Metoda Bellmanovih funkcija u analizi i vjerojatnosti

Ocjene martingala

Kolegij na doktorskom studiju, predavanja #8 (26. 1. 2024.) i #9 (2. 2. 2024.)

Vjekoslav Kovač

Koja je svrha ovdje iznesenog gradiva dvaju predavanja?

Prvo, želimo dati vjerojatnosnu teorijsku pozadinu prije nego (jednom dosta kasnije) započnemo teme iz knjige [Ose12]. Neki slušatelji su se već susreli s martingalima (npr. na predmetu *Slučajni procesi* na UniZg–PMF–MO ili na pristupnom doktorskom kolegiju *Vjerojatnost*), ali mi ovdje krećemo "od nule", postupamo malo drukčije (primarno motivirani kvantitativnim aspektom, tj. ocjenama, tj. nejednakostima) i dolazimo mnogo dalje (nego se obrađuje u tipičnim knjigama iz vjerojatnosti).

Drugo, koncepti iz knjige [VV20], na koje ćemo se prvo vratiti, su ovdje definirani sasvim općenito i vrlo elegantno. (To su možda i najveći "darovi" od vjerojatnosti za analizu: već sama elegantna i kompaktna notacija nekada puno znači.) Šteta bi bilo najprije raditi s nekim specijalnim dijadskim objektima i odmah uroniti u tehnikalije iz [VV20] (i to ćemo ostaviti za kasnije), a ne vidjeti apstraktnije gradivo ispod, koje je, po mojem mišljenju, doista prekrasno.

U tekstu nam $A \lesssim_P B$ znači $A \leqslant C_P B$ za neku nebitnu konstantu C_P ovisnu u skupu parametara P, dok nam $A \sim_P B$ znači da istovremeno vrijedi $A \lesssim_P B$ i $B \lesssim_P A$.

1 Definicija martingala

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. U teoriji vjerojatnosti je uobičajeno izmjerive (realne ili) kompleksne funkcije na vjerojatnosnom prostoru zvati *slučajnim varijablama* te ih označavati velikim latiničnim slovima. Integral slučajne varijable X po Ω obzirom na mjeru $\mathbb{P}$ se obično piše $\mathbb{E}X$ i zove *očekivanje* od X. Ako je pak $\mathcal{G}$ neka σ-algebra takva da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, tada definiramo *uvjetno očekivanje* od $X \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ na $\mathcal{G}$, u oznaci $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, kao slučajnu varijablu $Y \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ sa svojstvima:

- Y je $\mathcal{G}$-izmjeriva,
- $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}$ za svaki $A \in \mathcal{G}$.

Može se pokazati da takva slučajna varijabla Y postoji i da je jedinstvena do na jednakost g.s. obzirom na $\mathbb{P}$. Dakle, kad god pišemo jednakosti ili nejednakosti s $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ zapravo bismo trebali dopisivati "g.s.", ali to obično ne činimo. Intuicija iza definicije ovog pojma je da $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ prestavlja "najbolju" $\mathcal{G}$-izmjerivu aproksimaciju slučajne varijable X.

U slučaju trivijalne σ-algebre $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ lako po definiciji provjerimo da je $\mathbb{E}\big(X\big|\{\emptyset,\Omega\}\big)$ upravo konstanta $\mathbb{E}X$ pa uvjetno očekivanje poopćuje obično očekivanje. Malo općenitije, ako je $A_1, A_2, \ldots, A_m$ konačna particija od Ω na skupove pozitivne mjere $\mathbb{P}$, tada za $X \in \mathrm{L}^1$ i za σ-algebru $\mathcal{G} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_m\})$ sastavljenu od svih konačnih unija skupova $A_1, A_2, \ldots, A_m$ imamo

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{1}{\mathbb{P}(A_j)} \int_{A_j} X d\mathbb{P}\Big) \mathbb{1}_{A_j}. \tag{1}$$

Ukoliko nam je X nepoznata slučajna varijabla, ali znamo izračunati $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, iz posljednje jednakosti vidimo da je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega)$ "najbolji pokušaj" kod pogađanja prave vrijednosti od $X(\omega)$ za $\omega \in \Omega$.

Drugi ekstremni slučaj je $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, kada imamo $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = X$. Općenitije vrijedi

$$\mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) = H\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \tag{2}$$

ako su $X, HX \in \mathrm{L}^1$ i H je $\mathcal{G}$-izmjeriva. Ako pak imamo σ-algebre $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ takve da je $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \supseteq \mathcal{H}$, tada da svaku $X \in \mathrm{L}^1$ vrijedi

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\big|\mathcal{G}\big). \tag{3}$$

Slikovito kažemo da kod uzastopnih uvjetnih očekivanja "pobjeđuje" manja σ-algebra.

Lako je vidjeti da je uvjetno očekivanje linearno, a i monotono je na realnim slučajnim varijablama. Osim toga je korisno sljedeće svojstvo kontraktivnosti na L^p prostorima.

Lema 1.

(a) Za $X \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vrijedi* $\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big)$.

(b) Za $p \in [1, \infty]$ *i* $X \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vrijedi* $\big\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leqslant \|X\|_{\mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}$.

Dokaz. (a) Ako je X realna, rastavimo je na pozitivni i negativni dio, $X = X_+ - X_-$, $X_+ := \max\{X, 0\}$, $X_- := \max\{-X, 0\}$, tako da imamo $|X| = X_+ + X_-$. Zbog linearnosti je

$$\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| = \big|\mathbb{E}(X_+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X_-|\mathcal{G})\big| \leqslant \mathbb{E}(X_+|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(X_-|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big).$$

Za kompleksnu $X \in \mathrm{L}^1$ je dokaz ipak malo složeniji. Stavimo $H := \overline{\operatorname{sgn} \mathbb{E}(X|\mathcal{G})}$ pa, kako je H izmjeriva obzirom na $\mathcal{G}$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| &= H\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \overset{(2)}{=} \mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) = \operatorname{Re} \mathbb{E}(HX|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}\big(\operatorname{Re}(HX)\big|\mathcal{G}\big) \leqslant \mathbb{E}\big(|HX|\big|\mathcal{G}\big) \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big),\end{aligned}$$

pri čemu smo u posljednje dvije nejednakosti koristili monotonost uvjetnog očekivanja.

(b) Radi kompleksne interpolacije dovoljno je provjeriti tvrdnju u graničnim slučajevima $p = 1$ i $p = \infty$. Za $p = 1$ imamo:

$$\big\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big\|_{\mathrm{L}^1} = \mathbb{E}\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| \overset{\text{(a)}}{\leqslant} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big)\big) \overset{(3)}{=} \mathbb{E}|X| = \|X\|_{\mathrm{L}^1},$$

dok tvrdnja za $p = \infty$ slijedi iz:

$$\big|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big| \overset{\text{(a)}}{\leqslant} \mathbb{E}\big(|X|\big|\mathcal{G}\big) \leqslant \mathbb{E}\big(\|X\|_{\mathrm{L}^\infty}\big|\mathcal{G}\big) = \|X\|_{\mathrm{L}^\infty}. \qquad \square$$

Neka je sada $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ proizvoljna *filtracija* od $\mathcal{F}$, tj. rastući niz pod-σ-algebri od $\mathcal{F}$. Za niz $(X_n)_{n=0}^\infty$ iz $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kažemo da je *(diskretni) martingal* obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ ako vrijedi:

- X_n je $\mathcal{F}_n$-izmjeriva za svaki $n \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Direktna posljedica definicije i svojstva (3) je

$$\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \cdots,$$

a radi leme 1(b) za $p \geqslant 1$ vrijedi

$$\|X_0\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|X_1\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|X_2\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \cdots,$$

tj.

$$\mathbb{E}|X_0|^p \leqslant \mathbb{E}|X_1|^p \leqslant \mathbb{E}|X_2|^p \leqslant \cdots.$$

Tipični primjer martingala dobijemo ako uzmemo neku $X \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i stavimo $X_n := \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$.

