Metoda Bellmanovih funkcija u analizi i vjerojatnosti

Kolegij na doktorskom studiju, predavanje #20

# Bilinearno ulaganje za kompleksne eliptičke operatore

V. Kovač (PMF–MO)

Prema članku: A. Carbonaro, O. Dragičević, *Convexity of power functions and bilinear embedding for divergence-form operators with complex coefficients*, J. Eur. Math. Soc. **22** (2020), 3175–3221.

3. svibnja 2024.

# Kompleksni eliptički operatori

# Matrične funkcije s kompleksnim $\mathsf{L}^\infty$ koeficijentima

$A\colon \mathbb{R}^d \to \mathsf{M}_d(\mathbb{C})$ matrična funkcija

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,d} \end{bmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathsf{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$$

(Mi nećemo raditi na domenama $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.)

Kažemo da je $A$ *uniformno eliptička (akretivna)* ako vrijedi:

$$\Lambda(A) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} \max_{\substack{\zeta,\eta\in\mathbb{C}^d \\ |\zeta|=|\eta|=1}} \big|\langle A(x)\zeta, \eta\rangle_{\mathbb{C}^d}\big| < \infty,$$

$$\lambda(A) := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} \min_{\substack{\xi\in\mathbb{C}^d \\ |\xi|=1}} \operatorname{Re} \big\langle A(x)\xi, \xi\big\rangle_{\mathbb{C}^d} > 0.$$

# Eliptički operatori u divergencijskoj formi

*Eliptički operator u divergencijskoj formi* (kompleksni i ne-glatki) pridružen $A$ je formalno definiran:

$$L_A f := -\operatorname{div}(A\nabla f),$$

tj.

$$(L_A f)(x) := -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \big(a_{i,j}(x)\partial_j f(x)\big).$$

(Neki autori dodaju i članove s nultom i prvim derivacijama.)

Ovo je klasično smisleno samo ako su koeficijenti od $A$ glatki. Općenito je od interesa slučaj kada su oni samo izmjerivi.

Ako je $A$ baš konstantno jednaka $I$, onda je $L_I = -\operatorname{div}\nabla = -\Delta$.

## Eliptički operatori u divergencijskoj formi

Sasvim rigorozno, $L_A$ je definiran pomoću dualnosti:

$$\langle L_A f, g\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle_{\mathbb{C}^d}\, \mathrm{d}x$$

(formalno smo napravili parcijalnu integraciju) i domena $\mathcal{D}(L_A) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ mu je skup svih $f \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ za koje se antilinearni funkcional u varijabli $g \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ na desnoj strani neprekidno proširuje na cijeli $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Mi ćemo ionako raditi samo s $f, g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Gledat ćemo operatorsku polugrupu na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ generiranu s $-L_A$:

$$T_t^A := \exp(-tL_A).$$

# ELIPTIČKI OPERATORI U DIVERGENCIJSKOJ FORMI

Zašto je ovaj koncept važan/zanimljiv?

Za svaku $f \in \mathcal{D}(L_A)$ funkcija

$$u\colon [0,\infty\rangle \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},$$

$$u(t,x) := (T_t f)(x)$$

predstavlja klasično rješenje (generalne evolucijske) parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -L_A(x)u(t,x)$$

s početnim uvjetom

$$u(0,x) = f(x).$$

Npr. za $A \equiv I$ dobijemo jednadžbu provođenja (topline):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \Delta u(t,x).$$

## PRIMJER ZANIMLJIVOG PITANJA: KONTRAKTIVNOST

Uz koje uvjete na $A$ je polugrupa kontraktivna na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 < p < \infty$, tj.

$$\|T_t^A f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

za svaki $t \in [0, \infty\rangle$ i svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$?

