\xi) = (\mathrm{R}_S\hat{f})(\xi),
\end{aligned}
$$

čime je dokaz završen. □

Neformalno rečeno, Fourierova transformacija zamjenjuje translacije i modulacije, invertira skalu dilatacija te je invarijantna na rotacije.

Propozicija 3.7. *Jedini parovi eksponenata $(p,q)\in[1,\infty]^2$ takvi da vrijedi ocjena*

$$
\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \tag{3.10}
$$

za sve $f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)\cap\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ su oni iz Hausdorff-Youngove nejednakosti, tj. oblika (p,p') za $p\in[1,2]$.

Dokaz. Neka su dakle $p,q\in[1,\infty]$ za koje vrijedi (3.10) i uzmimo $f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)\cap\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ takvu da $\hat{f}$ nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$. Uvrštavanjem $\mathrm{D}_a f$ na mjesto od f u (3.10) dobivamo da za svaki $a>0$ vrijedi

$$
a^{d-d/q}\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q} = \|a^d\mathrm{D}_{a^{-1}}\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q} = \|(\mathrm{D}_a f)\widehat{\ }\|_{\mathrm{L}^q} \lesssim_{d,p,q} \|\mathrm{D}_a f\|_{\mathrm{L}^p} = a^{d/p}\|f\|_{\mathrm{L}^p},
$$

tj.

$$
\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^q} \lesssim_{d,p,q} a^{d(1/p+1/q-1)}\|f\|_{\mathrm{L}^p}.
$$

Puštanjem $a\to 0^+$ i $a\to+\infty$ zaključujemo da mora biti $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tj. $q=p'$.

Pretpostavimo $2<p<\infty$, odakle je $p'<2<p$. Sada ćemo imitirati alternativni dokaz propozicije 3.4. Obzirom da moduliranje ne mijenja ni nosač ni apsolutnu vrijednost funkcije, sasvim analogno kao kod leme 3.5 dokazuje se da za $r\in[1,\infty\rangle$ i $g,h\in\mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$
\lim_{|c|\to+\infty}\|g+\mathrm{T}_c\mathrm{M}_{\pm c}h\|_{\mathrm{L}^r} = \big(\|g\|_{\mathrm{L}^r}^r + \|h\|_{\mathrm{L}^r}^r\big)^{1/r}.
$$

Uzastopnom primjenom te činjenice za dane $N \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ nalazimo $k_1, k_2, \ldots, k_N \in \mathbb{Z}^d$ "dovoljno razmaknute" da je

$$\|f_N\|_{\mathrm{L}^p} < (N^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^p} \quad \text{i} \quad \|\hat{f}_N\|_{\mathrm{L}^{p'}} > (N^{1/p'} - \varepsilon)\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}},$$

pri čemu smo označili

$$f_N := \sum_{j=1}^{N} \mathrm{M}_{k_j}\mathrm{T}_{k_j} f = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{T}_{k_j}\mathrm{M}_{k_j} f,$$

odakle je (zbog leme 3.6) i

$$\hat{f}_N = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{T}_{k_j}\mathrm{M}_{-k_j}\hat{f}.$$

Iz pretpostavljene nejednakosti (3.10) za $q = p'$ imamo

$$(N^{1/p'} - \varepsilon)\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leqslant \|\hat{f}_N\|_{\mathrm{L}^{p'}} \lesssim_{d,p,q} \|f_N\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (N^{1/p} + \varepsilon)\|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

pa puštanjem $\varepsilon \to 0^+$ i dijeljenjem s $N^{1/p'}$ dobivamo

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}} \lesssim_{d,p,q} N^{1/p-1/p'}\|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

te konačno puštanjem $N \to \infty$ dolazimo do kontradikcije.

Preostaje još opovrgnuti ocjenu (3.10) za $p = \infty$ i $q = 1$, ali kad bi takva nejednakost vrijedila, tada bi kompleksna interpolacija s trivijalnom nejednakosti za $p = 1$, $q = \infty$ dala ocjene u cijelom rasponu $p \in \langle 2, \infty\rangle$, $q = p'$, koje smo netom opovrgnuli. $\square$

3.3. Dominirane i okrnjene jezgre*

Materijal u ovom odjeljku je najvećim dijelom prilagođeno gradivo iz [Tao07].

Za potrebe daljnjeg izlaganja fiksiramo dva σ-konačna prostora mjera $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$. Pod jezgrom ćemo uvijek podrazumijevati $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$-izmjerivu kompleksnu funkciju na $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$. Za svaku jezgru K možemo razmatrati linearni integralni operator $T_K \colon \mathcal{D}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathcal{M}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ definiran formulom

$$(T_K f)(x) := \int_{\mathbb{Y}} K(x, y) f(y) d\nu(y),$$

pri čemu je $\mathcal{D}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ neki vektorski prostor g.s.-klasa izmjerivih funkcija koji je gust u prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$; $p \in [1, \infty\rangle$. Mnogi zanimljivi operatori nisu tog oblika, ali mogu biti aproksimirani upravo takvim operatorima. Neke od rezultata ćemo formulirati za sasvim apstraktne operatore, ali će nam ipak biti ilustrativno vidjeti kako se ti rezultati specijaliziraju za operatore T_K koji imaju jezgru K u gornjem smislu.

Pretpostavimo da je jezgra $\widetilde{K}$ na neki način izvedena iz jezgre K. Pitamo se u kojem odnosu su operatorske norme $\|T_{\widetilde{K}}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q}$ i $\|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q}$ za neke određene eksponente $p, q \in [1, \infty]$. Naša prva opservacija je gotovo sasvim trivijalna.

Propozicija 3.8. (Pozitivna dominacija)

(a) Neka su K i $\widetilde{K}$ jezgre takve da je $K \geqslant 0$ i $|\widetilde{K}| \leqslant K$. Ako je operator T_K ograničen sa $\mathcal{S}(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \subseteq \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ za neke eksponente $p, q \in [1, \infty]$, tada je ograničen i operator $T_{\widetilde{K}}$ te vrijedi

$$\|T_{\widetilde{K}}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q} \leqslant \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q}.$$

(b) Zaključak iz (a) dijela ostaje vrijediti i ako su jezgre K i $\widetilde{K}$ takve da je samo $|\widetilde{K}| \leqslant |K|$, ali zato dodatno pretpostavljamo $p = 1$ ili $q = \infty$.

Dokaz. (a) Ovo je direktna posljedica od $|T_{\widetilde{K}} f| \leqslant T_{|K|}|f| = T_K|f|$.
(b) Ovaj pak dio slijedi iz zadatka 3.5. $\square$

Za općenite kompleksne jezgre takve da je $|\widetilde{K}| \leqslant |K|$ i ako je $p > 1$, $q < \infty$ ograničenost operatora T_K ne povlači ograničenost od $T_{\widetilde{K}}$; pogledajte zadatak 3.6. Tu poteškoću ne možemo zaobići čak ni ako uzimamo $\widetilde{K} = K\mathbb{1}_S$ za neki skup $S \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$; slikovito možemo reći da smo *okrnjili* jezgru K po skupu S. Ipak, neka "okrnjenja" neće povećati normu pripadnog operatora.

Propozicija 3.9. (Blok-dijagonalno okrnjenje) *Neka je $N \in \mathbb{N}$, neka je $(A_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{X}$-izmjeriva particija od $\mathbb{X}$, a $(B_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{Y}$-izmjeriva particija od $\mathbb{Y}$ te neka eksponenti p, q zadovoljavaju $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Ako je $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator, tada je formulom*

$$\widetilde{T} f := \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n} T(f\mathbb{1}_{B_n}),$$

također definiran ograničeni operator sa $\mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i vrijedi

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q} \leqslant \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q}.$$

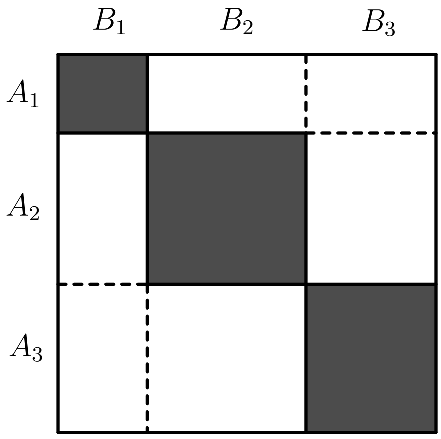
Ukoliko je $T = T_K$ operator s jezgrom K, tada je jezgra od $\widetilde{T}$ naprosto

$$\widetilde{K}(x, y) := \sum_{n=1}^{N} K(x, y)\mathbb{1}_{A_n}(x)\mathbb{1}_{B_n}(y).$$

Naime,

$$\int_{\mathbb{Y}} \widetilde{K}(x, y) f(y) d\nu(y) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n}(x) \underbrace{\int_{\mathbb{Y}} K(x, y) f(y) \mathbb{1}_{B_n}(y) d\nu(y)}_{T_K(f\mathbb{1}_{B_n})(x)}.$$

Tu "blok-dijagonalnu strukturu" od $\widetilde{K}$ možemo ilustrirati kao na slici 3.3.



Slika 3.3: Blok-dijagonalna struktura na $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Dokaz. Označimo $C = \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}$. Za proizvoljnu $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ ocjenjujemo:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}f\|_{\mathrm{L}^q} &= \Big(\sum_{n=1}^{N} \|\mathbb{1}_{A_n}\widetilde{T}f\|_{\mathrm{L}^q}^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{n=1}^{N} \|\mathbb{1}_{A_n}T(f\mathbb{1}_{B_n})\|_{\mathrm{L}^q}^q\Big)^{1/q} \\
&\leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} \|T(f\mathbb{1}_{B_n})\|_{\mathrm{L}^q}^q\Big)^{1/q} \leqslant C\Big(\sum_{n=1}^{N} \|f\mathbb{1}_{B_n}\|_{\mathrm{L}^p}^q\Big)^{1/q} \\
&\leqslant C\Big(\sum_{n=1}^{N} \|f\mathbb{1}_{B_n}\|_{\mathrm{L}^p}^p\Big)^{1/p} = C\|f\|_{\mathrm{L}^p},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u trećoj nejednakosti iskoristili lemu 2.2(b). □

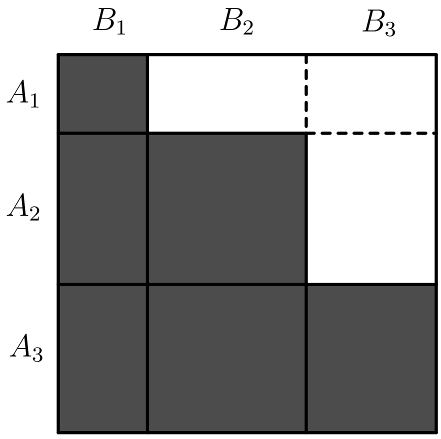
Primijetimo da nam je bila bitna pretpostavka $p \leqslant q$, ali ona je često ispunjena, kao što smo vidjeli u prethodnom odjeljku. Ako tu pretpostavku pojačamo na $p < q$, možemo dokazati prilično iznenađujuću varijantu.

Teorem 3.10. (Blok-trokutasto okrnjenje) *Neka je $N \in \mathbb{N}$, neka je $(A_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{X}$-izmjeriva particija od $\mathbb{X}$, a $(B_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{Y}$-izmjeriva particija od $\mathbb{Y}$ te neka eksponenti p, q zadovoljavaju $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Ako je $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ograničeni linearni operator, tada je formulom*

$$\widetilde{T}f := \sum_{\substack{m,n \\ 1\leqslant n\leqslant m\leqslant N}} \mathbb{1}_{A_m}T(f\mathbb{1}_{B_n}),$$

također definiran ograničeni operator sa $\mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i vrijedi

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} \lesssim_{p,q} \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}. \tag{3.11}$$



Slika 3.4: Blok-trokutasta struktura na $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Dakle, ovog puta uzimamo "donje-blok-trokutasti" dio od $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, osjenčan na slici 3.4. Ukoliko je K jezgra operatora T, tada je

$$\widetilde{K}(x,y) := \sum_{1\leqslant n\leqslant m\leqslant N} K(x,y)\mathbb{1}_{A_m}(x)\mathbb{1}_{B_n}(y)$$

jezgra od $\widetilde{T}$. Ipak, kao i u prethodnoj propoziciji, radimo direktno s operatorom T i ne trebamo ni pretpostavljati postojanje jezgre.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati potpunom matematičkom indukcijom, ali postavljenom na vrlo pažljiv način. Preciznije, indukcijom po broju N ćemo dokazati da za svake prostore mjere, svake izmjerive particije $(A_n)_{n=1}^{N}$, $(B_n)_{n=1}^{N}$ i svake operatore $T, \widetilde{T}$ kao u iskazu vrijedi nejednakost

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} \leqslant C_{p,q}\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q},$$

pri čemu je

$$C_{p,q} := \big(1 - 2^{1/q-1/p}\big)^{-1}.$$

Izbor konstante $C_{p,q}$ će biti motiviran dokazom; sve do zadnjeg dijela dokaza ni ne trebamo znati ništa o njoj.

Za $N = 1$ je tvrdnja trivijalna jer je $\widetilde{T} = T$. Uzimo neki prirodni broj $N \geqslant 2$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve strogo manje od N. Neka su $(A_n)_{n=1}^{N}$, $(B_n)_{n=1}^{N}$, T, $\widetilde{T}$ kao u iskazu. Radi jednostavnije notacije smijemo normalizirati $\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} = 1$, a zbog homogenosti je dovoljno dokazati

$$\|\widetilde{T}f\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C_{p,q} \tag{3.12}$$

za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ takvu da je $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = 1$. Fiksirajmo neku takvu funkciju f. Primijetimo da brojevi

$$\|f \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k}\|_{\mathrm{L}^p}^p; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N$$

rastu po k, najmanji je 0, a najveći je 1, pa postoji jedinstveni $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ takav da je

$$\|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}}\|_{\mathrm{L}^p}^p \leqslant \tfrac{1}{2} < \|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_k}\|_{\mathrm{L}^p}^p.$$

Kao posljedicu od $\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p = 1$ tada imamo i

$$\|f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \cdots \cup B_N}\|_{\mathrm{L}^p}^p < \tfrac{1}{2}.$$

Iskoristimo li pretpostavku indukcije na particije $(A_n)_{n=1}^{k-1}$, $(B_n)_{n=1}^{k-1}$ i odgovarajuće restrikcije mjera i operatora, dobit ćemo

$$\big\|\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}})\big\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C_{p,q} \|f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C_{p,q} 2^{-1/p}. \tag{3.13}$$

Na isti način primjenom pretpostavke indukcije na $(A_n)_{n=k+1}^N$, $(B_n)_{n=k+1}^N$ dobivamo

$$\big\|\mathbb{1}_{A_{k+1} \cup \cdots \cup A_N} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \cdots \cup B_N})\big\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C_{p,q} \|f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \cdots \cup B_N}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C_{p,q} 2^{-1/p}. \tag{3.14}$$

Korištenjem disjunktnosti nosača funkcija u (3.13) i (3.14) slijedi

$$\big\|\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}}) + \mathbb{1}_{A_{k+1} \cup \cdots \cup A_N} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \cdots \cup B_N})\big\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C_{p,q} 2^{1/q - 1/p}. \tag{3.15}$$

Osim toga je očigledno

$$\big\|\mathbb{1}_{A_k \cup \cdots \cup A_N} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_k})\big\|_{\mathrm{L}^q} = \big\|\mathbb{1}_{A_k \cup \cdots \cup A_N} T(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_k})\big\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant 1. \tag{3.16}$$

Iz definicije od $\widetilde{T}$ vidimo $\mathbb{1}_{A_m} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_n}) = \mathbf{0}$ za $m < n$ pa možemo dekomponirati

$$\begin{aligned} \widetilde{T} f \; = \; & \mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}}) + \mathbb{1}_{A_{k+1} \cup \cdots \cup A_N} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_{k+1} \cup \cdots \cup B_N}) \\ & + \mathbb{1}_{A_k \cup \cdots \cup A_N} \widetilde{T}(f \mathbb{1}_{B_1 \cup \cdots \cup B_k}). \end{aligned}$$

Korištenjem nejednakosti Minkowskog te (3.15) i (3.16) konačno zaključujemo

$$\|\widetilde{T} f\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant C_{p,q} 2^{1/q - 1/p} + 1.$$

Konstanta $C_{p,q}$ je bila odabrana upravo tako da bude $C_{p,q} 2^{1/q-1/p} + 1 = C_{p,q}$, iz čega nam slijedi (3.12) i time je završen korak indukcije. □

Važno je primijetiti neovisnost konstante u (3.11) o broju N, koja nam omogućuje da izvedemo brojne korisne posljedice.

Teorem 3.11. (Maksimalna ocjena Christa i Kiseleva [CK01a]) *Neka je $(J,\preceq)$ prebrojivi totalno uređeni skup i pretpostavimo da je $(E_j)_{j\in J}$ rastuća kolekcija skupova iz $\mathcal{Y}$, tj. za svake $j,j'\in J$ takve da je $j\preceq j'$ mora vrijediti $E_j\subseteq E_{j'}$. Nadalje, neka eksponenti p,q zadovoljavaju $1\leqslant p<q\leqslant\infty$. Ako je $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)\to\mathrm{L}^q(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ ograničeni linearni operator, tada je maksimalni operator definiran formulom*

$$T_\star f := \sup_{j\in J}|T(f\mathbb{1}_{E_j})|$$

također ograničen sa $\mathrm{L}^p(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ i vrijedi

$$\|T_\star\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}\lesssim_{p,q}\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Možemo fiksirati $f\in\mathrm{L}^p$ i normalizirati $\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}=1$, $\|f\|_{\mathrm{L}^p}=1$. Ako je $(J_N)_{N=1}^\infty$ rastući niz konačnih podskupova od J takav da vrijedi $\bigcup_{N=1}^\infty J_N=J$ i $|J_N|=N$, tada teorem o monotonoj konvergenciji daje

$$\|T_\star f\|_{\mathrm{L}^q}=\lim_{N\to\infty}\Big\|\max_{j\in J_N}|T(f\mathbb{1}_{E_j})|\Big\|_{\mathrm{L}^q}.$$

Osim toga, običnim preimenovanjem elemenata od J_N možemo uzeti $J_N=\{1,2,\ldots,N\}$, tako da je dovoljno dokazati

$$\Big\|\max_{1\leqslant m\leqslant N}|T(f\mathbb{1}_{E_m})|\Big\|_{\mathrm{L}^q}\lesssim_{p,q}1$$

za neku konačnu $\mathcal{Y}$-izmjerivu kolekciju $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E_N$. Osim toga, još stavimo $E_0:=\emptyset$ i $E_{N+1}:=\mathbb{Y}$. Napomenimo kako je važno da nam dobivena (implicitna) konstanta ne ovisi o broju N.

Trik koji koristimo se često zove *linearizacija maksimalnog operatora.* Za svaki $x\in\mathbb{X}$ neka je $k(x)\in\{1,2,\ldots,N+1\}$ najmanji indeks takav da vrijedi

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N+1}|T(f\mathbb{1}_{E_m})(x)| \;=\; |T(f\mathbb{1}_{E_{k(x)}})(x)|.$$

Označimo li

$$A_m:=\{x\in\mathbb{X}:k(x)=m\},\quad B_m:=E_m\setminus E_{m-1};\quad m=1,2,\ldots,N+1,$$

vidimo da ustvari trebamo pokazati

$$\Big\|\sum_{1\leqslant m\leqslant N+1}\mathbb{1}_{A_m}T(f\mathbb{1}_{E_m})\Big\|_{\mathrm{L}^q}=\Big\|\sum_{\substack{m,n\\1\leqslant n\leqslant m\leqslant N+1}}\mathbb{1}_{A_m}T(f\mathbb{1}_{B_n})\Big\|_{\mathrm{L}^q}\lesssim_{p,q}1,$$

ali ta nejednakost slijedi iz teorema 3.10. (Napomenimo da su skupovi A_m međusobno disjunktni pa je u sumi na lijevoj strani uvijek najviše jedan pribrojnik različit od 0 te je nebitan njegov predznak.) $\square$

Lijepa primjena teorema 3.11 je na konvergenciju integrala iz definicije Fourierove transformacije na $\mathbb{R}$. Za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ definicija od $\hat{f}$ i teorem o dominiranoj konvergenciji daju

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \hat{f}(\xi) \tag{3.18}$$

za svaki $\xi \in \mathbb{R}$. Prednost formule (3.18) nad samom definicijom Fourierove transformacije je da obje strane imaju smisla i za sve $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,2]$. Naime, funkcija f je integrabilna na svakom ograničenom intervalu $[-R,R]$ (naprimjer po lemi 2.2(a)), a i Fourierova transformacija $\mathcal{F}\colon f \mapsto \hat{f}$ se zahvaljujući nejednakosti (2.28) može jednoznačno proširiti do ograničenog linearnog operatora sa $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})$. Zato je sasvim prirodno zapitati se ostaje li formula (3.18) vrijediti i dalje.

Korolar 3.12. (Menšov-Paley[10]-Zygmundov[11] teorem) *Ako je* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1,2\rangle$, *tada za gotovo svaki* $\xi \in \mathbb{R}$ *vrijedi* (3.18).

Dokaz. Za fiksirani ξ je funkcija $R \mapsto \int_{-R}^{R} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ neprekidna pa možemo primijeniti teorem 1.7 za linearne operatore

$$\mathcal{F}_R\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}_R f := \mathcal{F}(f\mathbb{1}_{[-R,R]}); \quad R \in \langle 0,+\infty\rangle,$$

maksimalni operator

$$\mathcal{F}_\star f := \sup_{R\in\langle 0,+\infty\rangle} |\mathcal{F}_R f| = \sup_{R\in\langle 0,+\infty\rangle\cap\mathbb{Q}} |\mathcal{F}_R f|$$

i gusti podskup $S = \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Provjerimo da su ispunjeni uvjeti tog teorema i to čak uz jake (a ne samo slabe) ocjene.

(1) $\|\mathcal{F}_R f\|_{\mathrm{L}^{p'}} \overset{(2.28)}{\leqslant} \|f\mathbb{1}_{[-R,R]}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p}$.

(2) Primjenom teorema 3.11 uz $J = \langle 0,+\infty\rangle \cap \mathbb{Q}$, $E_R = [-R,R]$ i $q = p' > p$ slijedi

$$\|\mathcal{F}_\star\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^{p'}} \lesssim_p \|\mathcal{F}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^{p'}} \overset{(2.28)}{\leqslant} 1.$$

(3) Za $g \in S \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ smo već bili primijetili da je (3.18) ispunjeno.

Dakle, g.s.-limes na lijevoj strani od (3.18) postoji za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Standardni argument jednakosti ograničenih linearnih operatora na gustom podskupu garantira da je taj limes baš jednak $\hat{f}(\xi)$ za g.s. $\xi \in \mathbb{R}$. □

[10] Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907–1933), engleski matematičar.
[11] Antoni Zygmund (1900–1992), poljsko-američki matematičar.

Maksimalni operator u teoremu 3.11 se uzima po prebrojivom skupu, ali to u praksi ne predstavlja smanjenje općenitosti: vidjeli smo to u prethodnom korolaru, a pogledajte i zadatak 3.8.

Moguća je čak i varijanta teorema 3.11 formulirana pomoću varijacijskih normi nizova, koje su bile definirane u odjeljku 1.1.

Teorem 3.13. (Varijacijska varijanta ocjene Christa i Kiseleva [OSTTW12]) *Neka je* $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ *rastući niz skupova iz* $\mathcal{Y}$ *i neka eksponenti* $p, q, \varrho \in [1, \infty]$ *zadovoljavaju* $q > p$ *i* $\varrho > p$. *Ako je* $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *ograničeni linearni operator, tada za svaku funkciju* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ *vrijedi*

$$\Big\| \big\| \big(T(f\mathbb{1}_{E_n})\big)_{n=0}^{\infty} \big\|_{\mathrm{V}^\varrho} \Big\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \lesssim_{p,q,\varrho} \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Y},\mathcal{Y},\nu)}. \tag{3.19}$$

Ovdje $\|(z_n)_{n=0}^{\infty}\|_{\mathrm{V}^\infty}$ interpretiramo kao $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |z_n|$, tako da je ovaj rezultat zapravo poopćenje i pojačanje teorema 3.11. Dokaz je opet ostavljen čitatelju za vježbu kao zadatak 3.10 sa dovoljno detaljnom uputom. Pomoću teorema 3.13 nije teško dati nešto direktniji dokaz korolara 3.12, bez upotrebe teorema 1.7.

Alternativni dokaz korolara 3.12. Definirajmo operatore $\mathcal{F}_R$; $R \in [0, +\infty\rangle$ kao i ranije sa $\mathcal{F}_R f := (f\mathbb{1}_{[-R,R]})\widehat{\ }$ te opet stavimo $E_R = [-R, R]$. Primjenom teorema 3.13 (za bilo koji, ali fiksirani $\varrho \in \langle p, \infty\rangle$) dobivamo

$$\big\| \|\mathcal{F}_R f\|_{\mathrm{V}^\varrho_R} \big\|_{\mathrm{L}^{p'}} \lesssim_{p,\varrho} \|\mathcal{F}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^{p'}} \|f\|_{\mathrm{L}^p}, \tag{3.20}$$

pri čemu $\|\mathcal{F}_R f\|_{\mathrm{V}^\varrho_R}$ sada označava ϱ-varijaciju funkcije $R \mapsto (\mathcal{F}_R f)(\xi)$, definiranu sa (1.4). Naime, (3.19) se zapravo primjenjuje na bilo koji izbor od $M \in \mathbb{N}$ i $0 = R_0 < R_1 < \cdots < R_M$. Izmjerivost na lijevoj strani od (3.20) je ponovno garantirana neprekidnošću po R i mogućnošću uzimanja supremuma samo po racionalnim brojevima.

Obzirom da po Hausdorff-Youngovoj nejednakosti znamo $\|\mathcal{F}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^{p'}} \leqslant 1 < +\infty$, zaključujemo da za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ i za gotovo svaki $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\big\| (\mathcal{F}_R f)(\xi) \big\|_{\mathrm{V}^\varrho_R} < +\infty,$$

što kao i u odjeljku 1.1 implicira postojanje limesa $\lim_{R\to+\infty} (\mathcal{F}_R f)(\xi)$. □

* * *

Teoremi 3.10 i 3.11 ne vrijede kada je $p = q$ i implicitne konstante "eksplodiraju" kada se p i q približavaju jedno drugom; vidjeti zadatak 3.7 na tu temu. Zato se prirodno postavlja pitanje može li se ipak dobiti neki slabiji korisni rezultat i u graničnom slučaju $p = q$.

Teorem 3.14. *Uzmimo proizvoljni eksponent* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *i neka je* $T\colon \mathrm{L}^p(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ *ograničeni linearni operator.*

(a) Ako su $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(A_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{X}$-izmjeriva particija od $\mathbb{X}$ i $(B_n)_{n=1}^N$ $\mathcal{Y}$-izmjeriva particija od $\mathbb{Y}$, tada je okrnjeni operator

$$\widetilde{T}f := \sum_{\substack{m,n \\ 1\leqslant n\leqslant m\leqslant N}} \mathbb{1}_{A_m} T(f\mathbb{1}_{B_n})$$

također ograničen i vrijedi

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \lesssim (\ln N)\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}. \tag{3.21}$$

(b) Ako su $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i $(E_n)_{n=1}^N$ rastuća kolekcija skupova iz $\mathcal{X}$, tada je maksimalni operator

$$T_\star f := \max_{1\leqslant n\leqslant N} |T(f\mathbb{1}_{E_n})|$$

također ograničen i vrijedi

$$\|T_\star\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \lesssim (\ln N)\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}.$$

Dokaz. Sama ograničenost od $\widetilde{T}$ i $T_\star$ je trivijalna i bitne su jedino ocjene njihovih normi. Osim toga, dio (b) slijedi iz dijela (a) na sasvim isti način kao što smo bili dokazali teorem 3.11 iz teorema 3.10. Prema tome, glavni dio teorema je ocjena (3.21). Njen dokaz može slijediti iste crte kao i dokaz od (3.11), ali je nešto direktniji, što i ne začuđuje, obzirom da je rezultat klasičan.

Dovoljno je dokazati (3.21) u slučaju $N = 2^M$; $M \in \mathbb{N}$, jer inače možemo zaokružiti N na najbližu veću potenciju od 2 i proširiti particije praznim članovima. Indukcijom po $M \in \mathbb{N}_0$ dokazujemo nejednakost

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \leqslant (M+1)\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}$$

za svake prostore mjere, svake izmjerive particije $(A_n)_{n=1}^{2^M}$, $(B_n)_{n=1}^{2^M}$ i svake operatore $T, \widetilde{T}$ kao u iskazu (a) dijela teorema. Baza indukcije $M = 0$ je trivijalna jer imamo $\widetilde{T} = T$. U koraku indukcije normalizirajmo $\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} = 1$, fiksirajmo f te pretpostavku za $M-1$ iskoristimo kako bismo dobili

$$\big\|\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_{2^{M-1}}}\widetilde{T}(f\mathbb{1}_{B_1\cup\cdots\cup B_{2^{M-1}}})\big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M\|f\mathbb{1}_{B_1\cup\cdots\cup B_{2^{M-1}}}\|_{\mathrm{L}^p},$$
$$\big\|\mathbb{1}_{A_{2^{M-1}+1}\cup\cdots\cup A_{2^M}}\widetilde{T}(f\mathbb{1}_{B_{2^{M-1}+1}\cup\cdots\cup B_{2^M}})\big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M\|f\mathbb{1}_{B_{2^{M-1}+1}\cup\cdots\cup B_{2^M}}\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Disjunktnost nosača daje

$$\big\|\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_{2^{M-1}}}\widetilde{T}(f\mathbb{1}_{B_1\cup\cdots\cup B_{2^{M-1}}}) + \mathbb{1}_{A_{2^{M-1}+1}\cup\cdots\cup A_{2^M}}\widetilde{T}(f\mathbb{1}_{B_{2^{M-1}+1}\cup\cdots\cup B_{2^M}})\big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M\|f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Obzirom da je

$$\big\|\mathbb{1}_{A_{2^{M-1}+1}\cup\cdots\cup A_{2^M}}\widetilde{T}(f\mathbb{1}_{B_1\cup\cdots\cup B_{2^{M-1}}})\big\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p},$$

konačno smo dobili

$$\|\widetilde{T}f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (M+1)\|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

i time završili dokaz. □

U teoremu 3.14, za razliku od teorema 3.11, konstante u ocjeni norme maksimalnog operatora nažalost ipak ovise o “finoći” kolekcije $(E_n)_{n=1}^N$ (tj. o broju N), ali ponekad je i logaritamski “gubitak” zadovoljavajući. Često se teorem 3.14 primjenjuje na ortogonalne sisteme, kada poprima sljedeći oblik.

Korolar 3.15. (Maksimalna ocjena Rademachera i Menšova [Rad22], [Men23]) *Neka je $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i neka je $f_1, f_2, \ldots, f_N$ ortonormirana kolekcija funkcija iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$. Tada vrijedi*

$$\Big\| \max_{1\leqslant n\leqslant N} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big| \Big\|_{\mathrm{L}^2} \lesssim N^{1/2} \ln N.$$

Dokaz. Uzmimo $p = 2$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu) = \big(\{1, 2, \ldots, N\}, \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, N\}), |\cdot|\big)$, skupove

$$E_n := \{1, 2, \ldots, n\}; \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

i linearni operator

$$T\big((\gamma_n)_{n=1}^N\big) := \sum_{n=1}^{N} \gamma_n f_n.$$

Iz međusobne ortogonalnosti i normiranosti funkcija f_n slijedi

$$\big\|T\big((\gamma_n)_{n=1}^N\big)\big\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}^2 = \sum_{n=1}^{N} |\gamma_n|^2 \|f_n\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}^2 = \sum_{n=1}^{N} |\gamma_n|^2 = \big\|(\gamma_n)_{n=1}^N\big\|_{\ell^2(\{1,\ldots,N\})}^2,$$

tj. T je izometrija i posebno $\|T\|_{\ell^2\to\mathrm{L}^2} = 1$. Korištenjem teorema 3.14(b) dobivamo

$$\Big\| \max_{1\leqslant n\leqslant N} \Big| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k f_k \Big| \Big\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant (\ln N) \big\|(\gamma_n)_{n=1}^N\big\|_{\ell^2(\{1,\ldots,N\})}$$

pa preostaje uzeti $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_N = 1$. □

Možemo usporediti korolar 3.15 s Pitagorinim[12] poučkom, koji daje

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big\|_{\mathrm{L}^2} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{\mathrm{L}^2}^2 \Big)^{1/2} = n^{1/2} \leqslant N^{1/2}$$

za svaki $n \in \{1, \ldots, N\}$. Dakle, ubacivanje maksimuma unutar norme na lijevoj strani “košta” samo logaritamski faktor $\ln N$.

* * *

[12]Pitagora (oko 582. pr. n. e. – oko 496. pr. n. e.), starogrčki matematičar i filozof.

Zadatak 3.5. Dokažite da za $q \in [1, \infty]$ vrijedi

$$\|T_K\|_{\mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^q} = \|K(x, y)\|_{\mathrm{L}^\infty_y(\mathrm{L}^q_x)},$$

dok za $p \in [1, \infty]$ imamo

$$\|T_K\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^\infty} = \|K(x, y)\|_{\mathrm{L}^\infty_x(\mathrm{L}^{p'}_y)}.$$

Na desnoj strani se pojavljuju mješovite Lebesgueove norme iz zadatka 2.1.

Napomena: Smatramo da je operatorska norma jednaka $+\infty$ ukoliko operator nije μ-g.s. dobro definiran ili je neograničen.

Zadatak 3.6. Neka su prostori mjera upravo $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\big)$. Stavimo

$$K(x, y) := \cos(2\pi xy), \quad \widetilde{K}(x, y) := \max\{\cos(2\pi xy), 0\}.$$

Dokažite da je T_K ograničen na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, ali da $T_{\widetilde{K}}$ to nije.

Zadatak 3.7.

(a) Pokažite da nejednakost (3.11) može poprimiti malo precizniji oblik:

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q} \lesssim \big(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}\big)^{-1} \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q}.$$

(b) Definirajmo operator T_N na konačnim nizovima duljine N,

$$T_N\big((\gamma_m)_{m=1}^N\big) := \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant N \\ n \neq m}} \frac{\gamma_n}{m - n} \Big)_{m=1}^N,$$

i neka je $\widetilde{T}_N$ kao u teoremu 3.10 uz $A_m = \{m\}$, $B_n = \{n\}$. Dokažite da je

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|T_N\|_{\ell^2 \to \ell^2} < +\infty, \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} \|\widetilde{T}_N\|_{\ell^2 \to \ell^2} = +\infty.$$

Uputa: Elementarni dokaz od $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|T_N\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \sqrt{\pi}$ može se naći u [Gra94].

(c) Za operatore iz (b) dijela zadatka dokažite

$$\lim_{q \to 2^+} \|T_N\|_{\ell^2 \to \ell^q} = \|T_N\|_{\ell^2 \to \ell^2}, \quad \lim_{q \to 2^+} \|\widetilde{T}_N\|_{\ell^2 \to \ell^q} = \|\widetilde{T}_N\|_{\ell^2 \to \ell^2},$$

odakle će slijediti

$$\sup_{\substack{q \in \langle 2, \infty \rangle \\ N \in \mathbb{N}}} \frac{\|\widetilde{T}_N\|_{\ell^2 \to \ell^q}}{\|T_N\|_{\ell^2 \to \ell^q}} = +\infty.$$

Napomena: Ovaj primjer pokazuje da konstante u (3.11) ne mogu biti odabrane "uniformno" po p i q, a u kombinaciji s podzadatkom (a) vidimo da eksplodiraju upravo kada $q \to p^+$.

Zadatak 3.8. Dokažite sljedeću kontinuiranu "trokutastu" verziju teorema 3.10. Neka je $K\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ lokalno integrabilna (tj. integrabilna na svakom omeđenom izmjerivom skupu) jezgra za koju je pripadni operator T_K ograničen sa $\mathrm{C_c}(\mathbb{R})\subseteq \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ za neke eksponente p,q takve da je $1\leqslant p<q\leqslant\infty$. Definiramo li

$$\widetilde{K}(x,y) := \begin{cases} K(x,y) & \text{ako je } x\geqslant y,\\ 0 & \text{inače,}\end{cases}$$

tada je operator $T_{\widetilde{K}}$ također ograničen sa $\mathrm{C_c}(\mathbb{R})\subseteq \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\|T_{\widetilde{K}}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} \lesssim_{p,q} \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}.$$

Uputa: Koristite teorem 3.10 za sve "finije" blok-trokutaste aproksimacije od $\widetilde{K}$.

Zadatak 3.9. Neka je $K\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ lokalno integrabilna jezgra te neka su $n\in\mathbb{N}$ i $p,q\in[1,\infty]$ takvi da je $p<q$ i $q\geqslant 2$. Definirajmo

$$\widetilde{T}(f_1,\ldots,f_n)(x) := \int_{\{(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n\,:\,y_1\geqslant\cdots\geqslant y_n\}} \Big(\prod_{j=1}^{n} K(x,y_j)f_j(y_j)\Big)dy_1\cdots dy_n.$$

Ukoliko je T_K ograničen sa $\mathrm{C_c}(\mathbb{R})\subseteq \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$, tada je $\widetilde{T}$ ograničen sa $\mathrm{C_c}(\mathbb{R})^n\subseteq \mathrm{L}^p(\mathbb{R})^n$ u $\mathrm{L}^{q/n}(\mathbb{R})$ te vrijedi

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathrm{L}^p\times\cdots\times\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^{q/n}} \lesssim_{p,q} C^n\|T_K\|^n_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}.$$

Štoviše, u posebnom slučaju kada uzimamo n jednakih funkcija imamo

$$\|\widetilde{T}(f,\ldots,f)\|_{\mathrm{L}^{q/n}} \lesssim_{p,q} \frac{1}{\sqrt{n!}}C^n\|T_K\|^n_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}\|f\|^n_{\mathrm{L}^p}.$$

U obje nejednakosti je $C>0$ neka univerzalna konstanta.

Uputa: Moguće je općenitije formulirati tvrdnju, više u duhu teorema 3.10, te postupati kao u njegovom dokazu, a potom aproksimacijom dobiti kontinuirani slučaj. Malo drukčije organizirani detaljni (i prilično složeni) dokaz može se naći u [CK01a].

Zadatak 3.10. Dokažite teorem 3.13.

Uputa: Praktično je pretpostaviti $p<\varrho<q$. Kao u dokazu teorema 3.11 svedite tvrdnju na slučaj konačnih kolekcija $\emptyset=E_0\subseteq E_1\subseteq\cdots\subseteq E_N=\mathbb{Y}$. Ovog puta indukcijom po $N\in\mathbb{N}_0$ dokazujete nejednakost

$$\Big\|\big\|\big(T(f\mathbb{1}_{E_n})\big)_{n=0}^{N}\big\|_{\mathrm{V}^\varrho}\Big\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant D_{p,q,\varrho}\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q}\|f\|_{\mathrm{L}^p},$$

pri čemu je konstanta $D_{p,q,\varrho}$ dana jednadžbom

$$2^{1/\varrho-1/p}D_{p,q,\varrho}+4C_{p,q} = D_{p,q,\varrho},$$

a $C_{p,q}$ označava implicitnu konstantu iz (3.17). Normalizirajte $\|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^q} = 1$ i $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = 1$ pa odaberite indeks k takav da je

$$\|f\mathbb{1}_{E_{k-1}}\|_{\mathrm{L}^p}^p \leqslant \tfrac{1}{2} < \|f\mathbb{1}_{E_k}\|_{\mathrm{L}^p}^p.$$

Potom iskoristite očiglednu ocjenu

$$\|(z_n)_{n=0}^N\|_{\mathrm{V}^\varrho}^\varrho \leqslant \|(z_n)_{n=0}^{k-1}\|_{\mathrm{V}^\varrho}^\varrho + \|(z_n)_{n=k+1}^N\|_{\mathrm{V}^\varrho}^\varrho + 2^{\varrho+1}\max_{0\leqslant n\leqslant N}|z_n|^\varrho$$

uz $z_n = T(f\mathbb{1}_{E_n})(x)$, $x\in\mathbb{X}$.

Poglavlje 4

Ograničeni Calderón-Zygmundovi operatori

Teorija Calderón[1]-Zygmundovih integralnih operatora je u više navrata poopćivana i dopunjavanja tijekom 20. stoljeća, a i sama klasa istoimenih operatora je višestruko proširivana. Npr. povijesno su se najprije proučavali translacijski invarijantni singularni integralni operatori. Standardni oblik kojeg ćemo predstaviti u ovoj skripti se već može naći u literaturi 80-tih godina prošlog stoljeća, a zainteresirani čitatelj će mnogo više detalja pronaći u opsežnoj monografiji [Ste93]. Napomenimo da ćemo se u ovom poglavlju baviti isključivo operatorima za koje unaprijed znamo da su ograničeni na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, a voljeli bismo ustanoviti njihovu omeđenost i na nekim drugim funkcijskim prostorima, poput $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ ili nešto zanimljivijih prostora $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, koje ćemo kasnije uvesti. Kod tzv. množitelja L^2-ograničenost će biti automatska pa će tako i općeniti rezultati ovog poglavlja naći primjenu. (Karakterizacije L^2-omeđenosti ćemo ostaviti za iduće poglavlje.) Upoznat ćemo i neke probleme kod kojih se prirodno pojavljuje Hilbertova transformacija, najjednostavniji primjer Calderón-Zygmundovog operatora. Na samom kraju poglavlja ćemo dotaknuti osnove tzv. Littlewood-Paleyeve teorije.

4.1. Definicija Calderón-Zygmundovog operatora

Standardna jezgra je Borel-izmjeriva funkcija $K\colon \{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d : x\neq y\}\to\mathbb{C}$ za koju postoji parametar $\gamma\in\langle 0,1]$ takav da za svake $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^d$, $x\neq y$ vrijedi:

(K1) $\quad |K(x,y)| \lesssim_{K,d} \dfrac{1}{|x-y|^d},$

(K2) $\quad |x'-x| \leqslant \frac{1}{2}|x-y| \;\Rightarrow\; |K(x',y)-K(x,y)| \lesssim_{K,d,\gamma} \dfrac{|x'-x|^\gamma}{|x-y|^{d+\gamma}},$

[1]Alberto Pedro Calderón (1920–1998), argentinsko-američki matematičar.

$$\text{(K3)}\quad |y'-y| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-y| \;\Rightarrow\; |K(x,y')-K(x,y)| \lesssim_{K,d,\gamma} \frac{|y'-y|^{\gamma}}{|x-y|^{d+\gamma}}.$$

Ako su uvjeti (K2) i (K3) zadovoljeni za neki $\gamma_0 \in \langle 0,1]$, tada oni vrijede i za svaki $\gamma \in \langle 0,\gamma_0]$; naprosto primijetimo da je $\frac{|x'-x|}{|x-y|} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ i $\frac{|y'-y|}{|x-y|} \leqslant \frac{1}{2} < 1$. Nadalje, u slučaju kada je $\gamma = 1$, a K je klase C^1 možemo (K2) i (K3) zamijeniti nešto jačim pretpostavkama:

$$\text{(K2')}\quad |\nabla_x K(x,y)| \lesssim_{K,d} \frac{1}{|x-y|^{d+1}},$$

$$\text{(K3')}\quad |\nabla_y K(x,y)| \lesssim_{K,d} \frac{1}{|x-y|^{d+1}},$$

pri čemu $\nabla_x K(x,y)$ označava gradijent po prvih d varijabli od $K(x,y)$, a pripadna ocjena je uniforma po zadnjih d varijabli; slično i za $\nabla_y K(x,y)$. Npr. ovako vidimo da (K2') implicira (K2):

$$\begin{aligned} |K(x',y)-K(x,y)| &= \Big|\Big(\int_0^1 \nabla_x K\big((1-\theta)x+\theta x',y\big)d\theta\Big)\cdot(x'-x)\Big| \\ &\leqslant \sup_{\theta\in[0,1]} \big|\nabla_x K\big((1-\theta)x+\theta x',y\big)\big|\ |x'-x| \\ &\lesssim_{K,d} \frac{1}{(\frac{1}{2}|x-y|)^{d+1}}\ |x'-x| \sim_d \frac{|x'-x|}{|x-y|^{d+1}}, \end{aligned}$$

jer je

$$\big|((1-\theta)x+\theta x')-y\big| \geqslant |x-y|-\theta|x-x'| \geqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

Calderón-Zygmundov operator je linearni operator $T\colon \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ kojem je pridružena neka standardna jezgra K u smislu da za svake dvije funkcije $f,g \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ s disjunktnim nosačima $\operatorname{supp} f$ i $\operatorname{supp} g$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy\Big)g(x)dx, \tag{4.1}$$

tj.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)\,g = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K\,(g\otimes f).$$

Pritom smo označili $(g\otimes f)(x,y) := g(x)f(y)$. Primijetimo da se na desnoj strani zapravo integrira po skupu $(\operatorname{supp} g)\times(\operatorname{supp} f)$, koji je disjunktan s "dijagonalom" $\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d : x=y\}$ pa nije važno kako na njoj dodefiniramo K. Osim toga, lako je vidjeti da je zbog (K1) jezgra K ograničena na produktu nosača od g i f pa u (4.1) slobodno možemo koristiti Fubinijev teorem i transformirati izraz po volji.