Reći ćemo da je slučajna varijabla $T \colon \Omega \to \mathbb{N}_0$ *vrijeme zaustavljanja* (obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$) ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Tada ima smisla slučajna varijabla X_T određena sa

$$X_T|_{\{T=n\}} = X_n|_{\{T=n\}} \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0,$$

tj.

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega),$$

koju zovemo *martingal* $(X_n)_{n=0}^\infty$ *zaustavljen u vremenu* T. Definiramo još i σ-algebru

$$\mathcal{F}_T := \big\{A \in \mathcal{F} : (\forall n \in \mathbb{N}_0)(A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n)\big\},$$

koju zovemo *filtracija* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ *zaustavljena u vremenu* T. Naime, lako je provjeriti da je doista riječ o σ-algebri. Također je lako provjeriti da je slučajna varijabla X_T izmjeriva obzirom na $\mathcal{F}_T$. Možda najefektnije svojstvo martingala je sljedeće: Ako je $(T_n)_{n=0}^\infty$ rastući niz ograničenih vremena zaustavljanja, tada je $(X_{T_n})_{n=0}^\infty$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{T_n})_{n=0}^\infty$; vidjeti zadatak 1.

Primjer 2. Tzv. *dijadska filtracija* od $[0,1\rangle$ je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^\infty$ definirana sa

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n &:= \sigma\big(\big\{I \in \mathcal{D} \,:\, I \subseteq [0,1\rangle,\ |I| = 2^{-n}\big\}\big) \\ &= \text{konačne unije intervala } [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle;\ k = 0,1,2,\ldots,2^n-1.\end{aligned}$$

Za bilo koju $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ je formulom $X_n := \mathbb{E}(f|\mathcal{D}_n)$ dan tzv. *dijadski martingal* $(X_n)_{n=0}^\infty$. Ako nam, kao i ranije, $[f]_I$ označava prosjek funkcije f na intervalu I, tada zahvaljujući (1) za $n \in \mathbb{N}_0$ možemo pisati:

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle} \mathbb{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle} = \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} [f]_I \mathbb{1}_I.$$

Pogledajmo još što su u ovom slučaju martingalne razlike $X_{n+1} - X_n$:

$$\begin{aligned}
&X_{n+1} - X_n \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} [f]_{[2^{-n-1}k, 2^{-n-1}(k+1)\rangle} \mathbb{1}_{[2^{-n-1}k, 2^{-n-1}(k+1)\rangle} - \sum_{k=0}^{2^n-1} [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle} \mathbb{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle} \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \Big(\big([f]_{[2^{-n-1}2k, 2^{-n-1}(2k+1)\rangle} - [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle}\big) \mathbb{1}_{[2^{-n-1}2k, 2^{-n-1}(2k+1)\rangle} \\
&\qquad + \big([f]_{[2^{-n-1}(2k+1), 2^{-n-1}(2k+2)\rangle} - [f]_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle}\big) \mathbb{1}_{[2^{-n-1}(2k+1), 2^{-n-1}(2k+2)\rangle} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big([f]_{[2^{-n-1}2k, 2^{-n-1}(2k+1)\rangle} - [f]_{[2^{-n-1}(2k+1), 2^{-n-1}(2k+2)\rangle}\big) \\
&\qquad \big(\mathbb{1}_{[2^{-n-1}2k, 2^{-n-1}(2k+1)\rangle} - \mathbb{1}_{[2^{-n-1}(2k+1), 2^{-n-1}(2k+2)\rangle}\big) \\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} \frac{1}{2} \big([f]_{I_{\text{lijevo}}} - [f]_{I_{\text{desno}}}\big)\big(\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}\big),
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - X_n &= \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} \frac{1}{|I|} \Big(\int_{[0,1\rangle} f\big(\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}\big)\Big) \big(\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}\big) \\
&= \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-n}}} \langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)} \mathbb{h}_I,
\end{aligned}$$

pri čemu su $\mathbb{h}_I$ Haarove funkcije,

$$\mathbb{h}_I := \frac{\mathbb{1}_{I_{\text{lijevo}}} - \mathbb{1}_{I_{\text{desno}}}}{\sqrt{|I|}}.$$

Napomenimo da skalarni produkti $\langle f, \mathbb{h}_I \rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}$ imaju smisla za svaku $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$.

2 Maksimalni proces (maksimalna funkcija)

Dokažimo poznatu maksimalnu ocjenu za sasvim općeniti martingal.

Teorem 3. (Doobova[1] nejednakost) *Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal (obzirom na neku filtraciju) i neka je $(X_n^\star)_{n=0}^{\infty}$ pripadni maksimalni proces, tj.*

$$X_n^\star := \max_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k| \quad za\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Tada vrijedi:

$$\mathbb{P}(X_n^\star > \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|X_n\|_{\mathrm{L}^1} \quad za\ \alpha \in \langle 0, +\infty\rangle,\ n \in \mathbb{N}_0,$$
$$\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \quad za\ p \in \langle 1, \infty\rangle,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Označimo $A := \{X_n^\star > \alpha\}$ i definirajmo vrijeme zaustavljanja

$$T := \min\{k \geqslant 0 \,:\, |X_k| > \alpha \text{ ili } k = n\}$$

tako da po definiciji vrijedi

$$|X_T| > \alpha \text{ na } A, \quad |X_T| = |X_n| \text{ na } A^c.$$

Po zadatku 1(c) radi $T \leqslant n$ imamo $\mathbb{E}|X_T| \leqslant \mathbb{E}|X_n|$, a kako je $\mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{A^c})$, zapravo smo dobili

$$\alpha\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_A) \leqslant \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_A). \tag{4}$$

Zbog $\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_A) \leqslant \mathbb{E}|X_n|$ dijeljenjem (4) sa α slijedi prva tražena nejednakost.

Nadalje, računamo:

$$\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p}^p = \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\mathbb{P}(X_n^\star > \alpha)d\alpha \overset{(4)}{\leqslant} \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\alpha^{-1}\Big(\int_{\{X_n^\star>\alpha\}} |X_n| d\mathbb{P}\Big)d\alpha$$
$$= \int_\Omega |X_n|\Big(\int_0^{X_n^\star} p\alpha^{p-2}d\alpha\Big)d\mathbb{P} = \frac{p}{p-1}\int_\Omega |X_n|(X_n^\star)^{p-1}d\mathbb{P}$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \frac{p}{p-1}\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p}^{p-1}.$$

Dijeljenjem sa $\|X_n^\star\|_{\mathrm{L}^p}^{p-1}$ (ukoliko je taj broj različit od 0) slijedi i druga nejednakost. □

Kao posebni slučaj teorema slijede ocjene za tzv. *dijadsku maksimalnu funkciju*:

$$(M_{\mathrm{dij}}f)(x) := \sup_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\ni x}} \frac{1}{|I|}\Big|\int_I f(y)dy\Big|; \quad x \in \mathbb{R},$$

tj.

$$M_{\mathrm{dij}}f := \sup_{I\in\mathcal{D}} |[f]_I|\,\mathbb{1}_I.$$

Korolar 4. *Vrijedi*

$$\|M_{\mathrm{dij}}f\|_{\mathrm{L}^1_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \quad i \quad \|M_{\mathrm{dij}}f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty]$.

