

NAZIV STUDIJA: ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

SEMESTAR STUDIJA: zimski i ljetni 2023/24 (60 sati)

NAZIV KOLEGIJA: Metoda Bellmanovih funkcija u analizi i vjerojatnosti

OBLIK NASTAVE	SATI TJEDNO	IZVOĐAČ NASTAVE
predavanja	2	izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

ECTS BODOVI: upisuje administracija studija

CILJ KOLEGIJA:

Cilj kolegija je upoznati studente s tzv. tehnikom Bellmanovih funkcija, posebice kroz brojne primjere iz matematičke analize i teorije vjerojatnosti. Obradit će se veći dijelovi knjiga [1] i [2]. Preciznije, knjiga [1] će se koristiti za upoznavanje s osnovnom idejom, primjerima iz analize (npr. teoremi ulaganja, ocjene integralnih operatora) i trikovima za traženje Bellmanovih funkcija, dok će knjiga [2] komplementirati gradivo primjerima iz vjerojatnosti (npr. ocjene martingala). Matematičar koji ovlada ovom tehnikom znat će metodično pristupiti mnogim tipovima problema te može steći ogromnu prednost u rješavanju problema naspram većine znanstvenika koji metodu i dalje smatraju „mističnom“ ili pak misle da se do rješenja dolazi pukim pogađanjem.

OPIS KOLEGIJA:

Tehnika koju ćemo proučavati je jedna vrlo korisna ideja u teorijskoj matematici. Dobila je ime po primijenjenom matematičaru Richardu E. Bellmanu, koji je na nju utjecao svojim radom iz dinamičkog programiranja i stohastičkog optimalnog upravljanja. U teoriji vjerojatnosti ideju je prvi upotrijebio Donald L. Burkholder u 1980-im godinama pa se ona nekad zove i *Burkholderova metoda*. Metoda je primijenjena u matematičkoj analizi i dalje razvijena u sustavnu teoriju od strane Fedora L. Nazarova, Sergeia. R. Treila i Alexandra L. Volberga u čitavoj seriji knjiga i radova od kraja 1990-ih godina do danas. Isti su ljudi i skovali termin *metoda Bellmanovih funkcija*. Ona se koristi za dokazivanje/opovrgavanje i pojačavanje mnogih klasičnih i novih rezultata u vjerojatnosti, analizi, parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i drugdje te je danas jedna od najpoznatijih, najoriginalnijih i najspektakularnijih tehnika.

Evo vrlo grubog prikaza metode.

1. Odaberite problem s unutrašnjom samo-sličnosti.
2. Svedite problem na ograničavanje “invarijantne” veličine.
3. Napišite nejednadžbu za gornju invarijantnu veličinu koristeći samo-sličnost problema.

4. Radite unatrag: ograničite invarijantnu veličinu pod pretpostavkom da već imamo neko rješenje nejednadžbe.
5. Pronadite neko rješenje nejednadžbe.

Čitatelju će gornja shema dobiti smisao tek nakon što se upozna s konkretnim primjerima. Npr. ovako generalno nije jasno na kakvu samo-sličnost mislimo, je li nejednadžba algebarska ili diferencijalna, kakva rješenja tražimo, itd. Upravo zbog općenitosti ovakva shema je primjenjiva u neslućeno mnogo raznolikih situacija.

NASTAVNI SADRŽAJI:

1. Uvodni primjeri. Primjeri egzaktnih Bellmanovih funkcija. (12 sati)
2. Veze sa stohastičkim optimalnim upravljanjem. (12 sati)
3. Dijadski modeli. Martingalne nejednakosti u diskretnom vremenu. (12 sati)
4. Ocjene singularnih integrala. (12 sati)
5. Maksimalne ocjene. Ocjene kvadratnih funkcija. (12 sati)

OBAVEZE STUDENATA TIJEKOM NASTAVE I NAČINI NJIHOVA IZVRŠAVANJA:

Pohađanje predavanja (uživo ili putem interneta), izrada domaćih zadaća, održavanje seminara ili pisanje eseja.

UVJETI ZA POTPIS/IZLAZAK NA ISPIT: Pohađanje predavanja.

NAČIN POLAGANJA ISPITA: Kolegij će se polagati rješavanjem *nekoliko domaćih zadaća* te ili držanjem *seminarskog izlaganja* ili pripremom *pisanog eseja* koji obrađuje neku naprednu temu (unaprijed dogovorenu s nastavnikom).

PRETPOSTAVLJENO PREDZNAJJE: Strogo govoreći, za praćenje predmeta nije potrebno gotovo nikakvo predznanje. Ipak, poželjna je spretnost u diferencijalnom i integralnom računu funkcija više varijabli, kao i familijarnost s osnovnim konceptima mjere i integrala te osnovama teorije vjerojatnosti.

OBAVEZNA LITERATURA:

[1] V. Vasyunin, A. Volberg, *The Bellman function technique in harmonic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **186**, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.

[2] A. Osękowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences, Mathematical Monographs (New Series) **72**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

DOPUNSKA LITERATURA:

[3] F. Nazarov, S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis*, Algebra i Analiz **8** (1996), no. 5, 32–162 (na ruskom); Engleski prijevod: St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 5, 721–824.

[4] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bellman functions and L^p estimates for paraproducts*, Probab. Math. Statist. **38** (2018), no. 2, 459–479.

[5] V. Kovač, K. A. Škreb, *Bilinear embedding in Orlicz spaces for divergence-form operators with complex coefficients*, J. Funct. Anal. **284** (2023), no. 9, Paper no. 109884.

[6] K. A. Škreb, *Tehnika Bellmanovih funkcija za multilinearne martingalne ocjene*, doktorska disertacija, University of Zagreb, 2017.

[7] V. Kovač, *Applications of the Bellman Function Technique in Multilinear and Nonlinear Harmonic Analysis*, doktorska disertacija, University of California, Los Angeles, 2011.