Ukoliko je T još i L^2-ograničen, tj.

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim_T \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)}$$

za svaku $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$, naprosto ćemo reći da je riječ o *ograničenom Calderón-Zygmundovom operatoru* i tada se T jednoznačno proširuje do omeđenog linearnog operatora na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Isključivo takvim operatorima ćemo se baviti kroz cijelo ovo poglavlje. Ubuduće često nećemo notacijski naglašavati ovisnost implicitnih konstanti o d, γ, K i T, jer će se ona podrazumijevati.

Sljedeći su razlozi zašto ističemo baš L^2-omeđenost:

- Prostor $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ je Hilbertov i na njemu je Fourierova transformacija izometrija. Vidjet ćemo da to pojednostavljuje teoriju i omogućuje direktnu provjeru L^2-ograničenosti u važnom specijalnom slučaju translacijski invarijantnih operatora.

- Uz prethodne pretpostavke L^2-omeđenost implicira omeđenost (tj. neprekidnost) na mnogim drugim funkcijskim prostorima, kao što ćemo vidjeti u idući odjeljcima.

- Postoje elegantne, primjenjive i sasvim generalne karakterizacije L^2-ograničenosti ovakvih operatora. To je tema koju ćemo ostaviti za iduće poglavlje.

Primijetimo da je standardna jezgra K jednoznačno određena operatorom T pa je i zovemo *jezgra operatora*. Naime, kada bi postojale dvije takve jezgre K i $\widetilde{K}$ pridružene T, one bi bile g.s. ograničene na $B_1 \times B_2$ za bilo koje dvije otvorene kugle $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ s disjunktnim zatvaračima te bismo imali

$$\int_{B_1\times B_2} K\,(g\otimes f) = \int_{B_1\times B_2} \widetilde{K}\,(g\otimes f)$$

za svake $g \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(B_1)$ i $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(B_2)$. Jedinstvenost sada slijedi iz činjenice da su linearne kombinacije funkcija oblika $g \otimes f$ guste u $\mathrm{L}^1(B_1 \times B_2)$. S druge strane, više Calderón-Zygmundovih operatora može imati istu jezgru. Npr. $T_0 f := 0$ i $T_1 f := f$ oba imaju jezgru $K \equiv 0$ jer vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T_1 f)g = \int_{\mathbb{R}^d} fg = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} (T_0 f)g,$$

čim f i g imaju disjunktne nosače.

Pokažimo da neki Calderón-Zygmundovi operatori imaju direktniji prikaz, koji naizgled nije u duhu općenite definicije.

Propozicija 4.1. *Neka je K standardna jezgra koja još ima svojstvo da za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes*

$$\kappa(x) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1\}} K(x,y)\,dy \tag{4.2}$$

i pretpostavimo da je tako dobivena funkcija $\kappa\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *lokalno integrabilna. Tada za svaku* $f \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ *i za g.s.* $x \in \mathbb{R}^d$ *postoji limes*

$$(T_K f)(x) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant\varepsilon\}} K(x,y)f(y)\,dy \tag{4.3}$$

i njime je definirana lokalno integrabilna funkcija $T_K f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$*. Nadalje, za svake* $f, g \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ *s disjunktnim nosačima vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (T_K f)g = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x,y)f(y)g(x)\,dxdy.$$

Drugim riječima, formula (4.3) *definira Calderón-Zygmundov operator* T_K*, čija jezgra je upravo* K*.*

Ponekad kažemo da je T_K *singularni integralni operator* (u užem smislu) pridružen jezgri K. Primijetimo da ovdje K i T_K jednoznačno određuju jedno drugo. Ponekad umjesto $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant\varepsilon\}} \cdots dy$ kratko pišemo p.v. $\int_{\mathbb{R}^d} \cdots dy$.

Dokaz. Za $f \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ i $0 < \varepsilon < 1$ imamo jednakost

$$\begin{aligned} \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant\varepsilon\}} K(x,y)f(y)\,dy &= \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1\}} K(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy \\ &+ \Bigg(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1\}} K(x,y)\,dy \Bigg) f(x) + \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|>1\}} K(x,y)f(y)\,dy \end{aligned}$$

pa zbog (4.2) za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ postoji limes u (4.3) i iznosi

$$\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,0<|x-y|\leqslant 1\}} K(x,y)\big(f(y)-f(x)\big)\,dy + \kappa(x)f(x) + \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|>1\}} K(x,y)f(y)\,dy.$$

Pritom smo koristili Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji te

$$\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,0<|x-y|\leqslant 1\}} |K(x,y)|\,\big|f(y)-f(x)\big|\,dy \overset{\text{(K1)}}{\lesssim} \|\nabla f\|_{\mathrm{L}^\infty} \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,0<|x-y|\leqslant 1\}} \frac{dy}{|x-y|^{d-1}} < +\infty,$$

$$\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|>1\}} |K(x,y)|\,|f(y)|\,dy \overset{\text{(K1)}}{\lesssim} \|f\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty.$$

Lokalna integrabilnost od $T_K f$ je sada također očigledna. Konačno, neka $f, g \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)$ imaju disjunktne nosače i stavimo $\varepsilon_0 := \min_{\substack{x\in\mathrm{supp}\, g\\ y\in\mathrm{supp}\, f}} |x-y|$. Tada za $x \in \mathrm{supp}\, g$ formula (4.3) postaje

$$(T_K f)(x) = \int_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant\varepsilon_0\}} K(x,y)f(y)\,dy$$

pa je

$$\int_{\mathbb{R}^d}(T_K f)g = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)\,dy\Big)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x,y)f(y)g(x)\,dxdy.$$

Pritom smo zbog

$$\int_{(\mathrm{supp}\, g)\times(\mathrm{supp}\, f)} |K(x,y)f(y)g(x)|\,dx\,dy \overset{\text{(K1)}}{\lesssim} \frac{1}{\varepsilon_0^d}\|f\|_{\mathrm{L}^1}\|g\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty$$

smjeli iskoristiti Fubinijev teorem. □

Prethodna propozicija nam već daje dosta primjera singularnih integralnih operatora Calderón-Zygmundovog tipa. Za $d=1$ i $K(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x-y}$ dobivamo *Hilbertovu transformaciju* spomenutu u poglavlju 1, dok je njen prirodni dvodimenzionalni analogon *Ahlfors*[2]*-Beurlingova*[3] *transformacija* dobivena za $d=2$, $K(x,y) = \frac{-1}{\pi}\frac{1}{((x_1+ix_2)-(y_1+iy_2))^2}$, tj. u kompleksnim varijablama

$$(Bf)(z) := -\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{C}}\frac{f(w)}{(z-w)^2}d\lambda(w) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{C}} f(z-w)\frac{d\lambda(w)}{w^2}; \quad z\in\mathbb{C}.$$

Vidjet ćemo da je u oba ova slučaja konstantu $\frac{1}{\pi}$ prirodno staviti radi unitarnosti na L^2. U višim dimenzijama imamo *Rieszove*[4] *transformacije* R_j, kod kojih je $K(x,y) = \frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}$, tj.

$$(R_j f)(x) := \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{d+1}}f(y)dy = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\frac{t_j}{|t|^{d+1}}dt; \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Pritom x_j, y_j, t_j redom označavaju j-tu koordinatu od x, y, t. Napomenimo da je u svim tim slučajevima $\kappa \equiv \mathbf{0}$.

Kao povijesnu crticu navedimo da je razvoj teorije ovakvih integralnih operatora započet u seminalnom radu Calderóna i Zygmunda [CZ52]. U 19. i prvoj polovici 20. stoljeća je harmonijska analiza bila krucijalno ovisna o kompleksno-analitičkim tehnikama,

[2]Lars Valerian Ahlfors (1907–1996), finski matematičar.
[3]Arne Carl-August Beurling (1905–1986), švedski matematičar.
[4]Nazvane su po Marcelu Rieszu.

koje su dobro funkcionirale samo u jednodimenzionalnom okruženju. Autori tog rada su osmislili tzv. "realnu metodu" u želji da daju zanimljivu teoriju u višim dimenzijama. Kao rezultat toga obogatili su analizu tehnikama koje su toliko općenite i prilagodljive da se i danas pronalaze i primjenjuju njihove raznolike varijante. Teorija singularnih integralnih operatora je popularnost stekla već krajem 50-tih godina kada ju je Calderón uspješno primijenio na probleme jedinstvenosti kod hiperboličkih i eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a potom su se pokazale i veze s računanjem indeksa eliptičkih operatora na mnogostrukostima. Zanimljivi popularni tekst o Calderón-Zygmundovim operatorima je npr. [Ste98].

* * *

Zadatak 4.1.

(a) Nakon što ograničeni Calderón-Zygmundov operator T s jezgrom K proširimo do omeđenog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ (označenog opet sa T), ima smisla promatrati dualni operator T^τ (kao u odjeljku 2.1) i hermitski adjungirani operator T^*. Pokažite da su T^τ i T^* također proširenja Calderón-Zygmundovih operatora kojima su redom pridružene jezgre $K^\tau(x,y) := K(y,x)$ i $K^*(x,y) := \overline{K(y,x)}$.

Napomena: Sada je očigledan razlog zašto T^τ ponekad nazivamo transponirani operator od T.

(b) Ako su T_1 i T_2 ograničeni Calderón-Zygmundovi operatori s istom jezgrom, dokažite da postoji funkcija $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da za svaku $f \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $T_1 f - T_2 f = mf$.

Zadatak 4.2. Neka je K antisimetrična standardna jezgra, tj. pretpostavimo da osim (K1)–(K3) vrijedi i $K(y,x) = -K(x,y)$ za svake $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$. Dokažite da je formulom

$$\Lambda(f,g) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}\,:\,|x-y|\geqslant\varepsilon\}} K(x,y) f(y) g(x)\, dxdy$$

dobro definirana bilinearna forma $\Lambda\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ te da je štoviše

$$\Lambda(f,g) = \frac{1}{2} \int\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}\,:\,x\neq y\}} K(x,y) \big(f(y)g(x) - f(x)g(y)\big)\, dxdy.$$

za svake $f, g \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Primijetimo da ovdje ne pretpostavljamo disjunktnost nosača od f i g.

Napomena: Ništa nam ne garatira da doista postoji operator $T\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_\mathrm{lok}(\mathbb{R}^d)$ takav da vrijedi $\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g = \Lambda(f,g)$ za $f, g \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$, ali ako to ipak jest slučaj, tada je očigledno T Calderón-Zygmundov operator s jezgrom K i vrijedi $T^\tau = -T$. Ustvari možemo jedino zaključiti da postoji takav $T\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)^*$, pri čemu je $\mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)^*$ svojevrsni prostor distribucija.

4.2. Omeđenost na L^p prostorima

Ukoliko za Calderón-Zygmundov operator T znamo da je L^2-ograničen, tada prikaz pomoću jezgre (4.1) ostaje vrijediti i u nešto općenitijem obliku. Jedinstveno proširenje od T do ograničenog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ćemo označati istim slovom.

Prisjetimo se kako za funkciju $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ kažemo da *iščezava* na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ako je $|\{f \neq 0\} \cap U| = 0$. Komplement najvećeg (u smislu relacije $\subseteq$) otvorenog skupa na kojem f iščezava zovemo *nosač* od f i označavamo $\operatorname{supp} f$. Ovaj tehnički detalj je neophodan, jer ako za f uzimamo različite predstavnike iste g.s.-klase izmjerivih funkcija, tada $\{f \neq 0\}$ nema smisla doslovno, već samo do na skupove mjere 0.

Lema 4.2. *Ako je T ograničeni Calderón-Zygmundov operator s jezgrom K, tada za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ s kompaktnim nosačem i za svaki $x \in \mathbb{R}^d \setminus (\operatorname{supp} f)$ vrijedi*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)\, dy. \tag{4.4}$$

Dokaz. Fiksirajmo dva otvorena skupa $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ s kompaktnim i disjunktnim zatvaračima i primijetimo da je $U \times V \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto K(x,y)$ omeđena funkcija radi uvjeta (K1). Po definiciji iz prethodnog odjeljka znamo da jednakost

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x,y) g(x) f(y) dx dy \tag{4.5}$$

vrijedi za $g \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(U)$, $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(V)$. Kako su obje strane u (4.5) dobro definirane i ograničene bilinearne forme $\mathrm{L}^2(U) \times \mathrm{L}^2(V) \to \mathbb{C}$ u paru funkcija (g, f), zbog gustoće zaključujemo da jednakost (4.5) ostaje vrijediti i za $g \in \mathrm{L}^2(U)$, $f \in \mathrm{L}^2(V)$. Konačno, zbog dualnosti $\mathrm{L}^2(U)^* \cong \mathrm{L}^2(U)$ zaključujemo da je (4.4) ispunjeno za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} f \subseteq V$, $x \in U$ kao g.s. jednakost funkcija na U. □

Standardna kocka je svaka kocka u $\mathbb{R}^d$ čiji bridovi su paralelni koordinatnim osima, tj. skup oblika $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ za neke ograničene intervale jednakih duljina $I_1, \ldots, I_d$. Za funkciju $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ i standardnu kocku Q ćemo sa $[f]_Q$ označavati prosjek od f na Q, tj.

$$[f]_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx.$$

Duljinu brida kocke Q ćemo pisati $\ell(Q)$. *Dijadska kocka* je svaka kocka u $\mathbb{R}^d$ oblika $[2^j k_1, 2^j(k_1+1)\rangle \times [2^j k_2, 2^j(k_2+1)\rangle \times \cdots \times [2^j k_n, 2^j(k_n+1)\rangle$ za neke $j \in \mathbb{Z}$ i $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Kolekciju svih dijadskih kocaka u $\mathbb{R}^d$ ćemo označavati sa $\mathcal{C}$. Prednost dijadskih kocaka je njihovo očigledno svojstvo "ugnježdenosti":

$$\text{za svake } Q_1, Q_2 \in \mathcal{C} \text{ vrijedi ili } Q_1 \subset Q_2 \text{ ili } Q_1 \supset Q_2 \text{ ili } Q_1 = Q_2 \text{ ili } Q_1 \cap Q_2 = \emptyset.$$

Kasnije će nam dobro doći i sljedeća jednostavna pomoćna tvrdnja.

Lema 4.3.

(a) Svaki omeđeni otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}^d$ se može prikazati u obliku $U = \bigcup_j Q_j$ za neku najviše prebrojivu kolekciju međusobno disjunktnih dijadskih kocaka $\{Q_j\}_j$.

(b) Ako za funkciju $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$, $g \geqslant 0$ i konstantu $C \in [0, +\infty\rangle$ imamo da za svaku $Q \in \mathcal{C}$ vrijedi $[g]_Q \leqslant C$, tada je $g(x) \leqslant C$ za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$.

Dokaz. (a) Promotrimo kolekciju $\mathcal{D} := \{Q \in \mathcal{C} : Q \subseteq U\}$ i neka je $\mathcal{M}$ podkolekcija svih kocaka iz $\mathcal{D}$ koje su maksimalne obzirom na relaciju $\subseteq$. Očigledno je svaka točka $x \in U$ sadržana u nekoj kocki iz $\mathcal{D}$ pa imamo $U = \cup\mathcal{D} = \bigcup_{Q\in\mathcal{D}} Q$. Osim toga za svaku $Q \in \mathcal{D}$ postoji $\widetilde{Q} \in \mathcal{M}$ takva da je $Q \subseteq \widetilde{Q}$, jer bi inače postojao beskonačni strogo rastući niz dijadskih kocaka sadržanih u U, što je u kontradikciji s njegovom ograničenosti. Zaključujemo $\cup\mathcal{D} = \cup\mathcal{M}$. Konačno, svake dvije kocke iz $\mathcal{M}$ su disjunktne, jer bi u protivnom jedna bila sadržana u drugoj, što proturiječi maksimalnosti. Dakle, naprosto kocke iz $\mathcal{M}$ proizvoljno uredimo u (konačni ili beskonačni) niz $Q_1, Q_2, \ldots$.

(b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\delta > 0$ takav da je $|\{g \geqslant C+\delta\}| > 0$. Zbog regularnosti Lebesgueove mjere možemo naći kompaktni skup $K \subseteq \{g \geqslant C+\delta\}$ takav da je $\eta := |K| > 0$ te potom omeđeni otvoreni skup $U \supseteq K$ takav da je $|U| < (1 + \frac{\delta}{C+1})|K|$. Prema (a) dijelu se skup U može rastaviti u najviše prebrojivu uniju kolekcije disjunktnih dijadskih kocaka $\{Q_j\}_j$. Po pretpostavci imamo

$$\int_U g(x)dx = \sum_j |Q_j|[f]_{Q_j} \leqslant C \sum_j |Q_j| = C|U| < (C+\delta)|K|,$$

dok je s druge strane

$$\int_U g(x)dx \geqslant \int_K g(x)dx \geqslant (C+\delta)|K|,$$

što nas dovodi do kontradikcije. □

Sljedeći korisni rezultat se može naći u većini udžbenika iz harmonijske analize, poput [Duo01] i [Ste70]. Napomenimo unaprijed da njegov jednostavni dokaz sugerira mnogo više od možda isprva nesugestivnih uvjeta (D1)–(D10) iz njegovog iskaza.

Teorem 4.4. (Calderón-Zygmundova dekompozicija L^1 funkcije)
Za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ i svaki $\alpha > 0$ postoje funkcija $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ te najviše prebrojivo mnogo disjunktnih dijadskih kocaka $\{Q_j\}_j$ i Borel-izmjerivih funkcija $\{b_j\}_j$, $b_j \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ tako da vrijedi:

(D1) $f = g + \sum_j b_j$,

(D2) $|g(x)| = |f(x)| \leqslant \alpha$ *za g.s.* $x \notin \bigcup_j Q_j$,

(D3) $|g(x)| \lesssim_d \alpha$ *za g.s.* $x \in \bigcup_j Q_j$, (D4) $\|g\|_{\mathrm{L}^2}^2 \lesssim_d \alpha \|f\|_{\mathrm{L}^1}$,

(D5) $\big|\bigcup_j Q_j\big| \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1}$,

(D6) $b_j(x) = 0$ *za svaki* j *te* $x \notin Q_j$,

(D7) $[|b_j|]_{Q_j} \lesssim_d \alpha$ *za svaki* j,

(D8) $[b_j]_{Q_j} = 0$ *za svaki* j,

(D9) $[|f|]_{Q_j} \sim_d \alpha$ *za svaki* j,

(D10) $|Q_1| \geqslant |Q_2| \geqslant \cdots$ *te* $\lim_j |Q_j| = 0$ *u slučaju beskonačne kolekcije.*

Pribrojnik g u dekompoziciji (D1) se često naziva "dobar dio", dok za $\sum_j b_j$ kažemo da je "loš dio" od f. Dobar dio se nalazi u svim L^p prostorima za $1 \leqslant p \leqslant \infty$, dok je loš dio koncentriran na skupu dovoljno male mjere. Napomenimo da je moguće da je loš dio jednak $\mathbf{0}$, tj. dozvoljavamo da uopće nema niti kocaka Q_j niti funkcija b_j.

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{D}$ familiju svih dijadskih kocaka Q koje zadovoljavaju $[|f|]_Q > \alpha$. Primijetimo da kocke iz $\mathcal{D}$ ne mogu biti po volji velike zbog

$$|Q| < \alpha^{-1} \int_Q |f(x)| dx \leqslant \alpha^{-1} \|f\|_{\mathrm{L}^1}.$$

Potom označimo sa $\mathcal{M}$ familiju svih maksimalnih kocaka u $\mathcal{D}$ u smislu skupovne inkluzije i to će nam biti tražene kocke Q_j. Opet imamo $\cup\mathcal{M} = \cup\mathcal{D}$, kocke iz $\mathcal{M}$ su disjunktne te

$$\Big|\bigcup_{Q\in\mathcal{M}} Q\Big| = \sum_{Q\in\mathcal{M}} |Q| \leqslant \alpha^{-1} \sum_{Q\in\mathcal{M}} |Q|[|f|]_Q = \alpha^{-1} \int_{\cup\mathcal{M}} |f| \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1},$$

što je upravo (D5). Posebno vidimo da postoji samo konačno mnogo kocaka iz $\mathcal{M}$ iste veličine pa sve kocke iz $\mathcal{M}$ možemo urediti $Q_1, Q_2, \ldots$ kao u (D10). Zbog maksimalnosti dijadska kocka koja sadrži Q_j i ima dvostruko dulji brid, označimo ju $\widetilde{Q}_j$, više ne leži u $\mathcal{D}$ pa je

$$\int_{Q_j} |f| \leqslant \int_{\widetilde{Q}_j} |f| = 2^d |Q_j| [|f|]_{\widetilde{Q}_j} \leqslant 2^d |Q_j| \alpha \ \Rightarrow\ [|f|]_{Q_j} \leqslant 2^d \alpha,$$

što daje (D9). Za svaki j definiramo

$$b_j(x) := \begin{cases} f(x) - [f]_{Q_j} & \text{za } x \in Q_j, \\ 0 & \text{za } x \notin Q_j \end{cases}$$

pa i (D6) vrijedi po definiciji. U svrhu dokaza od (D7) primijetimo

$$\int_{Q_j} |b_j| \leqslant \int_{Q_j} |f| + [|f|]_{Q_j} |Q_j| \leqslant 2^{d+1} \alpha |Q_j|,$$

a za (D8) napišimo

$$\int_{Q_j} b_j = \int_{Q_j} f - \frac{1}{|Q_j|}\Big(\int_{Q_j} f\Big)|Q_j| = 0.$$

Konačno definiramo $g := f - \sum_j b_j$, tj.

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{za } x \notin \bigcup_j Q_j, \\ [f]_{Q_j} & \text{za } x \in Q_j, \end{cases}$$

tako da je (D1) ispunjeno već po samoj konstrukciji. Kako je prosjek od $|f|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q_j)}$ po svakoj dijadskoj kocki najviše α, možemo primijeniti lemu 4.3(b) i dobiti da je ta funkcija g.s. manja ili jednaka α, a kako se još f i g podudaraju na $\mathbb{R}^d \setminus (\cup_j Q_j)$, zaključujemo da vrijedi (D2). Provjera od (D3) za $x \in Q_j$ glasi

$$|g(x)| \leqslant [|f|]_{Q_j} \leqslant 2^d\alpha,$$

dok (D4) slijedi iz računa:

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \int_{\cup_j Q_j} |g|^2 + \int_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q_j)} |g|^2 &\overset{\text{(D2),(D3)}}{\lesssim} \alpha^2\Big|\bigcup_j Q_j\Big| + \alpha\int_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q_j)} |f| \\ &\overset{\text{(D5)}}{\lesssim} \alpha^2\alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1} + \alpha\|f\|_{\mathrm{L}^1} \lesssim \alpha\|f\|_{\mathrm{L}^1}. \end{aligned}$$

□

Teorem 4.5.

(a) Svaki L^2*-omeđeni Calderón-Zygmundov operator* T *se može proširiti do omeđenog linearnog operatora sa* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *u* $\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R}^d)$*, tj.*

$$|\{|Tf| > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \tag{4.6}$$

za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *i* $\alpha > 0$*. Implicitna konstanta ovisi samo o* $\|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}$*,* d*,* γ *i implicitnim konstantama za* K *iz* (K1)–(K3).

(b) Ako je T *neki* L^2*-omeđeni Calderón-Zygmundov operator i* $p \in \langle 1, \infty\rangle$*, onda se* T *može proširiti do omeđenog linearnog operatora na* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$*, tj.*

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \tag{4.7}$$

za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$*. Gornja implicitna konstanta ovisi samo o* p*,* $\|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}$*,* d*,* γ *i konstantama iz* (K1)–(K3).

Dokaz. (a) Iskoristimo Calderón-Zygmundovu dekompoziciju za funkciju f i broj $\alpha > 0$ kao u iskazu propozicije. Teorem 4.4 daje familije kocaka $\{Q_j\}_j$ i funkcija $\{b_j\}_j$ koje udovoljavaju svojstvima (D1)–(D10). Za svaki j neka je Q'_j kocka s istim središtem kao i Q_j, ali $1+2\sqrt{d}$ puta duljim bridom. Tada vrijedi

$$\Big|\bigcup_j Q'_j\Big| \leqslant \sum_j |Q'_j| \sim_d \sum_j |Q_j| = \Big|\bigcup_j Q_j\Big| \overset{\text{(D5)}}{\leqslant} \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1}. \tag{4.8}$$

Neka je

$$E := \big\{x\in\mathbb{R}^d \setminus \big(\textstyle\bigcup_j Q'_j\big) \ : \ |(Tf)(x)|>\alpha\big\},$$

zatim stavimo $b := \sum_j b_j$ pa dalje označimo

$$E_1 := E\cap\{|Tg|>\tfrac{\alpha}{2}\}, \qquad E_2 := E\cap\{|Tb|>\tfrac{\alpha}{2}\}.$$

Zbog $f=g+b$ je $E=E_1\cup E_2$. Sada ćemo ocijeniti mjere skupova E_1 i E_2.

Radi omeđenosti od T na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ je

$$\|Tg\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}\|g\|_{\mathrm{L}^2} \overset{\text{(D4)}}{\lesssim} \|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}\,\alpha^{1/2}\|f\|_{\mathrm{L}^1}^{1/2}$$

pa Markov-Čebiševljeva nejednakost (1.14) daje

$$|E_1| \lesssim \alpha^{-2}\|Tg\|_{\mathrm{L}^2}^2 \lesssim \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1}. \tag{4.9}$$

Nadalje ocjenjujemo $|E_2|$. Radi $\sum_j |b_j| \leqslant |f|+|g|$, $f,g\in\mathrm{L}^2$ i (D10) red $\sum_j b_j = b$ očigledno konvergira u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ pa zbog L^2-neprekidnosti od T vrijedi $\sum_j Tb_j = Tb$ u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Prelaskom na podniz koji konvergira g.s., korištenjem Fatouove leme te primjenom leme 4.2 na funkciju b_j dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q'_j)} |(Tb)(x)|\,dx &\leqslant \sum_j \int_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q'_j)} |(Tb_j)(x)|\,dx \leqslant \sum_j \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'_j} |(Tb_j)(x)|\,dx \\
&= \sum_j \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'_j} \Big|\int_{Q_j} K(x,y)b_j(y)dy\Big|\,dx \\
&\overset{\text{(D8)}}{=} \sum_j \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'_j} \Big|\int_{Q_j} (K(x,y)-K(x,y_j))\,b_j(y)\,dy\Big|\,dx \\
&\leqslant \sum_j \int_{Q_j} \Big(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'_j} |K(x,y)-K(x,y_j)|\,dx\Big)\,|b_j(y)|\,dy,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

gdje y_j označava središte kocke Q_j. Primijetimo da iz uvjeta na jezgru (K3) integriranjem i prelaskom na polarne koordinate slijedi

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant 2|y-y_j|\}} |K(x,y)-K(x,y_j)|\,dx \\
&\overset{(K3)}{\lesssim} |y-y_j|^{\gamma} \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^d:|x-y|\geqslant 2|y-y_j|\}} \frac{dx}{|x-y|^{d+\gamma}} \\
&\sim_d |y-y_j|^{\gamma} \int_{2|y-y_j|}^{+\infty} \frac{r^{d-1}dr}{r^{d+\gamma}} = \frac{1}{\gamma 2^{\gamma}} \sim_{\gamma} 1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Primijetimo da za $x\notin Q_j'$ i $y\in Q_j$ vrijedi

$$|x-y| \geqslant \tfrac{1}{2}\big(\ell(Q_j')-\ell(Q_j)\big) = \tfrac{1}{2}2\sqrt{d}\,\ell(Q_j) \geqslant 2|y-y_j|.$$

Iz (4.10) i (4.11) imamo

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q_j')} |Tb| \lesssim \sum_j \|b_j\|_{\mathrm{L}^1} \overset{(D7)}{\lesssim} \alpha \sum_j |Q_j| \overset{(D5)}{\lesssim} \|f\|_{\mathrm{L}^1}$$

pa iz Markov-Čebiševljeve nejednakosti dobivamo

$$|E_2| \leqslant \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^d\setminus(\cup_j Q_j')} |Tb| \lesssim \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1}. \tag{4.12}$$

Konačno, zbrajanjem (4.8)), (4.9) i (4.12) proizlazi slaba ocjena (4.6).

(b) Iz dijela (a) znamo da je T slabo L^1 ograničen, a po pretpostavci je T ograničen na L^2. Iz Marcinkiewiczevog teorema interpolacije (korolar 2.13) i napomene 2.14 slijedi (4.7) za sve $p\in\langle 1,2\rangle$.

Uzmimo sada $p\in\langle 2,\infty\rangle$. Iz zadatka 4.1 znamo da je dualni operator T^{τ} također Calderón-Zygmundov s istom operatorskom normom na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i istim konstantama za jezgru pa možemo primijeniti prethodno zaključivanje na T^{τ} i p' te dobiti

$$\|T^{\tau} f\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

Iz dualnosti $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)^* \cong \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)$ i komentara s kraja odjeljka 2.1 konačno slijedi (4.7). $\square$

Sva ta proširenja su međusobno kompatibilna na presjecima domena. Preciznije, ako je $f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)\cap\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ za neke $p,q\in\langle 1,\infty\rangle$ tada možemo naći niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ koji konvergira prema f i u L^p i u L^q. U oba proširenja je Tf definirano kao limes $\lim_{n\to\infty} Tf_n$, koji postoji u obje norme pa mu i vrijednosti moraju biti g.s. jednake.

Primijetimo da smo u (4.11) zapravo dokazali

$$\text{(H1)} \qquad \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant 2|x-x'|\}} |K(x,y)-K(x',y)|\,dy \lesssim 1 \text{ za } x,x'\in\mathbb{R}^d,$$

$$\text{(H2)} \qquad \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|x-y|\geqslant 2|y-y'|\}} |K(x,y)-K(x,y')|\,dx \lesssim 1 \text{ za } y,y'\in\mathbb{R}^d.$$

Ta svojstva od K se zovu *Hörmanderovi*[5] *uvjeti* i ona (kao što smo vidjeli) mogu nadomjestiti uvjete (K2) i (K3).

Previše bi bilo od operatora T očekivati (jaku) ograničenost na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$; ona ne vrijedi čak ni specijalno za Hilbertovu transformaciju; vidjeti primjer 4.9(a) u idućem odjeljku.

4.3. Hilbertova transformacija

Kao što smo već bili naveli, Hilbertova transformacija je inicijalno definirana kao linearni operator $H\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})\to\mathrm{L}^1_\mathrm{lok}(\mathbb{R})$ zadan formulom

$$(Hf)(x) := \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}\,:\,|x-y|\geqslant\varepsilon\}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,|t|\geqslant\varepsilon\}} f(x-t)\,\frac{dt}{t} \tag{4.13}$$

za proizvoljni $x\in\mathbb{R}$. Za funkciju $f\in\mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ egzistencija gornjeg limesa i lokalna integrabilnost od Hf slijede iz propozicije 4.1.

Pokažimo najprije da se Hilbertova transformacija može definirati i nešto drugačijom formulom.

Lema 4.6. *Za $f\in\mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ i $x\in\mathbb{R}$ vrijedi*

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\frac{t\,dt}{t^2+\varepsilon^2}.$$

Dokaz. Zapravo trebamo dokazati

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\,dt - \int_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,|t|\geqslant\varepsilon\}} f(x-t)\,\frac{1}{t}\,dt\Big) = 0. \tag{4.14}$$

Označimo $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(t) := \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} & \text{ako je } |t|<1,\\ \frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t} & \text{ako je } |t|\geqslant 1\end{cases}$$

i za $\varepsilon>0$ stavimo $\varphi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\varphi\big(\frac{t}{\varepsilon}\big)$, tj.

$$\varphi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} & \text{ako je } |t|<\varepsilon,\\ \frac{t}{t^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{t} & \text{ako je } |t|\geqslant \varepsilon.\end{cases}$$

[5] Lars Valter Hörmander (1931–2012), švedski matematičar.

Lako se vidi $|\varphi(t)| \leqslant \frac{1}{t^2+1}$ za sve $t \in \mathbb{R}$, a zbog neparnosti imamo $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = 0$. Zato za $x \in \mathbb{R}$ izraz na lijevoj strani od (4.14) postaje

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x-\varepsilon s) - f(x)\big)\varphi(s)ds.$$

Kako je

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \big(f(x-\varepsilon s) - f(x)\big) = 0, \quad \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty, \quad \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1} < +\infty,$$

primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(f * \varphi_\varepsilon)(x) = 0$. $\square$

Kao direktnu posljedicu posljednjeg prikaza pokazat ćemo vezu Hilbertove transformacije s *Cauchyjevim integralom* duž realnog pravca. Za $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ je formulom

$$(Cf)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt; \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

definirana holomorfna funkcija Cf na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Da bismo se "vratili" na realni pravac promatramo limese

$$(C_\downarrow f)(x) := \lim_{y\to 0^+}(Cf)(x+iy), \quad (C_\uparrow f)(x) := \lim_{y\to 0^-}(Cf)(x+iy)$$

u svim točkama $x \in \mathbb{R}$ za koje oni postoje.

Korolar 4.7. (Plemeljeve[6] formule) *Za svake $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{R}$ postoje gornji limesi te vrijedi*

$$(C_\downarrow f)(x) + (C_\uparrow f)(x) = i(Hf)(x), \quad (C_\downarrow f)(x) - (C_\uparrow f)(x) = f(x),$$

tj.

$$(C_\downarrow f)(x) = \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{i}{2}(Hf)(x), \quad (C_\uparrow f)(x) = -\tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{i}{2}(Hf)(x).$$

Dokaz. Iz računa

$$(Cf)(x+i\varepsilon) + (Cf)(x-i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} f(t)\Big(\frac{1}{t-x-i\varepsilon} + \frac{1}{t-x+i\varepsilon}\Big)dt$$
$$= \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\frac{x-t}{(x-t)^2+\varepsilon^2}\,dt = \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\,dt$$

i leme 4.6 slijedi

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\big((Cf)(x+i\varepsilon) + (Cf)(x-i\varepsilon)\big) = i(Hf)(x).$$

[6] Josip Plemelj (1873–1967), slovenski matematičar.

S druge strane imamo

$$(Cf)(x+i\varepsilon)-(Cf)(x-i\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}f(t)\Big(\frac{1}{t-x-i\varepsilon}-\frac{1}{t-x+i\varepsilon}\Big)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}f(t)\,\frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}f(x-t)\,\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}\,dt,=\int_{\mathbb{R}}f(x-\varepsilon s)\,\frac{ds}{\pi(s^2+1)},$$

tj.

$$(Cf)(x+i\varepsilon)-(Cf)(x-i\varepsilon)-f(x)=\int_{\mathbb{R}}\big(f(x-\varepsilon s)-f(x)\big)\frac{ds}{\pi(s^2+1)}$$

pa teoremom o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\big((Cf)(x+i\varepsilon)-(Cf)(x-i\varepsilon)-f(x)\big)=0.$$

Sada je jasno da postoje i definicijski limesi od $C_{\downarrow}$ i $C_{\uparrow}$ te da vrijede sve četiri navedene formule. □

Osnovna svojstva Hilbertove transformacije su sakupljena u idućem teoremu.

Teorem 4.8.

(a) Za $f\in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ i g.s. $\xi\in\mathbb{R}$ vrijedi $\widehat{(Hf)}(\xi)=(-i\operatorname{sgn}\xi)\,\hat{f}(\xi)$.

(b) Hilbertova transformacija se proširuje do izometrije na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, koju ponovno označavamo s H i za koju ostaje vrijediti formula iz (a) dijela. Štoviše, imamo $H^*H=HH^*=I$ i $H^*=-H$.

(c) Za svaki $p\in\langle 1,\infty\rangle$ se H proširuje do omeđenog linearnog operatora na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, kojeg ponovno označavamo s H. Štoviše, vrijedi $H^2=-I$, tj. preciznije, za $p\in\langle 1,\infty\rangle$ i $f\in\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ imamo $H(Hf)=-f$.

Dokaz. (a) Označimo $\psi_\varepsilon(x):=\frac{x}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$ i $\Psi_\varepsilon(\xi):=(-i\operatorname{sgn}\xi)\,e^{-2\pi\varepsilon|\xi|}$ za $\varepsilon>0$. Tvrdimo da je $\hat{\psi}_\varepsilon=\Psi_\varepsilon$, a zahvaljujući Fourierovoj formuli inverzije (2.30) možemo radije provjeriti $\check{\Psi}_\varepsilon=\psi_\varepsilon$, što je pak sasvim direktno zbog $\Psi_\varepsilon\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

$$\check{\Psi}_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}}(-i\operatorname{sgn}\xi)\,e^{-2\pi\varepsilon|\xi|}e^{2\pi ix\xi}\,d\xi$$
$$=i\int_{-\infty}^{0}e^{2\pi\xi(\varepsilon+ix)}\,d\xi-i\int_{0}^{+\infty}e^{2\pi\xi(-\varepsilon+ix)}\,d\xi$$
$$=\frac{i}{2\pi(\varepsilon+ix)}-\frac{i}{2\pi(\varepsilon-ix)}=\frac{x}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}=\psi_\varepsilon(x)$$

Neka je funkcija $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definirana kao inverzna Fourierova transformacija od $\xi \mapsto (-i \operatorname{sgn} \xi)\hat{f}(\xi)$. Iz Plancherelovog identiteta, formule (2.33) i teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|g - f * \psi_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\hat{g} - \hat{f}\Psi_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \big(1 - e^{-2\pi\varepsilon|\xi|}\big)^2 d\xi = 0.$$

Dakle, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f * \psi_\varepsilon = g$ u L^2 normi, a po lemi 4.6 znamo $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f * \psi_\varepsilon = Hf$ g.s. Zato mora vrijediti $Hf = g$ g.s., a posebno je onda i $(Hf)\widehat{\ }(\xi) = \hat{g}(\xi) = (-i \operatorname{sgn} \xi)\hat{f}(\xi)$.

(b) Radi (a) dijela i Planchereovog identiteta imamo za bilo koju $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R})$

$$\|Hf\|_{\mathrm{L}^2} = \|(Hf)\widehat{\ }\|_{\mathrm{L}^2} = \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} = \|f\|_{\mathrm{L}^2}$$

pa je jasno da se H jednoznačno proširuje do omeđenog linearnog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, koji je štoviše i izometrija. Kako su

$$f \mapsto (Hf)\widehat{\ } \quad \text{i} \quad f \mapsto (-i \operatorname{sgn} \xi)\hat{f}(\xi)$$

dva omeđena linearna operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, zaključujemo da formula iz (a) doista ostaje vrijediti za sve $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Osim toga Plancherelov identitet (preciznije, njegova varijanta za skalarni produkt, a ne samo normu, koja lagano slijedi tzv. polarizacijom) još za $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ daje

$$\begin{aligned}\langle H^* f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} &= \langle f, Hg\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle \hat{f}, (Hg)\widehat{\ }\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{(-i \operatorname{sgn} \xi)\hat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (i \operatorname{sgn} \xi)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = -\langle (Hf)\widehat{\ }, \hat{g}\rangle_{\mathrm{L}^2} = -\langle Hf, g\rangle_{\mathrm{L}^2},\end{aligned}$$

odakle slijedi $H^* = -H$. Na vrlo sličan način dobivamo $H^*H = HH^* = I$.

(c) Kako je H posebni slučaj L^2-ograničenog Calderón-Zygmundovog operatora, iz teorema 4.5 znamo da se H jednoznačno proširuje do omeđenog linearnog operatora na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Za $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ već iz (b) dijela vidimo da je $H(Hf) = -f$, a radi neprekidnosti proširenja od H i gustoće ta jednakost ostaje vrijediti i za sve $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. □

Kao posljedicu korolara 4.7 i teorema 4.8 dobivamo da su linearni operatori $C_\downarrow$ i $C_\uparrow$ također ograničeni na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ za $1 < p < \infty$. U svjetlu prethodnog teorema razumno je zapitati se kolika je točno norma Hilbertove transformacije na Lebesgueovim prostorima. Pichorides [Pic72] je dokazao

$$\|H\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} = \operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi}{2p^*}\Big); \quad p \in \langle 1, \infty\rangle,\ p^* := \max\{p, p'\}.$$

Primijetimo da Hilbertova transformacija komutira s translacijama i dilatacijama, tj.

$$H(\mathrm{T}_c f) = \mathrm{T}_c(Hf), \quad H(\mathrm{D}_a f) = \mathrm{D}_a(Hf) \tag{4.15}$$

za $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, $c \in \mathbb{R}$ i $a > 0$. Obje formule su očigledne po definiciji (4.13) za $f \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$, a općenito slijede po neprekidnosti proširenja i operatora T_c, D_a na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Vrijedi i svojevrsni obrat te činjenice, koji dodatno ističe posebnu ulogu Hilbertove transformacije; vidjeti zadatak 4.5.

Primjer 4.9. (a) Pokažimo da za $f(x) := \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ vrijedi $(Hf)(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}$. Ne smijemo koristiti definicijsku formulu (4.13) jer f nema kompaktan nosač. Zato sasvim isto kao u dokazu teorema 4.8(a) dobijemo $\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ pa iz dokazane formule slijedi $(Hf)\widehat{\ } = \Psi_1 = \hat{\psi}_1$, tj. $(Hf)(x) = \psi_1(x) = \frac{x}{\pi(x^2+1)}$. Primijetimo $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $Hf \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ pa vidimo da H nije ograničena na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

(b) Pokažimo da je

$$(H\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \ln\Big|\frac{x-a}{x-b}\Big|. \tag{4.16}$$

To bi direktno slijedilo iz definicije (4.13) kada bismo smjeli uvrstiti $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$,

$$(H\mathbb{1}_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{p.v.} \int_a^b \frac{dt}{x-t},$$

ali (barem zasad) ne znamo da ista definicijska relacija vrijedi za funkcije koje čak nisu niti glatke. Zato radije koristimo formulu iz teorema 4.8(a). Primijetimo da je zbog (4.15) dovoljno provjeriti (4.16) za $a = -1$, $b = 1$.