[1] Joseph Leo Doob (1910–2004), američki matematičar.

Dokaz. Radi neprekidnosti mjere i teorema o monotonoj konvergenciji, dovoljno je pokazati tražene nejednakosti za varijantu maksimalne funkcije kod koje se uzima supremum samo po konačnoj podkolekciji od $\mathcal{D}$. Nadalje, zbog translacijske i dilatacijske invarijantnosti tih nejednakosti možemo pretpostaviti i da su svi intervali iz te podkolekcije podskupovi od $[0,1\rangle$, no tada naprosto iskoristimo teorem 3. $\square$

Zanimljivo je da se čak i ocjene

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R}^d)} \lesssim_d \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{i} \quad \|Mf\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \text{ za } p \in \langle 1, \infty] \tag{5}$$

za uobičajenu *Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju*,

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathrm{B}(x,r)|} \Big| \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(y)dy \Big|,$$

mogu izvesti iz Doobove nejednakosti, premda ona nije vezana uz neki martingal. Poslužit ćemo se tzv. *M. Christovim trikom translacije za trećinu.*

Radi jednostavnosti pretpostavimo $d = 1$. Uvest ćemo još jednu dijadsku rešetku $\mathcal{D}'$, definiranu sa

$$\mathcal{D}' := \Big\{ I + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ 4^m<|I|}} 4^m \,:\, I \in \mathcal{D} \Big\}.$$

Familiju $\mathcal{D}'$ možemo interpretirati na sljedeći način. Dijadske intervale pomičemo za formalni binarni "broj"

$$\ldots 10101.010101\ldots,$$

ali obzirom da je kolekcija dijadskih intervala duljine 2^n zapravo invarijantna na pomake za višekratnike od 2^n, njih je dovoljno translatirati za najveći broj oblika

$$101\ldots 01.010101\ldots$$

koji je manji od 2^n. Još preciznije, ako je $I \in \mathcal{D}$, $|I| = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ tada I pomičemo:

- za $2^n/3$ ako je n paran,
- za $2^{n+1}/3$ ako je n neparan.

Istu familiju $\mathcal{D}'$ ćemo dobiti i ako u drugom slučaju radije pomičemo za $2^{n+1}/3 - 2^n = -2^n/3$. Dakle,

$$\mathcal{D}' = \Big\{ I + (-1)^n \frac{2^n}{3} \,:\, I \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{Z},\ |I| = 2^n \Big\}.$$

U ovom alternativnom prikazu svaki dijadski interval pomičemo ili ulijevo ili udesno za trećinu njegove duljine, odakle je trik i dobio svoj kolokvijalni naziv.

Lema 5. *Za svaki ograničeni interval $J \subseteq \mathbb{R}$ postoji interval $I \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ takav da je $J \subseteq I$ i $|I| \leqslant 8|J|$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $2^{n-3} \leqslant |J| < 2^{n-2}$. Ukoliko je J sadržan u nekom dijadskom intervalu duljine 2^n, tada njega možemo uzeti za traženi interval I. U protivnom J sadrži broj oblika $2^n k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Iz pretpostavke o duljini slijedi da je J sadržan u $\langle 2^n k - \frac{2^n}{3}, 2^n k + \frac{2^n}{3} \rangle$ te je zato pogotovo podskup intervala

$$\Big[2^n k - \frac{2^n}{3}, 2^n(k+1) - \frac{2^n}{3} \Big\rangle \quad \text{i} \quad \Big[2^n(k-1) + \frac{2^n}{3}, 2^n k + \frac{2^n}{3} \Big\rangle.$$

Kako se barem jedan od ta dva intervala nalazi u $\mathcal{D}'$ (ovisno o parnosti od n), možemo baš njega uzeti za traženi interval I. $\square$

Zbog gornjeg opisa od $\mathcal{D}'$ je jasno da i "pomaknuta" dijadska maksimalna funkcija

$$(M'_{\mathrm{dij}}f)(x) := \sup_{\substack{I\in\mathcal{D}'\\ I\ni x}} \frac{1}{|I|}\Big|\int_I f(y)dy\Big|; \quad x\in\mathbb{R}.$$

zadovoljava ocjene iz korolara 4. Radi leme 5 možemo pisati

$$Mf \leqslant 8M_{\mathrm{dij}}|f| + 8M'_{\mathrm{dij}}|f|,$$

što daje alternativni dokaz od (5).

3 Martingalna transformacija

Vratimo se sada na općeniti martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na neku filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Neka je još $(H_n)_{n=1}^{\infty}$ *predvidivi proces* obzirom na istu filtraciju, što znači da je slučajna varijabla H_n izmjeriva obzirom na $\mathcal{F}_{n-1}$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Intuitivno, vrijednosti od H_n se mogu "predvidjeti" već u trenutku $n-1$, kada raspolažemo informacijama određenima sa $\mathcal{F}_{n-1}$. *Martingalna transformacija* (od $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ obzirom na $(H_n)_{n=1}^{\infty}$) je novi proces $\big((H\cdot X)_n\big)_{n=0}^{\infty}$ definiran sa

$$(H\cdot X)_0 := \mathbf{0}, \quad (H\cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \ \text{ za } n\in\mathbb{N}.$$

Uz pretpostavku ograničenosti varijabli H_n taj novi proces $H\cdot X$ je opet martingal obzirom na istu filtraciju. Drugi česti naziv za $H\cdot X$ je *diskretni stohastički integral*, jer je riječ o Riemannovim sumama tzv. Itōvog[2] integrala. U toj interpretaciji prirodno je ispitati koji se sve procesi mogu prikazati kao martingalne transformacije obzirom na dani martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, a odgovor daju tzv. teoremi reprezentacije martingala. Takvim rezultatima obiluje literatura iz teorije vjerojatnosti (vidjeti npr. knjige [Pro04] i [RY99]), premda su češće formulirani s neprekidnim vremenskim parametrom.

Pojam martingalne transformacije uveo je Burkholder[3] [Bur66]. Jedan od njegovih najvećih doprinosa ovom području je "oštra" ocjena za martingalnu transformaciju s doista ingenioznim dokazima. Naime, Burkholder je svoj originalni dokaz iz [Bur84] kasnije dodatno pojednostavnio (npr. u radu [Bur88b]), a u knjizi [Ose12] dane su brojne modifikacije njegove metode.

Teorem 6. (Burkholderova nejednakost) *Za svaki $p\in\langle 1,\infty\rangle$ i svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi*

$$\|(H\cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (p^*-1)\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty}\Big)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p},$$

pri čemu smo označili $p^* := \max\{p,p'\} = \max\{p,\frac{p}{p-1}\}$.

Može se pokazati i da je konstanta p^*-1 najbolja moguća, premda je nejednakost stroga osim u trivijalnim slučajevima kada je $p=2$ ili je desna strana jednaka 0.

Dokaz. Brojeve $p\in\langle 1,\infty\rangle$ i $n\in\mathbb{N}$ smatramo fiksiranima. U cijelom dokazu pretpostavljat ćemo da je $\|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty$ za $k=1,2,\ldots,n$ i $\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$, jer je inače nejednakost trivijalna. Iz (b) dijela leme 1 tada slijedi i $\|X_k\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$ za $k=0,1,\ldots,n$.