Uz dodatni zahtjev da je $\operatorname{Im} A$ simetrična, Cialdea i Maz'ya (2005) pokazali su da je kontraktivnost na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ekvivalentna s

$$|p-2|\big|\langle \operatorname{Im} A(x)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}\big| \leqslant 2(p-1)^{1/2}\langle \operatorname{Re} A(x)\xi, \xi\rangle_{\mathbb{R}^d}$$

za g.s. $x \in \mathbb{R}^d$ i svaki $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Općenita karakterizacija je otvoren problem.

Carbonaro i Dragičević (2016) su pokazali: dovoljno je $\Delta_p(A) \geq 0$, a nužno je $\Delta_p\big(\frac{A+A^*}{2}\big) \geq 0$. (Definicija od $\Delta_p$ slijedi.)

# $p$-ELIPTIČNOST

Carbonaro i Dragičević (2016) definirali su da je $A$ $p$-*eliptička* za $p \in [1, \infty]$ ako, uz eliptičnost, još dodatno vrijedi:

$$\Delta_p(A) := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^d} \min_{\substack{\xi \in \mathbb{C}^d \\ |\xi|=1}} \mathrm{Re} \left\langle A(x)\xi,\ \xi + \left|1 - \frac{2}{p}\right| \bar{\xi} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} > 0.$$

Za $2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$ vrijedi

$$\lambda(A) = \Delta_2(A) \geqslant \Delta_{p_1}(A) \geqslant \Delta_{p_2}(A)$$

i imamo inkluzije

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{2-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} p_1\text{-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} p_2\text{-eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\}$$

$$\supseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{matrice koje su } p\text{-eliptičke} \\ \text{za svaki } 1 < p < \infty \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{realne eliptičke} \\ \text{matrice} \end{array} \right\}.$$

# Bilinearno ulaganje i dokaz

# Bilinearno ulaganje za eliptičke operatore

U daljnjem pretpostavljamo da su $A, B \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ eliptičke matrične funkcije s $\mathrm{L}^\infty$ koeficijentima.

**Teorem** [Carbonaro i Dragičević (2016)]. Ako su $A, B \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ $p$-eliptičke, tada vrijedi ocjena

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla T_t^A f)(x)|\,|(\nabla T_t^B g)(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant 20\, C_p(A,B)\, \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}\,.$$

Pritom je

$$C_p(A,B) := \frac{\max\{\Lambda(A), \Lambda(B)\}}{\min\{\Delta_p(A), \Delta_p(B)\} \min\{\lambda(A), \lambda(B)\}}\,.$$

# Generalizirani Hessijan

Definiramo *generalizirani Hessijan* funkcije $\mathfrak{X}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ obzirom na matrice $A, B \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, u oznaci

$$H^{A,B}_{\mathfrak{X}}[(u,v);(\zeta,\eta)],$$

kao skalarni produkt vektora

$$\left(\mathrm{Hess}(\mathfrak{X};(u,v)) \otimes I_d\right)\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,\zeta\\ \mathrm{Im}\,\zeta\\ \mathrm{Re}\,\eta\\ \mathrm{Im}\,\eta\end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^4$$

i

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,A & -\mathrm{Im}\,A & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathrm{Im}\,A & \mathrm{Re}\,A & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{Re}\,B & -\mathrm{Im}\,B\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{Im}\,B & \mathrm{Re}\,B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,\zeta\\ \mathrm{Im}\,\zeta\\ \mathrm{Re}\,\eta\\ \mathrm{Im}\,\eta\end{bmatrix} \in (\mathbb{R}^d)^4.$$

## Skica dokaza

Neka je $p \geq 2$, $1/p + 1/q = 1$.
Neka je $\mathfrak{X} \colon \mathbb{C}^2 \to [0,\infty)$ zasad nepoznata funkcija.
Za $R > 0$ označimo $\psi_R(x) := \psi(x/R)$ i definirajmo

$$\mathcal{E}_R(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \mathfrak{X}\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big)\, \mathrm{d}x.$$