Po definiciji Fourierove transformacije je

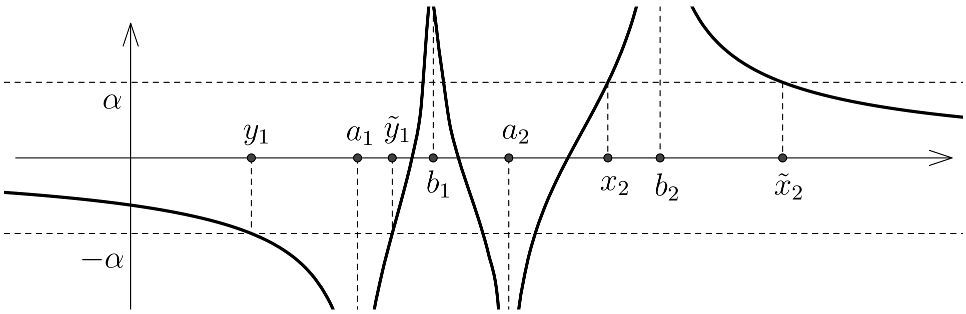
$$\hat{\mathbb{1}}_{[-1,1]}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{-1}^{1} \cos(2\pi x\xi) dx = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

S druge strane, označimo li $g(x) := \frac{1}{\pi} \ln\big|\frac{x+1}{x-1}\big|$, možemo zahvaljujući korolaru 3.12 i neparnosti od g uz pomoć malo kompleksne analize lako opravdati sljedeći račun za g.s. $\xi > 0$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} g(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = (-i) \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} g(x) \sin(2\pi x\xi)\, dx \\
&= \frac{-i}{\pi} \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0^+}} \int_{[-R,-1-\delta]\cup[-1+\delta,1-\delta]\cup[1+\delta,R]} \ln\Big|\frac{x+1}{x-1}\Big| \sin(2\pi x\xi)\, dx \\
&= \frac{i}{\pi^2\xi} \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0^+}} \int_{[-R,-1-\delta]\cup[-1+\delta,1-\delta]\cup[1+\delta,R]} \frac{\cos(2\pi x\xi)}{x^2-1}\, dx = \frac{-i\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.
\end{aligned}$$

Zato je $(H\mathbb{1}_{[-1,1]})\widehat{\ }(\xi) = \hat{g}(\xi)$ pa doista imamo $H\mathbb{1}_{[-1,1]} = g$.

Na kraju ovog odjeljka još dokažimo jednu zanimljivu formulu Steina i Weissa [SW59], koja govori o distribuciji Hilbertove transformacije karakteristične funkcije izmjerivog skupa. Jednostavniji dokaz čiju varijantu navodimo predložio je Zygmund u [Zyg71].



Slika 4.1: Graf funkcije $H\mathbb{1}_E$.

Teorem 4.10. *Ako je $E \subseteq \mathbb{R}$ izmjerivi skup konačne mjere, tada za svaki $\alpha \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi*

$$\big|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}\big| = \frac{2|E|}{\operatorname{sh}(\pi\alpha)}.$$

Dokaz. Najprije tvrdnju dokazujemo za konačne unije intervala, tj. za skupove oblika $E = \bigcup_{j=1}^{n}\langle a_j, b_j\rangle$, pri čemu su $n \in \mathbb{N}$ i

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n.$$

Iz primjera 4.9(b) i linearnosti dobivamo izraz

$$(H\mathbb{1}_E)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \ln\Big|\frac{x-a_j}{x-b_j}\Big| = \frac{1}{\pi}\ln\Big|\prod_{j=1}^{n}\frac{x-a_j}{x-b_j}\Big|.$$

Lako je skicirati tok te funkcije; pogledajte sliku 4.1. Neka su:

- $x_1, \ldots, x_n$ rješenja jednadžbe $\prod_{j=1}^{n}\frac{x-a_j}{x-b_j} = -e^{\pi\alpha}$,
- $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ rješenja jednadžbe $\prod_{j=1}^{n}\frac{x-a_j}{x-b_j} = e^{\pi\alpha}$,
- $y_1, \ldots, y_n$ rješenja jednadžbe $\prod_{j=1}^{n}\frac{x-a_j}{x-b_j} = e^{-\pi\alpha}$,
- $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ rješenja jednadžbe $\prod_{j=1}^{n}\frac{x-a_j}{x-b_j} = -e^{-\pi\alpha}$.

Primijetimo da zapravo trebamo izračunati

$$\big|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}\big| = (\tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{x}_n) - (x_1 + \cdots + x_n) + (\tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n) - (y_1 + \cdots + y_n).$$

Prva jednadžba se lako transformira u algebarsku jednadžbu

$$\prod_{j=1}^{n}(x-a_j) + e^{\pi\alpha}\prod_{j=1}^{n}(x-b_j) = 0$$

pa jedna od Vièteovih[7] formula daje

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_n + e^{\pi\alpha}(b_1 + \cdots + b_n)}{1 + e^{\pi\alpha}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi\alpha}{2}}(a_1 + \cdots + a_n) + e^{\frac{\pi\alpha}{2}}(b_1 + \cdots + b_n)}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Sasvim analogno dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{x}_n &= \frac{-e^{-\frac{\pi\alpha}{2}}(a_1 + \cdots + a_n) + e^{\frac{\pi\alpha}{2}}(b_1 + \cdots + b_n)}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi\alpha}{2}}, \\ y_1 + \cdots + y_n &= \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{2}}(a_1 + \cdots + a_n) - e^{-\frac{\pi\alpha}{2}}(b_1 + \cdots + b_n)}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi\alpha}{2}}, \\ \tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n &= \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{2}}(a_1 + \cdots + a_n) + e^{-\frac{\pi\alpha}{2}}(b_1 + \cdots + b_n)}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Zato možemo pisati

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{x}_n) - (y_1 + \cdots + y_n) &= \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \Big) \operatorname{cth} \frac{\pi\alpha}{2} = |E| \operatorname{cth} \frac{\pi\alpha}{2}, \\ (x_1 + \cdots + x_n) - (\tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n) &= \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \Big) \operatorname{th} \frac{\pi\alpha}{2} = |E| \operatorname{th} \frac{\pi\alpha}{2} \end{aligned}$$

pa tvrdnja konačno slijedi iz $\operatorname{cth} \frac{\pi\alpha}{2} - \operatorname{th} \frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{\operatorname{sh}(\pi\alpha)}$.

Sada ćemo postupno proširiti tu tvrdnju na generalne izmjerive skupove E. Prije svega dokažimo sljedeće: Ako tvrdnja vrijedi za sve članove niza izmjerivih skupova $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ i ako je E izmjerivi skup takav da imamo $\lim_{n\to\infty} |E_n \triangle E| = 0$, tada tvrdnja vrijedi i za sam skup E. (Ovdje $A \triangle B$ označava simetričnu razliku, tj. $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.) Primijetimo da radi teorema 4.8(b) imamo

$$\| H(\mathbb{1}_{E_n} - \mathbb{1}_E) \|_{\mathrm{L}^2}^2 = \| \mathbb{1}_{E_n} - \mathbb{1}_E \|_{\mathrm{L}^2}^2 = |E_n \triangle E|.$$

Fiksirajmo $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ te uzmimo neke $\varepsilon \in \langle 0, \alpha \rangle$ i $n \in \mathbb{N}$. Korištenjem očigledne skupovne relacije

$$\big\{ |H\mathbb{1}_E| > \alpha \big\} \subseteq \big\{ |H\mathbb{1}_{E_n}| > \alpha - \varepsilon \big\} \cup \big\{ |H\mathbb{1}_{E_n} - H\mathbb{1}_E| > \varepsilon \big\},$$

pretpostavke na E_n i Markov-Čebiševljeve nejednakosti ocjenjujemo

$$\big| \big\{ |H\mathbb{1}_E| > \alpha \big\} \big| \leqslant \frac{2|E_n|}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha - \varepsilon))} + \frac{|E_n \triangle E|}{\varepsilon^2}. \tag{4.17}$$

[7]François Viète (1540–1603), francuski matematičar.

Sasvim analogno dobivamo

$$\big|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}\big| \geqslant \frac{2|E_n|}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha+\varepsilon))} - \frac{|E_n \triangle E|}{\varepsilon^2}. \tag{4.18}$$

U (4.17) i (4.18) najprije pustimo limes kada $n \to \infty$, a potom kada $\varepsilon \to 0^+$. Zaključujemo da doista vrijedi $|\{|H\mathbb{1}_E| > \alpha\}| = \frac{2|E|}{\operatorname{sh}(\pi\alpha)}$, tj. ispunjena je tvrdnja i za skup E.

Proizvoljni otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}$ je najviše prebrojiva unija disjunktnih otvorenih intervala. Dakle, možemo U prikazati kao rastuću uniju niza $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, pri čemu su V_n konačne unije intervala. Već smo provjerili da tvrdnja vrijedi za skupove V_n pa po prethodnoj napomeni ona vrijedi i za skup U. Proizvoljni skup konačne mjere $E \subseteq \mathbb{R}$ se zbog regularnosti Lebesgueove mjere može do na skup mjere 0 prikazati kao presjek niza otvorenih skupova konačne mjere $(U_n)_{n=1}^{\infty}$. Netom smo pokazali da tvrdnja vrijedi za skupove U_n pa po prethodnoj napomeni ona vrijedi i za skup E. □

Kombinirajući teorem 4.10 s realnom interpolacijom mogli bismo dati alternativni dokaz omeđenosti od H na L^p prostorima, jedino što bi u tom slučaju argument bio kružni, jer smo kod aproksimacije na kraju dokaza teorema 4.10 trebali neku vrstu neprekidnosti.

* * *

Premda smo dosad u ovom odjeljku radili isključivo u jednoj dimenziji, vratimo se na već spomenute Rieszove transformacije R_j; $j = 1, 2, \ldots, d$, koje su zapravo d-dimenzionalni analogoni Hilbertove transformacije. Može se pokazati (i ostavljeno je čitatelju kao zadatak 4.7) da za Rieszove transformacije vrijedi analogon teorema 4.8(a):

$$(R_j f)\widehat{\ }(\xi) = c_d \frac{-i\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \tag{4.19}$$

za neku konstantu $c_d \in \langle 0, +\infty\rangle$ te za svaku $f \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ i za g.s. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$. Plancherelov teorem daje ograničenost od R_j na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, a kako je riječ o Calderón-Zygmundovim operatorima, R_j su ograničene i na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$; $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Kao posljedice od (4.19) dobivamo i nekoliko korisnih primjena Rieszovih transformacija.

Propozicija 4.11. *(a) Ako neprekidna proširenja od R_j na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ označimo istim slovom, tada vrijedi*

$$\sum_{j=1}^{d} R_j^2 = -c_d^2\, I_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \sum_{j=1}^{d} \|R_j f\|_{\mathrm{L}^2}^2 = c_d^2\, \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2;\ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

(b) Za $f \in \mathrm{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ te $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ vrijedi

$$\partial_j \partial_k f = -c_d^{-2} R_j R_k \Delta f, \quad \|\partial_j \partial_k f\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{d,p} \|\Delta f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Dio (a) ove propozicije govori o mogućnosti dekompozicije identitete. Prva formula u (b) dijelu izražava proizvoljnu parcijalnu derivaciju drugog reda pomoću Laplasijana, a druga formula se ponekad naziva *eliptička regularnost*.

Dokaz. (a) Računamo:

$$\sum_{j=1}^{d} (R_j^2 f)\widehat{\ }(\xi) \overset{(4.19)}{=} c_d^2 \sum_{j=1}^{d} \frac{-\xi_j^2}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi) = -c_d^2 \hat{f}(\xi),$$

$$\sum_{j=1}^{d} \|(R_j^2 f)\widehat{\ }\|_{\mathrm{L}^2}^2 \overset{(4.19)}{=} c_d^2 \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = c_d^2 \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

(b) Dvostrukom parcijalnom integracijom je lako izračunati Fourierov transformat funkcije $\partial_j \partial_k f$:

$$\begin{aligned} (\partial_j \partial_k f)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_j \partial_k f)(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-2\pi i \xi_j)(-2\pi i \xi_k) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = -4\pi^2 \xi_j \xi_k \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

a posebno imamo i

$$(\Delta f)\widehat{\ }(\xi) = -4\pi^2 \Big(\sum_{j=1}^{d} \xi_j^2 \Big) \hat{f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

Sada je prva tvrdnja očigledna radi

$$c_d^{-2} (R_j R_k g)\widehat{\ }(\xi) \overset{(4.19)}{=} \frac{-\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{g}(\xi),$$

a druga slijedi iz ograničenosti Rieszovih transformacija na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Kakva je veza Rieszovih transformacija s Rieszovim potencijalom? Uzmimo operator I_s iz primjera 3.1 u posebnom slučaju $s = 1$ te derivirajmo njegovu definicijsku formulu ne opravdavajući račun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-1}} dy &= \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \Big) f(y) dy \\ &= \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{-(d-1)(x_j - y_j)}{|x-y|^{d+1}} f(y) dy. \end{aligned}$$

Dakle, mogli bismo pisati

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (I_1 f)(x) = -(d-1)(R_j f)(x)$$

te

$$\nabla(I_1 f) = -(d-1)\,(R_1 f, \ldots, R_d f).$$

U dimenziji $d = 2$, ako $(I_1 f)(x)$ predstavlja elektrostatski potencijal u točki x, onda je vektor $\big((R_1 f)(x), (R_2 f)(x)\big)$ do na konstantu jednak elektrostatskom polju u toj istoj točki.

* * *

Zadatak 4.3.

(a) Dokažite *Cotlarovu*[8] *formulu*

$$(Hf)^2 = f^2 + 2H(f\,Hf)$$

za $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$.

(b) Dokažite

$$\|H\|_{\mathrm{L}^{2p}\to\mathrm{L}^{2p}} \leqslant \|H\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} + \sqrt{\|H\|^2_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} + 1}$$

za $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

(c) Korištenjem (b) dijela i izometričnosti Hilbertove transformacije dajte alternativni dokaz omeđenosti od H na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

Zadatak 4.4.

(a) Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ takva da je i $Hf \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, dokažite da mora biti $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$.

(b) Nađite primjer funkcije $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ koja nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$ i za koju je $Hf \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Zadatak 4.5. Ako je $T\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ omeđeni linearni operator koji komutira s translacijama i dilatacijama, tada je $T = \alpha I + \beta H$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Uputa: Promotrite linearni operator $S\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definiran sa $Sg := (T\check{g})\widehat{\ }$, koji radi leme 3.6 komutira s modulacijama i dilatacijama. Uzmite $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ takvu da je $\hat{g} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ te pogodno odabranu $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i opravdajte formalni račun

$$\begin{aligned}(g\varphi)(x) &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi\Big)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)(\mathrm{M}_\xi\varphi)(x)d\xi \\ \Rightarrow S(g\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) S(\mathrm{M}_\xi\varphi)(x)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)(\mathrm{M}_\xi S\varphi)(x)d\xi = g(x)(S\varphi)(x),\end{aligned}$$

iz kojeg zaključite da je S oblika $Sg = mg$ za neku $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Potom još iskoristite invarijantnost na dilatacije kako biste dobili da je m konstantna na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$. Alternativno, čitatelj koji poznaje osnove teorije distribucija može pogledati u [SW71] i [Ste70].

[8] Mischa Cotlar (1912–2007), ukrajinski matematičar.

Zadatak 4.6. Ako je μ konačna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, onda se Hilbertova transformacija of μ po analogiji definira kao

$$(\mathrm{H}\mu)(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\{t \in \mathbb{R} \,:\, |x-t| \geqslant \varepsilon\}} \frac{1}{x-t} \, d\mu(t).$$

Uzmimo različite realne točke $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i stavimo $\mu = \sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j}$, tj. μ je zbroj Diracovih masa koncentriranih u navedenim točkama. Za svaki $\alpha \in \langle 0, +\infty \rangle$ dokažite jednakost

$$\big| \big\{ |\mathrm{H}\mu| > \alpha \big\} \big| = \frac{2n}{\pi\alpha}.$$

Zadatak 4.7. Neka su $R_1, \ldots, R_d$ Rieszove transformacije. Dokažite da postoji konstanta $c_d \in \langle 0, +\infty \rangle$ (ovisna samo o dimenziji prostora) takva da je

$$(R_j f)\widehat{\ }(\xi) = -ic_d \frac{\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi); \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}, \ \ j = 1, \ldots, d$$

za svaku $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{R}^d)$.

Zadatak 4.8. Neka je B Ahlfors-Beurlingova transformacija definirana krajem odjeljka 4.1. Dokažite da za $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{C})$ vrijedi

$$(Bf)\widehat{\ }(\xi) = \big(\overline{\xi}/\xi \big) \hat{f}(\xi); \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

pa zaključite da se B proširuje do linearne izometrije na $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$.

Napomena: Zanimljivo je spomenuti kako do danas nije poznata točna norma od B na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{C})$ za $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Poznata Iwaniecova[9] slutnja [BMS97] glasi $\|B\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} = p^* - 1$, pri čemu je $p^* := \max\{p, p'\}$.

4.4. Poissonov integral

U ovom odjeljku svakoj funkciji iz $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ pridružit ćemo jednu harmonijsku funkciju na gornjoj poluravnini. Potom ćemo pokazati vezu Hilbertove transformacije i operacije tzv. konjugiranja pripadnih harmonijskih funkcija. To je treći način na koji se prirodno dolazi do operatora H.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje, tj. otvoren i povezan skup. Za kompleksnu funkciju $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ kažemo da je *harmonijska* ako zadovoljava Laplaceovu[10] jednadžbu:

$$\triangle u = 0 \text{ na } \Omega, \quad \text{tj. } (\partial_x^2 + \partial_y^2) u(x,y) = 0 \text{ za svaku točku } (x,y) \in \Omega.$$

Očigledno je kompleksna funkcija harmonijska ako i samo ako su harmonijske njezin realni i imaginarni dio. Nadalje, poznata je činjenica da je realna funkcija na jednostavno

[9] Tadeusz Iwaniec (1947), poljsko-američki matematičar.
[10] Pierre-Simon Laplace (1749–1827), francuski matematičar, fizičar i astronom.

povezanom području harmonijska ako i samo je ona realni dio neke holomorfne funkcije. Odavde posebno proizlazi da su harmonijske funkcije automatski klase C^{∞}.

Pretpostavimo sada dodatno da je područje Ω jednostavno povezano i uzmimo dvije harmonijske funkcije $u, v\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Kažemo da je v *harmonijski konjugat* od u ako te funkcije zadovoljavaju Cauchy-Riemannove[11] jednadžbe:

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y), \quad \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y) \quad \text{za svaku točku } (x,y) \in \Omega.$$

Zbog pretpostavke na Ω za fiksiranu funkciju u taj sustav ima rješenje v, koje je jedinstveno do na aditivnu konstantu. (Ako je v harmonijski konjugat od u, tada je to svakako i funkcija $v + C$ za bilo koji $C \in \mathbb{C}$.) Ukoliko su u, v realne, iz osnovnog kursa kompleksne analize znamo da one zadovoljavaju gornje jednadžbe ako i samo ako je $u + iv$ holomorfna funkcija na Ω. Na taj način možemo naći mnogo harmonijski konjugiranih parova. Naprimjer,

$$P(x,y) := \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}, \quad Q(x,y) := \frac{x}{\pi(x^2+y^2)}$$

su harmonijske funkcije na gornjoj poluravnini $\mathbb{R} \times \langle 0, +\infty\rangle$ i Q je harmonijski konjugat od P. To lako provjerimo tako da uočimo da je

$$P(x,y) + iQ(x,y) = \frac{y+ix}{\pi(x^2+y^2)} = \frac{i(x-iy)}{\pi(x+iy)(x-iy)} = \frac{i}{\pi(x+iy)}$$

holomorfna funkcija u varijabli $z = x + iy$ na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. One imaju i posebna imena; P zovemo Poissonova jezgra, a Q konjugirana Poissonova jezgra (pridružene gornjoj poluravnini).

Uzmimo sada $p \in [1, \infty]$ i $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Formulom

$$u(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)P(x-t,y)dt \quad \text{za svaku točku } (x,y) \in \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty\rangle,$$

tj.

$$u(\cdot, y) = f * P(\cdot, y) \quad \text{za svaki } y \in \langle 0, +\infty\rangle$$

definirana je harmonijska funkcija na gornjoj poluravnini, $u\colon \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{C}$. Naime, $P(\cdot, y)$ se svakako nalazi u prostoru $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})$ pa je $u(x,y)$ dobro definirani kompleksni broj, a harmoničnost od u lako slijedi iz harmoničnosti od P i rezultata o deriviranju integrala. Kažemo da je u *Poissonov integral* od f. Sasvim analogno može se uzeti $p \in [1, \infty\rangle$ i $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ te staviti

$$v(x,y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)Q(x-t,y)dt \quad \text{za svaku točku } (x,y) \in \mathbb{R} \times \langle 0, +\infty\rangle.$$

[11] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), njemački matematičar.

Opet se lako vidi da je tom formulom definirana harmonijska funkcija $v\colon \mathbb{R}\times\langle 0,+\infty\rangle \to \mathbb{C}$ i ona je, štoviše, harmonijski konjugat od u. Nadalje, među svim harmonijskim konjugatima od u funkcija v je onaj koji iščezava u beskonačnosti, tj. $\lim_{|(x,y)|\to\infty} v(x,y) = 0$.

Sasvim legitimno pitanje je vezano uz invertiranje pridruživanja $f \mapsto u$: može li se u gotovo svakoj točki $x \in \mathbb{R}$ vrijednost $f(x)$ rekonstruirati iz $u(x,y)$ puštanjem $y \to 0^+$. Odgovor je potvrdan, kao što smo već bili najavili u tvrdnji (4) iz odjeljka 1.1. To će biti posljedica općenitijih rezultata iz odjeljka 6.1; pogledajte formulu (6.3). Zasad se zadovoljimo rekonstrukcijom neprekidno diferencijabilne funkcije s kompaktnim nosačem.

Dakle, pretpostavimo dodatno $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$. Iz dokaza Plemeljevih formula (korolar 4.7) znamo da je

$$\begin{aligned}(Cf)(x+iy) - (Cf)(x-iy) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)P(t,y)dt = u(x,y),\\ (Cf)(x+iy) + (Cf)(x-iy) &= i\int_{\mathbb{R}} f(x-t)Q(t,y)dt = iv(x,y)\end{aligned}$$

te da je

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+} \big((Cf)(x+iy) - (Cf)(x-iy)\big) &= f(x),\\ \lim_{y\to 0^+} \big((Cf)(x+iy) + (Cf)(x-iy)\big) &= i(Hf)(x).\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x), \quad \lim_{y\to 0^+} v(x,y) = (Hf)(x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Prvi limes možemo interpretirati: pridruživanje $f \mapsto u$ se za funkcije iz $\mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ invertira uzimanjem vertikalnog limesa u točkama realnog pravca. Drugi limes možemo rezimirati riječima: Hilbertova transformacija od f može se računati tako da se najprije izračuna njezin Poissonov integral $u = u(x,y)$, potom izračuna harmonijski konjugat $v = v(x,y)$ koji iščezava u beskonačnosti te, konačno, prijeđe na limes kada $y \to 0^+$.

Vidimo da je Hilbertova transformacija usko vezana uz operaciju konjugiranja harmonijskih funkcija. Time je ilustrirana korisnost harmonijskih funkcija kod proučavanja singularnih integrala. Ipak, analogne reprezentacije ne možemo očekivati za integralne operatore iz neke široke klase, poput općenitih Calderón-Zygmundovih operatora.

* * *

Zadatak 4.9. Izračunajte Poissonov integral funkcije:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, (b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Rješenje:

(a) $u(x,y) = \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}$, (b) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$.

Zadatak 4.10. Neka je u realna harmonijska funkcija na Ω i v njezin harmonijski konjugat. Za bilo koje $a, b \in \mathbb{R}$ promotrimo *nivo-krivulje*

$$\Gamma_1 = \{z \in \Omega : u(z) = a\}, \quad \Gamma_2 = \{z \in \Omega : v(z) = b\}.$$

(Pretpostavimo da su neprazne i nedegenerirane u svakoj točki, tj. $\nabla u \neq \mathbf{0}$ na Γ_1 i $\nabla v \neq \mathbf{0}$ na Γ_2.) Pokažite da se u svakoj točki presjeka od Γ_1 i Γ_2 te dvije krivulje sijeku pod pravim kutom.

Zadatak 4.11. Neka je $\mathcal{P}_1$ tzv. *eliptički pramen kružnica*, definiran kao skup svih kružnica koje prolaze kroz točke $(-1,0)$ i $(1,0)$, a $\mathcal{P}_2$ tzv. *hiperbolički pramen kružnica*, koji se sastoji od svih kružnica dobivenih kao geometrijska mjesta točaka ravnine s fiksnim omjerom udaljenosti od točaka $(-1,0)$ i $(1,0)$.

(a) Nađite holomorfnu funkciju $f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takvu da $\mathcal{P}_1$ čini nivo-skupove od $\mathrm{Re} f$, a $\mathcal{P}_2$ čini nivo-skupove od $\mathrm{Im} f$.

(b) Zaključite da su dva spomenuta pramena kružnica ortogonalno spregnuti, tj. svaka kružnica iz prvog pramena siječe pod pravim kutom svaku kružnicu iz drugog pramena. Razmislite i o elementarnom dokazu te tvrdnje.

Zadatak 4.12. Izračunajte harmonijske konjugate sljedećih funkcija na zadanim područjima.

(a) $u(x,y) = e^x \sin y \quad$ na $\mathbb{R}^2$,

(b) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + i(x+y) \quad$ na $\langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle$,

(c) $u(x,y) = x(x^2-3y^2) + i(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \quad$ na $\mathbb{R}^2$,

(d) $u(re^{2\pi i\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2} \quad$ na $\mathrm{B}(\mathbf{0},1)$.

Rješenje:

(a) $v(x,y) = -e^x \cos y + C$,

(b) $v(x,y) = -2\mathrm{arctg}\frac{x}{y} + i(-x+y) + C$,

(c) $v(x,y) = y(3x^2-y^2) + i4xy(x^2-y^2) + C$,

(d) $v(re^{2\pi i\theta}) = \frac{2r\sin(2\pi\theta)}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2} + C$.

4.5. Fourierovi množitelji

Za bilo koju funkciju $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ je zahvaljujući Plancherelovom identitetu dobro definiran ograničeni linearni operator M_m,

$$M_m \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \quad M_m f := (m\hat{f})^\vee.$$

Za operator M_m kažemo da je *Fourierov množitelj* (ili kratko samo *množitelj*), a za funkciju m da je njegov *simbol*. Ponekad se radi Fourierove formule inverzije piše integralni izraz

$$(M_m f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,$$

ali s njime valja biti oprezan, jer on ima smisla samo kada je $m\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Primjer 4.12. Iz teorema 4.8(a) znamo da je Hilbertova transformacija množitelj čiji simbol je $m(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi$.

Lema 4.13. $\|M_m\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} = \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Dokaz. Jedna nejednakost je očigledna zbog Plancherelovog identiteta:

$$\|M_m f\|_{\mathrm{L}^2} = \|(M_m f)^\wedge\|_{\mathrm{L}^2} = \|m\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} = \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}\|f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Dakle, $\|M_m\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} \leqslant \|m\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty$.

Za dokaz obratne nejednakosti pretpostavimo da je desna strana strogo pozitivna i uzmimo η takav da je $0 < \eta < \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Postoji skup konačne i pozitivne mjere E takav da je $E \subseteq \{|m| > \eta\}$ te uzmimo funkciju $f := \check{\mathbb{1}}_E$. Tada imamo

$$\|M_m f\|_{\mathrm{L}^2} = \|m\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} = \Big(\int_E |m(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \geqslant \eta|E|^{1/2} = \eta\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} = \eta\|f\|_{\mathrm{L}^2}$$

pa zbog proizvoljnosti od η slijedi $\|M_m\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} \geqslant \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}$. □

Primijetimo da je svaki množitelj invarijantan na translacije, tj.

$$M_m(\mathrm{T}_c f) = \mathrm{T}_c(M_m f)$$

za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i $c \in \mathbb{R}^d$, što slijedi iz leme 3.6 i računa

$$\big(M_m \mathrm{T}_c f\big)^\wedge = m(\mathrm{T}_c f)^\wedge = m\mathrm{M}_{-c}\hat{f} = \mathrm{M}_{-c}(m\hat{f}) = \mathrm{M}_{-c}(M_m f)^\wedge = \big(\mathrm{T}_c M_m f\big)^\wedge.$$

Zapravo je moguće pokazati i obrat: svaki ograničeni linearni operator $T \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ koji komutira s translacijama je ovog oblika, tj. postoji jedinstvena $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da vrijedi $(Tf)^\wedge = m\hat{f}$ za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Dokaz se može naći u knjizi [SW71], ali iziskuje familijarnost s temperiranim distribucijama, koje ovdje ne obrađujemo. Ideju alternativnog dokaza smo spomenuli u uputi zadatka 4.5. U svakom slučaju, mi radi jednostavnosti simbol $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ stavljamo već u samu definiciju množitelja.

Osnovno pitanje u teoriji množitelja je: ako je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ fiksiran, za koje simbole m vrijedi $\|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} < +\infty$, tj. $\|M_m f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{m,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$ za sve $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$? Pokazuje se da je to pitanje vrlo teško, nije u potpunosti razriješeno i ne očekuje se da je moguće naći jednostavnu karakterizaciju, već se nastoje dati neki dovoljni uvjeti. Počnimo zato radije sa sasvim jednostavnim opservacijama.

Propozicija 4.14. *Za svaki eksponent $p \in \langle 1, \infty \rangle$, svake simbole $m, m_1, m_2 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, svako invertibilno afino preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ te svaki skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi*

(a) $\|M_{\alpha m}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} = |\alpha| \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}$,

(b) $\|M_{\overline{m}}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} = \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}$,

(c) $\|M_m\|_{\mathrm{L}^{p'} \to \mathrm{L}^{p'}} = \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}$,

(d) $\|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} \geqslant \|M_m\|_{\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2} = \|m\|_{\mathrm{L}^\infty}$,

(e) $\|M_{m_1 m_2}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} \leqslant \|M_{m_1}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} \|M_{m_2}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}$,

(f) $\|M_{m \circ A}\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} = \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}$.

Dokaz. Dio (a) je očigledan, dok za dio (b) najprije primijetimo da funkcija $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ ima Fourierovu transformaciju $\big(\tilde{f}\,\big)\widehat{\ } = \overline{\hat{f}}$, iz čega slijedi

$$(M_{\overline{m}} f)\widehat{\ } = \overline{m} \hat{f} = \overline{m \big(\tilde{f}\,\big)\widehat{\ }} = \overline{\big(M_m \tilde{f}\,\big)\widehat{\ }},$$

tj.

$$M_{\overline{m}} f = \big(M_m \tilde{f}\,\big)\tilde{\ }$$

pa imamo

$$\frac{\|M_{\overline{m}} f\|_{\mathrm{L}^p}}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}} = \frac{\big\|M_m \tilde{f}\big\|_{\mathrm{L}^p}}{\big\|\tilde{f}\big\|_{\mathrm{L}^p}}.$$

Nadalje, za (c) dio primijetimo da za $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\langle M_m f, g \rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\overline{m}(\xi) \hat{g}(\xi)} d\xi = \langle f, M_{\overline{m}} g \rangle_{\mathrm{L}^2}$$

pa je $M_{\overline{m}}$ hermitski adjungirani operator od M_m i tvrdnja slijedi iz razmatranja krajem odjeljka 2.1. Ovime je odmah dokazan i dio (d) jer kompleksna interpolacija i (c) dio daju

$$\|M_m\|_{\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2} \leqslant \max\big\{ \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}, \|M_m\|_{\mathrm{L}^{p'} \to \mathrm{L}^{p'}} \big\} = \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p}.$$

Za dio (e) jedino treba primijetiti $M_{m_1 m_2} = M_{m_1} M_{m_2}$ i iskoristiti submultiplikativnost operatorske norme. Konačno, u svrhu dokaza (f) dijela naprije pretpostavimo da je A invertibilno linearno preslikavanje i definirajmo operator S_A formulom

$$(\mathrm{S}_A h)(x) := |\det A|^{-1} h\big((A^*)^{-1}x\big); \quad h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Lako je dokazati $(\mathrm{S}_A h)\hat{}(\xi) = \hat{h}(A\xi)$; provjera je direktna zamjenom varijabli u slučaju $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, a općenito slijedi argumentom gustoće. Osim toga,

$$\|\mathrm{S}_A h\|_{\mathrm{L}^p} = |\det A|^{-1/p'} \|h\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Sada za $g = (\mathrm{S}_A)^{-1} f$, tj. $f = \mathrm{S}_A g$ možemo računati

$$(M_{m\circ A} f)\hat{}(\xi) = m(A\xi)\hat{f}(\xi) = m(A\xi)\hat{g}(A\xi) = (M_m g)\hat{}(A\xi) = (\mathrm{S}_A M_m g)\hat{}(\xi)$$

pa je

$$M_{m\circ A} f = \mathrm{S}_A M_m \mathrm{S}_A^{-1} f$$

te

$$\frac{\|M_{m\circ A} f\|_{\mathrm{L}^p}}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}} = \frac{\|M_m \mathrm{S}_A^{-1} f\|_{\mathrm{L}^p}}{\|\mathrm{S}_A^{-1} f\|_{\mathrm{L}^p}}.$$

Općenito invertibilno afino preslikavanje A možemo prikazati kao kompoziciju invertibilnog linearnog preslikavanja i translacije, a za translaciju za vektor $c \in \mathbb{R}^d$ je tvrdnja jednostavna:

$$\begin{aligned}
&(M_{\mathrm{T}_c m} f)\hat{} = (\mathrm{T}_c m)\hat{f} = (\mathrm{T}_c m)\mathrm{T}_c\big((\mathrm{M}_{-c} f)\hat{}\big) = \mathrm{T}_c\big(M_m \mathrm{M}_{-c} f\big)\hat{} = \big(\mathrm{M}_c M_m \mathrm{M}_{-c} f\big)\hat{},\\
&\Rightarrow M_{\mathrm{T}_c m} f = \mathrm{M}_c M_m \mathrm{M}_{-c} f,
\end{aligned}$$

$$\frac{\|M_{\mathrm{T}_c m} f\|_{\mathrm{L}^p}}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}} = \frac{\|M_m \mathrm{M}_{-c} f\|_{\mathrm{L}^p}}{\|\mathrm{M}_{-c} f\|_{\mathrm{L}^p}}. \qquad \square$$

Iz prethodne propozicije posebno vidimo da za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ vektorski prostor

$$\mathcal{M}_p := \big\{ m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \,:\, \|M_m\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} < +\infty \big\}$$

uz normu $m \mapsto \|M_m\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}$ postaje komutativna Banachova algebra s jedinicom $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$.

Primjer 4.15. Ako uzmemo $d = 1$ i $m = \mathbb{1}_{[-R,R]}$ za $R > 0$, tada pripadni množitelj M_m postaje tzv. *Fourierov parcijalni integral*

$$(S_R f)(x) := \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi; \quad x \in \mathbb{R},\ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \tag{4.20}$$

koji je kontinuirana varijanta parcijalne sume Fourierovog reda. Pokažimo da se on može izraziti pomoću Hilbertove transformacije. Preciznije, vrijedi formula

$$S_R = \tfrac{i}{2}\big(\mathrm{M}_{-R} H \mathrm{M}_R - \mathrm{M}_R H \mathrm{M}_{-R}\big). \tag{4.21}$$

Dovoljno je provjeriti jednakost Fourierovih transformacija obiju strana primijenjenih na funkciji $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{i}{2}\big(\mathrm{M}_{-R} H \mathrm{M}_R f\big)\widehat{\ }(\xi) - \tfrac{i}{2}\big(\mathrm{M}_R H \mathrm{M}_{-R} f\big)\widehat{\ }(\xi) \\
&= \tfrac{i}{2}\big(- i \operatorname{sgn}(\xi + R)\big)\hat{f}(\xi - R + R) - \tfrac{i}{2}\big(- i \operatorname{sgn}(\xi - R)\big)\hat{f}(\xi + R - R) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\operatorname{sgn}(\xi + R) - \operatorname{sgn}(\xi - R)\big)\hat{f}(\xi) = \mathbb{1}_{[-R,R]}(\xi)\hat{f}(\xi) \ \text{ g.s.}
\end{aligned}$$

Time je doista pokazano (4.21).

Teorem 4.16.

(a) *Za* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *i* $R > 0$ *vrijedi* $\|S_R\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \lesssim_p 1$*, tj. Fourierovi parcijalni integrali su uniformno ograničeni na* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*. Posebno se svaki* S_R *proširuje po neprekidnosti sa* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *na cijeli* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*.*

(b) (Rieszov teorem) *Za svaku* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*,* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *vrijedi* $\lim_{R\to+\infty} S_R f = f$ *po* L^p*-normi.*

Dio (b) ovog teorema je kontinuirani analogon teorema o konvergenciji Fourierovog reda po normi prema polaznoj funkciji. Uočite konceptualnu razliku između teorema 4.16, koji govori o rekonstrukciji funkcije iz svojeg Fourierovog transformata, i rezultata poput korolara 3.12, koji samo govori o računanju Fourierove transformacije dane funkcije. U teoremu 4.16(b) se konvergencija po L^p-normi može zamijeniti konvergencijom g.s., ali je to iznimno težak rezultat makar za bilo koji odabir eksponenta $p \in \langle 1, \infty\rangle$, kojeg ćemo komentirati mnogo kasnije u skripti.

Dokaz. (a) Zbog formule (4.21) i izometričnosti modulacija imamo

$$\begin{aligned}
\|S_R\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} &\leqslant \tfrac{1}{2}\|\mathrm{M}_{-R}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}\|H\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}\|\mathrm{M}_R\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\|\mathrm{M}_R\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}\|H\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}\|\mathrm{M}_{-R}\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \\
&\leqslant \|H\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} < +\infty.
\end{aligned}$$

Alternativno, mogli smo primijetiti omeđenost od S_1 (ponovno koristeći ograničenost od H) pa iskoristiti propoziciju 4.14(f).

(b) Skup funkcija f takvih da je $\hat{f} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ je gust u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Čim je R dovoljno velik da vrijedi $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq \langle -R, R\rangle$ po Fourierovom teoremu inverzije imamo $S_R f = f$ pa je konvergencija $\lim_{R\to+\infty} S_R f = f$ sasvim trivijalna za takve funkcije. Radi uniformne ograničenosti iz (a) dijela možemo primijeniti teorem 1.1. □

Obrazložimo jednu vrlo korisnu dekompoziciju operatora identitete na množitelje.

Primjer 4.17. (Littlewood-Paleyeva dekompozicija)
Neka je $\varphi\colon [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ fiksirana padajuća funkcija klase C^∞ takva da je $\varphi|_{[0,1]} \equiv 1$ i $\varphi|_{[2,+\infty\rangle} \equiv 0$. Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ definirajmo funkciju $\psi_j \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ formulom

$$\psi_j(\xi) := \varphi\big(2^{-j}|\xi|\big) - \varphi\big(2^{-j+1}|\xi|\big).$$

Dakle, ψ_j je nenegativna i ima nosač sadržan u kuglinom vijencu $\{\xi \in \mathbb{R}^d : 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\}$, a cijeli sistem $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ čini glatku particiju jedinice, tj.

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi) = 1 \quad \text{za } \xi \neq \mathbf{0}. \tag{4.22}$$

Uočimo još da vrijedi $\psi_j(\xi) = \psi_0(2^{-j}\xi)$, odakle slijedi

$$|(\partial^{\mathbf{k}}\psi_j)(\xi)| \lesssim_\varphi (2^{-j})^{|\mathbf{k}|} \quad \text{za } 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}, \tag{4.23}$$

pri čemu za $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d)$ kratko pišemo $\partial^{\mathbf{k}} := \partial_1^{k_1}\cdots\partial_d^{k_d}$ i $|\mathbf{k}| := k_1 + \cdots + k_d$. Primijetimo usput i da su za svaki $\xi \in \mathbb{R}^d$ najviše dva pribrojnika u gornjoj sumi različita od 0 pa radi trivijalne nejednakosti

$$a,b \geqslant 0,\ a+b=1 \ \Rightarrow\ \tfrac{1}{2} \leqslant a^2+b^2 \leqslant 1$$

imamo i

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi)^2 \sim 1 \quad \text{za } \xi \neq \mathbf{0}. \tag{4.24}$$

Pripadni množitelji M_{ψ_j}; $j \in \mathbb{Z}$ se nazivaju *Littlewood-Paleyeve projekcije* te zahvaljujući Plancherelovom teoremu i (4.22) za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ imamo

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} M_{\psi_j} f = f, \tag{4.25}$$

pri čemu konvergenciju shvaćamo u L^2 normi i u proizvoljnom poretku.

* * *

Sada ćemo iskazati i dokazati jedan općeniti i posebno praktični rezultat koji daje dovoljne uvjete za L^p-omeđenost množitelja, a zasniva se na izloženoj teoriji Calderón-Zygmundovih operatora.

Teorem 4.18. (Mikhlinov[12] teorem o množitelju) *Pretpostavimo da je simbol $m \in \mathrm{C}^{d+2}(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ i da zadovoljava ocjene*

$$|(\partial^{\mathbf{k}} m)(\xi)| \lesssim |\xi|^{-|\mathbf{k}|}; \quad \text{za} \ \ 0 \leqslant |\mathbf{k}| \leqslant d+2, \tag{4.26}$$

tzv. homogene ocjene za sve parcijalne derivacije reda najviše $d+2$. Tada je množitelj M_m ograničen na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$; $p \in \langle 1,\infty\rangle$ i vrijedi

$$\|M_m\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \lesssim_{d,p} 1.$$

[12] Solomon Grigorjevič Mikhlin (1908–1990), sovjetski matematičar.

Uvjeti (4.26) su nam naprosto pokrate za

$$\left|\partial_{\xi_1}^{k_1}\cdots\partial_{\xi_d}^{k_d} m(\xi_1,\ldots,\xi_d)\right| \lesssim |(\xi_1,\ldots,\xi_d)|^{-(k_1+\cdots+k_d)}$$

za svake $k_1,\ldots,k_d\in\mathbb{N}_0$ takve da je $k_1+\cdots+k_d\leqslant d+2$. Može se pokazati da je zapravo dovoljno imati spomenute ocjene od m za derivacije reda najviše $\lfloor d/2\rfloor+1$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je M_m Calderón-Zygmundov operator. Radi leme 4.13 će on automatski biti L^2-ograničen s normom $\|M_m\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}\lesssim 1$ te ćemo moći primijeniti teorem 4.5(b).

Iskoristimo dekompoziciju (4.22) iz primjera 4.17 tako da imamo

$$m(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} m_j(\xi), \quad m_j(\xi):=m(\xi)\psi_j(\xi).$$

Primjena Leibnizove[13] formule za derivaciju produkta i (4.23) nam za $0\leqslant|\mathbf{k}|\leqslant d+2$ i $2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}$ daje

$$\begin{aligned}|(\partial^{\mathbf{k}}m_j)(\xi)| &\leqslant \sum_{\mathbf{l}}\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{l}}|(\partial^{\mathbf{l}}m)(\xi)|\,|(\partial^{\mathbf{k}-\mathbf{l}}\psi_j)(\xi)|\\ &\lesssim_\varphi \sum_{\mathbf{l}}\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{l}}|\xi|^{-|\mathbf{l}|}(2^{-j})^{|\mathbf{k}|-|\mathbf{l}|}\lesssim_{\varphi,d} 2^{-j|\mathbf{k}|}.\end{aligned}$$

Sada stavimo $K_j:=\check{m}_j$, tj.

$$K_j(x):=\int_{\mathbb{R}^d} m_j(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,$$

tako da je odmah

$$|K_j(x)|\leqslant\|m_j\|_{\mathrm{L}^1}\lesssim_{\varphi,d}(2^j)^d\|m_j\|_{\mathrm{L}^\infty}\lesssim 2^{dj}.$$

Neka je bez smanjenja općenitosti x_1 najveća koordinata od x po apsolutnoj vrijednosti. Parcijalnom integracijom $d+2$ puta pak dobivamo

$$K_j(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\partial_{\xi_1}^{d+2}m_j(\xi)(2\pi i x_1)^{-d-2}e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,$$

odakle je

$$|K_j(x)|\lesssim_d\|\partial_1^{d+2}m_j\|_{\mathrm{L}^1}|x|^{-d-2}\lesssim_{\varphi,d}2^{dj}2^{-(d+2)j}|x|^{-d-2}.$$

Zajedno imamo ocjenu

$$|K_j(x)|\lesssim_{\varphi,d}|x|^{-d}\min\{(2^j|x|)^d,(2^j|x|)^{-2}\}. \tag{4.27}$$

[13]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), njemački matematičar i filozof.