Slučaj $p=2$ je jednostavan, jer prema (2) imamo ortogonalnost prirasta,

$$\mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k-X_{k-1})\overline{(X_l-X_{l-1})}\big) = \mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k-X_{k-1})\overline{\mathbb{E}(X_l-X_{l-1}|\mathcal{F}_{l-1})}\big) = 0$$

[2]Kiyoshi Itō (1915–2008), japanski matematičar.

[3]Donald Lyman Burkholder (1927–2013), američki matematičar.

za $1 \leqslant k < l \leqslant n$, pa možemo pisati

$$
\begin{aligned}
\|(H \cdot X)_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1})\Big|^2 = \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{(X_l - X_{l-1})}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(|H_k|^2|X_k - X_{k-1}|^2\big) + 2\mathrm{Re} \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} \mathbb{E}\big(H_k\overline{H_l}(X_k - X_{k-1})\overline{(X_l - X_{l-1})}\big) \\
&\leqslant \Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty}^2\Big) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(|X_k - X_{k-1}|\big)^2
\end{aligned}
$$

te je analogno

$$
\|X_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \mathbb{E}\Big|X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})\Big|^2 = \mathbb{E}|X_0|^2 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(|X_k - X_{k-1}|^2\big).
$$

Neka je sada $p > 2$ i označimo $Y_m := (H \cdot X)_m$. Normalizirajmo

$$
\max_{1\leqslant k\leqslant n} \|H_k\|_{\mathrm{L}^\infty} = 1, \tag{6}
$$

tako da zapravo imamo dva martingala $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ i $(Y_m)_{m=0}^{\infty}$ obzirom na istu filtraciju $(\mathcal{F}_m)_{m=0}^{\infty}$ koji zadovoljavaju

$$
|Y_m - Y_{m-1}| \leqslant |X_m - X_{m-1}| \tag{7}
$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$. Rezultat kojeg želimo dokazati glasi: ako martingali zadovoljavaju tzv. *uvjet diferencijalne subordiniranosti* (7), tada vrijedi nejednakost

$$
\|Y_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant (p-1)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}. \tag{8}
$$

Opet možemo pretpostaviti $\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} < +\infty$, što za jednostavnu posljedicu ima da slučajne varijable X_k i Y_k za $k = 0, 1, \ldots, n$ imaju konačne L^p norme.

Definirajmo funkcije $u, v \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ formulama

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &:= p\big(1 - \tfrac{1}{p}\big)^{p-1}\big(|y| - (p-1)|x|\big)\big(|x| + |y|\big)^{p-1}, \\
v(x, y) &:= |y|^p - (p-1)^p|x|^p.
\end{aligned}
$$

Mi zapravo trebamo dokazati $\mathbb{E}v(X_n, Y_n) \leqslant 0$, a za to je dovoljno provjeriti:

(B1) $v(x, y) \leqslant u(x, y)$ za svake $x, y \in \mathbb{C}$,

(B2) $\mathbb{E}u(X_k, Y_k) \leqslant \mathbb{E}u(X_{k-1}, Y_{k-1})$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Naime, tada će tražena nejednakost slijediti iz

$$
\mathbb{E}v(X_n, Y_n) \leqslant \mathbb{E}u(X_n, Y_n) \leqslant \mathbb{E}u(X_{n-1}, Y_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \mathbb{E}u(X_0, Y_0) = \mathbb{E}u(X_0, \mathbf{0}) \leqslant 0.
$$

Za provjeru svojstva (B1) traženu nejednakost možemo podijeliti s $|y|^p$ i supstituirati $t = |x|/|y|$, tako da ona postaje

$$
\varphi(t) := p\big(1 - \tfrac{1}{p}\big)^{p-1}\big(1 - (p-1)t\big)(t+1)^{p-1} - 1 + (p-1)^p t^p \geqslant 0
$$

za svaki $t \in [0, +\infty\rangle$, pri čemu se i posebni slučaj $|y| = 0 \neq |x|$ može interpretirati kao $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) \geqslant 0$. Primijetimo da je $\varphi\big(\frac{1}{p-1}\big) = 0$ pa je još dovoljno provjeriti $\varphi'(t) \leqslant 0$ za $x \in \big[0, \frac{1}{p-1}\big]$ i $\varphi'(t) \geqslant 0$ za $x \in \big[\frac{1}{p-1}, +\infty\big\rangle$. Deriviranje daje

$$
\varphi'(t) = (p-1)^p p^{3-p} t\big(p^{p-2}t^{p-2} - (t+1)^{p-2}\big)
$$

pa je

$$\varphi'(t) \leqslant 0 \iff pt \leqslant t+1 \iff t \leqslant \tfrac{1}{p-1}.$$

Nije očigledno kako pristupiti provjeri svojstva (B2). Burkholder [Bur88b] ju je sveo na direktnu (ali mukotrpnu) verifikaciju konkavnosti funkcije $t \mapsto u(x+\alpha t, y+\beta t)$ kada su $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takvi da je $|\beta| \leqslant |\alpha|$, a mi koristimo elegantni trik iz knjige [Ose12], koji se tamo naziva *metoda integracije.* Definirajmo još jednu funkciju $w\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, ovog puta jednostavnijom formulom,

$$w(x,y) := \begin{cases} (|y|-1)^2 - |x|^2 & \text{za } |x|+|y| > 1, \\ 0 & \text{za } |x|+|y| \leqslant 1. \end{cases}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} t^{p-1} w\Big(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\Big) dt = \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} \bigg(\Big(\frac{|y|}{t} - 1\Big)^2 - \Big(\frac{|x|}{t}\Big)^2\bigg) dt \\
&= (|y|^2 - |x|^2) \int_0^{|x|+|y|} t^{p-3} dt - 2|y| \int_0^{|x|+|y|} t^{p-2} dt + \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} dt \\
&= (|x|+|y|)^{p-1} \Big(\frac{1}{p-2}|y| - \frac{1}{p-2}|x| - \frac{2}{p-1}|y| + \frac{1}{p}|x| + \frac{1}{p}|y|\Big) \\
&= \frac{2}{p(p-1)(p-2)} \big(|y| - (p-1)|x|\big)(|x|+|y|)^{p-1},
\end{aligned}$$

odakle uočavamo iznenađujući identitet,

$$u(x,y) = c_p \int_0^{+\infty} t^{p-1} w\Big(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\Big) dt, \tag{9}$$

pri čemu je $c_p := \frac{1}{2} p^{3-p} (p-1)^p (p-2) > 0$. Ako sada provjerimo:

(B2') $\mathbb{E} w(X_k, Y_k) \leqslant \mathbb{E} w(X_{k-1}, Y_{k-1})$ za svaki $k \in \mathbb{N}$,

tada će uvođenjem novih martingala $(\widetilde{X}_m)_{m=0}^\infty$ i $(\widetilde{Y}_m)_{m=0}^\infty$ formulama $\widetilde{X}_m := X_m/t$ i $\widetilde{Y}_m := Y_m/t$ te primjenom (9) i Fubinijevog teorema (za zamjenu $\mathbb{E}$ i $\int_0^{+\infty}$) slijediti (B2). Napomenimo da se Fubinijev teorem smije iskoristiti jer radi

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} t^{p-1} \Big| w\Big(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\Big) \Big| dt \leqslant \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} \bigg(\Big(\frac{|y|}{t} + 1\Big)^2 + \Big(\frac{|x|}{t}\Big)^2\bigg) dt \\
&= (|y|^2 + |x|^2) \int_0^{|x|+|y|} t^{p-3} dt + 2|y| \int_0^{|x|+|y|} t^{p-2} dt + \int_0^{|x|+|y|} t^{p-1} dt \lesssim_p |x|^p + |y|^p
\end{aligned}$$

imamo

$$\mathbb{E} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \Big| w\Big(\frac{X_k}{t}, \frac{Y_k}{t}\Big) \Big| dt \lesssim_p \mathbb{E}|X_k|^p + \mathbb{E}|Y_k|^p = \|X_k\|_{\mathrm{L}^p}^p + \|Y_k\|_{\mathrm{L}^p}^p < +\infty$$

za svaki $k = 0, 1, \ldots, n$.