S jedne strane:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_R(0) - \mathcal{E}_R(\tau) \leqslant \mathcal{E}_R(0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \mathfrak{X}\big(f(x), g(x)\big)\, \mathrm{d}x \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \big(|f(x)|^p + |g(x)|^q\big)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

S druge strane:

$$-\int_0^\tau \mathcal{E}_R'(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{X}\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t.$$

# Skica dokaza

Nastavak:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \mathcal{E}_R'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, H_{\mathfrak{X}}^{A(x),B(x)}\big[\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big); \big((\nabla T_t^A f)(x), (\nabla T_t^B g)(x)\big)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mathcal{R}_{R,\tau} \\
&\gtrsim_{A,B,\Phi,\Psi} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)\, \big|(\nabla T_t^A f)(x)\big|\, \big|(\nabla T_t^B g)(x)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \mathcal{R}_{R,\tau},
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{R,\tau} = 2\,\mathrm{Re} \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \Big( &(\partial_{\bar{u}} \mathfrak{X})\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big) \big\langle (\nabla \psi_R)(x), A(x)(\nabla T_t^A f)(x) \big\rangle_{\mathbb{C}^d} \\
&+ (\partial_{\bar{v}} \mathfrak{X})\big((T_t^A f)(x), (T_t^B g)(x)\big) \big\langle (\nabla \psi_R)(x), B(x)(\nabla T_t^B g)(x) \big\rangle_{\mathbb{C}^d} \Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Želimo

$$
\lim_{R\to\infty} \mathcal{R}_{R,\tau} = 0.
$$

## Skica dokaza

Imamo

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) \left|(\nabla T_t^A f)(x)\right| \left|(\nabla T_t^B g)(x)\right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \mathcal{R}_{R,\tau}$$
$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x) \left(|f(x)|^p + |g(x)|^q\right) \mathrm{d}x.$$

Puštanjem $R \to \infty$ dobivamo

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} \left|(\nabla T_t^A f)(x)\right| \left|(\nabla T_t^B g)(x)\right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q \, \mathrm{d}x.$$

Konačno, puštanjem $\tau \to \infty$ pa "homogenizacijom"

$$f \to \alpha f, \quad g \to g/\alpha$$

slijedi

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left|(\nabla T_t^A f)(x)\right| \left|(\nabla T_t^B g)(x)\right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

# SVOJSTVA TRAŽENE BELLMANOVE FUNKCIJE

Dokaz je “gotov” ako postoji funkcija $\mathfrak{X}\colon \mathbb{C}^2 \to [0,\infty\rangle$ sa sljedećim svojstvima (tzv. *Bellmanova funkcija* za taj dokaz):

- $\mathfrak{X}$ je klase $\mathrm{C}^1$ na $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ i “po dijelovima” klase $\mathrm{C}^2$ s lokalno integrabilnim drugim parcijalnim derivacijama;
- $\mathfrak{X}(u,v) \lesssim |u|^p + |v|^q$;
- $H_{\mathfrak{X}}^{A(x),B(x)}[(u,v);(\zeta,\eta)] \gtrsim |\zeta||\eta|$;
- $|\partial_{\bar{u}}\mathfrak{X}(u,v)| \lesssim \max\{|u|^{p-1},|v|\}$,
  $|\partial_{\bar{v}}\mathfrak{X}(u,v)| \lesssim |v|^{q-1}$,
  pri čemu je $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$.

# POSTOJANJE TRAŽENE BELLMANOVE FUNKCIJE

Bellmanova funkcija Nazarova i Treila je upravo jedna takva funkcija

$$\mathfrak{X}(u,v) := \mathcal{B}(|u|,|v|)$$

$$\mathcal{B}(u,v) := u^p + v^q + \delta \begin{cases} \frac{2}{p}u^p + \left(\frac{2}{q} - 1\right)v^q & \text{za } u^p \geq v^q, \\ u^2 v^{2-q} & \text{za } u^p \leq v^q, \end{cases}$$

za pogodni $\delta > 0$.