Gradijent od K je

$$(\nabla K_j)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} 2\pi i\xi m_j(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

pa na sasvim analogan način, ovog puta derivirajući $m(\xi)\xi$ i koristeći $|\xi| \sim 2^j$ na nosaču od m_j, dobivamo

$$|(\nabla K_j)(x)| \lesssim_{\varphi,d} |x|^{-d-1} \min\{(2^j|x|)^{d+1}, (2^j|x|)^{-1}\}. \tag{4.28}$$

Primijetimo da zbog (4.27) i (4.28) redovi $\sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j$ i $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \nabla K_j$ konvergiraju apsolutno i uniformno na svakom kompaktu u $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dakle, funkcija

$$K\colon \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{C}, \quad K(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j(x)$$

je klase C^1 i zadovoljava ocjene

$$|K(x)| \lesssim_{\varphi,d} |x|^{-d} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \min\{(2^j|x|)^d, (2^j|x|)^{-2}\} \lesssim |x|^{-d},$$
$$|(\nabla K)(x)| \lesssim_{\varphi,d} |x|^{-d-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \min\{(2^j|x|)^{d+1}, (2^j|x|)^{-1}\} \lesssim |x|^{-d-1}.$$

Vidimo da je $(x,y) \mapsto K(x-y)$ zapravo standardna jezgra koja čak zadovoljava jače uvjete (K2') i (K3').

Konačno, uzmimo neke $f,g \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ s disjunktnim nosačima. Zahvaljujući Plancherelovom identitetu uz oznaku $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ možemo računati

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} (M_m f)(x) g(x) dx = \langle M_m f, \overline{g}\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle (M_m f)\widehat{\ }, (\overline{g})\widehat{\ }\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi)\hat{f}(\xi)\hat{g}(-\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi)\overline{(\tilde{f})\widehat{\ }(\xi)(\overline{g})\widehat{\ }(\xi)} d\xi = \langle m, (\tilde{f} * \overline{g})\widehat{\ }\rangle_{\mathrm{L}^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle m_j, (\tilde{f} * \overline{g})\widehat{\ }\rangle_{\mathrm{L}^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle K_j, \tilde{f} * \overline{g}\rangle_{\mathrm{L}^2} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} K_j(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z) g(x) dx \Big) dz = [y = x - z] = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x-y) f(y) g(x) dx dy.
\end{aligned}$$

Dakle, doista je M_m Calderón-Zygmundov operator kojem je pridružena jezgra $(x,y) \mapsto K(x-y)$. □

Uočite da su komplikacije u dokazu i potreba korištenja Littlewood-Paleyeve dekompozicije uzrokovane nemogućnošću da unaprijed zaključimo kako je $\check{m}$ uopće lokalno integrabilna funkcija izvan dijagonale, a kamoli da za nju provjerimo željene ocjene (K1), (K2'), (K3').

Kako funkcija $m(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi$ zadovoljava ocjene (4.26) jer su joj sve derivacije (osim "nulte") čak identički jednake 0, teorem 4.18 daje još jedan dokaz ograničenosti

Hilbertove transformacije na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$; $1 < p < \infty$. Mikhlinov teorem nam ustvari govori kako smijemo dozvoliti kontroliranu singularnost simbola m u jednoj točki (ovdje je to ishodište, ali izbor je nebitan), a da množitelj M_m još uvijek bude ograničen na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$.

Hörmander je primijetio da se pretpostavke teorema 4.18 mogu oslabiti. Tako je npr. u jednoj dimenziji od $m \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ dovoljno tražiti $|m(\xi)| \lesssim 1$ i

$$\int_{\langle -2R,-R\rangle\cup\langle R,2R\rangle} |m'(\xi)|^2 \, d\xi \lesssim R^{-1} \quad \text{za svaki } R > 0.$$

Ideja dokaza je da se opet pokaže kako je M_m Calderón-Zygmundov operator, ali ovog puta u općenitijem smislu: s jezgrom koja zadovoljava uvjet (K1) i Hörmanderove uvjete (H1), (H2) s kraja odjeljka 4.2. Nećemo navoditi detalje jer ionako postoji još malo općenitiji rezultat.

Teorem 4.19. (Marcinkiewiczev teorem o množitelju) *Pretpostavimo da simbol m zadovoljava:*

- $m \in \mathrm{C}^1\big(\langle -2^{j+1}, -2^j\rangle \cup \langle 2^j, 2^{j+1}\rangle\big)$ *za svaki* $j \in \mathbb{Z}$,
- $\displaystyle\int_{\langle -2^{j+1},-2^j\rangle\cup\langle 2^j,2^{j+1}\rangle} |m'(\xi)| \, d\xi \lesssim 1$ *za svaki* $j \in \mathbb{Z}$,
- $|m(\xi)| \lesssim 1$.

Tada je množitelj M_m ograničen na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$; $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i vrijedi

$$\|M_m\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \lesssim_p 1.$$

Njegov dokaz izostavljamo i on se može naći u [Ste70].

U teoremu 4.16 smo pokazali ograničenost na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$; $p \in \langle 1, \infty\rangle$ množitelja čiji simbol je karakteristična funkcija intervala $[-R, R]$. Ista tvrdnja vrijedi za sve intervale $I \subseteq \mathbb{R}$ zbog propozicije 4.14(f), čak i neomeđene (tj. oblika $[a, +\infty\rangle$ ili $\langle -\infty, b]$) zbog teorema 4.8(a). Prirodno je zapitati se vrijedi li ista ograničenost i za množitelje u dimenzijama $d \geqslant 2$ čiji simbol je karakteristična funkcija jedinične kugle $\mathrm{B}(\mathbf{0}, 1)$. Na sveopće iznenađenje Fefferman[14] [Fef71] je pokazao da je odgovor negativan: takav množitelj je L^p-ograničen samo za $p = 2$. Kao posljedicu toga i principa uniformne ograničenosti (pogledajte napomenu 1.2) pokazao je i da za $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ konvergencija

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = f(x) \tag{4.29}$$

ne mora vrijediti u L^p normi ako je $p \neq 2$. I dan-danas je otvoren problem (i smatra se vrlo teškim) vrijedi li za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ konvergencija u (4.29) po točkama za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$.

[14] Charles Louis Fefferman (1949), američki matematičar.

* * *

Zadatak 4.13. Pretpostavimo da je simbol m jednak Fourierovom transformatu neke konačne kompleksne mjere μ na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, tj.

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\mu(x); \ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Dokažite da se množitelj M_m proširuje do ograničenog linearnog operatora na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ čija norma je jednaka totalnoj varijaciji od μ.

Napomena: Može se pokazati da vrijedi i obrat, tj. da su svi L^1-ograničeni množitelji tog oblika; vidjeti [SW71].

Zadatak 4.14. Ako je $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funkcija ograničene varijacije, dokažite

$$\|M_m\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \lesssim_p \|m\|_{\mathrm{V}^1} < +\infty \quad \text{za } 1 < p < \infty$$

pa je posebno množitelj M_m ograničen na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$; $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Pritom varijacijsku normu ovog puta definiramo

$$\|m\|_{\mathrm{V}^1} := \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |m(\xi)| + \sup_{\substack{M\in\mathbb{N} \\ \xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_M}} \sum_{j=1}^{M} |m(\xi_{j-1}) - m(\xi_j)|.$$

Uputa: Lako je normalizirati tako da vrijedi $\lim_{\xi\to-\infty} m(\xi) = 0$. Koristeći omeđenost Hilbertove transformacije najprije pokažite da su uniformno omeđeni množitelji sa simbolima $\mathbb{1}_{[\eta,+\infty\rangle}$; $\eta \in \mathbb{R}$, a potom koristeći Lebesgue-Stieltjesov[15] integral

$$m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[\eta,+\infty\rangle}(\xi) dm(\eta)$$

prikažite M_m kao njihovu slabu "superpoziciju":

$$\langle M_m f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} \langle M_{\mathbb{1}_{[\eta,+\infty\rangle}} f, g\rangle_{\mathrm{L}^2}\, dm(\eta).$$

Napomena: Ovaj rezultat nam daje još jedan jednostavni dovoljni uvjet za ograničenost množitelja u jednoj dimenziji.

Zadatak 4.15. Dokažite omeđenost na prostorima $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$; $p \in \langle 1, \infty\rangle$ množitelja čiji simbol je karakteristična funkcija proizvoljnog konveksnog politopa u $\mathbb{R}^d$.

Uputa: Iskoristite propoziciju 4.14(e) i činjenicu da se konveksni politop može prikazati kao presjek konačno mnogo poluprostora.

Napomena: Premda se kugla može "po volji dobro" aproksimirati konveksnim politopima, vidimo da ograničenost pripadnog množitelja nije očuvana tim graničnim procesom. Možemo naslutiti da je poteškoća u kuglinoj zakrivljenosti.

[15] Thomas Joannes Stieltjes (1856–1894), nizozemski matematičar.

4.6. Omeđenost na prostorima H^1 i BMO *

U harmonijskoj analizi postoji uzrečica koja govori da su L^1 i L^∞ "neprirodni" prostori kada su u pitanju singularni integrali, već ih treba nadomjestiti "prirodnijim" modifikacijama H^1 i BMO. Objasnimo stoga pobliže konstrukciju i osnovna svojstva tih dvaju prostora.

Prostor funkcija omeđene srednje oscilacije, kraće *BMO prostor*, u oznaci $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ je vektorski prostor svih lokalno integrabilnih funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \big|f - [f]_Q\big| < +\infty, \tag{4.30}$$

pri čemu supremum uzimamo po svim standardnim kockama Q. Osim toga identificiramo funkcije koje se g.s. razlikuju za konstantu, tako da je $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ zapravo skup takvih klasa ekvivalencije. Uz $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ kao normu $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ ("pocijepan" po konstantnim funkcijama) postaje Banachov prostor. On očigledno sadrži $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ jer imamo $\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 2\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Primjer neograničene funkcije u prostoru $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ je $f(x) := \ln|x|$; provjerite to kao zadatak 4.16(a). Ako u formuli (4.30) uzimamo supremum samo po dijadskim kockama Q, na opisani način ćemo dobiti *dijadski BMO prostor*, kojeg označavamo $\mathrm{BMO}_{\mathrm{d}}(\mathbb{R}^d)$.

Moguće je dokazati (ali mi to ovdje nećemo; vidjeti [Ste93]) da vrijedi *John-Nirenbergova nejednakost*: postoje konstante $A, C \in [0, +\infty\rangle$ takve da za svaku $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, svaku standardnu kocku Q i svaki $\alpha > 0$ vrijedi nejednakost

$$\Big|\Big\{x \in Q : |f(x) - [f]_Q| > \alpha\Big\}\Big| \leqslant C e^{-A\alpha/\|f\|_{\mathrm{BMO}}} |Q|. \tag{4.31}$$

Štoviše, u [GJ78] je pokazano da je najbolji izbor konstante A vezan uz udaljenost funkcije f od L^∞. Čitatelj može pogledati i [NS14] za još jednu zanimljivu karakterizaciju. Iz (4.31) nije teško izvesti L^p karakterizaciju BMO norme:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \sim_p \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q \big|f - [f]_Q\big|^p\Big)^{1/p} \tag{4.32}$$

za $p \in [1, \infty\rangle$; to je ostavljeno kao zadatak 4.17(a). Posebno pogodna može biti ova karakterizacija za $p = 2$ i u mnogim knjigama se upravo ona uzima kao definicija.

Atom je svaka izmjeriva funkcija $a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ za koju postoji standardna kocka Q takva da vrijedi

$$\operatorname{supp} a \subseteq Q, \quad \|a\|_{\mathrm{L}^2(Q)} \leqslant |Q|^{-1/2}, \quad \int_Q a = 0, \tag{4.33}$$

a jednostavna posljedica je $\|a\|_{\mathrm{L}^1(Q)} \leqslant 1$. *Realni (atomarni) Hardyjev prostor*, u oznaci $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$, je Banachov prostor

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) := \Big\{ \sum_{j=1}^\infty \beta_j a_j \,:\, a_j \text{ su atomi},\ \beta_j \in \mathbb{C},\ \sum_{j=1}^\infty |\beta_j| < +\infty \Big\} \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d),$$

uz normu

$$\|f\|_{\mathrm{H}^1} := \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| \,:\, a_j \text{ su atomi},\ \beta_j\in\mathbb{C},\ \sum_{j=1}^{\infty}|\beta_j|<+\infty,\ \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j a_j = f \Big\}.$$

Primijetimo usput da za svaku $f\in\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\|f\|_{\mathrm{H}^1}\geqslant\|f\|_{\mathrm{L}^1}$ i $\int_{\mathbb{R}^d} f = 0$. Postoji nekoliko ekvivalentnih definicija realnog Hardyjevog prostora, vidjeti [Mey92] ili [Ste93], ali nama će biti dovoljna samo ova “atomarna”. Ako u definiciji atoma (4.33) tražimo da kocka Q bude dijadska, onda ćemo na isti način doći do definicije *dijadskog realnog (atomarnog) Hardyjevog prostora*, označenog $\mathrm{H}^1_{\mathrm{d}}(\mathbb{R}^d)$.

Pomalo iznenađujući rezultat je dualnost između prostora $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ te analogno između $\mathrm{H}^1_{\mathrm{d}}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathrm{BMO}_{\mathrm{d}}(\mathbb{R}^d)$. Naime, svaku funkciju $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ možemo shvatiti kao neprekidni linearni funkcional $F_b\colon \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{C}$ koji djeluje po formuli

$$F_b(f) = F_b\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j a_j\Big) := \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\int_{\mathbb{R}^d} a_j b, \tag{4.34}$$

pri čemu definicija ne ovisi o prikazu $f=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j a_j$. Osim toga vrijedi

$$\|F_b\|_{\mathrm{H}^1\to\mathbb{C}} \sim \|b\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{4.35}$$

Obratno, svaki neprekidni linearni funkcional na $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ je tog oblika, za dokaz vidjeti [Mey92]. Napomenimo još da se gornji funkcijski prostori neće promijeniti ako u definicijama umjesto kocaka gledamo npr. kugle.

* * *

Vratimo se na Calderón-Zygmundove operatore.

Teorem 4.20.

(a) Svaki L^2*-ograničeni Calderón-Zygmundov operator* T *se može dodefinirati do omeđenog linearnog operatora sa* $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ *u* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$*.*

(b) Svaki L^2*-ograničeni Calderón-Zygmundov operator* T *se može dodefinirati do omeđenog linearnog operatora sa* $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *u* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$*.*

Dokaz. (a) Uzmimo atom a i standardnu kocku Q takvu da vrijedi (4.33). Ako je Q' kocka s istim središtem ali $1+2\sqrt{d}$ puta duljim bridom, onda možemo računati

$$\|Ta\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{Q'}|Ta| + \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'}|Ta|.$$

S jedne strane je

$$\int_{Q'}|Ta| \leqslant |Q'|^{1/2}\|Ta\|_{\mathrm{L}^2} \lesssim_d |Q|^{1/2}\|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}\|a\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} \lesssim 1,$$

dok radi Hörmanderovog uvjeta kao u dokazu teorema 4.5 imamo (označivši središte kocke Q sa y_Q)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'} |Ta| &= \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'} \Big| \int_Q K(x,y)a(y)dy \Big| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'} \Big| \int_Q (K(x,y) - K(x,y_Q))\, a(y)\, dy \Big| dx \\
&\leqslant \int_Q \Big(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q'} |K(x,y) - K(x,y_Q)|\, dx \Big) |a(y)|\, dy \\
&\overset{\text{(H2)}}{\lesssim} \|a\|_{\mathrm{L}^1(Q)} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Dakle, dokazali smo $\|Ta\|_{\mathrm{L}^1} \lesssim 1$ za svaki atom a, pri čemu implicitna konstanta ovisi samo o $\|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2}$, d, γ i implicitnim konstantama za K. Ako je $f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j a_j$ neki atomarni prikaz funkcije iz H^1, tada red

$$Tf := \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j T a_j$$

konvergira u L^1 te vrijedi

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|\, \|Ta_j\|_{\mathrm{L}^1} \lesssim \sum_{j=1}^{m} |\beta_j|,$$

tj. $\|Tf\|_{\mathrm{L}^1} \lesssim \|f\|_{\mathrm{H}^1}$. Prešutjeli smo jedan tehnički detalj, a to je da Tf ne ovisi o prikazu od f; čitatelj ga može raščistiti uz pomoć [CM97], gdje je formulirana i dokazana upravo ta činjenica.

(b) Iskoristit ćemo dualnost između $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, tj. definicijska jednakost će nam biti

$$(Tf)(g) := (T^\tau g)(f) \quad \text{za } f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d),\ g \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d).$$

Preciznije, za $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ je formulom

$$G_f \colon \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \quad G_f(g) := \int_{\mathbb{R}^d} (T^\tau g) f$$

definiran omeđeni linearni funkcional G_f, jer je po (a) dijelu T^τ omeđen sa $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pa vrijedi

$$|G_f(g)| \leqslant \|T^\tau g\|_{\mathrm{L}^1} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \|T^\tau\|_{\mathrm{H}^1\to\mathrm{L}^1} \|g\|_{\mathrm{H}^1} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}.$$

Zato neka Tf označava BMO funkciju takvu da je $G_f = F_{Tf}$, uz oznaku kao u (4.34). Tada je zbog (4.35) još

$$\|Tf\|_{\mathrm{BMO}} \sim \|G_f\|_{\mathrm{H}^1\to\mathbb{C}} \leqslant \|T^\tau\|_{\mathrm{H}^1\to\mathrm{L}^1} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$$

pa smo dobili i omeđenost sa $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$. □

Ipak moramo primijetiti kako teorem 4.20 još uvijek ne govori o ograničenosti nekih Calderón-Zygmundovih operatora na samim prostorima $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ i $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

Teorem 4.21.

(a) Ako L^2*-ograničeni Calderón-Zygmundov operator* T *zadovoljava* $\int_{\mathbb{R}^d} Ta = 0$ *za svaki atom* a*, tada se* T *proširuje do omeđenog linearnog operatora na* $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$*.*

(b) Ako L^2*-ograničeni Calderón-Zygmundov operator* T *zadovoljava* $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$*, tada se* T *proširuje do omeđenog linearnog operatora na* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$*.*

Nećemo izlagati dokaz, već upućujemo zainteresiranog čitatelja na [CM97] ili [Ste93].

* * *

Zadatak 4.16.

(a) Pokažite da se funkcija $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(x) := \ln|x|$ doista nalazi u prostoru $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

(b) Pokažite da periodična funkcija $f\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{2\pi i k x}$ leži u prostoru $\mathrm{BMO}(\mathbb{R})$.

Zadatak 4.17.

(a) Iz nejednakosti (4.31) izvedite ocjenu (4.32).

(b) Dokažite da red u (4.34) konvergira.

(c) Dokažite (4.35).

4.7. Hinčinova nejednakost i Littlewood-Paleyeva teorija

Sljedeća ocjena je formulirana jezikom elementarne teorije vjerojatnosti.

Teorem 4.22. (Hinčinova[16] nejednakost) *Ako je* $N \in \mathbb{N}$ *i ako su* $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ *nezavisne slučajne varijable s razdiobom* $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$*, tada za svake* $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{C}$ *i* $p \in \langle 0, \infty\rangle$ *vrijedi*

$$\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big|^p\Big)^{1/p} \sim_p \Big(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2\Big)^{1/2}. \tag{4.36}$$

[16] Aleksandar Jakovljevič Hinčin (1894–1959), sovjetski matematičar.

Prisjetimo se da nezavisnost od $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ implicira

$$\mathbb{E}\big(f_1(\epsilon_1)\cdots f_N(\epsilon_N)\big) = \mathbb{E}f_1(\epsilon_1)\cdots\mathbb{E}f_N(\epsilon_N)$$

za svake funkcije $f_1, \ldots, f_N \colon \{-1,1\} \to \mathbb{C}$. Gornja notacija za razdiobu nam znači

$$\mathbb{P}(\epsilon_j = -1) = \mathbb{P}(\epsilon_j = 1) = \tfrac{1}{2}.$$

Primijetimo da se lijeva strana od (4.36) može deterministički zapisati kao

$$\Big(\frac{1}{2^N}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N\in\{-1,1\}}\big|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_N x_N\big|^p\Big)^{1/p},$$

ali korisnije će nam biti praktično ostati kod vjerojatnosne notacije.

Dokaz. Primijetimo da je

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\Big|^2 = \mathbb{E}\sum_{j,k=1}^N \epsilon_j\epsilon_k x_j\overline{x_k} = \sum_{j,k=1}^N x_j\overline{x_k}\underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_j\epsilon_k)}_{\substack{=1\text{ za } j=k\\ =0 \text{ za } j\neq k}} = \sum_{j=1}^N |x_j|^2,$$

tj. za $p = 2$ imamo čak jednakost. Dovoljno je dokazati tvrdnju za realne $x_1, x_2, \ldots, x_N$ jer se za kompleksne brojeve samo udvostručuju konstante. Osim toga je zbog leme 2.2(a) lijeva strana od (4.36) rastuća funkcija od p pa je dovoljno dokazati gornju ocjenu (tj. $\lesssim$) za $p > 2$ i donju ocjenu (tj. $\gtrsim$) za $0 < p < 2$. Zahvaljujući lemi 2.1(b) za $0 < p < 2$ imamo

$$\Big(\sum_{j=1}^N |x_j|^2\Big)^{1/2} = \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\Big|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\Big|^p\Big)^{(1-\theta)/p}\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\Big|^4\Big)^{\theta/4},$$

pri čemu je $0 < \theta < 1$ određen sa $\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$. Vidimo da će i donja ocjena za $0 < p < 2$ slijediti iz gornje ocjene za $p = 4$.

Radi monotonosti je dovoljno dokazati gornju ocjenu za parne prirodne brojeve, tj. $p = 2m$; $m \in \mathbb{N}$. Multinomni teorem nam daje

$$\Big(\sum_{j=1}^N \epsilon_j x_j\Big)^{2m} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}_0\\ k_1+\cdots+k_N=2m}} \frac{(2m)!}{k_1!\cdots k_N!}(\epsilon_1 x_1)^{k_1}\cdots(\epsilon_N x_N)^{k_N}.$$

Zbog nezavisnosti imamo

$$\mathbb{E}(\epsilon_1^{k_1}\cdots\epsilon_N^{k_N}) = (\mathbb{E}\epsilon_1^{k_1})\cdots(\mathbb{E}\epsilon_N^{k_N}) = \begin{cases} 1 & \text{ako su svi } k_1,\ldots,k_N \text{ parni,}\\ 0 & \text{inače.}\end{cases}$$

Zato je

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big)^{2m} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}_0\\ k_1+\cdots+k_N=m}} \frac{(2m)!}{(2k_1)!\cdots(2k_N)!} x_1^{2k_1}\cdots x_N^{2k_N}.$$

S druge strane, opet po multinomnom teoremu imamo

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} x_j^2\Big)^{m} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}_0\\ k_1+\cdots+k_N=m}} \frac{m!}{k_1!\cdots k_N!} x_1^{2k_1}\cdots x_N^{2k_N}.$$

Preostaje usporediti multinomne koeficijente:

$$\frac{\frac{(2m)!}{(2k_1)!\cdots(2k_N)!}}{\frac{m!}{k_1!\cdots k_N!}} = \frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)}{2k_1(2k_1-1)\cdots(k_1+1)\cdots 2k_N(2k_N-1)\cdots(k_N+1)} \leqslant \frac{2^m m^m}{2^{k_1}\cdots 2^{k_N}} = m^m.$$

To nam daje

$$\bigg(\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big)^{2m}\bigg)^{1/2m} \leqslant m^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\Big)^{1/2},$$

čime je završen dokaz teorema. □

Alternativni dokaz. Dat ćemo još jedan dokaz gornje ocjene za $p \geqslant 2$ i za realne brojeve $x_1,\ldots,x_N$. Radi homogenosti smijemo normalizirati $\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = 1$. Nezavisnost nam omogućuje račun:

$$\mathbb{E}e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} = \mathbb{E}\prod_{j=1}^{N} e^{\epsilon_j x_j} = \prod_{j=1}^{N}\mathbb{E}e^{\epsilon_j x_j} = \prod_{j=1}^{N}\big(\tfrac{1}{2}e^{-x_j} + \tfrac{1}{2}e^{x_j}\big) = \prod_{j=1}^{N}\operatorname{ch} x_j.$$

Iz jednostavne nejednakosti $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$ dobivamo

$$\mathbb{E}e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} \leqslant \prod_{j=1}^{N} e^{\frac{1}{2}x_j^2} = e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2} = e^{1/2} < 2$$

pa je po Markov-Čebiševljevoj nejednakosti za $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j > \alpha\Big) = \mathbb{P}\Big(e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} > e^{\alpha}\Big) \leqslant e^{-\alpha}\mathbb{E}e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} \leqslant 2e^{-\alpha},$$

a simetrija razdiobe daje

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big| > \alpha\Big) \leqslant 4e^{-\alpha}.$$

Konačno koristimo (1.15):

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big|^p = \int_0^{+\infty} p\alpha^{p-1}\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big| > \alpha\Big)d\alpha \leqslant 4p\underbrace{\int_0^{+\infty}\alpha^{p-1}e^{-\alpha}d\alpha}_{\Gamma(p)} \lesssim_p 1. \qquad \square$$

Naglasimo da ocjene u Hinčinovoj nejednakosti ne ovise o broju N; inače bi tvrdnja bila trivijalna. (Naime, svake dvije norme na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru su ekvivalentne.)

Sljedeća posljedica teorema 4.22 je priređena za primjene.

Korolar 4.23. (Hinčinova nejednakost za funkcije) *Neka su $N \in \mathbb{N}$, slučajne varijable $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ kao i dosad, $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere, $p \in \langle 0, \infty\rangle$ eksponent te $f_1, \ldots, f_N \in \mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljne funkcije. Tada vrijedi*

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j f_j\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}^p\Big)^{1/p} \sim_p \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{N}|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}.$$

Dokaz. Nazovimo vjerojatnosni prostor eksplicitno $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za svaki $x \in \mathbb{X}$ teorem 4.22 daje

$$\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j f_j(x)\Big|^p\Big)^{1/p} \sim_p \Big(\sum_{j=1}^{N}|f_j(x)|^2\Big)^{1/2}.$$

Uzmimo L^p norme obiju strana kao funkcija u varijabli x te iskoristimo Fubinijev teorem na $(\Omega \times \mathbb{X}, \mathcal{F} \times \mathcal{X}, \mathbb{P} \times \mu)$:

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega\Big(\int_{\mathbb{X}}\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j f_j(x)\Big|^p d\mu(x)\Big)d\mathbb{P}\Big)^{1/p} &= \Big(\int_{\mathbb{X}}\Big(\int_\Omega\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j f_j(x)\Big|^p d\mathbb{P}\Big)d\mu(x)\Big)^{1/p}\\ &\sim_p \Big(\int_{\mathbb{X}}\Big(\sum_{j=1}^{N}|f_j(x)|^2\Big)^{p/2}d\mu(x)\Big)^{1/p}. \qquad \square\end{aligned}$$

Korolar 4.24. (Marcinkiewicz-Zygmundova vektorska ocjena) *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere, $p \in [1, \infty\rangle$ eksponent i T ograničeni linearni operator na $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$. Tada za proizvoljni niz funkcija $(f_j)_{j=1}^\infty$ iz $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ vrijedi*

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \lesssim_p \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}.$$

Posljednja nejednakost se može kratko pisati

$$\big\|\|(Tf_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_2}\big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{p,T} \big\|\|(f_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_2}\big\|_{\mathrm{L}^p},$$

odnosno, korištenjem mješovitih normi iz zadatka 2.1,

$$\|(Tf_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2)} \lesssim_{p,T} \|(f_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2)}$$

ili samo

$$\|Tf_j\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2_j)} \lesssim_{p,T} \|f_j\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2_j)}.$$

Dokaz. Smijemo pretpostaviti da samo prvih N funkcija nije identički jednako 0, jer potom možemo primijeniti teorem o monotonoj konvergenciji za dobivanje općenitog slučaja. Ako su $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ slučajne varijable kao i ranije, zbog omeđenosti od T imamo

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j T f_j \Big\|_{\mathrm{L}^p} = \Big\| T\Big(\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j \Big) \Big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \|T\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p} \Big\| \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j \Big\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Sada uzmemo p-ti moment obiju strana (tj. primijenimo $(\mathbb{E}|\cdot|^p)^{1/p}$) i dvaput koristimo korolar 4.23. $\square$

* * *

U drugom dijelu ovog odjeljka se vraćamo na množitelje ojačani Hinčinovom nejednakosti kao korisnim alatom. Neka su φ i ψ_j kao u primjeru 4.17. Littlewood-Paleyeva teorija kreće od dekompozicije

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} M_{\psi_j} f \quad \text{u } \mathrm{L}^2 \text{ za } f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$$

te nastoji reći nešto o "veličini" (tj. izvjesnoj normi) od f u terminima "veličina" pribrojnika $M_{\psi_j} f$. Kako po definiciji množitelja gornju dekompoziciju zapravo možemo pisati

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_j(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi,$$

vidimo da su pribrojnici ustvari dijelovi of f koji odgovaraju isključivo frekvencijama ξ za koje je $2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}$.

Preciznije, definiramo *Littlewood-Paleyevu kvadratnu funkciju* (za otprije dane i fiksirane φ i ψ_j) kao operator S zadan formulom

$$Sf\colon \mathbb{R}^d \to [0,+\infty], \quad Sf := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big| M_{\psi_j} f \big|^2 \Big)^{1/2}.$$

Cilj teorije je pokazati ekvivalentnost raznih normi funkcija Sf i f. Prvi znak te mogućnosti je jednostavna primjena Plancherelovog teorema i (4.24):

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|M_{\psi_j} f\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_j(\xi)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(\xi)^2 \Big) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \sim \|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Ipak, već za L^p norme za $p \neq 2$ tako nešto više nije očigledno.

Teorem 4.25. *Za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi*

$$\|Sf\|_{\mathrm{L}^p} \sim_{d,\varphi,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Dokaz. Najprije dokazujemo ocjenu $\|Sf\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p}$. Dovoljno je pokazati

$$\Big\| \Big(\sum_{j=-N}^{N} \big|M_{\psi_j} f\big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

s implicitnom konstantom neovisnom o $N \in \mathbb{N}$, jer tada možemo pustiti $N \to \infty$ i iskoristiti teorem o monotonoj konvergenciji. Radi korolara 4.23 je pak dovoljno dokazati

$$\Big\| \sum_{j=-N}^{N} \varepsilon_j M_{\psi_j} f \Big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \tag{4.37}$$

za proizvoljne predznake $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$; $j = -N, \ldots, N$, pri čemu, naravno, implicitna konstanta ne smije ovisiti o njihovom izboru. Promotrimo simbol

$$m(\xi) := \sum_{j=-N}^{N} \varepsilon_j \psi_j(\xi) = \sum_{j=-N}^{N} \varepsilon_j \psi_0(2^{-j}\xi).$$

Za $\xi \neq \mathbf{0}$ i $j \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^j \leqslant |\xi| < 2^{j+1}$ imamo najviše dva ne-nul pribrojnika te za derivaciju svakog reda vrijedi

$$\begin{aligned} |(\partial^{\mathbf{k}} m)(\xi)| &\leqslant (2^{-j})^{|\mathbf{k}|} |(\partial^{\mathbf{k}}\psi_0)(2^{-j}\xi)| + (2^{-j-1})^{|\mathbf{k}|} |(\partial^{\mathbf{k}}\psi_0)(2^{-j-1}\xi)| \\ &\leqslant 2\|\partial^{\mathbf{k}}\psi_0\|_{\mathrm{L}^\infty} (2^{-j})^{|\mathbf{k}|} \lesssim_{\varphi,\mathbf{k}} (2^j)^{-|\mathbf{k}|} \lesssim_{\mathbf{k}} |\xi|^{-|\mathbf{k}|}. \end{aligned}$$

Zato možemo primijeniti Mikhlinov teorem o množitelju (teorem 4.18), koji nam doista daje (4.37).

Sada prelazimo na dokaz obratne ocjene. Za $j \in \mathbb{Z}$ označimo $\tilde{\psi}_j := \psi_{j-1} + \psi_j + \psi_{j+1}$ i definiramo

$$\tilde{S} f := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|M_{\tilde{\psi}_j} f\big|^2 \Big)^{1/2}.$$

Primijetimo da je $\tilde{\psi}_j$ identički jednaka 1 na nosaču od ψ_j. Operator $\tilde{S}$ nije doslovno, ali jest načelno još jedna kvadratna funkcija. Naime, primjenom nejednakosti Minkowskog za ℓ^2 normu odmah dobivamo

$$\tilde{S} f = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|M_{\psi_{j-1}} f + M_{\psi_j} f + M_{\psi_{j+1}} f\big|^2 \Big)^{1/2} \leqslant 3Sf.$$

Uzmimo sada proizvoljne $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Obzirom da je $M_{\tilde{\psi}_j} M_{\psi_j} = M_{\tilde{\psi}_j \psi_j} = M_{\psi_j}$ i $M_{\psi_j}^* = M_{\overline{\psi}_j} = M_{\psi_j}$, možemo računati:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} &\overset{(4.25)}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle M_{\psi_j} f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle M_{\tilde{\psi}_j} M_{\psi_j} f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle M_{\psi_j} f, M_{\tilde{\psi}_j} g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} (M_{\psi_j} f)(x) \overline{(M_{\tilde{\psi}_j} g)(x)} dx\end{aligned}$$

pa je

$$|\langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2}| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|M_{\psi_j} f\big|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|M_{\tilde{\psi}_j} g\big|^2 \Big)^{1/2} = \big\langle Sf, \tilde{S}g \big\rangle_{\mathrm{L}^2}$$

te prethodno dokazana ocjena (smjer $\lesssim$) za $\tilde{S}g$ daje

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx \Big| \leqslant \|Sf\|_{\mathrm{L}^p} \|\tilde{S}g\|_{\mathrm{L}^{p'}} \lesssim_{d,\varphi,p} \|Sf\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Zbog obrata Hölderove nejednakosti (lema 2.3) iz posljednjeg proizlazi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{d,\varphi,p} \|Sf\|_{\mathrm{L}^p},$$

a to smo i trebali. □

Moguće je dati Littlewood-Paleyeve karakterizacije i za neke druge funkcijske prostore. Tako se npr. može pokazati $\|Sf\|_{\mathrm{L}^1} \sim_{d,\varphi} \|f\|_{\mathrm{H}^1}$. Prikladna literatura je knjiga [FJW91].

* * *

Zadatak 4.18. Dokažite sljedeću *Zygmundovu nejednakost* za lakunarne trigonometrijske sume. Neka je $q > 1$ i neka je $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takav da je $m_{j+1} \geqslant q m_j$ za $j = 1, 2, \ldots$. Tada za $N \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ i $p \in \langle 0, \infty\rangle$ vrijedi

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big\|_{\mathrm{L}^p_t(\mathbb{T})} \sim_{p,q} \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \Big)^{1/2},$$

pri čemu kod integracije smatramo $\mathbb{T} \equiv [0, 1\rangle$.

Uputa: Prvi mogući pristup je postupati kao u prvom dokazu teorema 4.22. Opet je dovoljno dokazati gornju ocjenu (tj. $\lesssim$) za realne c_j i kada je $p = 2m \geqslant 2$ parni cijeli broj. Možemo izmnožiti "svaki-sa-svakim" zagrade

$$\Big| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big|^{2m} = \Big(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t} \Big)^m \Big(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{-2\pi i m_j t} \Big)^m,$$

ali sada treba pripaziti koji članovi “prežive” integriranje. Primijetite da ako je q dovoljno velik obzirom na p, tada nema “iznenađenja” i nakon integriranja ostaju samo pribrojnici kod kojih su se jednako mnogo puta birali $e^{2\pi i m_j t}$ i $e^{-2\pi i m_j t}$ za svaki j. S druge pak strane, za “male” vrijednosti od $q > 1$ možete dovoljno “prorijediti” trigonometrijsku sumu kako biste iskoristili prethodni slučaj, a izgubit ćete samo konstantu ovisnu o q.

Za drugi mogući pristup, umjesto da gledate samo $f(t) := \sum_{j=1}^{N} c_j e^{2\pi i m_j t}$, promatrajte slučajne sume $f_\epsilon(t) := \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j c_j e^{2\pi i m_j t}$, pri čemu su $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ slučajne varijable kao i ranije u ovom odjeljku. Iskoristite teorem 4.23 kako biste dobili

$$\big(\mathbb{E}\|f_\epsilon\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p\big)^{1/p} \sim_p \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Sada pretpostavite $q \geqslant 3$ i zaključite da vrijedi $\|f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})} \sim \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}$ za svaki izbor od $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N \in \{-1, 1\}$. Naime, ako definirate $g(t) := \prod_{j=1}^{N}(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_j e^{2\pi i m_j t} + \frac{1}{2}\varepsilon_j e^{-2\pi i m_j t})$, imat ćete $f = 2 f_\varepsilon * g$ i $f_\varepsilon = 2f * g$ te $g \geqslant 0$ i $\int_{\mathbb{T}} g = 1$, odakle će slijediti $\|f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant 2\|f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^1} = 2\|f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p}$ i $\|f_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant 2\|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^1} = 2\|f\|_{\mathrm{L}^p}$.

Napomena: Riječ “lakunaran” obično označava da suma ima samo rijetke i eksponencijalno razmaknute pribrojnike u gornjem smislu. Poanta ovog zadatka je usporedba s Hinčinovom nejednakosti i ukazati da se eksponencijali $e^{2\pi i m_j t}$ s vrlo različitim frekvencijama m_j također ponašaju “prilično nezavisno” (premda doslovno to nisu). Heuristički: svaki od njih oscilira mnogo više od svojih prethodnika pa su ti prethodnici “prilično ravni” duž svakog njegovog perioda.

Poglavlje 5

T(1) teorem

U ovom poglavlju ćemo iskazati i dokazati poznati kriterij L^2-omeđenosti Calderón-Zygmundovog operatora, tzv. *T(1) teorem*. Teži smjer teorema je dovoljnost njegovih uvjeta; nju ćemo najprije dokazati u posebnom slučaju $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$, $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i to ocjenjivanjem matričnih koeficijenata u valićnoj bazi. Poradi dokaza dovoljnosti u općenitom slučaju preostat će nam konstruirati operatore koji su ograničeni na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i za koje $T\mathbb{1}$ poprima proizvoljnu vrijednost iz $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$; to su tzv. paraprodukti. Na kraju poglavlja diskutiramo (bez potpunog dokaza) pitanje omeđenosti Cauchyjevog integrala duž proizvoljnog Lipschitzovog[1] grafa, problem koji je također dijelom motivirao formulaciju i generalizacije T(1) teorema. Glavni izvor za materijal ovog poglavlja su knjige [CM97] i [Mey92], koje je autor svojedobno obradio u [Kov06], odakle je preuzeta većina teksta.

5.1. Iskaz T(1) teorema i neki primjeri

Prisjetimo se iz poglavlja 4 kako je Calderón-Zygmundov operator zapravo linearni operator $T\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_\mathrm{lok}(\mathbb{R}^d)$ za koji postoji jezgra K koja zadovoljava (K1)–(K3) iz odjeljka 4.1 (tzv. standardna jezgra) i takva je da vrijedi (4.1). Dimenzija d i parametar γ se obično posebno ne ističu, ali se podrazumijevaju. U prethodnom poglavlju smo vidjeli kako je L^2-ograničenost od T vrlo poželjno svojstvo i tek je početak zanimljive teorije pa se postavlja pitanje njene karakterizacije "jednostavnijim" uvjetima.

U cijelom ovom poglavlju ćemo pretpostavljati da T ima transponirani operator i da je on također Calderón-Zygmundov. To zapravo znači da postoji linearni operator $T^\tau\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_\mathrm{lok}(\mathbb{R}^d)$ takav da je

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g = \int_{\mathbb{R}^d} f(T^\tau g)$$

za svake $f, g \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Iz zadatka 4.1(a) znamo da je njegova jezgra $K^\tau(x,y) = K(y,x)$.

[1] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903), njemački matematičar.

Najprije dajmo iskaz osnovnog rezultata ovog poglavlja, tzv. *T(1) teorema*, danas već slavnog rezultata Davida[2] i Journéa[3] [DJ84]. Potom ćemo pažljivo definirati sve pojmove koji se u njemu pojavljuju.

Teorem 5.1. (Originalni T(1) teorem) *Calderón-Zygmundov operator T se može proširiti do neprekidnog linearnog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako vrijede sljedeća tri uvjeta:*

(DJ1) *T je omeđen u slabom smislu,*

(DJ2) $T\mathbb{1} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$,

(DJ3) $T^\tau\mathbb{1} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

Vidimo da tek trebamo pridati značenje uvjetima (DJ1)–(DJ3), ali intuitivno za provjeru L^2-omeđenosti od T treba provjeriti neku slabiju verziju omeđenosti od T te provjeriti da operatori T i T^τ preslikavaju konstantnu funkciju $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ u BMO prostor. Kako je prvi uvjet često automatski zadovoljen, glavni posao preostaje testirati operatore T i T^τ na jednoj jedinoj funkciji $\mathbb{1}$, odakle i naziv samog teorema. Ipak, to nije uvijek sasvim lako niti je $\mathbb{1}$ uvijek najprirodniji odabir funkcije na kojoj se provjeravaju uvjeti (DJ2) i (DJ3) pa su s vremenom dokazane i neke varijante (tzv. T(b) teoremi) o kojima nećemo govoriti.

Neka je $T\colon \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ linearni operator. Kažemo da je T *omeđen u slabom smislu* ako za svake $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$ i za svake "test-funkcije" $f, g \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ čiji nosači su sadržani u $\mathrm{Cl}(\mathrm{B}(x_0, R))$ vrijedi

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g \Big| \lesssim R^d \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} R^{|\alpha|} \|\partial^\alpha f\|_{\mathrm{L}^\infty} \Big) \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} R^{|\alpha|} \|\partial^\alpha g\|_{\mathrm{L}^\infty} \Big). \tag{5.1}$$

Postoje i (očigledne) varijante tog uvjeta koje uključuju i više derivacije ∂^α na desnoj strani, ali radi jednostavnosti ostanimo samo kod derivacija prvog reda. Svaki L^2-omeđeni operator T je i omeđen u slabom smislu. Naprosto, za x_0, R, f, g kao gore vrijedi

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g \Big| &\leqslant \|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} \|f\|_{\mathrm{L}^2} \|g\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant \|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} |\mathrm{B}(x_0,R)|^{1/2} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} |\mathrm{B}(x_0,R)|^{1/2} \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \\ &= \|T\|_{\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2} |\mathrm{B}(\mathbf{0},1)| R^d \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \|g\|_{\mathrm{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Prema tome, uvjet (DJ1) u teoremu 5.1 je nužan. Razlog zašto je on dosta slabiji je pojavljivanje L^∞ normi prvih derivacija od f i g na desnoj strani od (5.1).

[2] Guy David (1957), francuski matematičar.

[3] Jean-Lin Journé (1957), francuski matematičar.