Provjera od (B2') je mnogo lakša nego bi bila provjera od (B2). Uvodimo još dvije pomoćne funkcije $a, b\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dane sa

$$a(x,y) := \begin{cases} -2x & \text{za } |x|+|y| > 1, \\ 0 & \text{za } |x|+|y| \leqslant 1, \end{cases} \qquad b(x,y) := \begin{cases} 2y - 2\operatorname{sgn} y & \text{za } |x|+|y| > 1, \\ 0 & \text{za } |x|+|y| \leqslant 1. \end{cases}$$

Tvrdimo da za svake $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takve da je $|\beta| \leqslant |\alpha|$ vrijedi

$$w(x+\alpha, y+\beta) \leqslant w(x,y) + \operatorname{Re}\big(a(x,y)\overline{\alpha} + b(x,y)\overline{\beta}\big). \tag{10}$$

Naime, funkcije a i b nisu slučajno izabrane, već na otvorenom skupu $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x|+|y| \neq 1,\ |y| \neq 0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
a(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) &= (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}) w(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2), \\
b(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2) &= (\partial_{y_1} + i\partial_{y_2}) w(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2).
\end{aligned}$$

Ipak, naša provjera nejednakosti (10) nije infinitezimalna, već direktna, radi komplikacija zbog činjenice da w nije klase C^1. U svrhu dokaza od (10) najprije primijetimo da je $w(x,y) \leqslant (|y|-1)^2 - |x|^2$ za svake $x,y \in \mathbb{C}$, što za $|x|+|y| \leqslant 1$ proizlazi iz

$$0 \leqslant (|y|-1)^2 - |x|^2 \iff |x|^2 \leqslant (1-|y|)^2.$$

Sada pokazujemo (10) i pritom razlikujemo tri slučaja.

Slučaj 1. Pretpostavimo $|x|+|y|>1$. Ovdje (10) slijedi iz

$$\begin{aligned}
w(x+\alpha, y+\beta) &\leqslant (|y+\beta|-1)^2 - |x+\alpha|^2 \\
&= |y|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(y\overline{\beta}) - 2|y+\beta| + 1 - |x|^2 - |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(x\overline{\alpha}) \\
&= w(x,y) + \operatorname{Re}\big(a(x,y)\overline{\alpha} + b(x,y)\overline{\beta}\,\big) \\
&\quad + \Big(2\operatorname{Re}\big((\operatorname{sgn} y)\overline{\beta}\,\big) - 2|y+\beta| + 2|y|\Big) + \big(|\beta|^2 - |\alpha|^2\big) \\
&\leqslant w(x,y) + \operatorname{Re}\big(a(x,y)\overline{\alpha} + b(x,y)\overline{\beta}\,\big),
\end{aligned}$$

pri čemu u posljednoj nejednakosti za $y \neq 0$ koristimo

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}\big((\operatorname{sgn} y)\overline{\beta}\,\big) &= \frac{2\operatorname{Re}(y\overline{\beta})}{|y|} = \frac{y\overline{\beta}+\overline{y}\beta}{|y|} = \frac{|y+\beta|^2 - |y|^2 - |\beta|^2}{|y|} \\
= 2|y+\beta| - 2|y| &- \frac{1}{|y|}(|y|+|\beta|-|y+\beta|)(|y+\beta|+|\beta|-|y|) \leqslant 2|y+\beta| - 2|y|
\end{aligned}$$

te još uvažavamo $|\beta| \leqslant |\alpha|$.

Slučaj 2. Pretpostavimo $|x|+|y| \leqslant 1$ i $|x+\alpha|+|y+\beta|>1$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
w(x+\alpha, y+\beta) &= (|y+\beta|-1)^2 - |x+\alpha|^2 \\
&= \big(|x+\alpha| + |y+\beta| - 1\big)\big(|y+\beta| - |x+\alpha| - 1\big) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Naime, prvi faktor je pozitivan zbog pretpostavke ovog slučaja, dok je drugi faktor manji ili jednak 0 zbog

$$|y+\beta| \leqslant |y| + |\beta| \leqslant 1 - |x| + |\alpha| \leqslant 1 + |x+\alpha|.$$

Slučaj 3. U slučaju $|x|+|y| \leqslant 1$ i $|x+\alpha|+|y+\beta| \leqslant 1$ obje strane od (10) su jednake 0 pa nejednakost trivijalno vrijedi.

Ovime je dovršena provjera od (10). Sada u tu ocjenu uvrstimo $x = X_{k-1}$, $y = Y_{k-1}$, $\alpha = X_k - X_{k-1}$, $\beta = Y_k - Y_{k-1}$, uvažavajući (7),

$$w(X_k, Y_k) \leqslant w(X_{k-1}, Y_{k-1}) + \operatorname{Re}\big(a(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{(X_k - X_{k-1})} + b(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{(Y_k - Y_{k-1})}\,\big).$$

Uzimanjem očekivanja obiju strana konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}w(X_k, Y_k) &\leqslant \mathbb{E}w(X_{k-1}, Y_{k-1}) \\
&\quad + \operatorname{Re}\mathbb{E}\big(a(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})}\,\big) \\
&\quad + \operatorname{Re}\mathbb{E}\big(b(X_{k-1}, Y_{k-1})\overline{\mathbb{E}(Y_k - Y_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})}\,\big) \\
&= \mathbb{E}w(X_{k-1}, Y_{k-1}).
\end{aligned}$$

Time je završen dokaz Burkholderove nejednakosti u obliku (8) kada je $p>2$.

Pretpostavimo sada da je $1<p<2$ i vratimo se na polazni oblik nejednakosti koju dokazujemo. Opet normaliziramo kao u (6) i fiksiramo prirodni broj n. Zbog obrata Hölderove nejednakosti dovoljno je za proizvoljnu slučajnu varijablu Z takvu da je $\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}} < +\infty$ pokazati

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1})Z\Big)\Big| \leqslant (p'-1)\|X_n\|_{\mathrm{L}^p}\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Ako stavimo $X := X_n$, tada je zapravo $X_k = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_k)$ za $k = 0, 1, \ldots, n$, a s druge pak strane možemo označiti $Z_k := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_k)$. Lijevu stranu sada transformiramo koristeći svojstva uvjetnog očekivanja:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})Z\big) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,\mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z - Z_k)\big|\mathcal{F}_k\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,\mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})Z_{k-1}\big|\mathcal{F}_{k-1}\big) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})\underbrace{\mathbb{E}(Z - Z_k|\mathcal{F}_k)}_{=0}\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k Z_{k-1}\underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1})}_{=0}\big)
\end{aligned}$$

pa mi zapravo pokazujemo

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\big)\Big| \leqslant (p' - 1)\|X\|_{\mathrm{L}^p}\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Na sasvim isti način se dobiva

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k X(Z_k - Z_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(H_k(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\big)$$

pa je radi Hölderove nejednakosti dovoljno provjeriti

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} H_k(Z_k - Z_{k-1})\Big\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leqslant (p' - 1)\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}},$$

ali to je upravo prethodno dokazani slučaj nejednakosti za eksponent veći od 2. □

Funkcija u iz prethodnog dokaza s pravom se ponekad zove *Burkholderova funkcija*. On je do nje došao rješavanjem kompliciranih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi [Bur84], a jednom kada ju je pronašao, znao ju je primijeniti u raznolikim kontekstima u radovima [Bur85], [Bur87], [Bur88a], [Bur88b].