Označimo sa $\mathrm{C}^1_{\mathrm{c},0}(\mathbb{R}^d)$ prostor

$$\mathrm{C}^1_{\mathrm{c},0}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} f = 0 \Big\}.$$

Definirat ćemo $T\mathbb{1}$ naprosto kao linearni funkcional na prostoru $\mathrm{C}^1_{\mathrm{c},0}(\mathbb{R}^d)$. Neka je $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ niz funkcija iz $\mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ koji je ograničen u L^∞ normi i koji aproksimira konstantu $\mathbb{1}$ u smislu da vrijedi

$$(\forall R > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N},\, m \geqslant m_0)\,(\varphi_m = 1 \text{ na } \mathrm{Cl}(\mathrm{B}(\mathbf{0}, R)))\,.$$

Tada definiramo

$$T\mathbb{1} := \lim_{m\to\infty} T\varphi_m,$$

pri čemu limes shvaćamo $*$-slabo, tj.

$$(\forall f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c},0}(\mathbb{R}^d)) \Big((T\mathbb{1})(f) := \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m) f \Big).$$

Trebamo dokazati da limes $\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m) f$ doista postoji kao kompleksan broj. Naime, neka je $R > 0$ dovoljno velik da je $\operatorname{supp} f \subseteq \mathrm{B}(\mathbf{0}, R/2)$ i neka su $m, m' \in \mathbb{N}$ takvi da je $\varphi_m = 1 = \varphi_{m'}$ na zatvaraču od $\mathrm{B}(\mathbf{0}, R)$. Tada funkcije f i $\varphi_m - \varphi_{m'}$ imaju disjunktne nosače te uz oznaku $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_\infty$ formula (4.1) daje

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_m) f - \int_{\mathbb{R}^d} (T\varphi_{m'}) f \Big| \\
&\overset{(4.1)}{=} \Big| \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x,y) f(x) \big(\varphi_m(y) - \varphi_{m'}(y)\big)\, dx\, dy \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \Big(\int_{\operatorname{supp} f} K(x,y) f(x)\, dx \Big) \big(\varphi_m(y) - \varphi_{m'}(y)\big)\, dy \Big| \\
&\leqslant 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \Big| \int_{\operatorname{supp} f} K(x,y) f(x)\, dx \Big|\, dy \\
&= 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \Big| \int_{\mathrm{B}(\mathbf{0},R/2)} (K(x,y) - K(\mathbf{0},y)) f(x)\, dx \Big|\, dy \\
&\overset{(K2)}{\lesssim} 2M \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \bigg(\int_{\mathrm{B}(\mathbf{0},R/2)} \frac{|x|^\gamma}{|y|^{d+\gamma}} |f(x)|\, dx \bigg) dy \\
&= 2M \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\gamma |f(x)|\, dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \frac{dy}{|y|^{d+\gamma}} \Big),
\end{aligned}$$

što teži prema 0 kada $R \to +\infty$, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i jer je $\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},1)} |y|^{-d-\gamma} dy < +\infty$. Zaključujemo da je spomenuti niz brojeva Cauchyjev, što znači da i konvergira. Štoviše, definicija od $T\mathbb{1}$ ne ovisi o izboru od

$(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Naime, neka je $(\tilde{\varphi}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ još jedan takav niz i $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c},0}(\mathbb{R}^d)$. Nadalje, uzmimo proizvoljni $R > 0$ takav da je $\operatorname{supp} f \subseteq \mathrm{B}(\mathbf{0}, R/2)$ i dovoljno veliki $m \in \mathbb{N}$ da vrijedi $\varphi_m = 1 = \tilde{\varphi}_m$ na zatvaraču kugle $\mathrm{B}(\mathbf{0}, R)$. Uz oznaku

$$M := \max\Big\{ \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{\mathrm{L}^\infty}, \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\tilde{\varphi}_k\|_{\mathrm{L}^\infty} \Big\}$$

račun vrlo sličan gornjem daje

$$\Big| \int_{R^d} (T\varphi_m) f - \int_{R^d} (T\tilde{\varphi}_m) f \Big| \lesssim M \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\gamma |f(x)|\, dx \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(\mathbf{0},R)} \frac{dy}{|y|^{d+\gamma}} \Big),$$

odakle vidimo

$$\lim_{m\to\infty} \Big(\int_{R^d} (T\varphi_m) f - \int_{R^d} (T\tilde{\varphi}_m) f \Big) = 0.$$

Uglavnom će nas zanimati samo situacije kada je $(T\mathbb{1})(f) = \int_{\mathbb{R}^d} (T\mathbb{1}) f$ za neku lokalno integrabilnu funkciju $T\mathbb{1}$ (označenu na isti način) i upravo na taj način treba interpretirati uvjete (DJ2) i (DJ3).

Ukoliko znamo da je T L^2-omeđeni Calderón-Zygmundov operator, tada iz rezultata odjeljka 4.6 već znamo da se on neprekidno proširuje do operatora sa $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, a nije teško vidjeti da je netom dana definicija od $T\mathbb{1}$ tada posebni slučaj definicije od tamo. To dokazuje nužnost uvjeta (DJ2) i (DJ3) u teoremu 5.1. Dakle, u ostatku poglavlja trebamo dokazati dovoljnost od (DJ1)–(DJ3).

Čitatelj upoznat s teorijom distribucija će primijetiti da bi nam zapravo bilo prirodnije inicijalno definirati Calderón-Zygmundov operator kao preslikavanje sa nekog prostora test funkcija $\mathcal{D}$ u odgovarajući prostor distribucija $\mathcal{D}'$. Naime, tada ne bismo unaprijed morali pretpostavljati egzistenciju transponiranog operatora, a $T\mathbb{1}$ i $T^\tau\mathbb{1}$ bismo mogli shvatiti kao distribucije "pocijepane" po konstantnim funkcijama. U literaturi je to obično slučaj, a za $\mathcal{D}$ se uzima ili $\mathrm{C}^r_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ za neki $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (kao u [CM97]) ili prostor Schwartzovih[4] funkcija (kao u [Ste93]). Mi smo se ipak odlučili za konkretniju "definiciju", prvenstveno radi jednostavnosti, ali i jer je ona zadovoljavajuća za sve zamislive primjene. U prethodnom poglavlju nam ova napomena ne bi ništa značila jer, ako već imamo ograničenost na L^2, tada bilo koja od spomenutih inicijalnih definicija biva poopćena lemom 4.2.

* * *

Zadatak 5.1.

(a) Neka je T antisimetrični Calderón-Zygmundov operator kao u iskazu i napomeni zadatka 4.2. Dokažite da je T uvijek omeđen u slabom smislu i da zadovoljava $T^\tau\mathbb{1} = -T\mathbb{1}$.

Napomena: Dakle, iz teorema 5.1 slijedi da se T proširuje do ograničenog operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ako i samo vrijedi $T\mathbb{1} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

[4] Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002), francuski matematičar.

(b) Ako je još jezgra K invarijantna na translacije, tj. $K(x, y) = K(x - y, \mathbf{0})$, dokažite da je $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$.

Napomena: Na ovaj način iz teorema 5.1 npr. slijedi L^2-omeđenost Rieszovih transformacija.

(c) Korištenjem teorema 5.1 pokažite da je operator $f \mapsto mf$ ograničen na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako je $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Napomena: Naravno da je sama tvrdnja trivijalna, ali njom ilustrirajte teorem.

5.2. Postojanje valićnih baza

U poglavlju 3 smo bili definirali operatore translacija T_c i operatore dilatacija $\mathrm{D}_a^{(p)}$. Obzirom da radimo u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, najprirodnija će nam biti normalizacija za $p = 2$ i zato ćemo u ovom poglavlju pisati samo D_a umjesto $\mathrm{D}_a^{(2)}$. Ideja ovog odjeljka je komentirati (bez dokaza) postojanje prikladne ortonormirane baze prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ za dekompoziciju Calderón-Zygmundovog operatora T. "Pod prikladnim" svojstvima mislimo glatkoću, koja je nužna da bi se baza doista nalazila u domeni operatora $\mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)$, i svojevrsnu invarijantnost na translacije i dilatacije, obzirom da i klasa Calderón-Zygmundovih operatora poštuje te dvije "simetrije". Dakle, idealno bi bilo krenuti od nekoliko generatora $\psi^1, \psi^2, \ldots$ i ortonormiranu bazu dobiti primjenama operatora T_k; $k \in \mathbb{Z}^d$ i $\mathrm{D}_{2^{-j}}$; $j \in \mathbb{Z}$. Da je to doista moguće je jedan od najvećih uspjeha tzv. *teorije valića*.

Familija $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ je *multirezolucijska analiza* (kraće *MRA*) od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ako vrijedi:

(M1) V_j; $j \in \mathbb{Z}$ su zatvoreni potprostori od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

(M2) za svaki $j \in \mathbb{Z}$ je $V_j \subseteq V_{j+1}$,

(M3) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

(M4) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\mathbf{0}\}$,

(M5) za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i svaki $j \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f \in V_j \Leftrightarrow \mathrm{D}_{2^j} f \in V_0$,

(M6) za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i svaki $k \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $f \in V_0 \Leftrightarrow \mathrm{T}_k f \in V_0$,

(M7) postoji funkcija $\varphi \in V_0$ takva da je $(\mathrm{T}_k\varphi)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ortonormirana baza od V_0.

Napomenimo da skup aksioma (M1)–(M7) nije nezavisan. Npr. (M4) i (M6) se mogu izvesti iz ostalih aksioma; vidjeti [HW96]. Primijetimo usput da je za svaki fiksirani j kolekcija $(\mathrm{D}_{2^{-j}}\mathrm{T}_k\varphi)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ortonormirana baza od V_j. Funkciju φ kao u (M7) zovemo *skalirajuća funkcija* i ona jednoznačno određuje MRA.

Kažemo da je MRA *r-regularna* za neki $r \in \mathbb{N}_0$ ako vrijedi:

(M8) funkcija φ iz (M7) je još klase $\mathrm{C}^r(\mathbb{R}^d)$ te za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks α, $|\alpha| \leqslant r$, vrijedi
$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \lesssim_m (1+|x|)^{-m}; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Još neki korisni zahtjevi na multirezolucijsku analizu su:

(M9) funkcija φ iz (M7) je klase C^r i ima kompaktan nosač,

(M10) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = \hat{\varphi}(\mathbf{0}) = 1$,

(M11) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathrm{T}_k\varphi)(x) = 1$ za $x \in \mathbb{R}^d$.

Očigledno (M9) povlači (M8), a uz pretpostavke (M1)–(M9) vrijedi $|\hat{\varphi}(\mathbf{0})| = 1$ pa množenjem funkcije φ odgovarajućom konstantom možemo postići (M10) te kao posljedicu dobiti i (M11); vidjeti [HW96] i [Mey92].

Neka je E konačan skup. Za sistem funkcija $\psi^\epsilon_{j,k}$; $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $\epsilon \in E$ kažemo da je *ortonormirani valični sistem* ili *ortonormirana valična baza* ako vrijedi:

(V1) $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ je ortonormirana baza od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$,

(V2) postoje funkcije ψ^ϵ; $\epsilon \in E$ iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ takve da za svake $j \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi $\psi^\epsilon_{j,k} = \mathrm{D}_{2^{-j}}\mathrm{T}_k\psi^\epsilon$,

Pokazuje se da mora biti card $E = 2^d - 1$, ali to nećemo koristiti. Valićni sistem $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ je *r-regularan* za neki $r \in \mathbb{N}_0$ ako još imamo:

(V3) funkcije ψ^ϵ; $\epsilon \in E$ iz (V2) su klase C^r te za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ i za svaki multiindeks α, $|\alpha| \leqslant r$, vrijedi
$$|\partial^\alpha \psi(x)| \lesssim_m (1+|x|)^{-m}; \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

(V4) za svaki multiindeks α, $|\alpha| \leqslant r$, i za svake indekse j, k, ϵ vrijedi
$$\int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \psi^\epsilon_{j,k}(x)\, dx = 0.$$

Još jedan vrlo poželjan zahtjev na valićnu bazu je:

(V5) funkcije ψ^ϵ; $\epsilon \in E$ iz (V2) su klase C^r i imaju kompaktan nosač.

Jasno je da ovaj uvjet povlači (V3).

Reći ćemo da je ortonormirani valićni sistem $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ pridružen nekoj MRA $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ako je $(\mathrm{T}_k\psi^\epsilon)_{k,\epsilon}$ ortonormirana baza od W_0. Pritom sa W_j označavamo ortogonalni komplement potprostora V_j u potprostoru V_{j+1}, tj. $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$. U tom slučaju za svaki fiksirani j kolekcija $(\psi^\epsilon_{j,k})_{k,\epsilon}$ čini ortonormiranu bazu od W_j. Za postupak konstrukcije ortonormiranih valića pridruženih danoj MRA vidjeti [Wut98].

Fundamentalni rezultat egzistencije ortonormiranih valićnih baza s kompaktnim nosačima je sljedeći teorem kojeg je dokazala Daubechies[5] [Dau92].

[5] Ingrid Daubechies (1954), belgijska fizičarka i matematičarka.

Teorem 5.2. *Za svaki $r \in \mathbb{N}_0$ postoje multirezolucijska analiza $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ i njoj pridružen ortonormirani valićni sistem $(\psi^{\epsilon}_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ koji zadovoljavaju uvjete* (M1)–(M11) *i* (V1)–(V5).

Umjesto dokaza (koji nije sasvim jednostavan) samo ćemo kratko komentirati vrlo jednostavnu konstrukciju jedne MRA i jedne valićne baze, kod kojih nemamo ni neprekidnost, a kamoli glatkoću. Naprije radimo u jednoj dimenziji. Ako stavimo

$$V_j := \mathrm{Cl}\big(\operatorname{span}\big\{\mathbb{1}_{[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)\rangle} : k \in \mathbb{Z}\big\}\big).$$

tada je $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ MRA kod koje možemo uzeti naprosto $\varphi = \mathbb{1}_{[0,1\rangle}$. Osim toga je

$$W_j = \mathrm{Cl}\big(\operatorname{span}\big\{\mathbb{1}_{[2^{-j}k,2^{-j-1}(2k+1)\rangle} - \mathbb{1}_{[2^{-j-1}(2k+1),2^{-j}(k+1)\rangle} : k \in \mathbb{Z}\big\}\big)$$

pa nam je ortonormirana baza od W_0 generirana funkcijom $\mathbb{h} = \mathbb{1}_{[0,1/2\rangle} - \mathbb{1}_{[1/2,1\rangle}$. Sasvim eksplicitno, jedna ortonormirana valićna baza od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ je

$$(\mathbb{h}_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}, \quad \mathbb{h}_{j,k} = 2^{j/2}\big(\mathbb{1}_{[2^{-j}k,2^{-j-1}(2k+1)\rangle} - \mathbb{1}_{[2^{-j-1}(2k+1),2^{-j}(k+1)\rangle}\big)$$

i ona se naziva *Haarov*[6] *sistem* [Haa10]. Praktično je tu kolekciju indeksirati po familiji svih dijadskih intervala

$$\mathcal{D} := \{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\rangle \,:\, j,k \in \mathbb{Z}\}$$

uz "supstituciju" $I = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\rangle$. Ako označimo

$$\varphi_I := \frac{\mathbb{1}_I}{\sqrt{|I|}}, \quad \mathbb{h}_I := \frac{\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}}{\sqrt{|I|}}, \tag{5.2}$$

pri čemu su I_{lijevo} i I_{desno} lijeva i desna polovica od I, tada vidimo da su φ_I i $\mathbb{h}_I$ normirane u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, a Haarov sistem možemo zapisati $(\mathbb{h}_I)_{I\in\mathcal{D}}$. Za dobivanje valićnih baza u višim dimenzijama služimo se tenzoriranjem. Tako je npr. kolekcija

$$\big\{\varphi_I \otimes \mathbb{h}_J,\ \mathbb{h}_I \otimes \varphi_J,\ \mathbb{h}_I \otimes \mathbb{h}_J \,:\, I, J \in \mathcal{D},\ |I| = |J|\big\}$$

(indeksirana po dijadskim kvadratima $I \times J \in \mathcal{C}$) jedna ortonormirana valićna baza od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, pri čemu nam $f \otimes g$ označava tzv. elementarni tenzor

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y).$$

Više o ortonormiranim valićima čitatelj može naći u vrlo pristupačnoj knjizi [HW96].

* * *

[6]Alfréd Haar (1885–1933), mađarski matematičar.

Zadatak 5.2. Dokažite da je za funkciju $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ekvivalentno:

(1) $(\mathrm{D}_{2^{-j}}\mathrm{T}_k\psi)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirani skup u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

(2) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi+k)|^2 = 1$ za g.s. $\xi \in \mathbb{R}$,
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi+k))\overline{\hat{\psi}(\xi+k)} = 0$ za $j \in \mathbb{N}$ i g.s. $\xi \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5.3. Dokažite sljedeću karakterizaciju ortonormiranih valića (prvi put dokazanu od strane Gripenberga [Gri95] i Wanga [Wan95]). Za funkciju $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ takvu da je $\|\psi\|_{\mathrm{L}^2} = 1$ ekvivalentno je:

(1) $(\mathrm{D}_{2^{-j}}\mathrm{T}_k\psi)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

(2) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1$ za g.s. $\xi \in \mathbb{R}$,
$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j\xi)\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi+m))} = 0$ za $m \in 2\mathbb{Z}+1$ i g.s. $\xi \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5.4. Dokažite da ne postoji ortonormirana valićna baza koja ispunjava svojstva (V1)–(V5) uz $r = \infty$.
Uputa: Iz svojstva (V4) zaključite da su članovi baze ortogonalni na sve polinome pa potom iskoristite Stone[7]-Weierstrassov[8] teorem aproksimacije.

5.3. Diskretna Schurova lema

Sada ćemo dokazati težinsku varijantu leme 2.7. Bit će to jednostavni rezultat koji daje dovoljan uvjet za ograničenost linearnog operatora zadanog “beskonačnom matricom” $(a_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ u nekoj ortonormiranoj bazi Hilbertovog prostora.

Lema 5.3. (Diskretna težinska Schurova lema) *Neka je $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H i neka je $(a_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ familija kompleksnih brojeva. Ako postoje konstanta $C \in [0,+\infty\rangle$ i familija pozitivnih brojeva $(w_\alpha)_{\alpha\in A}$ tako da vrijedi*

$$\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta \leqslant C w_\alpha \quad \textit{za svaki } \alpha \in A, \tag{5.3}$$

$$\sum_{\alpha\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\alpha \leqslant C w_\beta \quad \textit{za svaki } \beta \in A, \tag{5.4}$$

onda postoji jedinstveni ograničeni linearni operator $T\colon H \to H$ takav da je

$$\langle Te_\beta, e_\alpha\rangle_H = a_{\alpha,\beta}$$

za svake $\alpha, \beta \in A$ te štoviše imamo $\|T\|_{H\to H} \leqslant C$.

[7]Marshall Harvey Stone (1903–1989), američki matematičar.
[8]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), njemački matematičar.

Dokaz. Uzmimo proizvoljni $v \in H$ tako da koeficijenti $v_\beta = \langle v, e_\beta \rangle \in \mathbb{C}$ zadovoljavaju $(v_\beta)_{\beta\in A} \in \ell^2(A)$. Možemo pisati

$$|a_{\alpha,\beta}||v_\beta| = |a_{\alpha,\beta}|^{1/2} w_\beta^{1/2} |a_{\alpha,\beta}|^{1/2} w_\beta^{-1/2} |v_\beta|$$

pa po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}||v_\beta| &\leqslant \Big(\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta^{-1} |v_\beta|^2\Big)^{1/2} \\ &\overset{(5.3)}{\leqslant} C^{1/2} w_\alpha^{1/2} \Big(\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta^{-1} |v_\beta|^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Zatim je

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in A} \Big(\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}||v_\beta|\Big)^2 \leqslant C \sum_{\alpha\in A} w_\alpha \Big(\sum_{\beta\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\beta^{-1} |v_\beta|^2\Big) \\ &= C \sum_{\beta\in A} w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 \Big(\sum_{\alpha\in A} |a_{\alpha,\beta}| w_\alpha\Big) \overset{(5.4)}{\leqslant} C^2 \sum_{\beta\in A} w_\beta^{-1} |v_\beta|^2 w_\beta = C^2 \sum_{\beta\in A} |v_\beta|^2,\end{aligned}$$

odakle vidimo da koeficijenti $u_\alpha := \sum_{\beta\in A} a_{\alpha,\beta} v_\beta$ također čine kolekciju skalara iz $\ell^2(A)$ te je dobro definiran vektor

$$Tv := \sum_{\alpha\in A} u_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha\in A} \Big(\sum_{\beta\in A} a_{\alpha,\beta} \langle v, e_\beta \rangle_H\Big) e_\alpha \in H.$$

Jasno je da je ovako definiran operator T linearan. Osim toga, iz iste nejednakosti slijedi $\|Tv\|_H \leqslant C\|v\|_H$, a po konstrukciji očigledno vrijedi $\langle Te_\beta, e_\alpha \rangle_H = a_{\alpha,\beta}$.

Jedinstvenost takvog ograničenog linearnog operatora T je očigledna jer su konačne linearne kombinacije elemenata ortonormirane baze $(e_\beta)_{\beta\in A}$ guste u H. $\square$

Schurovu lemu ćemo koristiti u slučaju kada je $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, a $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ je pogodna valićna baza indeksirana po $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d \times E$.

* * *

Zadatak 5.5. (a) Koliku najveću operatorsku (tj. spektralnu) normu može imati $n\times n$ matrica s elementima iz $[0, 1]$?

(b) Koliku najveću operatorsku normu može imati stohastička $n \times n$ matrica, tj. nenegativna matrica čije sume elemenata u svakom retku iznose 1?

(c) Koliku najveću operatorsku normu može imati bistohastička $n \times n$ matrica, tj. nenegativna matrica čije sume elemenata u svakom retku i svakom stupcu iznose 1?

5.4. Dokaz T(1) teorema u posebnom slučaju

Kao što smo već bili komentirali, preostaje dokazati dovoljnost uvjeta (DJ1)–(DJ3) u teoremu 5.1. U ovom odjeljku pretpostavljamo $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$ pa su uvjeti (DJ2) i (DJ3) trivijalno ispunjeni.

Fiksirajmo 1-regularnu multirezolucijsku analizu $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ sa skalirajućom funkcijom φ pridruženu nekom 1-regularnom ortonormiranom valićnom sistemu $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$, $\psi^\epsilon_{j,k} := \mathrm{D}_{2^{-j}}\mathrm{T}_k\psi^\epsilon$ na način opisan u prethodnom odjeljku. Zahvaljujući teoremu 5.2 možemo pretpostaviti da su zadovoljeni uvjeti (M1)–(M11) i (V1)–(V5). Osim toga označimo $\varphi_{j,k} := \mathrm{D}_{2^{-j}}\mathrm{T}_k\varphi$. Iz praktičnih razloga ćemo pretpostaviti $\gamma < 1$, što možemo jer smanjivanjem γ samo oslabljujemo ocjene (K2) i (K3).

Ideja dokaza je promotriti koeficijente $\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}$ operatora T u netom spomenutoj valićnoj bazi te ih dovoljno dobro ocijeniti tako da možemo primijeniti lemu 5.3. Ortonormirana baza $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ je ovdje prikladna zahvaljujući tome što su njeni elementi funkcije klase C^1 s kompaktnim nosačem pa se nalaze u domeni operatora T. Glavni dio dokaza je sljedeća propozicija u čijem dokazu ćemo iskoristiti sve pretpostavke na T i K.

Propozicija 5.4. *Ako je $T\colon \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ Calderón-Zygmundov operator koji je omeđen u slabom smislu i za kojeg vrijedi $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$, onda imamo ocjenu*

$$\big|\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| \lesssim 2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\gamma)}\Big(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|}\Big)^{d+\gamma}. \tag{5.5}$$

Podijelit ćemo dokaz u više slučajeva, ovisno o međusobnom odnosu funkcija $\psi^\epsilon_{j,k}$ i $\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$ za razne indekse $j, j', k, k', \epsilon, \epsilon'$. Plan dokaza je ugrubo sljedeći.

(1) Ako je $j = j'$ i nosači od $\psi^\epsilon_{j,k}$ i $\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$ su međusobno "daleko" (specijalno su disjunktni), onda možemo $\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}$ raspisati po formuli (4.1) te iskoristiti ocjene za standardnu jezgru.

(2) Ako je $j = j'$ i nosači od $\psi^\epsilon_{j,k}$ i $\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$ su međusobno "blizu", onda iskoristimo omeđenost u slabom smislu operatora T.

(3) Ako je j manje od j', onda je funkcija $\psi^\epsilon_{j,k}$ "mnogo ravnija" (tj. bliža konstanti) od $\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$, dok ova druga funkcija ima srednju vrijednost 0. Kako je $T\mathbb{1} = \mathbf{0}$, možemo očekivati da će $|\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}|$ biti "dosta malo".

(4) Ako je j veće od j', onda iskoristimo uvjet $T^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$ na isti način kao u (3) jer imamo $|\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}| = |\langle T^\tau\psi^{\epsilon'}_{j',k'}, \psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|$.

Ocjena (5.5) nam govori da je matrica operatora T u valićnoj bazi $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ "skorodijagonalna", tj. njeni elementi $\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}$ "brzo trnu" daleko od dijagonale. Sve implicitne konstante u donjem dokazu će ovisiti samo o operatoru T, ocjenama za njegovu jezgru K te sistemima funkcija $(\psi^\epsilon_{j,k})_{j,k,\epsilon}$, $(\varphi_{j,k})_{j,k}$, ali to nećemo notacijski isticati.

Dokaz propozicije 5.4. Neka je $r > 0$ takav da funkcije ψ^ϵ, φ imaju nosače sadržane u $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \frac{r}{2})$. Primijetimo da su tada nosači od $\psi^\epsilon_{j,k}$ i $\varphi_{j,k}$ podskupovi kugle $\mathrm{B}(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$. Označimo s K jezgru operatora T.

Slučaj 1. Pretpostavimo $j = j'$ i $|k - k'| \geqslant 2r$.

Uočimo da je desna strana u (5.5) jednaka $\big(\frac{2}{2+|k-k'|}\big)^{d+\gamma}$. Kako su $\operatorname{supp}\psi^\epsilon_{j,k}$ i $\operatorname{supp}\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$ disjunktni (jer su kugle $\mathrm{B}(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$ i $\mathrm{B}(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$ disjunktne), primjenjiva je formula (4.1) pa možemo pisati

$$\begin{aligned}\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2} &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} K(x,y)\psi^\epsilon_{j,k}(y)\overline{\psi^{\epsilon'}_{j',k'}(x)}\,dxdy \\ &= \int\limits_{\mathrm{B}(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})\times\mathrm{B}(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})} \big(K(x,y) - K(x,\tfrac{k}{2^j})\big)\,\psi^\epsilon_{j,k}(y)\overline{\psi^{\epsilon'}_{j',k'}(x)}\,dxdy.\end{aligned}$$

Sada za $x \in \mathrm{B}(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$, $y \in \mathrm{B}(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})$ vrijedi

$$|y - \tfrac{k}{2^j}| \leqslant \tfrac{r}{2^{j+1}}, \quad |x-y| \geqslant \tfrac{|k-k'|}{2^j} - \tfrac{r}{2^{j+1}} - \tfrac{r}{2^{j+1}} \geqslant \tfrac{|k-k'|}{2^{j+1}}, \quad |y - \tfrac{k}{2^j}| \leqslant \tfrac{1}{2}|x-y|$$

pa možemo iskoristiti ocjenu za jezgru (K3) kako bismo dobili:

$$\begin{aligned}\big|\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| &\lesssim \int\limits_{\mathrm{B}(\frac{k'}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})\times\mathrm{B}(\frac{k}{2^j}, \frac{r}{2^{j+1}})} \frac{(\frac{r}{2^{j+1}})^\gamma}{(\frac{|k-k'|}{2^{j+1}})^{d+\gamma}} |\psi^\epsilon_{j,k}(y)||\psi^{\epsilon'}_{j',k'}(x)|\,dxdy \\ &= r^\gamma |k-k'|^{-d-\gamma} 2^{d(j+1)} 2^{-\frac{dj}{2}}\|\psi^\epsilon\|_{\mathrm{L}^1} 2^{-\frac{dj}{2}}\|\psi^{\epsilon'}\|_{\mathrm{L}^1} \lesssim \Big(\frac{1}{|k-k'|}\Big)^{d+\gamma} \lesssim \Big(\frac{2}{2+|k-k'|}\Big)^{d+\gamma}.\end{aligned}$$

Slučaj 2. Pretpostavimo $j = j'$ i $|k - k'| < 2r$.

Stavimo li $x_0 := \frac{1}{2^{j+1}}(k+k')$, $R := \frac{r}{2^{j-1}}$, možemo odmah uočiti da su $\operatorname{supp}\psi^\epsilon_{j,k}$ i $\operatorname{supp}\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$ sadržani u $\mathrm{B}(x_0, R)$ pa svojstvo omeđenosti u slabom smislu (5.1) daje

$$\big|\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| \lesssim R^d 2^{dj}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(2^jR)^{|\alpha|}\|\partial^\alpha\psi^\epsilon\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big)\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(2^jR)^{|\alpha|}\|\partial^\alpha\psi^{\epsilon'}\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big),$$

a zbog $2^jR = 2r$ je desna strana zapravo konstantna pa možemo pisati

$$\big|\langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| \lesssim 1 \lesssim \Big(\frac{2}{2+|k-k'|}\Big)^{d+\gamma}.$$

Slučaj 3. Pretpostavimo sada da je $j' \leqslant j - 1$. (Slučaj $j \leqslant j' - 1$ se dokazuje analogno zbog simetrije argumenata, zamjenom T i T^τ.)

Kako je $\psi^{\epsilon'}_{j',k'} \in V_{j'+1} \subseteq V_j$, imamo

$$\psi^{\epsilon'}_{j',k'} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\langle\psi^{\epsilon'}_{j',k'}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2}\,\varphi_{j,i},$$

pri čemu je u ovoj sumi samo konačno mnogo koeficijenata različito od 0 radi kompaktnosti nosača od $\psi^{\epsilon'}$ i φ. Zato imamo

$$\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \overline{\langle\psi^{\epsilon'}_{j',k'}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2}}\, \langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle g, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2},$$

pri čemu smo označili

$$g := \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_i\varphi_{j,i}, \quad c_i := \langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2};\ i \in \mathbb{Z}^d.$$

(Zapravo je g ortogonalna projekcija od $T\psi^{\epsilon}_{j,k}$ na V_j.) Primijetimo da je $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d)$.

Kao prvo, za svaki indeks i vrijedi

$$|c_i| = \big|\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| \lesssim \frac{1}{(1+|i-k|)^{d+\gamma}}. \tag{5.6}$$

Ta se ocjena izvodi na isti način kao i ocjene u slučajevima 1 i 2. Naime, ako u istim računima pišemo $\varphi_{j,i}$ umjesto $\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$, dobit ćemo

$$|\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2}| \lesssim \frac{1}{|i-k|^{d+\gamma}} \quad \text{za } |i-k| \geqslant 2r,$$

odnosno

$$|\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2}| \lesssim 1 \quad \text{za } |i-k| < 2r,$$

iz čega slijedi (5.6). Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ možemo pisati

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}^d \\ x\in\operatorname{supp}\varphi_{j,i}}} |c_i||\varphi_{j,i}(x)| \lesssim 2^{\frac{dj}{2}}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}^d \\ |i-2^j x|<r/2}} \frac{1}{(1+|i-k|)^{d+\gamma}} \\ &\lesssim 2^{\frac{dj}{2}}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} \operatorname{card}\{i\in\mathbb{Z}^d : |i-2^j x|<r/2\}\, \frac{(r/2+1)^{d+\gamma}}{(1+|2^j x-k|)^{d+\gamma}}, \end{aligned}$$

a kako ima manje od $(r+1)^d$ cjelobrojnih točaka unutar svake kugle polumjera $r/2$, zaključujemo da vrijedi

$$|g(x)| \lesssim \frac{2^{\frac{dj}{2}}}{(1+|2^j x-k|)^{d+\gamma}}. \tag{5.7}$$

Osim toga, iz (5.6) odmah slijedi $\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} |c_i| < +\infty$. Pokažimo da je štoviše

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_i = 0.$$

Naime, zbog $T^\tau \mathbb{1} = \mathbf{0}$, $2^{-\frac{dj}{2}} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \varphi_{j,i} = \mathbb{1}$ te $\int \psi^\epsilon_{j,k} = 0$ imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_i &= \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \langle T\psi^\epsilon_{j,k}, \varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \langle \psi^\epsilon_{j,k}, T^\tau\varphi_{j,i}\rangle_{\mathrm{L}^2} \\ &= 2^{\frac{dj}{2}} \lim_{m\to\infty} \Big\langle \psi^\epsilon_{j,k}, T^\tau\Big(2^{-\frac{dj}{2}} \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}^d \\ \|i\|_{\ell^1}\leqslant m}} \varphi_{j,i}\Big)\Big\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0.\end{aligned}$$

Konačno, radi

$$\int_{\mathbb{R}^d} g = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_i \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{j,i} = \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} c_i\Big) 2^{-\frac{dj}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi$$

dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} g = 0. \tag{5.8}$$

Ocjena (5.5) će se temeljiti na činjenicama da je funkcija g “dobro lokalizirana” u smislu (5.7) i ima integral 0 te da je funkcija $\psi^{\epsilon'}_{j',k'}$ tim “manja” i “ravnija” što je j' manji, a to vidimo iz

$$\|\psi^{\epsilon'}_{j',k'}\|_{\mathrm{L}^\infty} = 2^{\frac{dj'}{2}} \|\psi^{\epsilon'}\|_{\mathrm{L}^\infty}, \tag{5.9}$$

$$\|\partial_l\psi^{\epsilon'}_{j',k'}\|_{\mathrm{L}^\infty} = 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} \|\partial_l\psi^{\epsilon'}\|_{\mathrm{L}^\infty}; \quad l = 1, 2, \ldots, d. \tag{5.10}$$

Radi (5.7), (5.8) i jednog iz serije klasičnih rezultata o surjektivnosti operatora divergencije (pogledajte zadatak 5.6) znamo da postoje funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_d \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d)$ takve da je

$$g = \operatorname{div}(g_1, g_2, \ldots g_d) = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \ldots + \partial_d g_d$$

te

$$|g_l(x)| \lesssim \frac{2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j}}{(1 + |2^j x - k|)^{d+\gamma-1}}; \quad x \in \mathbb{R}^d,\ l = 1, 2, \ldots, d. \tag{5.11}$$

Sada razlikujemo dva podslučaja.

Slučaj 3a. Neka je $|2^{-j}k - 2^{-j'}k'| < 2^{-j'}r$, tj. $|2^{j-j'}k' - k| < 2^{j-j'}r$.

Uz primjenu formule za parcijalnu integraciju možemo računati:

$$
\begin{aligned}
\big|\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi^{\epsilon'}_{j',k'}}\, g\Big| \leqslant \sum_{l=1}^{d} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi^{\epsilon'}_{j',k'}}\, \partial_l g_l \Big| = \sum_{l=1}^{d} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\partial_l \psi^{\epsilon'}_{j',k'}}\, g_l \Big| \\
&\overset{(5.10),(5.11)}{\lesssim} 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j} \int\limits_{\mathrm{B}(\frac{k'}{2^{j'}}, \frac{r}{2^{j'+1}})} \frac{dx}{(1+|2^j x - k|)^{d+\gamma-1}} \\
&= 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} \int\limits_{\mathrm{B}(2^{j-j'}k'-k,\ 2^{j-j'-1}r)} \frac{dx'}{(1+|x'|)^{d+\gamma-1}} \\
&\leqslant 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} \int\limits_{\mathrm{B}(\mathbf{0}, 2^{j-j'+1}r)} \frac{dx'}{(1+|x'|)^{d+\gamma-1}} \\
&\lesssim 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} \int_0^{2^{j-j'+1}r} \frac{t^{d-1}dt}{(1+t)^{d+\gamma-1}} \\
&\lesssim 2^{j'(\frac{d}{2}+1)} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-j(d+1)} (2^{j-j'})^{1-\gamma} = 2^{-(j-j')(\frac{d}{2}+\gamma)} \\
&\lesssim 2^{-(j-j')(\frac{d}{2}+\gamma)} \Big(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|} \Big)^{d+\gamma}.
\end{aligned}
$$

Slučaj 3b. Neka je $|2^{-j}k - 2^{-j'}k'| \geqslant 2^{-j'}r$, tj. $|2^{j-j'}k' - k| \geqslant 2^{j-j'}r$.
U ovom slučaju ocjenjujemo

$$
\begin{aligned}
\big|\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}\big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi^{\epsilon'}_{j',k'}}\, g\Big| \overset{(5.9),(5.7)}{\lesssim} 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} \int\limits_{\mathrm{B}(\frac{k'}{2^{j'}}, \frac{r}{2^{j'+1}})} \frac{dx}{(1+|2^j x - k|)^{d+\gamma}} \\
&= 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-dj} \int\limits_{\mathrm{B}(2^{j-j'}k'-k,\ 2^{j-j'-1}r)} \frac{dx'}{(1+|x'|)^{d+\gamma}} \\
&\lesssim 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-dj} \frac{(2^{j-j'-1}r)^d}{(1+\frac{1}{2}|2^{j-j'}k'-k|)^{d+\gamma}} \\
&\lesssim 2^{\frac{dj'}{2}} 2^{\frac{dj}{2}} 2^{-dj} (2^{j-j'})^{-\gamma} \Big(\frac{2^{-j'+1}}{2^{-j+1}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|} \Big)^{d+\gamma} \\
&\lesssim 2^{-(j-j')(\frac{d}{2}+\gamma)} \Big(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|} \Big)^{d+\gamma}.
\end{aligned}
$$

Time je u svakom slučaju dokazana ocjena (5.5). $\square$

Dokaz teorema 5.1 u posebnom slučaju $T\mathbb{1} = T^{\tau}\mathbb{1} = \mathbf{0}$. Za primjenu Schurove leme 5.3

dovoljno je naći "težine" $w_{j,k,\epsilon}$ tako da vrijedi

$$\sum_{j',k',\epsilon'} w_{j',k',\epsilon'} |\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}| \lesssim w_{j,k,\epsilon} \quad \text{za svake indekse } j,k,\epsilon,$$
$$\sum_{j,k,\epsilon} w_{j,k,\epsilon} |\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}| \lesssim w_{j',k',\epsilon'} \quad \text{za svake indekse } j',k',\epsilon'.$$

Stavimo $w_{j,k,\epsilon} = 2^{-\frac{dj}{2}}$ i provjerimo samo prvu nejednakost jer je druga analogna zbog simetrije. Prema propoziciji 5.4 treba još samo vidjeti da je

$$\sum_{j',k'} 2^{\frac{d(j-j')}{2}} 2^{-|j-j'|(\frac{d}{2}+\gamma)} \Big(\frac{2^{-j}+2^{-j'}}{2^{-j}+2^{-j'}+|2^{-j}k-2^{-j'}k'|}\Big)^{d+\gamma} \lesssim 1 \tag{5.12}$$

za sve indekse j,k.

Najprije ćemo sumirati po $j' \geqslant j$. Stavimo li $n = j'-j$, vidimo da lijeva strana u (5.12) iznosi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} 2^{-(d+\gamma)n} \Big(\frac{1+2^{-n}}{1+2^{-n}+|2^{-n}k'-k|}\Big)^{d+\gamma} \lesssim \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma n} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} \frac{2^{-nd}}{(1+|2^{-n}k'-k|)^{d+\gamma}}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} \frac{2^{-nd}}{(1+|2^{-n}k'-k|)^{d+\gamma}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x-k|)^{d+\gamma}} < +\infty,$$

jer su gornje sume zapravo Riemannove sume podintegralne funkcije. Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} \frac{2^{-nd}}{(1+|2^{-n}k'-k|)^{d+\gamma}} \lesssim 1$$

pa je zbog $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\gamma n} \lesssim 1$ lijeva strana u (5.12) ograničena nekom konstantom.

Prosumirajmo sada po $j' < j$. Ako stavimo $n = j - j'$, onda lijeva strana u (5.12) postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} 2^{-\gamma n} \Big(\frac{1+2^{-n}}{1+2^{-n}+|k'-2^{-n}k|}\Big)^{d+\gamma}$$
$$\lesssim \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\gamma n} \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{(1+|k'-2^{-n}k|)^{d+\gamma}} \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\gamma n} \lesssim 1,$$

pri čemu smo koristili poznati kriterij konvergencije Dirichletovih[9] redova.

[9]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), njemački matematičar.

Dakle, po Schurovoj lemi postoji ograničeni linearni operator $\widetilde{T}$ na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ takav da je

$$\langle T\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle \widetilde{T}\psi^{\epsilon}_{j,k}, \psi^{\epsilon'}_{j',k'}\rangle_{\mathrm{L}^2}$$

za svake indekse $j, j', k, k', \epsilon, \epsilon'$. Treba još vidjeti da $\widetilde{T}$ doista proširuje T na cijeloj domeni $\mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Zapravo je zbog dualnosti dovoljno provjeriti

$$\langle Tf, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle \widetilde{T}f, g\rangle_{\mathrm{L}^2}$$

za svake $f, g \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Po konstrukciji ta jednakost vrijedi kada su f i g konačne linearne kombinacije članova valićne baze $\psi^{\epsilon}_{j,k}$, a zbog omeđenosti u slabom smislu (5.1) i gustoće tih linearnih kombinacija u prostoru $\mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ s normom

$$\|f\|_{\mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)} := \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|\partial^{\alpha} f\|_{\mathrm{L}^\infty}$$

slijedi posljednja tvrdnja. $\square$

Sasvim općeniti slučaj teorema 5.1 ćemo dokazati u idućem odjeljku svođenjem na netom dokazani posebni slučaj.

* * *

Zadatak 5.6. Ako je $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d)$ funkcija takva da za neki $\gamma > 0$ vrijedi

$$|g(x)| \lesssim (1+|x|)^{-d-\gamma};\ x \in \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = 0,$$

tada postoje funkcije $g_1, g_2, \ldots, g_d \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^d)$ takve da je

$$g = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \ldots + \partial_d g_d$$

i koje zadovoljavaju

$$|g_l(x)| \lesssim (1+|x|)^{-d+1-\gamma};\ x \in \mathbb{R}^d,\ l = 1, 2, \ldots, d.$$

5.5. Paraprodukti i dokaz općenitog slučaja

Fiksirajmo $(\psi^{\epsilon}_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ i $(\varphi_{j,k})_{j,k}$ iste kao u prethodnoj točki. Osim toga, za $j \in \mathbb{Z}$ i $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ označimo

$$Q_{j,k} := \Big[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1+1}{2^j}\Big\rangle \times \Big[\frac{k_2}{2^j}, \frac{k_2+1}{2^j}\Big\rangle \times \cdots \times \Big[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d+1}{2^j}\Big\rangle = \frac{1}{2^j}([0,1\rangle^d + k).$$

Dakle, $Q_{j,k}$ je dijadska kocka s duljinom brida 2^{-j}.

Paraprodukt je bilinearni operator definiran formulom

$$\pi(f,g) := \sum_{j,k,\epsilon} 2^{\frac{dj}{2}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2} \langle g, \psi^{\epsilon}_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2} \psi^{\epsilon}_{j,k},$$

za svake f i g za koje gornji red (u nekom poretku) konvergira u odgovarajućem funkcijskom prostoru; mi ćemo promatrati samo $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Iz propozicije 5.5 će slijediti da je $\pi(f,g)$ dobro definirana L^2-funkcija čim je $f\in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

Dokažimo sljedeću ocjenu kako bismo dovršili dokaz T(1) teorema.

Propozicija 5.5. ($\mathrm{L}^2 \times \mathrm{BMO} \to \mathrm{L}^2$ ocjena za paraprodukt) *Za svake* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ *vrijedi* $\pi(f,g) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *i*

$$\|\pi(f,g)\|_{\mathrm{L}^2} \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^2}\|g\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Dokaz. Kako je $(\psi^{\epsilon}_{j,k})_{j,k,\epsilon}$ ortonormirana baza od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, to imamo

$$\|\pi(f,g)\|^2_{\mathrm{L}^2} = \sum_{j,k,\epsilon} 2^{dj} |\langle f, \varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2 |\langle g, \psi^{\epsilon}_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2. \tag{5.13}$$

Najprije pokažimo da za svaku standardnu kocku Q vrijedi

$$\sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ Q_{j,k}\subseteq Q}} |\langle g, \psi^{\epsilon}_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2 \lesssim \|g\|^2_{\mathrm{BMO}}|Q|. \tag{5.14}$$

To je ocjena tzv. Carlesonovog[10] tipa.

U svrhu dokaza od (5.14) uzmimo dovoljno veliki $r>0$ tako da su $\operatorname{supp}\varphi$ i $\operatorname{supp}\psi^{\epsilon}$ za svaki ϵ sadržani u kocki $Q^0 := [\frac{-r+1}{2}, \frac{r+1}{2}\rangle^d$. Tada je

$$\operatorname{supp}\varphi_{j,k} \subseteq Q^0_{j,k}, \quad \operatorname{supp}\psi^{\epsilon}_{j,k} \subseteq Q^0_{j,k}, \quad Q^0_{j,k} := \frac{1}{2^j}(Q^0+k)$$

za svake j,k,ϵ. Očigledno je $Q^0_{j,k}$ kocka s istim središtem kao i $Q_{j,k}$, ali r puta duljim bridom. Označimo još sa $\widetilde{Q}$ standardnu kocku s istim središtem kao i Q, ali također r puta većom duljinom brida. Zbrajajući po kockama $Q_{j,k}\subseteq Q$ zbog $\operatorname{supp}\psi^{\epsilon}_{j,k} \subseteq Q^0_{j,k} \subseteq \widetilde{Q}$ i $\int_{\mathbb{R}^d}\psi^{\epsilon}_{j,k} = 0$ imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ Q_{j,k}\subseteq Q}} |\langle g, \psi^{\epsilon}_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2 &= \sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ Q_{j,k}\subseteq Q}} \Big| \int_{\widetilde{Q}} g\, \overline{\psi^{\epsilon}_{j,k}}\Big|^2 = \sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ Q_{j,k}\subseteq Q}} \Big| \int_{\widetilde{Q}} \big(g - [g]_{\widetilde{Q}}\big)\, \overline{\psi^{\epsilon}_{j,k}}\Big|^2 \\
&\leqslant \sum_{j,k,\epsilon} \big|\big\langle (g-[g]_{\widetilde{Q}})\mathbb{1}_{\widetilde{Q}}, \psi^{\epsilon}_{j,k}\big\rangle_{\mathrm{L}^2}\big|^2 = \big\|(g-[g]_{\widetilde{Q}})\mathbb{1}_{\widetilde{Q}}\big\|^2_{\mathrm{L}^2} \\
&= \int_{\widetilde{Q}} |g-[g]_{\widetilde{Q}}|^2 \lesssim \|g\|^2_{\mathrm{BMO}}|\widetilde{Q}| \lesssim \|g\|^2_{\mathrm{BMO}}|Q|.
\end{aligned}$$

[10] Lennart Axel Edvard Carleson (1928), švedski matematičar.

Formulom

$$(M_\star f)(x) := \sup_{\substack{j,k\\ x\in Q_{j,k}}} \frac{1}{|Q_{j,k}|}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(2^j x-k)\,dx\Big| = \sup_{\substack{j,k\\ x\in Q_{j,k}}} 2^{\frac{dj}{2}}|\langle f,\varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|; \quad x\in\mathbb{R}^d$$

je definirana jedna varijanta maksimalne funkcije. Radi nejednakosti

$$(M_\star f)(x) \lesssim \sup_{\substack{j,k\\ x\in Q_{j,k}}} \frac{1}{|Q^0_{j,k}|}\int_{Q^0_{j,k}}|f| \leqslant \sup_{\substack{Q\,\text{st. kocka}\\ x\in Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|$$

iz rezultata idućeg poglavlja će slijediti da je $M_\star$ omeđeni sublinearni operator na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, tj.

$$\|M_\star f\|_{\mathrm{L}^2} \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^2}, \tag{5.15}$$

Za bilo koji $t>0$ neka je

$$\Omega_t := \big\{x\in\mathbb{R}^d : (M_\star f)(x) > \sqrt{t}\big\} = \bigcup_{\substack{j,k\\ 2^{dj}|\langle f,\varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2>t}} Q_{j,k}$$

pa po Markov-Čebiševljevoj nejednakosti i (5.15) imamo

$$|\Omega_t| \leqslant \frac{\|M_\star f\|^2_{\mathrm{L}^2}}{t} \lesssim \frac{\|f\|^2_{\mathrm{L}^2}}{t} < +\infty. \tag{5.16}$$

Promotrimo sve dijadske kocke $Q_{j,k}$ za koje vrijedi $2^{dj}|\langle f,\varphi_{j,k}\rangle|^2 > t$. Zbog nejednakosti (5.16) ta familija ne može sadržavati kocke po volji velikog volumena pa neka je među njima $(Q_m)_m$ (konačni ili beskonačni) niz maksimalnih kocaka (u smislu skupovne inkluzije). Kad neke dvije od kocaka Q_m ne bi bile disjunktne, onda bi jedna bila podskup druge, što nije moguće zbog maksimalnosti. Dakle, Ω_t je disjunktna unija od $(Q_m)_m$.

Iskoristimo sada (5.14) na svaku od kocaka Q_m tako da možemo računati:

$$\begin{aligned}
\|\pi(f,g)\|^2_{\mathrm{L}^2} &\overset{(5.13)}{=} \sum_{j,k,\epsilon}\Big(\int_0^{2^{dj}|\langle f,\varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2} dt\Big)|\langle g,\psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2 = \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ 2^{dj}|\langle f,\varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2>t}} |\langle g,\psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2\Big)\,dt\\
&\leqslant \int_0^{+\infty}\Big(\sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ Q_{j,k}\subseteq\Omega_t}} |\langle g,\psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2\Big)\,dt = \int_0^{+\infty}\Big(\sum_m \sum_{\substack{j,k,\epsilon\\ Q_{j,k}\subseteq Q_m}} |\langle g,\psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2\Big)\,dt\\
&\overset{(5.14)}{\lesssim} \|g\|^2_{\mathrm{BMO}}\int_0^{+\infty}\Big(\sum_m |Q_m|\Big)\,dt = \|g\|^2_{\mathrm{BMO}}\int_0^{+\infty}|\Omega_t|\,dt\\
&= \|g\|^2_{\mathrm{BMO}}\int_0^{+\infty}\big|\{x\in\mathbb{R}^d : |(M_\star f)(x)|^2 > t\}\big|\,dt\\
&= \|M_\star f\|^2_{\mathrm{L}^2}\|g\|^2_{\mathrm{BMO}} \overset{(5.15)}{\lesssim} \|f\|^2_{\mathrm{L}^2}\|g\|^2_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}$$

□

Sada pokažimo vezu paraprodukta s teorijom Calderón-Zygmundovih operatora.

Propozicija 5.6. *Za fiksiranu $g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ je formulom $Sf := \pi(f,g)$ definiran omeđeni Calderón-Zygmundov operator S takav da vrijedi $S\mathbb{1} = g$, $S^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$.*

Dokaz. Po definiciji je

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Sf)h = \sum_{j,k,\epsilon} 2^{\frac{dj}{2}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2} \langle g, \psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2} \langle h, \overline{\psi^\epsilon_{j,k}}\rangle_{\mathrm{L}^2}.$$

Operator S je očigledno Calderón-Zygmundov s jezgrom

$$K_S(x,y) := \sum_{j,k,\epsilon} 2^{\frac{dj}{2}} \langle g, \psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2} \psi^\epsilon_{j,k}(x)\overline{\varphi_{j,k}(y)},$$

a osim toga po propoziciji 5.5 je omeđen. Konačno, $S\mathbb{1} = g$ slijedi iz $2^{\frac{dj}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{j,k} = 1$ i

$$\int_{\mathbb{R}^d} (S\mathbb{1})h = \sum_{j,k,\epsilon} \langle g, \psi^\epsilon_{j,k}\rangle_{\mathrm{L}^2} \langle h, \overline{\psi^\epsilon_{j,k}}\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}^d} gh,$$

a $S^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$ slijedi iz $\int_{\mathbb{R}^d} \psi^\epsilon_{j,k} = 0$ i

$$\int_{\mathbb{R}^d} (S^\tau\mathbb{1})h = \int_{\mathbb{R}^d} (Sh)\mathbb{1} = 0. \qquad \square$$

Naposljetku se vraćamo na naš glavni teorem.

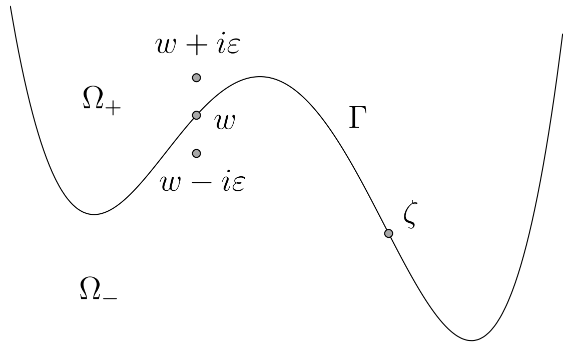
Dokaz teorema 5.1 u općem slučaju $T\mathbb{1} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$, $T^\tau\mathbb{1} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$. Pretpostavimo da za Calderón-Zygmundov operator T vrijede uvjeti (DJ1)–(DJ3) iz teorema 5.1. Definirajmo operator N formulom

$$Nf := Tf - \pi(f, T\mathbb{1}) - \pi(\cdot, T^\tau\mathbb{1})^\tau f,$$

tj.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (Nf)g = \int_{\mathbb{R}^d} (Tf)g - \int_{\mathbb{R}^d} \pi(f, T\mathbb{1})g - \int_{\mathbb{R}^d} \pi(g, T^\tau\mathbb{1})f; \quad f, g \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d).$$

Sada je N Calderón-Zygmundov operator koji je omeđen u slabom smislu te zadovoljava $N\mathbb{1} = \mathbf{0}$ i $N^\tau\mathbb{1} = \mathbf{0}$. Prema dijelu dokaza iz prethodne točke, operator N je omeđen na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ pa je i polazni operator T omeđen na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ kao zbroj tri omeđena operatora. Time je dokaz završen. $\square$



Slika 5.1: Cauchyjev integral duž Γ.

5.6. Cauchyjev integral duž Lipschitzovog grafa

U odjeljku 4.3 smo se već susreli s Cauchyjevim integralom duž realnog pravca, ali sada ćemo promatrati općenitiju krivulju koja je graf neke Lipschitzove funkcije. Neka je

$$\Gamma := \{x + ia(x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C},$$

pri čemu je $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka Lipschitzova funkcija, što zapravo znači da je g.s. derivabilna i $a' \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Najprirodnija parametrizacija krivulje Γ je $t \mapsto \gamma(t) := t + ia(t)$. Na Γ možemo promatrati mjeru duljine luka ds, koja je zapravo 1-dimenzionalna Hausdorffova mjera restringirana na Borelove podskupove od Γ. Elementarnije, ds se može definirati putem parametrizacije γ kao $ds(E) := \int_{\gamma^{-1}(E)} |\gamma'(t)|dt$ za Borelov skup $E \subseteq \Gamma$. U tom smislu koristimo oznaku $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ za Lebesgueov prostor $\mathrm{L}^2(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), ds)$. Krivulja Γ je zajednička granica područjima "iznad" i "ispod" Γ:

$$\Omega_+ := \{x + ia(x) + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\},$$
$$\Omega_- := \{x + ia(x) + iy : x \in \mathbb{R}, y < 0\};$$

pogledajte sliku 5.1.

Za $f \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Gamma)$ promatramo Cauchyjev integral duž Γ,

$$(Cf)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta; \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

koji definira holomorfnu funkciju Cf na $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Kao i u odjeljku 4.3 možemo promatrati rubne vrijednosti

$$(C_\downarrow f)(w) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} (Cf)(w + i\varepsilon); \quad w \in \Gamma,$$
$$(C_\uparrow f)(w) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} (Cf)(w - i\varepsilon); \quad w \in \Gamma.$$

Na taj način dolazimo do linearnih operatora $C_{\downarrow}$ i $C_{\uparrow}$ te je prirodno zapitati se jesu li oni ograničeni na $\mathrm{L}^2(\Gamma)$. Već smo vidjeli da je posebni slučaj $\Gamma = \mathbb{R}$ direktna posljedica korolara 4.7 i teorema 4.8(b), ali nije jasno kakve nove poteškoće nosi ova geometrijski kompliciranija situacija. Doista, to pitanje je neko vrijeme bilo otvoreni problem i inspiriralo je mnoge smjerove istraživanja u harmonijskoj analizi. Među ostalima postavio ga je i popularizirao Calderón [Cal77], a riješili su ga (i to potvrdno) Coifman[11], McIntosh i Meyer[12] [CMM82]. Zainteresiranog čitatelja radije upućujemo na članak Coifmana, Jonesa i Semmesa [CJS89], koji su dali čak dva relativno elementarna dokaza.

Vratimo se radije originalnom Calderónovom pristupu, ojačanom za glavni teorem ovog poglavlja. Uvrštavanjem parametrizacije u definicijski integral za Cf i rezoniranjem kao u korolaru 4.7 nije teško vidjeti da je zapravo dovoljno proučavati omeđenost singularnog integrala duž Γ:

$$(Hf)(x+ia(x)) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y+ia(y))}{(x+ia(x))-(y+ia(y))} |1+ia'(y)| dy; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sada je lako prijeći s Γ na $\mathbb{R}$ putem ograničenih invertibilnih operatora (zahvaljujući $\|a'\|_{\mathrm{L}^\infty} \lesssim 1$):

$$\begin{array}{ll} U\colon \mathrm{L}^2(\Gamma) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), & (Uf)(y) := f(y+ia(y))|1+ia'(y)|, \\ V\colon \mathrm{L}^2(\Gamma) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), & (Vh)(x) := h(x+ia(x)). \end{array}$$

Na taj način pitanje svodimo na ograničenost operatora $T := VHU^{-1}$, tj.

$$(Tg)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(y)}{x-y+i(a(x)-a(y))} dy; \quad x \in \mathbb{R},$$

na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Jezgru posljednjeg operatora možemo razviti u red

$$K(x,y) := \frac{1}{x-y+i(a(x)-a(y))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \underbrace{\frac{(a(x)-a(y))^k}{(x-y)^{k+1}}}_{K_k(x,y)}.$$

Operatori T_k s jezgrama K_k se zovu *Calderónovi komutatori*. Njihovu L^2-omeđenost možemo dokazati matematičkom indukcijom po k. Za $k=0$ samo primijetimo da je riječ o Hilbertovoj transformaciji (do na multiplikativnu konstantu), a za nju znamo da je ograničena. U koraku indukcije uzmimo $k \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da je T_{k-1} ograničen operator, a zbog teorema 4.20 i $a' \in \mathrm{L}^\infty$ znamo da vrijedi $T_{k-1}a' \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$. Formalni račun, korištenjem parcijalne integracije, daje

$$T_k \mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{(a(x)-a(y))^k}{(x-y)^{k+1}} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{(a(x)-a(y))^{k-1}}{(x-y)^k} a'(y) dy = T_{k-1}a',$$

[11]Ronald Raphael Coifman (1941), američki matematičar.
[12]Yves Meyer (1939), francuski matematičar.

odakle zaključujemo $T_k\mathbb{1} \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$. Kako je T_k antisimetričan, kombinacija teorema 5.1 i zadatka 5.1 daje njegovu ograničenost na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Time je završen dokaz indukcijom te zaključujemo da su svi Calderónovi komutatori ograničeni. Ovo rezoniranje ipak nije dovoljno da bismo mogli prosumirali red po k te zaključili omeđenost operatora T, osim ako je Lipschitzova konstanta $\|a'\|_{\mathrm{L}^\infty}$ dovoljno mala. Zapravo je bolja ideja tretirati $T, C_\downarrow, C_\uparrow$ drukčijim (bilo realnim bilo kompleksnim) tehnikama, vidjeti [CJS89].

Vratimo se još malo na prvi Calderónov komutator, razmatranom već u [Cal65]. Calderón je predložio i alternativni pristup omeđenosti od T_1, kojeg nije znao provesti u potpunosti. Koristeći integralni oblik teorema srednje vrijednosti imamo

$$a(y) - a(x) = (y - x) \int_0^1 a'((1-\theta)x + \theta y)d\theta$$

pa formula za T_1 postaje

$$\begin{aligned} (T_1 g)(x) &= \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x) - a(y)}{(x-y)^2} g(y)dy \\ &= \int_0^1 \Big(\mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} a'((1-\theta)x + \theta y) g(y) \frac{dy}{x-y}\Big) d\theta \\ &= -\int_0^1 \Big(\mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} a'(x+\theta s) g(x+s) \frac{ds}{s}\Big) d\theta. \end{aligned}$$

Unutar zagrade primjećujemo izraz $B_\theta(a', g)$, pri čemu je B_θ bilinearni singularni integral definiran sa

$$B_\theta(f, g)(x) := \mathrm{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x+\theta s) g(x+s) \frac{ds}{s}$$

za bilo koji realni parametar θ. Taj operator je prirodno prozvati *bilinearna Hilbertova transformacija* i za potrebe drugog dokaza L^2-omeđenosti od T_1 bi trebalo pokazati ograničenost od B_θ sa $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i to čak s konstantom neovisnom o θ. Ipak, trebalo je proći još mnogo vremena i razviti originalne tehnike da bi se dokazale bilo kakve ocjene za B_θ; konačno su to uspjeli Lacey[13] i Thiele[14] u paru inspirativnih radova [LT97] i [LT99]. Uniformost ocjena po parametru θ je postignuta nešto kasnije.

* * *

Zadatak 5.7. Osmislite definicije multilinearnih Hilbertovih transformacija te pomoću njih izrazite Calderónove komutatore višeg reda.

Napomena: Omeđenost trilinearne Hilbertove transformacije za bilo koji raspon Lebesgueovih prostora je aktualno otvoreni problem, koji se smatra vrlo teškim. Poznati su samo neki negativni rezultati, poput protuprimjera iz [Dem08] za posebne slučajeve eksponenata.

[13] Michael Thoreau Lacey (1959), američki matematičar.
[14] Christoph Martin Thiele (1968), njemački matematičar.

Poglavlje 6

Maksimalne ocjene

Važnost ocjena za maksimalne operatore prepoznali smo još u poglavlju 1 jer one garantiraju g.s. konvergenciju ukoliko još možemo direktno ispitati da ta konvergencija vrijedi na nekom gustom potprostoru. U odjeljku 3.3 smo već dokazali jedan maksimalni rezultat: teorem 3.11 je pomoću trika bio izveden kao direktna posljedica linearne ocjene. Ipak, čitatelj ne bi smio steći dojam kako je takav trik uvijek na raspolaganju. Obično nam je potrebno dokazati ocjenu maksimalnog operatora sa L^p u L^p, a često je (zbog simetrija) jedino takva ocjena i moguća, no tada tehnika Christa i Kiseleva nije primjenjiva. U stvari, ocijeniti maksimalni operator je ponekad neusporedivo teže nego ocijeniti odgovarajući linearni operator; dobar primjer će biti uvodna diskusija iz odjeljka 6.5.

6.1. Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija

Za svaki $r > 0$ ima smisla razmatrati prosječne vrijednosti funkcije $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ na kuglama radijusa r, tj.

$$(A_r f)(x) := \frac{1}{|\mathrm{B}(x,r)|} \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(y)dy; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Primijetimo da operatore A_r alternativno možemo zapisati

$$(A_r f)(x) = \frac{1}{|\mathrm{B}(\mathbf{0},r)|} \int_{\mathrm{B}(\mathbf{0},r)} f(x-y)dy, \quad \text{tj. } A_r f = f * \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{B}(\mathbf{0},r)}}{|\mathrm{B}(\mathbf{0},r)|} \tag{6.1}$$

pa Youngova nejednakost (primjer 2.18) daje

$$\|A_r f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p} \Big\| \frac{\mathbb{1}_{\mathrm{B}(\mathbf{0},r)}}{|\mathrm{B}(\mathbf{0},r)|} \Big\|_{\mathrm{L}^1} = \|f\|_{\mathrm{L}^p}$$

za svaki $p \in [1,\infty]$ i svaki $r > 0$. Vrlo prirodno je postaviti pitanje konvergiraju li usrednjenja $A_r f$ po točkama prema funkciji f. Za neprekidne funkcije f je to sasvim očigledno, ali nije jasno vrijedi li ta konvergencija za bilo koju $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ u g.s. točki $x \in \mathbb{R}^d$. Prisjetimo li se teorema 1.6 i 1.7 iz prvog poglavlja, vidimo da je rješenje promatrati maksimalni operator

$$Mf := \sup_{r\in\langle 0,+\infty\rangle} |A_r f|, \quad \text{tj. } (Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathrm{B}(x,r)|}\Big|\int_{\mathrm{B}(x,r)} f(y)dy\Big|.$$

Operator M zovemo *Hardy-Littlewoodov maksimalni operator*, a Mf zovemo *(Hardy-Littlewoodova) maksimalna funkcija* od f. Lako je vidjeti neprekidnost od $r \mapsto (A_r f)(x)$ pa je po komentaru nakon teorema 1.7 funkcija Mf izmjeriva. Rezultat koji nam treba za spomenutu konvergenciju je slaba L^1 omeđenost od M, a zanimljive će nam biti i jake L^p ocjene za $p > 1$.

Lema 6.1 (Wienerova[1] lema o pokrivaču)**.** *Neka je $B_1, B_2, \ldots, B_n$ konačna kolekcija kugala u $\mathbb{R}^d$. Postoji konačna podkolekcija $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}$ disjunktnih kugala takva da vrijedi $\big|\bigcup_{j=1}^m B_{i_j}\big| \geqslant 3^{-d}\big|\bigcup_{i=1}^n B_i\big|$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su kugle sortirane u padajućem poretku po svojim radijusima. Postupno promatramo jednu po jednu kuglu i služimo se pohlepnim algoritmom:

- Ukoliko je razmatrana kugla B_i disjunktna od svih prethodno odabranih kugala, tada odaberemo i nju.
- Ukoliko razmatrana kugla B_i siječe neku od prethodno odabranih kugala, tada je zanemarimo.

U drugom slučaju kugla B_i siječe neku odabranu kuglu B_k, $k < i$, a ima manji radijus od nje pa mora biti sadržana u $3B_k$, pri čemu nam $3B$ označava kuglu s istim središtem kao B, ali tri puta većim polumjerom. Radi toga vidimo da na kraju odabrane kugle $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}$ zadovoljavaju

$$\Big|\bigcup_{i=1}^n B_i\Big| \leqslant \Big|\bigcup_{j=1}^m 3B_{i_j}\Big| \leqslant \sum_{j=1}^m |3B_{i_j}| = 3^d \sum_{j=1}^m |B_{i_j}| = 3^d \Big|\bigcup_{j=1}^m B_{i_j}\Big|. \qquad \square$$

Sada možemo dokazati spomenute ocjene.

Teorem 6.2. *Vrijedi*

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \quad i \quad \|Mf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

za $p \in \langle 1, \infty]$.

[1] Norbert Wiener (1894–1964), američki matematičar i filozof.

Dokaz. Tražena slaba ocjena zapravo znači da za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$|\{Mf > \alpha\}| \lesssim_d \alpha^{-1} \|f\|_{\mathrm{L}^1}.$$

Radi $Mf \leqslant M|f|$ možemo pretpostaviti da je f nenegativna. Fiksirajmo $\alpha > 0$ i uzmimo proizvoljni kompakt K sadržan u $\{Mf > \alpha\}$. Po definiciji od M za svaki $x \in K$ postoji $r_x \in \langle 0, +\infty\rangle$ takav da je $\frac{1}{|\mathrm{B}(x,r_x)|}\int_{\mathrm{B}(x,r_x)} f > \alpha$. Sada familija $\{B(x, r_x) : x \in K\}$ čini otvoreni pokrivač od K, koji se (zbog kompaktnosti) može reducirati na konačni potpokrivač $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Nadalje, možemo među njima odabrati disjunktne kugle $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}$ kao u lemi 6.1. Imamo

$$|K| \leqslant \Big|\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big| \leqslant 3^d \Big|\bigcup_{j=1}^{m} B_{i_j}\Big| = 3^d \sum_{j=1}^{m} |B_{i_j}| < \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{m} \int_{B_{i_j}} f = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{m} B_{i_j}} f \leqslant \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{\mathrm{L}^1}.$$

Radi regularnosti Lebegueove mjere kompakti K mogu biti odabrani tako da im mjere teže prema $|\{Mf > \alpha\}|$, iz čega slijedi prva željena ocjena. Realnom interpolacijom s trivijalnom nejednakosti $\|Mf\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}$ dobivamo i drugu traženu ocjenu. □

Napomenimo da jaka L^p ocjena ne vrijedi za $p = 1$ i čak ni ne trebamo biti izbirljivi kako bismo našli protuprimjer; vidjeti zadatak 6.1. Iz dokaza nije jasno moraju li L^p ocjene za $p > 1$ doista ovisiti o dimenziji d. Pomalo izmenađujuće, Stein [Ste82] je dokazao ocjene neovisne o dimenziji, ali je njegov pristup dosta drugačiji od navedenog. Još uvijek je otvoren problem ovise li najbolje konstante u slaboj L^1 ocjeni o dimenziji d. Stein i Strömberg[2] [SS83] su dokazali da su one najviše $O(d)$, a noviji rezultati (poput [Ald11] za kocke umjesto kugala) sugeriraju da bi odgovor mogao biti negativan.

Korolar 6.3. *Za svaku $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $\lim_{r\to 0^+}(A_r f)(x) = f(x)$.*

Dokaz. U razmatranju limesa su nam važne jedino vrijednosti $r \in \langle 0, 1]$ pa možemo pretpostaviti da je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Tada tvrdnja slijedi iz teorema 1.7 (tj. zadatka 1.7), teorema 6.2 i već spomenute činjenice da ona vrijedi za neprekidne funkcije f. □

* * *

Razne varijante maksimalnih funkcija se mogu svesti na Hardy-Littlewoodovu. Tako za lokalno integrabilnu funkciju f definiramo *necentriranu maksimalnu funkciju* kao

$$(M_{\mathrm{nc}}f)(x) := \sup_{\substack{B \text{ je kugla} \\ \text{koja sadrži } x}} \frac{1}{|B|}\Big|\int_B f(y)dy\Big|; \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{6.2}$$

Lako je vidjeti da za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi

$$(Mf)(x) \leqslant (M_{\mathrm{nc}}f)(x) \leqslant 2^d (Mf)(x)$$

[2]Jan-Olov Strömberg (1947), švedski matematičar.

pa operator M_{nc} zadovoljava iste ocjene kao M, eventualno s većim konstantama. Sasvim analogno se diskutira (npr. necentrirana) maksimalna funkcija kod koje su kugle zamijenjene standardnim kockama:

$$(M_{\mathrm{kocke}}f)(x) := \sup_{\substack{Q \text{ je standardna kocka} \\ \text{koja sadrži } x}} \frac{1}{|Q|}\Big|\int_Q f(y)dy\Big|; \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

S druge strane, zapis usrednjenja $A_r f$ kao u (6.1) nam može dati ideju da promatramo općenitije maksimalne funkcije konvolucijskog tipa.

Teorem 6.4. *Neka je $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ funkcija koja ima monotonu i radijalnu L^1 majorantu, tj. postoji padajuća funkcija $\theta\colon [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty]$ takva da je*

$$|\varphi(x)| \leqslant \theta(|x|) \ \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^d \quad i \quad \int_{\mathbb{R}^d} \theta(|x|)dx < +\infty.$$

Tada maksimalna funkcija

$$(M_\varphi f)(x) := \sup_{r \in \langle 0,+\infty\rangle} \big|(f * \mathrm{D}_r^{(1)}\varphi)(x)\big|$$

zadovoljava ocjene

$$\|M_\varphi f\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,\varphi} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \quad i \quad \|M_\varphi f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,\varphi} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

za $p \in \langle 1, \infty]$.

Dokaz. Radi monotonosti možemo pretpostaviti da je $\varphi(x) = \theta(|x|)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^d$. Zbog teorema 6.2 je dovoljno dokazati nejednakost po točkama:

$$(M_\varphi|f|)(x) \leqslant \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \theta(|y|)dy\Big)}_{<+\infty}(M|f|)(x); \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ukoliko je θ jednostavna (tj. stepenasta) padajuća funkcija, odnosno $\theta = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{[0,r_j\rangle}$ za neke $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j, r_j > 0$, tada imamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \theta(|y|)dy = \sum_{j=1}^m \alpha_j |\mathrm{B}(\mathbf{0}, r_j)| = |\mathrm{B}(\mathbf{0},1)| \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j^d$$

te

$$\begin{aligned}
(|f| * \mathrm{D}_r^{(1)}\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)| r^{-d}\theta(r^{-1}|t|)dt = r^{-d}\sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{\mathrm{B}(\mathbf{0},rr_j)} |f(x-t)|dt \\
&= |\mathrm{B}(\mathbf{0},1)| \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j^d \underbrace{\frac{1}{|\mathrm{B}(\mathbf{0},rr_j)|}\int_{\mathrm{B}(\mathbf{0},rr_j)} |f(x-t)|dt}_{A_{rr_j}|f|(x)} \\
&\leqslant \Big(|\mathrm{B}(\mathbf{0},1)| \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j^d\Big)(M|f|)(x) = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \theta(|y|)dy\Big)(M|f|)(x),
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tražena nejednakost. Općenita padajuća funkcija θ se može prikazati kao rastući limes niza jednostavnih funkcija gornjeg oblika pa tvrdnja konačno slijedi iz teorema o monotonoj konvergenciji. $\square$

Korolar 6.5. *Neka je φ kao u teoremu 6.4 uz dodatnu pretpostavku $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty\rangle$ za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi*

$$\lim_{r \to 0^+} (f * \mathrm{D}_r^{(1)} \varphi)(x) = f(x).$$

Dokaz. Treba još provjeriti konvergenciju za funkcije f iz nekog gustog potprostora, a mi odabiremo $\mathrm{C_c}(\mathbb{R}^d)$. Račun koji slijedi smo već vidjeli, npr. u dokazima leme 4.6 i korolara 4.7:

$$\begin{aligned} \big|(f * \mathrm{D}_r^{(1)} \varphi)(x) - f(x)\big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-t) - f(x)\big) r^{-d} \varphi(r^{-1}t) dt \Big| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x - rs) - f(x)\big| |\varphi(s)| ds. \end{aligned}$$

Radi neprekidnosti od f za svaki $s \in \mathbb{R}^d$ imamo $\lim_{r \to 0^+} |f(x-rs) - f(x)| = 0$ pa teorem o dominiranoj konvergenciji zahvaljujući omeđenosti od f i integrabilnosti od φ daje

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x - rs) - f(x)\big| |\varphi(s)| ds = 0.$$ $\square$

Teorem 6.4 i korolar 6.5 se posebno mogu primijeniti na fundamentalno rješenje jednadžbe provođenja; vidjeti tvrdnju (3) iz odjeljka 1.1. Naime, tada je

$$\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}, \quad h(x,t) = (f * \mathrm{D}_{\sqrt{t}}^{(1)} \varphi)(x).$$

Oni su također primjenjivi na Poissonov integral funkcije, vidjeti tvrdnju (4) iz istog odjeljka. U tom je pak slučaju

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}, \quad u(x,t) = (f * \mathrm{D}_y^{(1)} \varphi)(x). \tag{6.3}$$

* * *

Zadatak 6.1. Dokažite da za svaku funkciju $f \geqslant 0$ koja nije g.s. jednaka $\mathbf{0}$ maksimalna funkcija Mf ne leži u prostoru $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Zadatak 6.2. Neka su $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$, $s > 0$ takvi da vrijedi $1/p = 1/q + s/d$.

(a) Za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ dokažite *Hedbergovu nejednakost*[3] [Hed72]:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-s}} dy \lesssim_{d,p,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}^{sp/d} (\mathrm{M}f)(x)^{1-sp/d}.$$

Uputa: Uočavanjem i korištenjem simetrija možemo normalizirati tako da vrijedi $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = 1$ i $(\mathrm{M}f)(x) = 1$. Rastavite područje integracije na $\{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| > 1\}$ i $\bigcup_{k=0}^{\infty} \{y \in \mathbb{R}^d : 2^{-k-1} < |x-y| \leqslant 2^{-k}\}$.

(b) Iskoristite (a) dio kako biste dali alternativni dokaz ocjene Rieszovog potencijala iz primjera 3.1:

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}} dy \Big\|_{\mathrm{L}_x^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Zadatak 6.3. Dokažite da za svaki $d \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $c_d > 0$ sa sljedećim svojstvom. Neka su $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $f \geqslant 0$ i $\alpha > 0$. Ako je B kugla u $\mathbb{R}^d$ takva da je $(Mf)(x) \geqslant \alpha$ za svaku točku $x \in B$, tada vrijedi $(Mf)(x) \geqslant c_d \alpha$ za svaku točku $x \in 2B$.

Napomena: Ovdje $2B$ označava kuglu s istim središtem kao B, ali dvostrukim polumjerom.

Uputa: Imitirajte dokaz slabe L^1 ocjene za Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju. Neka su $B_1, \ldots, B_n$ kugle koje prekrivaju (zatvarač od) B i takve su da za svaki i vrijedi $\frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} f > \frac{\alpha}{2}$. Razlikujte slučaj kada neka od kugala B_i ima radijus veći nego B i slučaj kada sve kugle B_i imaju radijuse manje ili jednake nego kugla B. U drugom slučaju se može odozdo ocijeniti prosjek od f na $3B$.

Zadatak 6.4. *(Maksimalna funkcija po pravokutnicima)* Neka je $\mathcal{R}$ kolekcija svih pravokutnika u $\mathbb{R}^2$ čije stranice su paralelne s koordinatnim osima. Za lokalno integrabilnu funkciju f definiramo

$$(M_{\square} f)(x) := \sup_{\substack{R \in \mathcal{R} \\ R \ni x}} \frac{1}{|R|} \Big| \int_R f(y) dy \Big|.$$

Dokažite da je operator $M_{\square}$ omeđen na prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)$ za $1 < p \leqslant \infty$. Primjerom pokažite da $M_{\square}$ ipak ne zadovoljava čak ni slabu L^1 ocjenu.

Uputa: Dvaput primijenite ograničenost jednodimenzionalne necentrirane maksimalne funkcije u svakoj varijabli zasebno.

Napomena: Pravokutnici čije stranice nisu paralelne s koordinatnim osima su mnogo problematičniji. Može se pokazati da maksimalna funkcija po takvim pravokutnicima (tzv. *Kakeya*[4] *maksimalna funkcija*) uopće nije ograničena pa se onda npr. promatraju samo pravokutnici ograničenog ekscentriciteta.

[3] Lars Inge Hedberg (1935–2005), švedski matematičar.

[4] Sōichi Kakeya (1886–1947), japanski matematičar.

Zadatak 6.5. (a) Dokažite da "parabolična" maksimalna funkcija

$$(M_{\mathrm{par}}f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r}\Big|\int_0^r f(x+t^2)dt\Big|$$

zadovoljava ocjenu $\|M_{\mathrm{par}}f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$ za $p \in \langle 1, \infty]$.

Uputa: Zamjenom varijabli i dijadskim "razbijanjem" intervala integracije svedite traženu nejednakost na teorem 6.2.

(b) Dokažite da bilinearna maksimalna funkcija

$$M_{\mathrm{bilin}}(f,g)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r}\Big|\int_{-r}^r f(x-t)g(x+t)dt\Big|$$

zadovoljava ocjenu $\|M_{\mathrm{bilin}}(f,g)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_{p,p_1,p_2} \|f\|_{\mathrm{L}^{p_1}(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathrm{L}^{p_2}(\mathbb{R})}$ za $p,p_1,p_2 \in \langle 1,\infty]$ takve da je $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$.

Uputa: Najprije iskoristite Hölderovu nejednakost po t kako biste sveli traženu ocjenu na teorem 6.2.

Napomena: Poznato je da ocjena ostaje vrijediti i kada je $p \in \langle 2/3, 1]$, ali je tada dokaz mnogo složeniji i zahtijeva sofisticiranije tehnike; čitatelj može pogledati [Lac00]. Posebni slučaj $p = 1$ je zapravo dugo godina bio otvoreni problem kojeg je bio postavio Calderón.

6.2. Ocjene i konvergencija martingala⋆

Ovaj odjeljak nije sasvim nužan za nastavak proučavanja maksimalnih ocjena i njihovih posljedica. On će zapravo omogućiti alternativni, vjerojatnosni pristup takvim rezultatima (pogledajte recimo tekst nakon korolara 6.9), koji je posljednjih godina vrlo aktualan u modernoj harmonijskoj analizi.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. U teoriji vjerojatnosti je uobičajeno izmjerive kompleksne funkcije na vjerojatnosnom prostoru zvati *slučajnim varijablama* te ih označavati velikim latiničnim slovima. Integral slučajne varijable X po Ω obzirom na mjeru $\mathbb{P}$ se obično piše $\mathbb{E}X$ i zove *očekivanje* od X. Ako je pak $\mathcal{G}$ neka σ-algebra takva da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, tada definiramo *uvjetno očekivanje* od $X \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ na $\mathcal{G}$, u oznaci $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, kao slučajnu varijablu $Y \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ sa svojstvima:

- Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva,
- $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ za svaki $A \in \mathcal{G}$.

Može se pokazati da takva slučajna varijabla Y postoji i da je jedinstvena do na jednakost g.s. obzirom na $\mathbb{P}$. Dakle, kad god pišemo jednakosti ili nejednakosti s $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ zapravo bismo trebali dopisivati "g.s.", ali to obično ne činimo. Intuicija iza definicije ovog pojma je da $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ prestavlja "najbolju" $\mathcal{G}$-izmjerivu aproksimaciju slučajne varijable X.

U slučaju trivijalne σ-algebre $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ lako po definiciji provjerimo da je $\mathbb{E}\big(X\big|\{\emptyset,\Omega\}\big)$ upravo konstanta $\mathbb{E}X$ pa uvjetno očekivanje poopćuje obično očekivanje. Malo općenitije, ako je $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačna particija od Ω na skupove pozitivne mjere $\mathbb{P}$, tada za $X \in \mathrm{L}^1$ i za σ-algebru $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_m\})$ sastavljenu od svih konačnih unija skupova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ imamo

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_j)} \int_{A_j} X d\mathbb{P}\Big) \mathbb{1}_{A_j}. \tag{6.4}$$

Ukoliko nam je X nepoznata slučajna varijabla, ali znamo izračunati $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, iz posljednje jednakosti vidimo da je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega)$ "najbolji pokušaj" kod pogađanja prave vrijednosti od $X(\omega)$ za $\omega \in \Omega$.

Drugi ekstremni slučaj je $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, kada imamo $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$. Općenitije vrijedi

$$\mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) = H\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \tag{6.5}$$

ako su $X, HX \in \mathrm{L}^1$ i H je $\mathcal{G}$-izmjeriva. Ako pak imamo σ-algebre $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ takve da je $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \supseteq \mathcal{H}$, tada da svaku $X \in \mathrm{L}^1$ vrijedi

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\big|\mathcal{G}\big). \tag{6.6}$$

Slikovito kažemo da kod uzastopnih uvjetnih očekivanja "pobjeđuje" manja σ-algebra.

Lako je vidjeti da je uvjetno očekivanje linearno, a i monotono je na realnim slučajnim varijablama. Osim toga je korisno sljedeće svojstvo kontraktivnosti na L^p prostorima.

Lema 6.6.

(a) Za $X \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vrijedi $\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big)$.

(b) Za $p \in [1, \infty]$ i $X \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vrijedi $\big\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leqslant \|X\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

Dokaz. (a) Ako je X realna, rastavimo je na pozitivni i negativni dio, $X = X_+ - X_-$, $X_+ := \max\{X, 0\}$, $X_- := \max\{-X, 0\}$, tako da imamo $|X| = X_+ + X_-$. Zbog linearnosti je

$$\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| = \big|\mathbb{E}(X_+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X_-|\mathcal{G})\big| \leqslant \mathbb{E}(X_+|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_-|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big).$$

Za kompleksnu $X \in \mathrm{L}^1$ je dokaz ipak malo složeniji. Stavimo $H := \overline{\operatorname{sgn}\mathbb{E}(X|\mathcal{G})}$ pa, kako je H izmjeriva obzirom na $\mathcal{G}$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| &= H\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \overset{(6.5)}{=} \mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) = \operatorname{Re}\mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}\big(\operatorname{Re}(HX)\big|\mathcal{G}\big) \leqslant \mathbb{E}\big(|HX|\big|\mathcal{G}\big) \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big),\end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednje dvije nejednakosti koristili monotonost uvjetnog očekivanja.

(b) Radi kompleksne interpolacije dovoljno je provjeriti tvrdnju u graničnim slučajevima $p=1$ i $p=\infty$. Za $p=1$ imamo:

$$\big\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big\|_{\mathrm{L}^1} = \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| \overset{\text{(a)}}{\leqslant} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big)\big) \overset{(6.6)}{=} \mathbb{E}|X| = \|X\|_{\mathrm{L}^1},$$

dok tvrdnja za $p=\infty$ slijedi iz:

$$\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| \overset{\text{(a)}}{\leqslant} \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big) \leqslant \mathbb{E}\big(\|X\|_{\mathrm{L}^\infty}\big|\mathcal{G}\big) = \|X\|_{\mathrm{L}^\infty}. \qquad \square$$

Neka je sada $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ proizvoljna *filtracija* od $\mathcal{F}$, tj. rastući niz pod-σ-algebri od $\mathcal{F}$. Za niz $(X_n)_{n=0}^\infty$ iz $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ kažemo da je *(diskretni) martingal* obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ ako vrijedi:

- X_n je $\mathcal{F}_n$-izmjeriva za svaki $n\in\mathbb{N}_0$,
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ za svaki $n\in\mathbb{N}_0$.

Direktna posljedica definicije i svojstva (6.6) je

$$\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \cdots,$$

a radi leme 6.6(b) za $p\geqslant 1$ vrijedi

$$\|X_0\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|X_1\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|X_2\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \cdots,$$

tj.

$$\mathbb{E}|X_0|^p \leqslant \mathbb{E}|X_1|^p \leqslant \mathbb{E}|X_2|^p \leqslant \cdots.$$

Tipični primjer martingala dobijemo ako uzmemo neku $X\in\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ i stavimo $X_n := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$.

Reći ćemo da je slučajna varijabla $T\colon\Omega\to\mathbb{N}_0$ *vrijeme zaustavljanja* (obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$) ako za svaki $n\in\mathbb{N}_0$ vrijedi $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$. Tada ima smisla slučajna varijabla X_T određena sa

$$X_T|_{\{T=n\}} = X_n|_{\{T=n\}} \quad \text{za svaki } n\in\mathbb{N}_0,$$

tj.

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega),$$

koju zovemo *martingal* $(X_n)_{n=0}^\infty$ *zaustavljen u vremenu* T. Definiramo još i σ-algebru

$$\mathcal{F}_T := \big\{A\in\mathcal{F} : (\forall n\in\mathbb{N}_0)(A\cap\{T=n\}\in\mathcal{F}_n)\big\},$$

koju zovemo *filtracija* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ *zaustavljena u vremenu* T. Naime, lako je provjeriti da je doista riječ o σ-algebri. Također je lako provjeriti da je slučajna varijabla X_T izmjeriva obzirom na $\mathcal{F}_T$. Možda najefektnije svojstvo martingala je sljedeće: Ako je $(T_n)_{n=0}^\infty$ rastući niz ograničenih vremena zaustavljanja, tada je $(X_{T_n})_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{T_n})_{n=0}^\infty$; vidjeti zadatak 6.6.