4 Hinčinov trik

Sljedeća ocjena je formulirana jezikom elementarne teorije vjerojatnosti. Ona predstavlja svojevrstan trik kojim razne ocjene za "kvadratne izraze" jednostavno slijede ako već imamo odgovarajuće ocjene za "linearne izraze". Jedino što moramo odustati od optimalne konstante, jer se ovim trikom konstanta tipično pogoršava.

Teorem 7. (Hinčinova[4] nejednakost) *Ako je* $N \in \mathbb{N}$ *i ako su* $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ *nezavisne slučajne varijable s razdiobom* $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, *tada za svake* $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{C}$ *i* $p \in \langle 0, \infty\rangle$ *vrijedi*

$$\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big|^p\Big)^{1/p} \sim_p \Big(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2\Big)^{1/2}. \tag{11}$$

Prisjetimo se da nezavisnost od $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ implicira

$$\mathbb{E}\big(f_1(\epsilon_1)\cdots f_N(\epsilon_N)\big) = \mathbb{E}f_1(\epsilon_1)\cdots\mathbb{E}f_N(\epsilon_N)$$

za svake funkcije $f_1, \ldots, f_N \colon \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$. Gornja notacija za razdiobu nam znači

$$\mathbb{P}(\epsilon_j = -1) = \mathbb{P}(\epsilon_j = 1) = \tfrac{1}{2}.$$

Primijetimo da se lijeva strana od (11) može deterministički zapisati kao

$$\Big(\frac{1}{2^N} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N \in \{-1,1\}} \big|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_N x_N\big|^p\Big)^{1/p},$$

ali korisnije će nam biti praktično ostati kod vjerojatnosne notacije.

Dokaz. Primijetimo da je

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big|^2 = \mathbb{E}\sum_{j,k=1}^{N} \epsilon_j \epsilon_k x_j \overline{x_k} = \sum_{j,k=1}^{N} x_j \overline{x_k}\, \underbrace{\mathbb{E}(\epsilon_j \epsilon_k)}_{\substack{=1 \text{ za } j=k \\ =0 \text{ za } j\neq k}} = \sum_{j=1}^{N} |x_j|^2,$$

tj. za $p = 2$ imamo čak jednakost. Dovoljno je dokazati tvrdnju za realne $x_1, x_2, \ldots, x_N$ jer se za kompleksne brojeve samo udvostručuju konstante. Osim toga je, zbog rasta L^p normi na vjerojatnosnom prostoru, lijeva strana od (11) rastuća funkcija od p pa je dovoljno dokazati gornju ocjenu (tj. $\lesssim$) za $p > 2$ i donju ocjenu (tj. $\gtrsim$) za $0 < p < 2$. Zahvaljujući Hölderovoj nejednakosti za $0 < p < 2$ imamo

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2\Big)^{1/2} = \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big|^p\Big)^{(1-\theta)/p} \Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big|^4\Big)^{\theta/4},$$

pri čemu je $0 < \theta < 1$ određen sa $\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$. Vidimo da će i donja ocjena za $0 < p < 2$ slijediti iz gornje ocjene za $p = 4$.

Radi monotonosti je dovoljno dokazati gornju ocjenu za parne prirodne brojeve, tj. $p = 2m$; $m \in \mathbb{N}$. Multinomni teorem nam daje

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big)^{2m} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1+\cdots+k_N = 2m}} \frac{(2m)!}{k_1!\cdots k_N!} (\epsilon_1 x_1)^{k_1} \cdots (\epsilon_N x_N)^{k_N}.$$

Zbog nezavisnosti imamo

$$\mathbb{E}(\epsilon_1^{k_1}\cdots\epsilon_N^{k_N}) = (\mathbb{E}\epsilon_1^{k_1})\cdots(\mathbb{E}\epsilon_N^{k_N}) = \begin{cases} 1 & \text{ako su svi } k_1, \ldots, k_N \text{ parni}, \\ 0 & \text{inače}. \end{cases}$$

Zato je

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j x_j\Big)^{2m} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N \in \mathbb{N}_0 \\ k_1+\cdots+k_N = m}} \frac{(2m)!}{(2k_1)!\cdots(2k_N)!} x_1^{2k_1}\cdots x_N^{2k_N}.$$

[4] Aleksandar Jakovljevič Hinčin (1894–1959), sovjetski matematičar.

S druge strane, opet po multinomnom teoremu imamo

$$\Big(\sum_{j=1}^{N} x_j^2\Big)^m = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N\in\mathbb{N}_0\\ k_1+\cdots+k_N=m}} \frac{m!}{k_1!\cdots k_N!} x_1^{2k_1}\cdots x_N^{2k_N}.$$

Preostaje usporediti multinomne koeficijente:

$$\frac{\frac{(2m)!}{(2k_1)!\cdots(2k_N)!}}{\frac{m!}{k_1!\cdots k_N!}} = \frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)}{2k_1(2k_1-1)\cdots(k_1+1)\cdots 2k_N(2k_N-1)\cdots(k_N+1)} \leqslant \frac{2^m m^m}{2^{k_1}\cdots 2^{k_N}} = m^m.$$

To nam daje

$$\bigg(\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big)^{2m}\bigg)^{1/2m} \leqslant m^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{N}|x_j|^2\Big)^{1/2},$$

čime je završen dokaz teorema. □

Alternativni dokaz. Dat ćemo još jedan dokaz gornje ocjene za $p \geqslant 2$ i za realne brojeve $x_1,\ldots,x_N$, tzv. metodom eksponencijalnog momenta. Radi homogenosti smijemo normalizirati $\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = 1$. Nezavisnost nam omogućuje račun:

$$\mathbb{E}e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} = \mathbb{E}\prod_{j=1}^{N} e^{\epsilon_j x_j} = \prod_{j=1}^{N}\mathbb{E}e^{\epsilon_j x_j} = \prod_{j=1}^{N}\big(\tfrac{1}{2}e^{-x_j} + \tfrac{1}{2}e^{x_j}\big) = \prod_{j=1}^{N}\operatorname{ch} x_j.$$

Iz jednostavne nejednakosti $\operatorname{ch} t \leqslant e^{t^2/2}$ dobivamo

$$\mathbb{E}e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} \leqslant \prod_{j=1}^{N} e^{\frac{1}{2}x_j^2} = e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2} = e^{1/2} < 2$$

pa je po Markov-Čebiševljevoj nejednakosti za $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j > \alpha\Big) = \mathbb{P}\Big(e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} > e^{\alpha}\Big) \leqslant e^{-\alpha}\mathbb{E}e^{\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j} \leqslant 2e^{-\alpha},$$

a simetrija razdiobe daje

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big| > \alpha\Big) \leqslant 4e^{-\alpha}.$$

Konačno:

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big|^p = \int_0^{+\infty} p\alpha^{p-1}\mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j x_j\Big| > \alpha\Big)d\alpha \leqslant 4p\underbrace{\int_0^{+\infty}\alpha^{p-1}e^{-\alpha}d\alpha}_{\Gamma(p)} \lesssim_p 1. \qquad \square$$

Naglasimo da ocjene u Hinčinovoj nejednakosti ne ovise o broju N; inače bi tvrdnja bila trivijalna. (Naime, svake dvije norme na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru su ekvivalentne.)