Primjer 6.7. Tzv. *dijadska filtracija* od $[0,1\rangle$ je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^{\infty}$ definirana sa

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n &:= \sigma\big(\{I \in \mathcal{D} \,:\, I \subseteq [0,1\rangle,\ |I| = 2^{-n}\}\big)\\ &= \text{konačne unije intervala } [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle;\ k = 0,1,2,\ldots,2^n-1.\end{aligned}$$

Za bilo koju $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ je formulom $X_n := \mathbb{E}(f|\mathcal{D}_n)$ dan tzv. *dijadski martingal* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Ako nam, kao i ranije, $[f]_I$ označava prosjek funkcije f na intervalu I, tada zahvaljujući (6.4) za $n \in \mathbb{N}_0$ možemo pisati:

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} [f]_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)\rangle} \mathbb{1}_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)\rangle} = \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} [f]_I \mathbb{1}_I.$$

Pogledajmo još što su u ovom slučaju martingalne razlike $X_{n+1} - X_n$:

$$\begin{aligned}
&X_{n+1} - X_n\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} [f]_{[2^{-n-1}k,2^{-n-1}(k+1)\rangle} \mathbb{1}_{[2^{-n-1}k,2^{-n-1}(k+1)\rangle} - \sum_{k=0}^{2^n-1} [f]_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)\rangle} \mathbb{1}_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)\rangle}\\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \Big(\big([f]_{[2^{-n-1}2k,2^{-n-1}(2k+1)\rangle} - [f]_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)\rangle}\big) \mathbb{1}_{[2^{-n-1}2k,2^{-n-1}(2k+1)\rangle}\\
&\qquad\qquad + \big([f]_{[2^{-n-1}(2k+1),2^{-n-1}(2k+2)\rangle} - [f]_{[2^{-n}k,2^{-n}(k+1)\rangle}\big) \mathbb{1}_{[2^{-n-1}(2k+1),2^{-n-1}(2k+2)\rangle} \Big)\\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big([f]_{[2^{-n-1}2k,2^{-n-1}(2k+1)\rangle} - [f]_{[2^{-n-1}(2k+1),2^{-n-1}(2k+2)\rangle}\big)\\
&\qquad\qquad \big(\mathbb{1}_{[2^{-n-1}2k,2^{-n-1}(2k+1)\rangle} - \mathbb{1}_{[2^{-n-1}(2k+1),2^{-n-1}(2k+2)\rangle}\big)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} \frac{1}{2}\big([f]_{I_{\text{lijevo}}} - [f]_{I_{\text{desno}}}\big)\big(\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}\big),
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - X_n &= \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} \frac{1}{|I|}\Big(\int_{[0,1\rangle} f\big(\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}\big)\Big)\big(\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}\big)\\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} \langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}\, \mathbb{h}_I,
\end{aligned}$$

pri čemu su $\mathbb{h}_I$ Haarove funkcije definirane u (5.2). Napomenimo da skalarni produkti $\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}$ imaju smisla za svaku $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$.

* * *

Dokažimo poznatu maksimalnu ocjenu za sasvim općeniti martingal.

Teorem 6.8. (Doobova[5] nejednakost) *Neka je* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *martingal (obzirom na neku filtraciju) i neka je* $(X_n^\star)_{n=0}^{\infty}$ *pripadni maksimalni proces, tj.*

$$X_n^\star := \max_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k| \quad \textit{za } n \in \mathbb{N}_0.$$

Tada vrijedi:

$$\mathbb{P}(X_n^\star > \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|X_n\|_{\mathrm{L}^1} \quad \textit{za } \alpha \in \langle 0, +\infty\rangle,\ n \in \mathbb{N}_0,$$
$$\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \quad \textit{za } p \in \langle 1, \infty\rangle,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Označimo $A := \{X_n^\star > \alpha\}$ i definirajmo vrijeme zaustavljanja

$$T := \min\{k \geqslant 0 \,:\, |X_k| > \alpha \text{ ili } k = n\}$$

tako da po definiciji vrijedi

$$|X_T| > \alpha \text{ na } A, \quad |X_T| = |X_n| \text{ na } A^c.$$

Po zadatku 6.6(c) radi $T \leqslant n$ imamo $\mathbb{E}|X_T| \leqslant \mathbb{E}|X_n|$, a kako je $\mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{A^c})$, zapravo smo dobili

$$\alpha\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_A) \leqslant \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_A). \tag{6.7}$$

Zbog $\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_A) \leqslant \mathbb{E}|X_n|$ dijeljenjem (6.7) sa α slijedi prva tražena nejednakost.

Nadalje, računamo:

$$\begin{aligned}
\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p}^p &\overset{(1.15)}{=} \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mathbb{P}(X_n^\star > \alpha)d\alpha \overset{(6.7)}{\leqslant} \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\alpha^{-1}\Big(\int_{\{X_n^\star > \alpha\}} |X_n| d\mathbb{P}\Big)d\alpha \\
&= \int_\Omega |X_n|\Big(\int_0^{X_n^\star} p\alpha^{p-2}d\alpha\Big)d\mathbb{P} = \frac{p}{p-1}\int_\Omega |X_n|(X_n^\star)^{p-1}d\mathbb{P} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \frac{p}{p-1}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p}^{p-1}.
\end{aligned}$$

Dijeljenjem sa $\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p}^{p-1}$ (ukoliko je taj broj različit od 0) slijedi i druga nejednakost. □

Kao posebni slučaj teorema slijede ocjene za tzv. *dijadsku maksimalnu funkciju*:

$$(M_{\mathrm{dij}}f)(x) := \sup_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\ni x}} \frac{1}{|I|}\Big|\int_I f(y)dy\Big|; \quad x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$M_{\mathrm{dij}}f := \sup_{I\in\mathcal{D}} |[f]_I|\,\mathbb{1}_I.$$

[5] Joseph Leo Doob (1910–2004), američki matematičar.

Korolar 6.9. *Vrijedi*

$$\|M_{\mathrm{dij}}f\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \quad i \quad \|M_{\mathrm{dij}}f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty]$.

Dokaz. Radi neprekidnosti mjere i teorema o monotonoj konvergenciji, dovoljno je pokazati tražene nejednakosti za varijantu maksimalne funkcije kod koje se uzima supremum samo po konačnoj podkolekciji od $\mathcal{D}$. Nadalje, zbog translacijske i dilatacijske invarijantnosti tih nejednakosti možemo pretpostaviti i da su svi intervali iz te podkolekcije podskupovi od $[0,1\rangle$, no tada naprosto iskoristimo teorem 6.8. □

Zanimljivo je da se čak i teorem 6.2 može izvesti iz Doobove nejednakosti, premda Hardy-Littlewoodova maksimalna funkcija nije vezana uz neki martingal. Poslužit ćemo se tzv. *Christovim trikom translacije za trećinu.*

Radi jednostavnosti pretpostavimo $d = 1$. Uvest ćemo još jednu dijadsku rešetku $\mathcal{D}'$, definiranu sa

$$\mathcal{D}' := \Big\{ I + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ 4^m<|I|}} 4^m \ : \ I \in \mathcal{D} \Big\}.$$

Familiju $\mathcal{D}'$ možemo interpretirati na sljedeći način. Dijadske intervale pomičemo za formalni binarni "broj"

$$\ldots 10101.010101\ldots,$$

ali obzirom da je kolekcija dijadskih intervala duljine 2^n zapravo invarijantna na pomake za višekratnike od 2^n, njih je dovoljno translatirati za najveći broj oblika

$$101\ldots 01.010101\ldots$$

koji je manji od 2^n. Još preciznije, ako je $I \in \mathcal{D}$, $|I| = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ tada I pomičemo:

- za $2^n/3$ ako je n paran,
- za $2^{n+1}/3$ ako je n neparan.

Istu familiju $\mathcal{D}'$ ćemo dobiti i ako u drugom slučaju radije pomičemo za $2^{n+1}/3 - 2^n = -2^n/3$. Dakle,

$$\mathcal{D}' = \Big\{ I + (-1)^n \frac{2^n}{3} \ : \ I \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{Z},\ |I| = 2^n \Big\}.$$

U ovom alternativnom prikazu svaki dijadski interval pomičemo ili ulijevo ili udesno za trećinu njegove duljine, odakle je trik i dobio svoj kolokvijalni naziv.

Lema 6.10. *Za svaki ograničeni interval* $J \subseteq \mathbb{R}$ *postoji interval* $I \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ *takav da je* $J \subseteq I$ *i* $|I| \leqslant 8|J|$.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^{n-3} \leqslant |J| < 2^{n-2}$. Ukoliko je J sadržan u nekom dijadskom intervalu duljine 2^n, tada njega možemo uzeti za traženi interval I. U protivnom J sadrži broj oblika $2^n k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Iz pretpostavke o duljini slijedi da je J sadržan u $\langle 2^n k - \frac{2^n}{3}, 2^n k + \frac{2^n}{3} \rangle$ te je zato pogotovo podskup intervala

$$\Big[2^n k - \frac{2^n}{3}, 2^n(k+1) - \frac{2^n}{3}\Big\rangle \quad \text{i} \quad \Big[2^n(k-1) + \frac{2^n}{3}, 2^n k + \frac{2^n}{3}\Big\rangle.$$

Kako se barem jedan od ta dva intervala nalazi u $\mathcal{D}'$ (ovisno o parnosti od n), možemo baš njega uzeti za traženi interval I. □

Zbog gornjeg opisa od $\mathcal{D}'$ je jasno da i "pomaknuta" dijadska maksimalna funkcija

$$(M'_{\mathrm{dij}} f)(x) := \sup_{\substack{I \in \mathcal{D}' \\ I \ni x}} \frac{1}{|I|} \Big| \int_I f(y) dy \Big|; \quad x \in \mathbb{R}.$$

zadovoljava ocjene iz korolara 6.9. Radi leme 6.10 možemo pisati

$$Mf \leqslant 8 M_{\mathrm{dij}} |f| + 8 M'_{\mathrm{dij}} |f|,$$

što daje alternativni dokaz teorema 6.2.

* * *

Vratimo se sada na općeniti martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na neku filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Neka je još $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ *predvidivi proces* obzirom na istu filtraciju, što znači da je slučajna varijabla H_n izmjeriva obzirom na $\mathcal{F}_{n-1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Intuitivno, vrijednosti od H_n se mogu "predvidjeti" već u trenutku $n-1$, kada raspolažemo informacijama određenima sa $\mathcal{F}_{n-1}$. *Martingalna transformacija* (od $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na $(H_n)_{n=1}^{\infty}$) je novi proces $\big((H \cdot X)_n\big)_{n=0}^{\infty}$ definiran sa

$$(H \cdot X)_0 := \mathbf{0}, \quad (H \cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}) \ \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Uz pretpostavku ograničenosti varijabli H_n taj novi proces $H \cdot X$ je opet martingal obzirom na istu filtraciju. Drugi česti naziv za $H \cdot X$ je *diskretni stohastički integral*, jer je riječ o Riemannovim sumama tzv. Itōvog[6] integrala. U toj interpretaciji prirodno je ispitati koji se sve procesi mogu prikazati kao martingalne transformacije obzirom na dani martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, a odgovor daju tzv. teoremi reprezentacije martingala. Takvim rezultatima obiluje literatura iz teorije vjerojatnosti (vidjeti npr. knjige [Pro04] i [RY99]), premda su češće formulirani s neprekidnim vremenskim parametrom.

[6]Kiyoshi Itō (1915–2008), japanski matematičar.

Pojam martingalne transformacije uveo je Burkholder[7] [Bur66]. Jedan od njegovih najvećih doprinosa ovom području je "oštra" ocjena za martingalnu transformaciju s doista ingenioznim dokazima. Naime, Burkholder je svoj originalni dokaz iz [Bur84] kasnije dodatno pojednostavnio (npr. u radu [Bur88b]), a u knjizi [Ose12] dane su brojne modifikacije njegove metode.

Teorem 6.11. (Burkholderova nejednakost) *Za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\|(H \cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (p^* - 1)\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p},$$

pri čemu smo označili $p^* := \max\{p, p'\} = \max\{p, \frac{p}{p-1}\}$.

Može se pokazati i da je konstanta $p^* - 1$ najbolja moguća, premda je nejednakost stroga osim u trivijalnim slučajevima kada je $p = 2$ ili je desna strana jednaka 0.

Dokaz. Brojeve $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i $n \in \mathbb{N}$ smatramo fiksiranima. U cijelom dokazu pretpostavljat ćemo da je $\|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ i $\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Iz (b) dijela leme 6.6 tada slijedi i $\|X_k\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

Slučaj $p = 2$ je jednostavan, jer prema (6.5) imamo ortogonalnost prirasta,

$$\mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{(X_l - X_{l-1})}\,\big) = \mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{\mathbb{E}(X_l - X_{l-1}|\mathcal{F}_{l-1})}\,\big) = 0$$

za $1 \leqslant k < l \leqslant n$, pa možemo pisati

$$\begin{aligned}
\|(H \cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1})\Big|^2 = \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{(X_l - X_{l-1})}\,\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(|H_k|^2|X_k - X_{k-1}|^2\big) + 2\mathrm{Re}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{(X_l - X_{l-1})}\,\big) \\
&\leqslant \Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty}^2\Big)\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(|X_k - X_{k-1}|\big)^2
\end{aligned}$$

te je analogno

$$\|X_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \mathbb{E}\Big|X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\Big|^2 = \mathbb{E}|X_0|^2 + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(|X_k - X_{k-1}|^2\big).$$

Neka je sada $p > 2$ i označimo $Y_m := (H \cdot X)_m$. Normalizirajmo

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty} = 1, \tag{6.8}$$

[7] Donald Lyman Burkholder (1927–2013), američki matematičar.

tako da zapravo imamo dva martingala $(X_m)_{m=0}^\infty$ i $(Y_m)_{m=0}^\infty$ obzirom na istu filtraciju $(\mathcal{F}_m)_{m=0}^\infty$ koji zadovoljavaju

$$|Y_m - Y_{m-1}| \leqslant |X_m - X_{m-1}| \tag{6.9}$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$. Rezultat kojeg želimo dokazati glasi: ako martingali zadovoljavaju tzv. *uvjet diferencijalne subordiniranosti* (6.9), tada vrijedi nejednakost

$$\|Y_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (p-1)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}. \tag{6.10}$$

Opet možemo pretpostaviti $\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$, što za jednostavnu posljedicu ima da slučajne varijable X_k i Y_k za $k = 0, 1, \ldots, n$ imaju konačne L^p norme.

Definirajmo funkcije $u, v\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ formulama

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= p\big(1 - \tfrac{1}{p}\big)^{p-1}\big(|y| - (p-1)|x|\big)\big(|x| + |y|\big)^{p-1}, \\ v(x,y) &:= |y|^p - (p-1)^p|x|^p. \end{aligned}$$

Mi zapravo trebamo dokazati $\mathbb{E}v(X_n, Y_n) \leqslant 0$, a za to je dovoljno provjeriti:

(B1) $v(x,y) \leqslant u(x,y)$ za svake $x, y \in \mathbb{C}$,

(B2) $\mathbb{E}u(X_k, Y_k) \leqslant \mathbb{E}u(X_{k-1}, Y_{k-1})$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Naime, tada će tražena nejednakost slijediti iz

$$\mathbb{E}v(X_n, Y_n) \leqslant \mathbb{E}u(X_n, Y_n) \leqslant \mathbb{E}u(X_{n-1}, Y_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \mathbb{E}u(X_0, Y_0) = \mathbb{E}u(X_0, \mathbf{0}) \leqslant 0.$$

Za provjeru svojstva (B1) traženu nejednakost možemo podijeliti s $|y|^p$ i supstituirati $t = |x|/|y|$, tako da ona postaje

$$\varphi(t) := p\big(1 - \tfrac{1}{p}\big)^{p-1}\big(1 - (p-1)t\big)(t+1)^{p-1} - 1 + (p-1)^p t^p \geqslant 0$$

za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$, pri čemu se i posebni slučaj $|y| = 0 \neq |x|$ može interpretirati kao $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) \geqslant 0$. Primijetimo da je $\varphi\big(\frac{1}{p-1}\big) = 0$ pa je još dovoljno provjeriti $\varphi'(t) \leqslant 0$ za $x \in \big[0, \frac{1}{p-1}\big]$ i $\varphi'(t) \geqslant 0$ za $x \in \big[\frac{1}{p-1}, +\infty\big\rangle$. Deriviranje daje

$$\varphi'(t) = (p-1)^p p^{3-p} t\big(p^{p-2}t^{p-2} - (t+1)^{p-2}\big)$$

pa je

$$\varphi'(t) \leqslant 0 \iff pt \leqslant t + 1 \iff t \leqslant \tfrac{1}{p-1}.$$

Nije očigledno kako pristupiti provjeri svojstva (B2). Burkholder [Bur88b] ju je sveo na direktnu (ali mukotrpnu) verifikaciju konkavnosti funkcije $t \mapsto u(x + \alpha t, y + \beta t)$ kada su $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takvi da je $|\beta| \leqslant |\alpha|$, a mi koristimo elegantni trik iz knjige [Ose12], koji se tamo naziva *metoda integracije*. Definirajmo još jednu funkciju $w\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, ovog puta jednostavnijom formulom,

$$w(x,y) := \begin{cases} (|y|-1)^2 - |x|^2 & \text{za } |x|+|y|>1, \\ 0 & \text{za } |x|+|y|\leqslant 1. \end{cases}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{p-1} w\Big(\frac{x}{t},\frac{y}{t}\Big) dt &= \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1}\bigg(\Big(\frac{|y|}{t}-1\Big)^2 - \Big(\frac{|x|}{t}\Big)^2\bigg) dt \\ &= (|y|^2-|x|^2)\int_0^{|x|+|y|} t^{p-3}dt - 2|y|\int_0^{|x|+|y|} t^{p-2}dt + \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1}dt \\ &= (|x|+|y|)^{p-1}\Big(\frac{1}{p-2}|y| - \frac{1}{p-2}|x| - \frac{2}{p-1}|y| + \frac{1}{p}|x| + \frac{1}{p}|y|\Big) \\ &= \frac{2}{p(p-1)(p-2)}\big(|y|-(p-1)|x|\big)(|x|+|y|)^{p-1}, \end{aligned}$$

odakle uočavamo iznenađujući identitet,

$$u(x,y) = c_p \int_0^{+\infty} t^{p-1} w\Big(\frac{x}{t},\frac{y}{t}\Big) dt, \tag{6.11}$$

pri čemu je $c_p := \frac{1}{2}p^{3-p}(p-1)^p(p-2) > 0$. Ako sada provjerimo:

(B2') $\mathbb{E}w(X_k,Y_k) \leqslant \mathbb{E}w(X_{k-1},Y_{k-1})$ za svaki $k\in\mathbb{N}$,

tada će uvođenjem novih martingala $(\widetilde{X}_m)_{m=0}^{\infty}$ i $(\widetilde{Y}_m)_{m=0}^{\infty}$ formulama $\widetilde{X}_m := X_m/t$ i $\widetilde{Y}_m := Y_m/t$ te primjenom (6.11) i Fubinijevog teorema (za zamjenu $\mathbb{E}$ i $\int_0^{+\infty}$) slijediti (B2). Napomenimo da se Fubinijev teorem smije iskoristiti jer radi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{p-1}\Big|w\Big(\frac{x}{t},\frac{y}{t}\Big)\Big| dt &\leqslant \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1}\bigg(\Big(\frac{|y|}{t}+1\Big)^2 + \Big(\frac{|x|}{t}\Big)^2\bigg) dt \\ &= (|y|^2+|x|^2)\int_0^{|x|+|y|} t^{p-3}dt + 2|y|\int_0^{|x|+|y|} t^{p-2}dt + \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1}dt \lesssim_p |x|^p + |y|^p \end{aligned}$$

imamo

$$\mathbb{E}\int_0^{+\infty} t^{p-1}\Big|w\Big(\frac{X_k}{t},\frac{Y_k}{t}\Big)\Big| dt \lesssim_p \mathbb{E}|X_k|^p + \mathbb{E}|Y_k|^p = \|X_k\|_{\mathrm{L}^p}^p + \|Y_k\|_{\mathrm{L}^p}^p < +\infty$$

za svaki $k=0,1,\ldots,n$.

Provjera od (B2') je mnogo lakša nego bi bila provjera od (B2). Uvodimo još dvije pomoćne funkcije $a,b\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, dane sa

$$a(x,y) := \begin{cases} -2x & \text{za } |x|+|y|>1, \\ 0 & \text{za } |x|+|y|\leqslant 1, \end{cases} \qquad b(x,y) := \begin{cases} 2y - 2\operatorname{sgn} y & \text{za } |x|+|y|>1, \\ 0 & \text{za } |x|+|y|\leqslant 1. \end{cases}$$

Tvrdimo da za svake $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takve da je $|\beta| \leqslant |\alpha|$ vrijedi

$$w(x+\alpha, y+\beta) \leqslant w(x,y) + \operatorname{Re}\big(a(x,y)\overline{\alpha} + b(x,y)\overline{\beta}\,\big). \tag{6.12}$$

Naime, funkcije a i b nisu slučajno izabrane, već na otvorenom skupu $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| + |y| \neq 1,\ |y| \neq 0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} a(x_1+ix_2, y_1+iy_2) &= (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}) w(x_1+ix_2, y_1+iy_2), \\ b(x_1+ix_2, y_1+iy_2) &= (\partial_{y_1} + i\partial_{y_2}) w(x_1+ix_2, y_1+iy_2). \end{aligned}$$

Ipak, naša provjera nejednakosti (6.12) nije infinitezimalna, već direktna, radi komplikacija zbog činjenice da w nije klase C^1. U svrhu dokaza od (6.12) najprije primijetimo da je $w(x,y) \leqslant (|y|-1)^2 - |x|^2$ za svake $x, y \in \mathbb{C}$, što za $|x| + |y| \leqslant 1$ proizlazi iz

$$0 \leqslant (|y|-1)^2 - |x|^2 \iff |x|^2 \leqslant (1-|y|)^2.$$

Sada pokazujemo (6.12) i pritom razlikujemo tri slučaja.

Slučaj 1. Pretpostavimo $|x| + |y| > 1$. Ovdje (6.12) slijedi iz

$$\begin{aligned} & w(x+\alpha, y+\beta) \leqslant (|y+\beta|-1)^2 - |x+\alpha|^2 \\ & = |y|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(y\overline{\beta}) - 2|y+\beta| + 1 - |x|^2 - |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(x\overline{\alpha}) \\ & = w(x,y) + \operatorname{Re}\big(a(x,y)\overline{\alpha} + b(x,y)\overline{\beta}\,\big) \\ & \quad + \Big(2\operatorname{Re}\big((\operatorname{sgn} y)\overline{\beta}\,\big) - 2|y+\beta| + 2|y|\Big) + \big(|\beta|^2 - |\alpha|^2\big) \\ & \leqslant w(x,y) + \operatorname{Re}\big(a(x,y)\overline{\alpha} + b(x,y)\overline{\beta}\,\big), \end{aligned}$$

pri čemu u posljednoj nejednakosti za $y \neq 0$ koristimo

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\big((\operatorname{sgn} y)\overline{\beta}\,\big) &= \frac{2\operatorname{Re}(y\overline{\beta})}{|y|} = \frac{y\overline{\beta} + \overline{y}\beta}{|y|} = \frac{|y+\beta|^2 - |y|^2 - |\beta|^2}{|y|} \\ &= 2|y+\beta| - 2|y| - \frac{1}{|y|}(|y| + |\beta| - |y+\beta|)(|y+\beta| + |\beta| - |y|) \leqslant 2|y+\beta| - 2|y| \end{aligned}$$

te još uvažavamo $|\beta| \leqslant |\alpha|$.

Slučaj 2. Pretpostavimo $|x| + |y| \leqslant 1$ i $|x+\alpha| + |y+\beta| > 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} w(x+\alpha, y+\beta) &= (|y+\beta|-1)^2 - |x+\alpha|^2 \\ &= \big(|x+\alpha| + |y+\beta| - 1\big)\big(|y+\beta| - |x+\alpha| - 1\big) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Naime, prvi faktor je pozitivan zbog pretpostavke ovog slučaja, dok je drugi faktor manji ili jednak 0 zbog

$$|y+\beta| \leqslant |y| + |\beta| \leqslant 1 - |x| + |\alpha| \leqslant 1 + |x+\alpha|.$$

Slučaj 3. U slučaju $|x|+|y| \leqslant 1$ i $|x+\alpha|+|y+\beta| \leqslant 1$ obje strane od (6.12) su jednake 0 pa nejednakost trivijalno vrijedi.

Ovime je dovršena provjera od (6.12). Sada u tu ocjenu uvrstimo $x = X_{k-1}$, $y = Y_{k-1}$, $\alpha = X_k - X_{k-1}$, $\beta = Y_k - Y_{k-1}$, uvažavajući (6.9),

$$w(X_k, Y_k) \leqslant w(X_{k-1}, Y_{k-1}) + \operatorname{Re}\big(a(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{(X_k - X_{k-1})} + b(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{(Y_k - Y_{k-1})}\,\big).$$

Uzimanjem očekivanja obiju strana konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}w(X_k, Y_k) \leqslant{}& \mathbb{E}w(X_{k-1}, Y_{k-1}) \\
&+ \operatorname{Re}\mathbb{E}\big(a(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})}\,\big) \\
&+ \operatorname{Re}\mathbb{E}\big(b(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{\mathbb{E}(Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})}\,\big) \\
={}& \mathbb{E}w(X_{k-1}, Y_{k-1}).
\end{aligned}$$

Time je završen dokaz Burkholderove nejednakosti u obliku (6.10) kada je $p > 2$.

Pretpostavimo sada da je $1 < p < 2$ i vratimo se na polazni oblik nejednakosti koju dokazujemo. Opet normaliziramo kao u (6.8) i fiksiramo prirodni broj n. Zbog obrata Hölderove nejednakosti dovoljno je za proizvoljnu slučajnu varijablu Z takvu da je $\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}} < +\infty$ pokazati

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1})Z\Big)\Big| \leqslant (p'-1)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Ako stavimo $X := X_n$, tada je zapravo $X_k = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_k)$ za $k = 0, 1, \ldots, n$, a s druge pak strane možemo označiti $Z_k := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_k)$. Lijevu stranu sada transformiramo koristeći svojstva uvjetnog očekivanja:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})Z\big) \\
&\overset{(6.6)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,\mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z - Z_k)\big|\mathcal{F}_k\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,\mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})Z_{k-1}\big|\mathcal{F}_{k-1}\big) \\
&\overset{(6.5)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})\underbrace{\mathbb{E}(Z - Z_k|\mathcal{F}_k)}_{=0}\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\big)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(H_k Z_{k-1}\underbrace{\mathbb{E}(X_k-X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})}_{=0}\big)$$

pa mi zapravo pokazujemo

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(H_k(X_k-X_{k-1})(Z_k-Z_{k-1})\big)\Big|\leqslant(p'-1)\|X\|_{\mathrm{L}^p}\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Na sasvim isti način se dobiva

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(H_k X(Z_k-Z_{k-1})\big)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\big(H_k(X_k-X_{k-1})(Z_k-Z_{k-1})\big)$$

pa je radi Hölderove nejednakosti dovoljno provjeriti

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}H_k(Z_k-Z_{k-1})\Big\|_{\mathrm{L}^{p'}}\leqslant(p'-1)\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}},$$

ali to je upravo prethodno dokazani slučaj nejednakosti za eksponent veći od 2. □

Funkcija u iz prethodnog dokaza s pravom se ponekad zove *Burkholderova funkcija.* On je do nje došao rješavanjem kompliciranih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi [Bur84], a jednom kada ju je pronašao, znao ju je primijeniti u raznolikim kontekstima u radovima [Bur85], [Bur87], [Bur88a], [Bur88b].

Neka je sada $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal takav da je $X_0=\mathbf{0}$. Definiramo kvadratnu varijaciju $([X]_n)_{n=0}^{\infty}$ kao novi proces definiran eksplicitno sa

$$[X]_0:=\mathbf{0},\quad [X]_n:=\sum_{k=1}^{n}|X_k-X_{k-1}|^2\ \text{ za } n\in\mathbb{N}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^2}^2=\mathbb{E}[X]_n=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k-X_{k-1}|^2.$$

S druge strane, za $1\leqslant k<l\leqslant n$ imamo

$$\mathbb{E}\big(\overline{(X_k-X_{k-1})}(X_l-X_{l-1})\big)=\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\overline{(X_k-X_{k-1})}(X_l-X_{l-1})\big|\mathcal{F}_{l-1}\big)\Big)$$
$$=\mathbb{E}\Big(\overline{(X_k-X_{k-1})}\underbrace{\mathbb{E}(X_l-X_{l-1}|\mathcal{F}_{l-1})}_{=0}\Big)=0,$$

a isto vrijedi i za $l < k$ pa je

$$\|X_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\big(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^2.$$

Zaključujemo

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^2} = \|X_n\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Poznata nejednakost daje poopćenje uočene tvrdnje za sve $1 < p < \infty$.

Teorem 6.12. (Burkholder-Davis-Gundy nejednakost) *Za svaki* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *i svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p} \sim_p \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Dokaz. Postupa se slično kao kod dokaza teorema 4.25, pri čemu ovaj put polazimo od nejednakosti iz teorema 6.11. Ukratko, nejednakost $\lesssim_p$ slijedi Hinčinovim trikom, a obratna nejednakost $\gtrsim_p$ se dobiva dualizacijom. □

Primjenom teorema 6.12 na posebni slučaj dijadske filtracije dobivaju se ocjene za tzv. *dijadsku kvadratnu funkciju*:

$$S_{\mathrm{dij}} f := \Big(\sum_{I\in\mathcal{D}} |\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2\, |I|^{-1} \mathbb{1}_I\Big)^{1/2}.$$

Korolar 6.13. *Vrijedi*

$$\|S_{\mathrm{dij}} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty\rangle$*.*

Dokaz. Opet je radi teorema o monotonoj konvergenciji dovoljno promatrati samo sumiranje po dijadskim intervalima sadržanim u $[0,1\rangle$ i koji imaju duljinu strogo veću od 2^{-n} za neki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$. Ukoliko funkciji $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ pridružimo dijadski martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ kao u primjeru 6.7, iz tamo izvedenog računa će slijediti

$$|X_{k+1} - X_k|^2 = \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-k}}} \big|\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}\big|^2\, |I|^{-1} \mathbb{1}_I,$$

odnosno

$$[X]_n = \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ 2^{-n+1}\leqslant|I|\leqslant 1}} \big|\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}\big|^2\, |I|^{-1} \mathbb{1}_I$$

pa tvrdnja korolara slijedi iz jedne od dviju ocjena teorema 6.12. □

* * *

Što se tiče g.s. konvergencije martingala, dat ćemo rezultat koji nije najopćenitiji mogući, ali je vrlo kvantitativan. Trik koji slijedi je prvi upotrijebio Lépingle [Lep76]. Obzirom da nemamo prirodnu klasu na kojoj bi g.s. konvergencija bila bitno lakša, ne možemo koristiti teorem 1.6 pa radije brojimo skokove, kao u odjeljku 1.1.

Neka je opet $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ definiramo svojevrsni *brojač skokova* $J_\varepsilon X$ kao slučajnu varijablu danu sa

$$\begin{aligned}(J_\varepsilon X)(\omega) := \sup\big\{k \in \mathbb{N}_0 : \ &\text{postoje } 0 \leqslant m_1 < n_1 \leqslant m_2 < n_2 \leqslant \ldots \leqslant m_k < n_k \\ &\text{t.d. je } |X_{n_i}(\omega) - X_{m_i}(\omega)| \geqslant \varepsilon \text{ za } i = 1, 2, \ldots, k\big\}.\end{aligned}$$

Teorem 6.14. (Lépingleova nejednakost) *Za* $1 < p < \infty$ *i* $\varepsilon > 0$ *vrijedi*

$$\big\|(J_\varepsilon X)^{1/2}\big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \varepsilon^{-1} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}. \tag{6.13}$$

Posljedično, ako je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *ograničen u* L^p *normi, tada on konvergira g.s.*

Dokaz. Translacijom možemo postići $X_0 = 0$, a radi teorema o monotonoj konvergenciji je dovoljno dokazati ocjenu samo za martingale za koje postoji indeks $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant N$ vrijedi $X_n = X_N$. Rekurzivno definirajmo niz vremena zaustavljanja $(S_i)_{i=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}&S_0(\omega) := 0,\\ &S_i(\omega) := \min\big\{n \in \mathbb{N}_0 \,:\, n > S_{i-1}(\omega),\ |X_n(\omega) - X_{S_{i-1}(\omega)}(\omega)| \geqslant \varepsilon/2\big\}; \quad i \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

uz konvenciju $\min\emptyset = \infty$. Za $\varepsilon > 0$ definirajmo i "pohlepni" brojač skokova

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{J}_\varepsilon X\big)(\omega) &:= \sup\big\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(\omega) < \infty\big\}\\ &= \text{broj konačnih članova niza } S_1(\omega) < S_2(\omega) < \cdots .\end{aligned}$$

Stavimo još $T_i := \min\{S_i, N\}$. Lako je vidjeti

$$J_\varepsilon X \ \leqslant\ \widetilde{J}_\varepsilon X$$

i

$$\big(\widetilde{J}_\varepsilon X\big)^{1/2} \ \leqslant\ (\varepsilon/2)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}|^2\Big)^{1/2}.$$

Posljednja suma je u stvarnosti konačna zbog naše pretpostavke na martingal. Iz zadatka 6.6 slijedi da je $(X_{T_n})_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{T_n})_{n=0}^{\infty}$. Korištenjem Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti (teorem 6.12) na taj novi martingal dobivamo

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p} \ \lesssim_p\ \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \|X_{T_i}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|X_N\|_{\mathrm{L}^p},$$

odakle konačno slijedi (6.13). Napomenimo da smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili $T_i \leqslant N$, zadatak 6.6 i dio (b) leme 6.6. $\square$

Napomena 6.15. Potreban je još jedan korak dokaza kako bi se iz (6.13) izvela varijacijska formulacija Lépingleove nejednakosti:

$$\Big\| \|X_n(\omega)\|_{\mathrm{V}^\varrho_n} \Big\|_{\mathrm{L}^p_\omega} \lesssim_{p,\varrho} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}$$

za $1 < p < \infty$ i $2 < \varrho < \infty$, pri čemu je $\|\cdot\|_{\mathrm{V}^\varrho}$ varijacijska norma definirana u odjeljku 1.1. Za $\varrho \leqslant 2$ spomenuta ocjena naprosto ne vrijedi. S druge strane, teorem o g.s. konvergenciji martingala ostaje vrijediti i uz slabiju pretpostavku ograničenosti u L^1 normi; vidjeti knjigu [Dur10].

* * *

Zadatak 6.6. Neka je $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ i neka su S i T dva ograničena vremena zaustavljanja takva da je $S \leqslant T$. Dokažite da vrijedi:

(a) $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$,

(b) $X_S, X_T \in \mathrm{L}^1$ i $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$,

(c) $\mathbb{E}X_S = \mathbb{E}X_T$ i $\mathbb{E}|X_S| \leqslant \mathbb{E}|X_T|$.

Uputa: Za dokaz jednakosti pod (b) uzmite $m \in \mathbb{N}_0$ dovoljno velik da vrijedi $S \leqslant T \leqslant m$ pa dokažite po definiciji

$$\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_S) = X_S, \quad \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_T) = X_T.$$

Potom naprosto iskoristite (a) dio i (6.6) u računu

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_T)\big|\mathcal{F}_S\big) = \mathbb{E}(X_m|\mathcal{F}_S) = X_S.$$

Za dokaz nejednakosti pod (c) koristite (b) dio i lemu 6.6(b) za $p = 1$.

Zadatak 6.7. Neka je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^\infty$ dijadska filtracija iz primjera 6.7.

(a) Dokažite da je na sljedeći način opisana bijektivna korespondencija između ograničenih vremena zaustavljanja T obzirom na tu filtraciju i konačnih particija $\mathcal{I}$ od $[0,1\rangle$ na dijadske intervale.

> Ako je $\mathcal{I}$ konačna dijadska particija od $[0,1\rangle$ tada je $T\colon [0,1\rangle \to \mathbb{N}_0$, $T(\omega) := \log_2(1/|I|)$ za jedinstveni $I \in \mathcal{I}$ koji sadrži ω, vrijeme zaustavljanja.
>
> Obratno, ako je $T\colon [0,1\rangle \to \mathbb{N}_0$ ograničeno vrijeme zaustavljanja, tada se svaki skup $\{T = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ particionira u neku konačnu kolekciju $\mathcal{I}_n$ dijadskih intervala duljine 2^{-n} pa $\mathcal{I} = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ čini dijadsku particiju od $[0,1\rangle$.

(b) Pokažite da je u gornjem slučaju $\mathcal{D}_T$ upravo familija svih konačnih unija članova iz $\mathcal{I}$ te da za $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ vrijedi $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_T) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \big(\frac{1}{|I|}\int_I f\big)\mathbb{1}_I$.

(c) Neka su $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$, $f \geqslant 0$, $\alpha \in \langle 0,+\infty\rangle$ i $m \in \mathbb{N}_0$. Opišite particiju pridruženu vremenu zaustavljanja $T(\omega) := n$ za najmanji $n \in \{0,1,2,\ldots,m\}$ takav da je $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_n) > \alpha$ ako takav n postoji, $T(\omega) := m$ ako takav n ne postoji.

Zadatak 6.8. Izvedite teorem 6.11 iz teorema 6.12; dakle obrnuto nego je učinjeno u tekstu.

Uputa: Koristite dualizaciju iz računa s kraja dokaza teorema 6.11.

6.3. Calderónov princip prijenosa

U ovom odjeljku pokazujemo g.s. konvergenciju ergodičkih usrednjenja i to korištenjem teorema 1.6 te svođenjem ograničenosti odgovarajućeg ergodičkog maksimalnog operatora na ograničenost Hardy-Littlewoodovog maksimalnog operatora, tj. preciznije, njegove necentrirane verzije (6.2). Time će biti potvrđen rezultat pod (2) spomenut u odjeljku 1.1. Trik iz dokaza je prvi iskoristio Calderón u radu [Cal68] pa se u njegovu čast zove *Calderónov princip prijenosa*.

Uzmimo neki sustav koji čuva mjeru $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu,S)$, što znači (prisjetimo se odjeljka 1.2) da je $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ vjerojatnosni prostor, a $S\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}$ je bijekcija takva da su S i S^{-1} izmjerive i čuvaju mjeru. Već u poglavlju 1 promatrali smo ergodička usrednjenja

$$(A_N f)(x) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x); \quad N \in \mathbb{N}$$

i spomenuli maksimalni operator

$$(M_2 f)(x) := \sup_{N\in\mathbb{N}} |(A_N f)(x)|$$

definiran za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$.

Teorem 6.16. *Vrijedi*

$$\|M_2 f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}(\mathbb{X})} \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{X})} \quad i \quad \|M_2 f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X})}$$

za svaki $p \in \langle 1,\infty]$.

Dokaz. Zbog realne interpolacije i očigledne nejednakosti na $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{X})$ dovoljno je pokazati samo prvu ocjenu, tj. za proizvoljni $\alpha > 0$ dokazujemo

$$\mu\Big(\Big\{\sup_{N\in\mathbb{N}} |A_N f| > \alpha\Big\}\Big) \lesssim \alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{X})}. \tag{6.14}$$

U tu svrhu najprije za dvostrano beskonačni niz $g\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ i za $N\in\mathbb{N}$ definirajmo diskretne prosjeke

$$\big(\widetilde{A}_N g\big)(k) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} g(k+j); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pokazat ćemo da oni zadovoljavaju slabu ℓ^1 maksimalnu ocjenu, tj. da za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\operatorname{card}\Big\{k \in \mathbb{Z} : \sup_{N\in\mathbb{N}} \big|\big(\widetilde{A}_N g\big)(k)\big| > \alpha\Big\} \lesssim \alpha^{-1}\|g\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}. \tag{6.15}$$

To ćemo pak postići prelaskom s proizvoljnog niza $g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ na stepenastu funkciju $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiranu $h := \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)\mathbb{1}_{[k,k+1\rangle}$. Očigledno je

$$\|h\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} = \|g\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \tag{6.16}$$

i

$$\frac{1}{N}\int_{[k,k+N\rangle} h(y)dy = \big(\widetilde{A}_N g\big)(k); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prisjetimo se operatora M_{nc} definiranog formulom (6.2). Dakle, čim je $\big(\widetilde{A}_N g\big)(k) > \alpha$, onda je $M_{\mathrm{nc}}h > \alpha$ na cijelom intervalu $[k, k+1\rangle$ pa slijedi

$$\operatorname{card}\Big\{k \in \mathbb{Z} : \sup_{N\in\mathbb{N}} \big|\big(\widetilde{A}_N g\big)(k)\big| > \alpha\Big\} \leqslant |\{M_{\mathrm{nc}}h > \alpha\}|. \tag{6.17}$$

Korištenjem slabe L^1 ocjene za M_{nc}, što je pak direktna posljedica teorema 6.2, dobivamo

$$|\{M_{\mathrm{nc}}h > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-1}\|h\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})},$$

a to u kombinaciji s (6.16) i (6.17) daje (6.15).

Fiksirajmo prirodni broj N_0. Za svaki $x \in \mathbb{X}$ definirajmo funkciju $g_{x,N_0}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ duž orbite od x danu sa

$$g_{x,N_0}(n) := \begin{cases} f(S^n x) & \text{za } 0 \leqslant n \leqslant 2N_0 - 1, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

te primijetimo da za cijele brojeve $1 \leqslant N \leqslant N_0$ i $0 \leqslant k \leqslant N_0 - 1$ imamo

$$(A_N f)(S^k x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S^{k+n}x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g_{x,N_0}(k+n) = \big(\widetilde{A}_N g_{x,N_0}\big)(k).$$

U idućem računu koristimo invarijantnost mjere μ na transformaciju S, Fubinijev teorem i netom dokazanu ocjenu (6.15).

$$\begin{aligned}
&\mu\Big(\Big\{\max_{1\leqslant N\leqslant N_0} |A_N f| > \alpha\Big\}\Big) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=0}^{N_0-1} \mu\Big(\Big\{x \in \mathbb{X} : \max_{1\leqslant N\leqslant N_0} |(A_N f)(S^k x)| > \alpha\Big\}\Big) \\
&= \frac{1}{N_0}\int_{\mathbb{X}} \operatorname{card}\Big\{k \in \{0,\ldots,N_0-1\} : \max_{1\leqslant N\leqslant N_0} \big|\big(\widetilde{A}_N g_{x,N_0}\big)(k)\big| > \alpha\Big\}\, d\mu(x) \\
&\overset{(6.15)}{\lesssim} \frac{1}{N_0}\int_{\mathbb{X}} \alpha^{-1}\|g_{x,N_0}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}\, d\mu(x) = \alpha^{-1}\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{2N_0-1}\int_{\mathbb{X}} |f(S^n x)| d\mu(x) = 2\alpha^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{X})}
\end{aligned}$$

Puštanjem $N_0 \to \infty$ konačno dobivamo (6.14). □

Korolar 6.17. (Birkhoffov[8] točkovni ergodički teorem) *Ako je* $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu, S)$ *sustav koji*

[8] George David Birkhoff (1884–1944), američki matematičar.

čuva mjeru i $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$*, tada niz ergodičkih usrednjenja* $(A_N f)_{N=1}^{\infty}$ *konvergira* μ*-g.s., tj. limes*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x)$$

postoji (i konačan je) za μ*-g.s.* $x \in \mathbb{X}$*.*

Dokaz. Primjenjujemo teorem 1.6 uz $p = q = 1$ na operatore $(A_N)_{N=1}^{\infty}$. Pretpostavka (1) je ispunjena uz $C_n = 1$, naprosto zbog nejednakosti trokuta i invarijantnosti mjere na transformaciju S. Teorem 6.16 uz $p = 1$ upravo garantira pretpostavku (2). Konačno, pretpostavku (3) je dovoljno provjeriti za $S = \mathrm{L}^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ pa je dostatno dokazati tvrdnju korolara samo za L^2 funkcije.