Sljedeća posljedica teorema 7 je priređena za primjene.

Korolar 8. (Hinčinova nejednakost za funkcije) *Neka su $N \in \mathbb{N}$, slučajne varijable $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ kao i dosad, $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere, $p \in \langle 0, \infty\rangle$ eksponent te $f_1, \ldots, f_N \in \mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ proizvoljne funkcije. Tada vrijedi*

$$\bigg(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j f_j\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}^p\bigg)^{1/p} \sim_p \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{N}|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}.$$

Dokaz. Nazovimo vjerojatnosni prostor eksplicitno $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za svaki $x \in \mathbb{X}$ teorem 7 daje

$$\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j(x)\Big|^p\Big)^{1/p} \sim_p \Big(\sum_{j=1}^{N} |f_j(x)|^2\Big)^{1/2}.$$

Uzmimo L^p norme obiju strana kao funkcija u varijabli x te iskoristimo Fubinijev teorem na $(\Omega \times \mathbb{X}, \mathcal{F} \times \mathcal{X}, \mathbb{P} \times \mu)$:

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega \Big(\int_\mathbb{X} \Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j(x)\Big|^p d\mu(x)\Big) d\mathbb{P}\Big)^{1/p} &= \Big(\int_\mathbb{X} \Big(\int_\Omega \Big|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j(x)\Big|^p d\mathbb{P}\Big) d\mu(x)\Big)^{1/p} \\ &\sim_p \Big(\int_\mathbb{X} \Big(\sum_{j=1}^{N} |f_j(x)|^2\Big)^{p/2} d\mu(x)\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

□

Korolar 9. (Marcinkiewicz-Zygmundova vektorska ocjena) *Neka su $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere, $p \in [1, \infty\rangle$ eksponent i T ograničeni linearni operator na $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$. Tada za proizvoljni niz funkcija $(f_j)_{j=1}^\infty$ iz $\mathrm{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ vrijedi*

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)} \lesssim_p \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)}.$$

Posljednja nejednakost se može kratko pisati

$$\big\|\|(Tf_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_2}\big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_{p,T} \big\|\|(f_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_2}\big\|_{\mathrm{L}^p},$$

odnosno, u kraćoj notaciji tzv. mješovitih normi,

$$\|(Tf_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2)} \lesssim_{p,T} \|(f_j)_{j=1}^\infty\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2)}$$

ili samo

$$\|Tf_j\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2_j)} \lesssim_{p,T} \|f_j\|_{\mathrm{L}^p(\ell^2_j)}.$$

Dokaz. Smijemo pretpostaviti da samo prvih N funkcija nije identički jednako 0, jer potom možemo primijeniti teorem o monotonoj konvergenciji za dobivanje općenitog slučaja. Ako su $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_N$ slučajne varijable kao i ranije, zbog omeđenosti od T imamo

$$\Big\|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j T f_j\Big\|_{\mathrm{L}^p} = \Big\|T\Big(\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j\Big)\Big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \|T\|_{\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p} \Big\|\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j f_j\Big\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Sada uzmemo p-ti moment obiju strana (tj. primijenimo $(\mathbb{E}|\cdot|^p)^{1/p}$) i dvaput koristimo korolar 8. □

5 Kvadratna varijacija (kvadratna funkcija)

Neka je sada $(X_n)_{n=0}^\infty$ martingal takav da je $X_0 = \mathbf{0}$. Definiramo kvadratnu varijaciju $([X]_n)_{n=0}^\infty$ kao novi proces definiran eksplicitno sa

$$[X]_0 := \mathbf{0}, \quad [X]_n := \sum_{k=1}^{n} |X_k - X_{k-1}|^2 \ \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \mathbb{E}[X]_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^2.$$

S druge strane, za $1 \leqslant k < l \leqslant n$ imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1})\big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1})\big|\mathcal{F}_{l-1}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\overline{(X_k - X_{k-1})}\,\underbrace{\mathbb{E}(X_l - X_{l-1}|\mathcal{F}_{l-1})}_{=0}\Big) = 0,
\end{aligned}$$

a isto vrijedi i za $l < k$ pa je

$$\|X_n\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}\big(\overline{(X_k - X_{k-1})}(X_l - X_{l-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^2.$$

Zaključujemo

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^2} = \|X_n\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Poznata nejednakost daje poopćenje uočene tvrdnje za sve $1 < p < \infty$.

Teorem 10. (Burkholder-Davis-Gundy nejednakost) *Za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p} \sim_p \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Dokaz. Za svaki izbor predznaka $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ iz teorema 6 slijedi

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_j (X_k - X_{k-1})\Big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}$$

pa uzimanjem p-tog momenta (na vjerojatnosnom prostoru gdje su konstruirane ϵ_j, a ne X_k) i korištenjem korolara 8 dobivamo

$$\|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}.$$

Za obratnu nejednakost uzmimo novu slučajnu varijablu Z takvu da je $Z_0 = 0$ i $\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}} < +\infty$, označimo $Z_k := \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_k)$ i napišimo

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(X_n Z)| &= \Big|\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})Z\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k - X_{k-1})Z\Big| \\
&= \Big|\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})(Z_k - Z_{k-1})\Big| \leqslant \mathbb{E}\big([X]_n^{1/2}[Z]_n^{1/2}\big) \leqslant \|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p}\|[Z]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^{p'}}.
\end{aligned}$$

Po prethodnom dijelu dokaza imamo

$$|\mathbb{E}(X_n Z)| \lesssim_p \|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p}\|Z\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Primijetimo da se pretpostavka $Z_0 = 0$ može i izostaviti jer je

$$\mathbb{E}(X_n Z) = \mathbb{E}(X_n(Z - Z_0))$$

pa obrat Hölderove nejednakosti daje

$$\|X_n\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \|[X]_n^{1/2}\|_{\mathrm{L}^p}.$$

□

Primjenom teorema 10 na posebni slučaj dijadske filtracije dobivaju se ocjene za tzv. *dijadsku kvadratnu funkciju*:

$$S_{\mathrm{dij}} f := \Big(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2\, |I|^{-1}\mathbb{1}_I\Big)^{1/2}.$$

Korolar 11. *Vrijedi*

$$\|S_{\mathrm{dij}} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \lesssim_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

Dokaz. Opet je radi teorema o monotonoj konvergenciji dovoljno promatrati samo sumiranje po dijadskim intervalima sadržanim u $[0,1\rangle$ i koji imaju duljinu strogo veću od 2^{-n} za neki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$. Ukoliko funkciji $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ pridružimo dijadski martingal $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ kao u primjeru 2, iz tamo izvedenog računa će slijediti

$$|X_{k+1} - X_k|^2 = \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ |I|=2^{-k}}} \big|\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}\big|^2 \, |I|^{-1}\mathbb{1}_I,$$

odnosno

$$[X]_n = \sum_{\substack{I\in\mathcal{D}\\ I\subseteq[0,1\rangle\\ 2^{-n+1}\leqslant|I|\leqslant 1}} \big|\langle f, \mathbb{h}_I\rangle_{\mathrm{L}^2([0,1\rangle)}\big|^2 \, |I|^{-1}\mathbb{1}_I$$

pa tvrdnja korolara slijedi iz teorema 10. □

* * *

Što se tiče g.s. konvergencije martingala, dat ćemo rezultat koji nije najopćenitiji mogući, ali je vrlo kvantitativan. Trik koji slijedi je prvi upotrijebio Lépingle [Lep76].

Neka je opet $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ definiramo svojevrsni *brojač skokova* $J_\varepsilon X$ kao slučajnu varijablu danu sa

$$\begin{aligned}(J_\varepsilon X)(\omega) := \sup\big\{k \in \mathbb{N}_0 : \ & \text{postoje } 0 \leqslant m_1 < n_1 \leqslant m_2 < n_2 \leqslant \ldots \leqslant m_k < n_k \\ & \text{t.d. je } |X_{n_i}(\omega) - X_{m_i}(\omega)| \geqslant \varepsilon \text{ za } i = 1,2,\ldots,k\big\}.\end{aligned}$$

Teorem 12. (Lépingleova nejednakost) *Za $1 < p < \infty$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\big\|(J_\varepsilon X)^{1/2}\big\|_{\mathrm{L}^p} \lesssim_p \varepsilon^{-1} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}. \tag{12}$$

Posljedično, ako je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ograničen u L^p normi, tada on konvergira g.s.

Dokaz. Translacijom možemo postići $X_0 = 0$, a radi teorema o monotonoj konvergenciji je dovoljno dokazati ocjenu samo za martingale za koje postoji indeks $N \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant N$ vrijedi $X_n = X_N$. Rekurzivno definirajmo niz vremena zaustavljanja $(S_i)_{i=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}&S_0(\omega) := 0,\\ &S_i(\omega) := \min\big\{n \in \mathbb{N}_0 \,:\, n > S_{i-1}(\omega),\ |X_n(\omega) - X_{S_{i-1}(\omega)}(\omega)| \geqslant \varepsilon/2\big\}; \quad i \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

uz konvenciju $\min\emptyset = \infty$. Za $\varepsilon > 0$ definirajmo i "pohlepni" brojač skokova

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{J}_\varepsilon X\big)(\omega) &:= \sup\big\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(\omega) < \infty\big\}\\ &= \text{broj konačnih članova niza } S_1(\omega) < S_2(\omega) < \cdots .\end{aligned}$$

Stavimo još $T_i := \min\{S_i, N\}$. Lako je vidjeti

$$J_\varepsilon X \ \leqslant\ \widetilde{J}_\varepsilon X$$

i

$$\big(\widetilde{J}_\varepsilon X\big)^{1/2} \ \leqslant\ (\varepsilon/2)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}|^2\Big)^{1/2}.$$

Posljednja suma je u stvarnosti konačna zbog naše pretpostavke na martingal. Iz zadatka 1 slijedi da je $(X_{T_n})_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_{T_n})_{n=0}^{\infty}$. Korištenjem Burkholder-Davis-Gundy nejednakosti (teorem 10) na taj novi martingal dobivamo

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |X_{T_i} - X_{T_{i-1}}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\mathrm{L}^p} \ \lesssim_p\ \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \|X_{T_i}\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant \|X_N\|_{\mathrm{L}^p},$$

odakle konačno slijedi (12). Napomenimo da smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili $T_i \leqslant N$, zadatak 1 i dio (b) leme 1.

Za dokaz druge tvrdnje primijetimo da konačnost od $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|X_n\|_{\mathrm{L}^p}$ garantira da za g.s. ω za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $(J_\varepsilon X)(\omega) < +\infty$. (Namjerno su zamijenjeni kvantifikatori!) Lako je vidjeti da to znači da je niz $(X_n(\omega))_{n=0}^{\infty}$ Cauchyjev pa konvergira. (Primijetimo da imamo čak svojevrsnu "kvantitativnu ocjenu na konvergenciju", koja nije baš "brzina konvergencije" nego je više nekakva "metastabilnost".) □

Teorem o g.s. konvergenciji martingala ostaje vrijediti i uz slabiju pretpostavku ograničenosti u L^1 normi; vidjeti knjigu [Dur10].

6 Zadaci (koji će biti uvršteni u DZ2)

Zadatak 1. Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ i neka su S i T dva ograničena vremena zaustavljanja takva da je $S \leqslant T$. Dokažite da vrijedi:

(a) $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$,

(b) $X_S, X_T \in \mathrm{L}^1$ i $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$,

(c) $\mathbb{E}X_S = \mathbb{E}X_T$ i $\mathbb{E}|X_S| \leqslant \mathbb{E}|X_T|$.

Zadatak 2. Neka je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^{\infty}$ dijadska filtracija iz primjera 2.

(a) Dokažite da je na sljedeći način opisana bijektivna korespondencija između ograničenih vremena zaustavljanja T obzirom na tu filtraciju i konačnih particija $\mathcal{I}$ od $[0,1\rangle$ na dijadske intervale.

Ako je $\mathcal{I}$ konačna dijadska particija od $[0,1\rangle$ tada je $T\colon [0,1\rangle \to \mathbb{N}_0$, $T(\omega) := \log_2(1/|I|)$ za jedinstveni $I \in \mathcal{I}$ koji sadrži ω, vrijeme zaustavljanja.

Obratno, ako je $T\colon [0,1\rangle \to \mathbb{N}_0$ ograničeno vrijeme zaustavljanja, tada se svaki skup $\{T = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ particionira u neku konačnu kolekciju $\mathcal{I}_n$ dijadskih intervala duljine 2^{-n} pa $\mathcal{I} = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ čini dijadsku particiju od $[0,1\rangle$.

(b) Pokažite da je u gornjem slučaju $\mathcal{D}_T$ upravo familija svih konačnih unija članova iz $\mathcal{I}$ te da za $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ vrijedi $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_T) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \big(\frac{1}{|I|}\int_I f\big)\mathbb{1}_I$.

(c) Neka su $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$, $f \geqslant 0$, $\alpha \in \langle 0,+\infty\rangle$ i $m \in \mathbb{N}_0$. Opišite particiju pridruženu vremenu zaustavljanja $T(\omega) := n$ za najmanji $n \in \{0,1,2,\ldots,m\}$ takav da je $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_n) > \alpha$ ako takav n postoji, $T(\omega) := m$ ako takav n ne postoji.

Zadatak 3. Izvedite teorem 6 iz teorema 10 ne mareći za konstantu; dakle obrnuto nego je učinjeno u tekstu.

Literatura

[Bur66] D. L. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.

[Bur84] D. L. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Probab. **12** (1984), 647–702.

[Bur85] D. L. Burkholder, *An elementary proof of an inequality of R. E. A. C. Paley*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985) 474–478.

[Bur87] D. L. Burkholder, *A Sharp and Strict* L^p*-Inequality for Stochastic Integrals*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 1, 268–273.

[Bur88a] D. L. Burkholder, *A proof of Pełczyński's conjecture for the Haar system*, Studia Math. **91** (1988), no. 1, 79–83.

[Bur88b] D. L. Burkholder, *Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals*, Colloque Paul Lévy (Palaiseau, 1987), Astérisque **157–158** (1988), 75–94.

[Dur10] R. Durett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[Lep76] D. Lépingle, *La variation d'ordre p des semi-martingales*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **36** (1976), no. 4, 295–316.

[Ose12] A. Osekowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences, Mathematical Monographs **72**, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.

[Pro04] P. E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[RY99] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[VV20] V. Vasyunin, A. Volberg, *The Bellman function technique in harmonic analysis*, Cambridge Stud. Adv. Math. **186**, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.