U svrhu daljnje redukcije opet koristimo teorem 1.6, ovog puta uz $p = q = 2$. Pretpostavka (1) je ponovno trivijalna, a pretpostavka (2) je garantirana teoremom 6.16 uz $p = 2$. Sada pretpostavku (3) provjeravamo na gustom potprostoru

$$\mathrm{Ker}(U - I) \oplus \mathrm{Im}(U - I),$$

pri čemu je $Uf := f \circ S$; primijetite analogiju s dokazima propozicije 1.3 i korolara 1.5. Svaka funkcija f iz gornjeg gustog potprostora ima prikaz $f = f_1 + f_2$, pri čemu vrijedi $f_1 \circ S = f_1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{X})$, $f_2 = g \circ S - g$, $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{X})$. Teleskopiranje daje

$$(A_N f)(x) = f_1(x) + \frac{1}{N}\big(g(S^N x) - g(x)\big)$$

pa će biti dovoljno još samo pokazati $\lim_{N\to\infty} g(S^N x)/N = 0$ za μ-g.s. $x \in \mathbb{X}$. Posljednja činjenica slijedi iz

$$\int_{\mathbb{X}} \Big(\sum_{N=1}^{\infty} \Big| \frac{g(S^N x)}{N} \Big|^2 \Big) d\mu(x) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{X}} |g(S^N x)|^2 d\mu(x) = \frac{\pi^2}{6} \|g\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{X})}^2 < +\infty$$

i nužnog kriterija za konvergenciju reda nenegativnih brojeva. □

Zanimljivo je spomenuti poznati otvoreni problem u ergodičkoj teoriji koji traži da se dokaže μ-g.s. konvergencija bilinearnih ergodičkih usrednjenja

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f \circ S^n)(g \circ T^n),$$

pri čemu su S i T proizvoljne dvije komutirajuće transformacije na vjerojatnosnom prostoru $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ koje čuvaju mjeru te $f, g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljne funkcije. Ovdje više nema prirodnog gustog potprostora na kojem je lako provjeriti konvergenciju pa veći potencijal imaju pristupi poput brojenja skokova s kraja prethodnog odjeljka.

6.4. Maksimalni singularni integrali

U odjeljku 4.3 formulom (4.13) definirali smo Hilbertov transformat Hf, ali samo za funkcije $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$, jer smo jedino za takve funkcije mogli dokazati postojanje limesa kada $\varepsilon \to 0^+$ za svaku točku $x \in \mathbb{R}$. Međutim, H je primjer Calderón-Zygmundovog operatora pa se on, zahvaljujući teoremu 4.5, proširuje po neprekidnosti i na funkcije $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Stoga je legitimno upitati se postoji li i za takve funkcije limes iz (4.13), makar ne za svaki, nego samo za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}$. Odgovor je potvrdan i bazira se na općenitom principu, teoremu 1.7. Dokaz iznosimo prema knjizi [Duo01].

Fiksirajmo $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i za svaki $\varepsilon > 0$ definirajmo operator $H_\varepsilon \colon \mathrm{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R})$ formulom

$$(H_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{\{t\in\mathbb{R} \,:\, |t|\geqslant\varepsilon\}} f(x-t)\, \frac{dt}{t}.$$

Gornji integral je apsolutno konvergentan za svaki $x \in \mathbb{R}$, naprosto po Hölderovoj nejednakosti, jer se funkcija $t \mapsto (1/\pi t)\mathbb{1}_{\{|t|\geqslant\varepsilon\}}(t)$ svakako nalazi u prostoru $\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})$. Potom definiramo

$$(H_\star f)(x) := \sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} |(H_\varepsilon f)(x)|.$$

Operator $H_\star$ zovemo *maksimalna Hilbertova transformacija*. Ona je primjer tzv. maksimalnog singularnog integrala.

Naredna lema se nekad naziva *Cotlarova nejednakost*.

Lema 6.18. *Za $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ i $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$(H_\star f)(x) \lesssim (M|Hf|)(x) + (M|f|)(x).$$

Dokaz. Fiksirajmo funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ koja je nenegativna, parna, padajuća na $\langle 0, +\infty\rangle$, iščezava izvan $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ i ima integral jednak 1. Za $\varepsilon > 0$ i $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ definirajmo $T_\varepsilon f := (Hf) * (\mathrm{D}^{(1)}_\varepsilon \varphi)$ tako da iz dokaza teorema 6.4 za svaki $x \in \mathbb{R}$ znamo

$$\sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} |(T_\varepsilon f)(x)| \leqslant (M_\varphi|Hf|)(x) \lesssim_\varphi (M|Hf|)(x). \tag{6.18}$$

S druge strane, korištenjem činjenica da je H antihermitski i da komutira s translacijama i dilatacijama te da je Hilbertov transformat parne funkcije neparna funkcija, možemo pisati

$$(T_\varepsilon f)(x) = \langle Hf, \mathrm{T}_x \mathrm{D}^{(1)}_\varepsilon \varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} = -\langle f, \mathrm{T}_x \mathrm{D}^{(1)}_\varepsilon H\varphi\rangle_{\mathrm{L}^2} = (f * \mathrm{D}^{(1)}_\varepsilon H\varphi)(x).$$

Posljedično,

$$H_\varepsilon f - T_\varepsilon f = f * (\mathrm{D}^{(1)}_\varepsilon \psi),$$

gdje je

$$\psi(t) := \frac{1}{\pi t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle}(t) - (H\varphi)(t).$$

Za $|t| \geqslant 1$ ocjenjujemo

$$|\psi(t)| = \frac{1}{\pi}\Big|\frac{1}{t} - \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{\varphi(s)}{t-s} ds\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{|\varphi(s)||s|}{|t||t-s|} ds \leqslant \frac{2}{\pi t^2}\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |\varphi(s)||s| ds \lesssim_\varphi \frac{1}{t^2}.$$

S druge strane, radi računa iz dokaza propozicije 4.1 za $|t| < 1$ imamo

$$|\psi(t)| = \frac{1}{\pi}\Big|\int_{[-2,2]} \big(\varphi(t-s) - \varphi(t)\big)\frac{ds}{s}\Big| \leqslant \frac{4}{\pi}\max_{s\in\mathbb{R}} |\varphi'(s)| \lesssim_\varphi 1.$$

Zaključujemo $|\psi(t)| \lesssim_\varphi \rho(t)$ uz $\rho(t) := \min\{|t|^{-2}, 1\}$ pa iz dokaza teorema 6.4 za svaki $x \in \mathbb{R}$ dobivamo

$$\sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} |(H_\varepsilon f)(x) - (T_\varepsilon f)(x)| \lesssim_\varphi (M_\rho|f|)(x) \lesssim (M|f|)(x). \tag{6.19}$$

Zbrajanje (6.18) i (6.19) daje željenu tvrdnju. □

Teorem 6.19. *Za* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *i* $f \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ *vrijedi*

$$\|H_\star f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Dokaz. Iz leme 6.18, maksimalnog teorema 6.2 i teorema 4.8 slijedi

$$\|H_\star f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim \|M(Hf)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \|Mf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|Hf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} + \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},$$

čime je dokaz završen. □

Korolar 6.20. *Za* $p \in \langle 1, \infty\rangle$*,* $\varepsilon > 0$ *i* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *vrijedi* $H_\varepsilon f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *i*

$$\|H_\varepsilon f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

Dokaz. Iz teorema 6.19 posebno za svaki $\varepsilon > 0$ i za $\varphi \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ slijedi

$$\|H_\varepsilon \varphi\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}. \tag{6.20}$$

Sada standardnim aproksimacijskim argumentom tu ocjenu proširujemo na sve funkcije iz $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Zbog gustoće za danu funkciju $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ postoji niz $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ u $\mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ takav da je $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - f\|_{\mathrm{L}^p} = 0$. Po Hölderovoj nejednakosti je

$$|(H_\varepsilon\varphi_n)(x) - (H_\varepsilon f)(x)| \leqslant \|\varphi_n - f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}\Big(\int_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,|t|\geqslant\varepsilon\}} \frac{dt}{|\pi t|^{p'}}\Big)^{1/p'} \lesssim_{p,\varepsilon} \|\varphi_n - f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})},$$

odakle slijedi $\lim_{n\to\infty}(H_\varepsilon\varphi_n)(x) = (H_\varepsilon f)(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Fatouova lema sada daje

$$\|H_\varepsilon f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|H_\varepsilon\varphi_n\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

pa kombiniranje s ocjenom (6.20) dovršava dokaz. □

Korolar 6.21. *Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$, tada za g.s. $x \in \mathbb{R}$ postoji limes $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(H_\varepsilon f)(x)$ i vrijedi*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(H_\varepsilon f)(x) = (Hf)(x).$$

Dokaz. U svrhu korištenja teorema 1.7 treba provjeriti njegove pretpostavke. Uvjet (1) slijedi iz korolara 6.20; čak imamo i uniformnu ograničenost familije operatora $(H_\varepsilon)_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle}$ na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, a za (1) nam je dovoljna samo individualna ograničenost. Uvjet (2) je naprosto teorem 6.19, dok je uvjet (3) provjeren na gustom potprostoru $S = \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$, još na samom početku odjeljka 4.3. Time je dokazana egistencija limesa $(H_0 f)(x) := \lim_{\varepsilon\to 0^+}(H_\varepsilon f)(x)$ za g.s. $x \in \mathbb{R}$. Kako bismo vidjeli da je taj limes za g.s. $x \in \mathbb{R}$ upravo jednak $(Hf)(x)$, dobro će nam doći uniformna ograničenost od $(H_\varepsilon)_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle}$. Naime, treba samo primijetiti kako iz Fatouove leme i korolara 6.20 također slijedi

$$\|H_0 f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\|H_\varepsilon f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

pa je H_0 ograničeni operator na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ koji se na gustom potprostoru $\mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ podudara s ograničenim operatorom H. Dakle, $H_0 = H$. □

Napomenimo da je $H_\star$ također ograničen s $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{R})$ pa posljedično prethodni korolar vrijedi i u slučaju $p = 1$. Dokaz izostavljamo; može se naći u [Duo01].

* * *

Analogon Cotlarove formule postoji i za višedimenzionalne Calderón-Zygmundove operatore. Umjesto da poopćujemo taj pristup maksimalnim singularnim integralima, radije ćemo pokazati jedan maštoviti trik, tzv. *metodu rotacije* Steina i Weissa [SW71]. Njome možemo samo iz omeđenosti od $H_\star$ zaključiti omeđenost nekih višedimenzionalnih maksimalnih operatora.

Neka je $\mathrm{S}^{d-1} := \{\omega \in \mathbb{R}^d : |\omega| = 1\}$ standardna jedinična sfera. Uzmimo standardnu jezgru K koja udovoljava uvjetima iz propozicije 4.1 i još je oblika

$$K(x, y) = \frac{1}{|x-y|^d}\Omega\Big(\frac{x-y}{|x-y|}\Big)$$

za neku neparnu funkciju $\Omega\colon \mathrm{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$, tj. $\Omega(-\omega) = -\Omega(\omega)$. Singularni integralni operator $T_K\colon \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{L}^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^d)$ pridružen K i definiran formulom (4.3) tada zapravo glasi

$$(T_K f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(T_\varepsilon f)(x), \qquad (T_\varepsilon f)(x) := \int\limits_{\{t\in\mathbb{R}^d\,:\,|t|\geqslant\varepsilon\}} f(x-t)\frac{\Omega(t/|t|)}{|t|^d}dt.$$

Prema teoriji iz poglavlja 4 znamo da se T_K proširuje do ograničenog linearnog operatora na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$, ali ponovno ostaje pitanje postoji li gornji limes za gotovo svaki $x \in \mathbb{R}^d$ čak i kada je samo $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$. To pitanje će biti razriješeno (jednako kao i za H) ako pokažemo da je maksimalni singularni integralni operator

$$(T_\star f)(x) := \sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} |(T_\varepsilon f)(x)|$$

također L^p ograničen.

Neka je σ upravo $(d-1)$-dimenzionalna Hausdorffova mjera na S^{d-1}. (Elementarnije ju se može dobiti putem neke parametrizacije, npr. sferičnih koordinata.) Za svaku izmjerivu funkciju $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ prelaskom na polarne koordinate dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t)dt = \int_{\mathrm{S}^{d-1}} \Big(\int_0^\infty g(r\omega) r^{d-1} dr \Big) d\sigma(\omega).$$

Zbog neparnosti od Ω za svaku $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ možemo pisati

$$\begin{aligned}
(T_\varepsilon f)(x) &= \int_{\mathrm{S}^{d-1}} \Big(\int_\varepsilon^{+\infty} f(x-r\omega) \frac{\Omega(\omega)}{r^d} r^{d-1} dr \Big) d\sigma(\omega) \\
&= \int_{\mathrm{S}^{d-1}} \Big(\int_\varepsilon^{+\infty} f(x-r\omega) \frac{dr}{r} \Big) \Omega(\omega) d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathrm{S}^{d-1}} \Big(\int_{\{r\in\mathbb{R} : |r|\geqslant\varepsilon\}} f(x-r\omega) \frac{dr}{r} \Big) \Omega(\omega) d\sigma(\omega).
\end{aligned}$$

Sada uzmimo vjerojatnosno-normaliziranu obostranu Haarovu mjeru ς na kompaktnoj grupi $\mathrm{SO}(d)$ rotacija prostora $\mathbb{R}^d$; vidjeti [Coh13] za definiciju i svojstva Haarove mjere. Za svaku integrabilnu funkciju $g\colon \mathrm{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$ imamo identitet

$$\frac{1}{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})} \int_{\mathrm{S}^{d-1}} g(\omega) d\sigma(\omega) = \int_{\mathrm{SO}(d)} g(Re) d\varsigma(R), \tag{6.21}$$

pri čemu je $e = (1, 0, \ldots, 0)$ prvi vektor kanonske baze od $\mathbb{R}^d$. On slijedi iz računa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})} \int_{\mathrm{S}^{d-1}} g(\omega) d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})} \int_{\mathrm{SO}(d)} \int_{\mathrm{S}^{d-1}} g(R\omega) d\sigma(\omega) d\varsigma(R) \\
&= \frac{1}{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})} \int_{\mathrm{S}^{d-1}} \int_{\mathrm{SO}(d)} g(RR_\omega e) d\varsigma(R) d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})} \int_{\mathrm{S}^{d-1}} \int_{\mathrm{SO}(d)} g(Re) d\varsigma(R) d\sigma(\omega) \\
&= \int_{\mathrm{SO}(d)} g(Re) d\varsigma(R),
\end{aligned}$$

gdje je $R_\omega \in \mathrm{SO}(d)$ neka rotacija za koju je $R_\omega e = \omega$. U našem slučaju (6.21) daje

$$(T_\varepsilon f)(x) = \frac{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})}{2} \int_{\mathrm{SO}(d)} \Big(\int_{\{r\in\mathbb{R}\,:\,|r|\geqslant\varepsilon\}} f(x-rRe)\frac{dr}{r}\Big) \Omega(Re)d\varsigma(R).$$

Ako operator rotacije funkcija uvedemo formulom (3.9) i još definiramo operatore $H_\varepsilon^{(1)}$, $H_\star^{(1)}$ u smjeru e (tj. po prvoj varijabli) kao

$$(H_\varepsilon^{(1)} f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,|t|\geqslant\varepsilon\}} f(x-te)\,\frac{dt}{t}, \quad (H_\star^{(1)} f)(x) := \sup_{\varepsilon\in\langle 0,+\infty\rangle} |(H_\varepsilon^{(1)} f)(x)|$$

za funkcije $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^d)$, tada radi $x - rRe = R(R^{-1}x - re)$ posljednju jednakost možemo pisati

$$(T_\varepsilon f)(x) = \frac{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})\pi}{2} \int_{\mathrm{SO}(d)} (\mathrm{R}_R H_\varepsilon^{(1)} \mathrm{R}_{R^{-1}} f)(x)\,\Omega(Re)d\varsigma(R).$$

Zato je

$$(T_\star f)(x) \leqslant \frac{\sigma(\mathrm{S}^{d-1})\pi}{2} \int_{\mathrm{SO}(d)} (\mathrm{R}_R H_\star^{(1)} \mathrm{R}_{R^{-1}} f)(x)\,|\Omega(Re)|d\varsigma(R)$$

pa preostaje primijetiti

$$\|H_\star^{(1)}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)\to\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} = \|H_\star\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})\to\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} < +\infty.$$

6.5. Steinov maksimalni princip*

U odjeljku 4.5 smo spominjali problem konvergencije Fourierovih parcijalnih integrala (4.20). Teorem 4.16 je za svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ dao konvergenciju $\lim_{R\to+\infty} S_R f = f$ po L^p-normi, ali legitimno je pitati se vrijedi li ista konvergencija g.s. Sasvim analogan (čak ekvivalentan) problem je konvergencija g.s. niza parcijalnih suma Fourierovog reda,

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}; \quad x \in \mathbb{T},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-2\pi ikt}dt,$$

funkcije $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$, $p \in \langle 1, \infty\rangle$ na jednodimenzionalnom torusu $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv [0, 1\rangle$. Kako je opet očigledna konvergencija na gustom potprostoru, iz općenitog teorema 1.6 (tj. zadatka 1.7(b)) znamo da je još jedino potrebno pokazati slabu L^p ocjenu za maksimalni operator

$$(S_\star f)(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |(S_n f)(x)| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \Big| \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}\Big|; \quad x \in \mathbb{T}.$$

Ipak, taj problem se ispostavio iznimno težak i riješili su ga Carleson [Car66] i Hunt[9] [Hun67] više desetaka godina nakon što je Luzin[10] postavio slutnju o g.s. konvergenciji.

S druge strane, još prije toga je Stein [Ste61] primijetio kako je za mnoga takva pitanja konvergencije g.s. ne samo dovoljno već i nužno da vrijedi slaba ocjena za maksimalni operator. Formulacija Steinovog principa koju ćemo navesti nije najopćenitija moguća, ali je prikladna upravo za primjenu na Fourierove redove. Primijetimo da operatori S_n komutiraju s translacijama T_c:

$$(S_n \mathrm{T}_c f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{T}_c f)\widehat{\ }(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{-2\pi i k c} e^{2\pi i k x} = (\mathrm{T}_c S_n f)(x).$$

Teorem 6.22. (Steinov maksimalni princip [Ste61]) *Neka je $p \in [1,2]$ i neka su $T_n \colon \mathrm{L}^p(\mathbb{T}) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$; $n \in \mathbb{N}$ ograničeni linearni operatori koji komutiraju s translacijama. Ako za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ za g.s. $x \in \mathbb{T}$ postoji limes $\lim_{n\to\infty}(T_n f)(x) \in \mathbb{C}$, tada vrijedi ocjena*

$$\Big\| \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f| \Big\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(\mathbb{T})} \lesssim_{(T_n),p} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})} \quad \textit{za svaku } f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}).$$

Dokaz teorema 6.22 će biti dvostruka primjena tzv. vjerojatnosne metode, tj. konstrukcije determinističkih objekata slučajnim odabirom. Najveći promotor vjerojatnosne metode bio je Erdős[11], a odlična i opsežna knjiga o njoj je [AS08].

Najprije trebamo dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 6.23. (Calderón-Steinova lema pokrivanja [Ste61]) *Neka je $(E_n)_{n=1}^\infty$ niz Borelovih podskupova od $\mathbb{T}$ sa svojstvom $\sum_{n=1}^\infty |E_n| = +\infty$. Tada postoji niz $(t_n)_{n=1}^\infty$ u $\mathbb{T}$ takav da skup*

$$\limsup_n (E_n + t_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (E_n + t_n)$$

ima mjeru jednaku 1, tj. da se gotovo svaka točka iz $\mathbb{T}$ nalazi u beskonačno mnogo skupova $E_n + t_n$.

Dokaz leme 6.23. Neka je $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s uniformnom razdiobom na $\mathbb{T}$. Dakle, za vjerojatnosni prostor možemo uzeti $\Omega = \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, na njemu promatrati beskonačni produkt Borelovih σ-algebri i beskonačni produkt (Lebesgueovih) mjera na $\mathbb{T}$ te za slučajne varijable uzeti koordinatne projekcije. Ipak, nije u duhu vjerojatnosti stavljati vjerojatnosni prostor u prvi plan.

Za prirodne brojeve $k \leqslant l$ računamo:

$$\mathbb{E}\Big|\bigcap_{n=k}^{l}(E_n^c + \tau_n)\Big| = \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{\bigcap_{n=k}^{l}(E_n^c+\tau_n)}(x)\,dx = \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^{l} \mathbb{1}_{E_n^c+\tau_n}(x)\,dx$$

[9] Richard Allen Hunt (1937–2009), američki matematičar.
[10] Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883–1950), ruski matematičar.
[11] Paul Erdős (1913–1996), mađarski matematičar.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E} \prod_{n=k}^{l} \mathbb{1}_{x-E_n^c}(\tau_n)\,dx = (\text{nezavisnost}) = \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^{l} \mathbb{E}\mathbb{1}_{x-E_n^c}(\tau_n)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^{l} \mathbb{P}(\tau_n \in x - E_n^c)\,dx = \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^{l} |x - E_n^c|\,dx = \int_{\mathbb{T}} \prod_{n=k}^{l} |E_n^c|\,dx \\
&= \prod_{n=k}^{l} |E_n^c| = \prod_{n=k}^{l} (1 - |E_n|) \leqslant \prod_{n=k}^{l} e^{-|E_n|} = e^{-\sum_{n=k}^{l} |E_n|}.
\end{aligned}
$$

Prema Fatouovoj lemi radi pretpostavke $\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = +\infty$ sada slijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big|\bigcap_{n=k}^{\infty}(E_n^c + \tau_n)\Big| &= \mathbb{E}\Big(\lim_{l\to\infty}\Big|\bigcap_{n=k}^{l}(E_n^c + \tau_n)\Big|\Big) \\
&\leqslant \liminf_{l\to\infty} \mathbb{E}\Big|\bigcap_{n=k}^{l}(E_n^c + \tau_n)\Big| = \lim_{l\to\infty} e^{-\sum_{n=k}^{l}|E_n|} = 0,
\end{aligned}
$$

a potom zbog još jedne primjene Fatouove leme i

$$
\mathbb{E}\Big|\Big(\limsup_{n}(E_n + \tau_n)\Big)^c\Big| = \mathbb{E}\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(E_n^c + \tau_n)\Big| = 0,
$$

tj.

$$
\mathbb{E}\Big|\limsup_{n}(E_n + \tau_n)\Big| = 1.
$$

Dakle, za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi

$$
\Big|\limsup_{n}(E_n + \tau_n)\Big| = 1
$$

pa naprosto uzmemo $t_n := \tau_n(\omega)$; $n \in \mathbb{N}$ za bilo koji takav ω.

Upućeni čitatelj će primijetiti da je dio navedenog dokaza zapravo dokaz tzv. *druge Borel-Cantellijeve*[12] *leme.* □

U daljnjem je $(\epsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s razdiobom $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Očekivanje će se uvijek podrazumijevati obzirom na vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem su one konstruirane.

Lema 6.24.

[12] Francesco Paolo Cantelli (1875–1966), talijanski matematičar.

(a) *Za svaki događaj A i svaki broj $\alpha > 1$ postoji prirodni broj M takav da za svaki kvadratno sumabilni niz kompleksnih brojeva $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ vrijedi*

$$\alpha^{-1}\mathbb{P}(A)\sum_{m=M}^{\infty}|x_m|^2 \leqslant \int_A \Big|\sum_{m=M}^{\infty}\epsilon_m x_m\Big|^2 d\mathbb{P} \leqslant \alpha\mathbb{P}(A)\sum_{m=M}^{\infty}|x_m|^2.$$

(b) *Za svaki događaj A pozitivne vjerojatnosti postoje $M \in \mathbb{N}$ i konstanta $C \in [0, +\infty\rangle$ takvi da za svaki kvadratno sumabilni niz kompleksnih brojeva $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ vrijedi*

$$\Big(\sum_{m=M}^{\infty}|x_m|^2\Big)^{1/2} \leqslant C\Big\|\sum_{m=1}^{\infty}\epsilon_m x_m\Big\|_{\mathrm{L}^\infty(A)}.$$

Prije dokaza leme napomenimo da zbog $\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|^2 < +\infty$ red slučajnih varijabli $\sum_{m=1}^{\infty}\epsilon_m x_m$ zadovoljava uvjete Kolmogorovljevog teorema o tri reda (vidjeti [Sar02]) pa on konvergira g.s. Zato ima smisla L^∞ ocjena pod (b).

Dokaz leme 6.24. (a) Prije svega raspišimo:

$$\int_A \Big|\sum_{m=M}^{\infty}\epsilon_m x_m\Big|^2 d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)\sum_{m=M}^{\infty}|x_m|^2 + 2\sum_{\substack{m,n\\ M\leqslant m<n}}\mathrm{Re}(x_m\overline{x_n})\int_\Omega \mathbb{1}_A\epsilon_m\epsilon_n d\mathbb{P}.$$

Drugi pribrojnik ocijenimo koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost sa

$$\underbrace{2\Big(\sum_{\substack{m,n\\ M\leqslant m<n}}|x_m x_n|^2\Big)^{1/2}}_{\leqslant\sum_{m=M}^{\infty}|x_m|^2}\Big(\sum_{\substack{m,n\\ M\leqslant m<n}}|\langle\mathbb{1}_A,\epsilon_m\epsilon_n\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}|^2\Big)^{1/2}.$$

Iz nezavisnosti slučajnih varijabli ϵ_m vrlo jednostavno slijedi činjenica da su produkti $\epsilon_m\epsilon_n$ međusobno ortogonalni za različite parove (m,n) takve da je $m < n$. Odavde dobivamo

$$\sum_{\substack{m,n\\ 1\leqslant m<n}}|\langle\mathbb{1}_A,\epsilon_m\epsilon_n\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}|^2 \leqslant \|\mathbb{1}_A\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 = \mathbb{P}(A) < +\infty,$$

pa je

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{\substack{m,n\\ M\leqslant m<n}}|\langle\mathbb{1}_A,\epsilon_m\epsilon_n\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}|^2 = 0,$$

što znači da tražena tvrdnja vrijedi za dovoljno veliki $M \in \mathbb{N}$.

(b) Možemo iskoristiti dio (a) uz $\alpha = 1/2$ te staviti $C = \sqrt{2/\mathbb{P}(A)}$. $\square$

Sada konačno možemo dati dokaz samog teorema.

Dokaz teorema 6.22. Označimo $T_\star f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f|$ i pretpostavimo da ne vrijedi tražena ocjena. Za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ postoji funkcija $f_m \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ za koju vrijedi

$$\|f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p \sim \frac{1}{m^{3/2}} \quad \text{i} \quad \|T_\star f_m\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(\mathbb{T})} > m^{1/p} \|f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}.$$

To znači da postoji $\alpha > 0$ takav da je

$$|\{T_\star f_m > \alpha\}| > \alpha^{-p} m \|f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p.$$

Zbog homogenosti možemo pretpostaviti $\alpha = 1$, tj.

$$|\{T_\star f_m > 1\}| > m \|f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p,$$

jer inače naprosto zamijenimo f_m sa f_m/α, a i dalje vrijedi

$$\|f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p \sim_{p,\alpha} \frac{1}{m^{3/2}}.$$

Označimo li $E_m := \{T_\star f_m > 1\} \subseteq \mathbb{T}$ imat ćemo

$$\sum_{m=1}^{\infty} |E_m| = +\infty.$$

Štoviše, uzmimo još $r_m := m^{1/4}$, tako da je

$$\lim_{m\to\infty} r_m = +\infty \quad \text{i} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \|r_m f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p < +\infty.$$

Po lemi 6.23 postoji niz $(t_m)_{m=1}^\infty$ u $\mathbb{T}$ takav da se gotovo svaka točka iz $\mathbb{T}$ nalazi u beskonačno mnogo skupova $E_m + t_m$. Fiksirajmo jedan takav niz kroz cijeli dokaz. Promotrimo "slučajne funkcije" definirane sa

$$F_M := \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m r_m \mathrm{T}_{t_m} f_m; \quad M \in \mathbb{N},$$

tj. preciznije, F_M su funkcije na $\mathbb{T} \times \Omega$:

$$F_M(x,\omega) := \sum_{m=1}^{M} \epsilon_m(\omega) r_m f_m(x - t_m).$$

Tvrdimo da za g.s. $\omega \in \Omega$ niz funkcija $\big(F_M(\cdot,\omega)\big)_{M=1}^\infty$ konvergira u normi prostora $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$. Promotrimo

$$\big(\mathbb{E}\|F_{M'} - F_M\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p\big)^{1/p}$$

za neke prirodne brojeve $M < M'$ i ocijenimo taj izraz koristeći Hinčinovu nejednakost za funkcije (korolar 4.23) i $1 \leqslant p \leqslant 2$ kao

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{m=M+1}^{M'} \epsilon_m r_m \mathrm{T}_{t_m} f_m\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p\Big)^{1/p} \sim_p \Big\|\Big(\sum_{m=M+1}^{M'} |r_m \mathrm{T}_{t_m} f_m|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})} \\
&\leqslant \Big\|\Big(\sum_{m=M+1}^{M'} |r_m \mathrm{T}_{t_m} f_m|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})} = \Big(\sum_{m=M+1}^{M'} \|r_m f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Vidimo da je $(F_M)_{M=1}^\infty$ Cauchyjev niz u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}\times\Omega)$ pa on konvergira po njegovoj normi prema nekoj funkciji F. Zato postoji podniz $(F_{M_k})_{k=1}^\infty$ takav da za g.s. $\omega \in \Omega$ vrijedi $\lim_{k\to\infty} F_{M_k}(\cdot,\omega) = F(\cdot,\omega)$ u prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$. Dakle, za g.s. $\omega \in \Omega$ je dobro definirana funkcija

$$F(\cdot,\omega) := \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{M_k} \epsilon_m(\omega) r_m \mathrm{T}_{t_m} f_m \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}).$$

Primjenom operatora T_n i korištenjem $T_n \mathrm{T}_{t_m} = \mathrm{T}_{t_m} T_n$ za g.s. $\omega \in \Omega$ dolazimo do funkcije

$$T_n F(\cdot,\omega) = \lim_{k\to\infty} \sum_{m=1}^{M_k} \epsilon_m(\omega) r_m \mathrm{T}_{t_m} T_n f_m \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}} \sum_{m=1}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^p dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \|r_m T_n f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p \leqslant \|T_m\|_{\mathrm{L}^p\to\mathrm{L}^p}^p \sum_{m=1}^{\infty} \|r_m f_m\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}^p < +\infty
\end{aligned}$$

pa za g.s. $x \in \mathbb{T}$ vrijedi

$$\sum_{m=1}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^p < +\infty$$

te zbog $p \leqslant 2$ pogotovo imamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^2 < +\infty. \tag{6.22}$$

Dakle, za g.s. $x \in \mathbb{T}$ red slučajnih varijabli

$$\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon_m(\omega) r_m (T_n f_m)(x - t_m)$$

zadovoljava uvjete Kolmogorovljevog teorema o tri reda pa on konvergira za g.s. $\omega \in \Omega$.

Zbog pretpostavke teorema o konvergenciji g.s. posebno zaključujemo $(T_\star F)(x,\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(T_n F)(x,\omega)| < +\infty$ za g.s. $x \in \mathbb{T}\times\Omega$. (Naime, svaki konvergentni niz kompleksnih brojeva je ograničen.) Zato postoje skup $A \subseteq \mathbb{T}\times\Omega$ pozitivne mjere i konstanta $D \in [0,+\infty\rangle$ takvi da za svaki $(x,\omega) \in A$ vrijedi

$$(T_\star F)(x,\omega) \leqslant D. \tag{6.23}$$

Posebno, postoji skup pozitivne mjere $B \subseteq \mathbb{T}$ takav da za svaki $x \in B$ događaj $A_x := \{\omega \in \Omega : (x,\omega) \in A\} \subseteq \Omega$ ima pozitivnu vjerojatnost. Zbog (6.22), (6.23) i leme 6.24(b) za svaki $x \in B$ dobivamo $C(x) \in [0,+\infty\rangle$ i $M(x) \in \mathbb{N}$ takve da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Big(\sum_{m=M(x)}^{\infty} |r_m (T_n f_m)(x - t_m)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant C(x)$$

te posebno

$$|r_m (T_n f_m)(x - t_m)| \leqslant C(x) \quad \text{za } m \geqslant M(x).$$

Uzimanjem supremuma po n na lijevoj strani dobivamo

$$r_m (T_\star f_m)(x - t_m) \leqslant C(x) \quad \text{za } m \geqslant M(x).$$

S druge pak strane, po konstrukciji od $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ za gotovo svaki $x \in \mathbb{T}$ postoji strogo rastući niz indeksâ $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ takav da se x nalazi u skupovima $E_{m_k} + t_{m_k}$ te tada imamo:

$$r_{m_k} (T_\star f_{m_k})(x - t_{m_k}) > r_{m_k} \longrightarrow +\infty \quad \text{kada } k \to \infty,$$

što nas je konačno dovelo do kontradikcije. □

Kao što smo već rekli, teorem 6.22 predstavlja parcijalni obrat teorema 1.6. U njegovom iskazu ne možemo zamijeniti $\mathbb{T}$ sa $\mathbb{R}$, vidjeti zadatak 1.6, ali u posebnom slučaju Fourierovih parcijalnih integrala princip ipak ostaje vrijediti. Za primjer "principa prijenosa" ocjena između $\mathbb{T}$ i $\mathbb{R}$ pogledajte zadatak 6.11.

* * *

Zadatak 6.9. Poanta ovog zadatka je na vrlo jednostavnom primjeru objasniti ideju konstrukcije pomoću slučajnih predznaka iz dokaza teorema 6.22.

(a) Pokažite da je za svaki $a \in [-\infty,+\infty]$ moguće naći koeficijente $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ takve da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ konvergira prema broju a. Osim toga pokažite da je moguće odabrati koeficijente ε_n tako da taj red uopće nema sumu (tj. uopće ne konvergira).

(b) Neka je $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s razdiobom $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dokažite da red slučajnih varijabli $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$ gotovo sigurno konvergira u $\mathbb{R}$.

Napomena: Ovu tvrdnju možemo interpretirati kao sljedeću "igru". Netko nam je zadao red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pm 1}{n}$, pri čemu nam predznaci nisu vidljivi i traži od nas da odaberemo niz predznaka $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ tako da red $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\pm 1}{n}$ konvergira u $\mathbb{R}$. Nikakvim determinističkim putem ne možemo doći do izbora koji je sigurno dobar, ali obzirom da je gotovo svaki izbor dobar, bacanje novčića se čini kao razumna solucija.

(c) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite da s pozitivnom vjerojatnosti red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$ iz (b) dijela konvergira sa sumom u intervalu $\langle a, b \rangle$.

Zadatak 6.10. Neka su dani eksponenti p, q takvi da je $1 \leqslant q < p \leqslant 2$. Ako je $T \colon \mathrm{L}^p(\mathbb{T}) \to \mathrm{L}^q(\mathbb{T})$ ograničeni linearni operator koji komutira s translacijama, tada je T i slabo L^p ograničen. Preciznije, ako za neku konstantu C vrijedi ocjena

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{T})} \leqslant C \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})},$$

tada vrijedi i

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^p_{\text{slabi}}(\mathbb{T})} \lesssim_{p,q} C \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}.$$

Uputa: Postupajte slično kao u dokazu teorema 6.22.

Zadatak 6.11. Hilbertova transformacija na torusu $\mathbb{T}$ definirana je formulom

$$(\widetilde{H} f)(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) \operatorname{ctg}(\pi t)\, dt$$

za funkcije $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{T})$. Ona se također proširuje do ograničenog operatora na $\mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$, a dokaz te činjenice može slijediti iste korake kao i dokaz za Hilbertovu transformaciju H na $\mathbb{R}$. Umjesto toga dokažite direktno ekvivalentnost ocjena:

(1) $\|Hf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$,

(2) $\|\widetilde{H} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{T})}$.

Uputa: Za dokaz od (2) $\Rightarrow$ (1) najprije pridajte značenje Hilbertovoj transformaciji na kružnici radijusa $R > 0$, potom zaključite da je njena omeđenost direkna posljedica rezultata na $\mathbb{T}$ te konačno pustite $R \to +\infty$. Obratno, za dokaz od (1) $\Rightarrow$ (2) krenite od funkcije na $\mathbb{T}$, shvatite je kao 1-periodičnu funkciju na $\mathbb{R}$, potom je stavite na 0 izvan nekog intervala $[-R, R]$, iskoristite ocjenu na $\mathbb{R}$ te konačno pustite $R \to +\infty$ ocjenjujući grešku. Ovaj trik dobro radi za operatore koji su barem u nekom smislu invarijantni na dilatacije.

Bibliografija

[AK15] H. Abraham, V. Kovač, *From electrostatic potentials to yet another triangle center*, Forum Geom. **15** (2015), 73–89.

[Ald11] J. M. Aldaz, *The weak type* $(1,1)$ *bounds for the maximal function associated to cubes grow to infinity with the dimension*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 2, 1013–1023.

[AS08] N. Alon, J. H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, treće izdanje, John Wiley & Sons, Inc., 2008.

[BMS97] A. Baerstein, S. Montgomery-Smith, *Some conjectures about integral means of* ∂f *and* $\overline{\partial f}$, Complex analysis and Differential Equations, Proc. of the Marcus Wallenberg symposium in honour of Matts Essén, Uppsala, Sweeden, 1997, 92–109.

[Bec75] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. (2) **102** (1975), no. 1, 159–182.

[BL76] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[Bur66] D. L. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.

[Bur84] D. L. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Probab. **12** (1984), 647–702.

[Bur85] D. L. Burkholder, *An elementary proof of an inequality of R. E. A. C. Paley*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985) 474–478.

[Bur87] D. L. Burkholder, *A Sharp and Strict* L^p*-Inequality for Stochastic Integrals*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 1, 268–273.

[Bur88a] D. L. Burkholder, *A proof of Pełczyński's conjecture for the Haar system*, Studia Math. **91** (1988), no. 1, 79–83.

[Bur88b] D. L. Burkholder, *Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals*, Colloque Paul Lévy (Palaiseau, 1987), Astérisque **157**–**158** (1988), 75–94.

[Cal65] A.-P. Calderón, *Commutators of Singular Integral Operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1092–1099.

[Cal68] A.-P. Calderón, *Ergodic theory and translation-invariant operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **59** (1968), 349–353.

[Cal77] A.-P. Calderón, *Cauchy Integrals on Lipschitz Curves and Related Operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), no. 4, 1324–1327.

[CZ52] A.-P. Calderón, A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.

[Car66] L. Carleson, *On Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series*, Acta Math. **116** (1966), 135–157.

[Coh13] D. L. Cohn, *Measure Theory*, drugo izdanje, Birkhäuser Advanced Texts, Springer, New York, 2013.

[CK01a] M. Christ and A. Kiselev, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 409–425.

[CK01b] M. Christ and A. Kiselev, *WKB asymptotic behavior of almost all generalized eigenfunctions for one-dimensional Schrödinger operators with slowly decaying potentials*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 426–447.

[CJS89] R. R. Coifman, P. W. Jones, S. Semmes, *Two elementary proofs of the* L^2 *boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 3, 553–564.

[CMM82] R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'integral de Cauchy définit un opérateur borné sur le courbes Lipschitziennes*, Ann. of Math. **116** (1982), 361–387.

[CM97] R. Coifman, Y. Meyer, *Wavelets: Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **48**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Dau92] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Series Appl. Math., SIAM, Philadelphia, 1992.

[DJ84] G. David, J. L. Journé, *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) **120** (1984), no. 2, 371–397.

[Dem08] C. Demeter, *Divergence of combinatorial averages and the unboundedness of the trilinear Hilbert transform*, Ergodic Theory Dynam. Systems Volume **28** (2008), no. 5, 1453–1464.

[Duo01] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, AMS, Providence, 2001.

[Dur10] R. Durett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[Fef71] C. Fefferman, *The Multiplier Problem for the Ball*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), no. 2, 330–336.

[Fol95] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[Fol99] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, drugo izdanje, John Wiley and Sons, New York, 1999.

[FJW91] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, Regional Conference Series in Mathematics, AMS, Providence, 1991.

[GJ78] J. B. Garnett, P. W. Jones, *The Distance in* BMO *to* L^∞, Ann. of Math. (2) **108** (1978), 373–393.

[Gra92] L. Grafakos, *On multilinear fractional integrals*, Studia Math. **102** (1992), no. 1, 49–56.

[Gra94] L. Grafakos, *An elementary proof of the square summability of the discrete Hilbert transform*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 5, 456–458.

[GT03] L. Grafakos, T. Tao, *Multilinear interpolation between adjoint operators*, J. Funct. Anal. **199** (2003), 379–385.

[Gri95] G. Gripenberg, *A necessary and sufficient condition fot the existence of a father wavelet*, Studia Math. **114** (1995), 207–226.

[Haa10] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. **69** (1910), 331–371.

[Hed72] L. I. Hedberg, *On certain convolution inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 505–510.

[HW96] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[Hun67] R. A. Hunt, *On the Convergence of Fourier Series*, Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues, Proc. Conf. Edwardsville (1967), 235–255.

[JOR96] R. L. Jones, I. V. Ostrovskii, J. M. Rosenblatt, *Square functions in ergodic theory.* Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 2, 267–305.

[Kov06] V. Kovač, *T(1) teorem u klasičnoj i dijadskoj harmonijskoj analizi*, magistarski rad (voditelj H. Šikić), Sveučilište u Zagrebu, 2006.

[Kra99] S. G. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis*, Carus Mathematical Monographs **27**, MAA, Washington, D.C., 1999.

[Lac00] M. Lacey, *The bilinear maximal functions map into L^p for* $2/3 < p \leqslant 1$, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 35–57.

[LT97] M. Lacey, C. Thiele, *L^p Estimates on the Bilinear Hilbert Transform for* $2 < p < \infty$, Ann. of Math. (2) **146** (1997), no. 3, 693–724.

[LT99] M. Lacey, C. Thiele, *On Calderón's conjecture*, Ann. of Math. (2) **149** (1999), no. 2, 475–496.

[Lep76] D. Lépingle, *La variation d'ordre p des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **36** (1976), no. 4, 295–316.

[LW49] L. H. Loomis, H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961–962.

[Men23] D. E. Menchoff, *Sur les séries des fonctions orthogonales*, Fund. Math. **4** (1923), 92–105.

[Mey92] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[NS14] M. Nielsen, H. Šikić, *On stability of Schauder bases of integer translates*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 4, 2281–2293.

[OSTTW12] R. Oberlin, A. Seeger, T. Tao, C. Thiele, and J. Wright, *A variation norm Carleson theorem*, J. Eur. Math. Soc. **14** (2012), no. 2, 421–464.

[Ose12] A. Osekowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences, Mathematical Monographs **72**, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.

[Pic72] S. K. Pichorides, *On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov*, Studia Math. **44** (1972), 165–179.

[Pro04] P. E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Rad22] H. Rademacher, *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*, Math. Ann. **87** (1922), 112–138.

[RY99] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Rud87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, treće izdanje, McGraw-Hill, 1987.

[Sar02] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[Ste61] E. M. Stein, *On limits of sequences of operators*, Ann. of Math. **74** (1961), 140–170.

[Ste70] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series **30**, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Ste82] E. M. Stein, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), no. 2, 359–376.

[Ste93] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[Ste98] E. M. Stein, *Singular Integrals: The Roles of Calderón and Zygmund*, Notices Amer. Math. Soc. **45** (1998), no. 9, 1130–1140.

[SS83] E.M. Stein, J.O. Strömberg, *Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n*, Ark. Mat. **21** (1983), no. 2, 250–269.

[SW59] E. M. Stein, G. Weiss, *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*, J. Math. Mech. **8** (1959), 263–284.

[SW71] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Mathematical Series **32**, Princeton University Press, Princeton, 1971.

[Tao07] T. Tao, *Graduate Fourier analysis*, skripta kolegija, UCLA, 2006./2007.

[Thi06] C. Thiele, *Wave Packet Analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **105**, AMS, Providence, 2006.

[Wan95] X. Wang, *The study of wavelets from the properties of the their Fourier transform*, Ph.D. Thesis (advisor G. L. Weiss), Washington University, 1995.

[Wol82] T. H. Wolff, *A note on interpolation spaces*, dio knjige *Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **908**, Springer, Berlin-New York, 1982, 199–204.

[Wut98] The Wutam Consortium, *Basic Properties of Wavelets*, J. Fourier Anal. Appl. **4** (1998), no. 4 and 5, 575–594.

[Yan51] S. Yano, *Notes on Fourier analysis. XXIX. An Extrapolation Theorem*, J. Math. Soc. Japan **3** (1951), no. 2, 296–305.

[Zyg71] A. Zygmund, *Intégrales Singulières*, Lecture Notes in Math. **204**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.