# METODA BELLMANOVIH FUNKCIJA — DOMAĆA ZADAĆA #3

**Priredio:** Vjekoslav Kovač <vjekovac@math.hr>
**Datum:** 29. 5. 2024.
**Rok:** Nema ga.

## Upute

Odaberite <u>3 zadatka</u> između dolje zadanih 6 zadataka. Samo ta 3 zadatka će vam biti bodovani. Napišite rješenja vlastitim riječima, rukom ili tipkanjem, te ih pošaljite na gornju email adresu, po mogućnosti kao jednu PDF datoteku. Riješene domaće zadaće nužne su za prolaznu ocjenu iz ovog kolegija.

Prilikom rješavanja smijete koristiti bilo koje materijale koje nađete (pa i hintove iz osnovne literature), ali rješenja trebaju biti potpuna, tj. ne smiju bez dokaza koristiti neke napredne rezultate koji nisu bili dokazani na predavanjima ili negdje drugdje na preddiplomskom/diplomskom/doktorskom studiju. Nije nužno zadatak riješiti metodom Bellmanovih funkcija. Nadalje, nije dozvoljeno plagiranje, tj. doslovno kopiranje teksta iz literature. Smijete međusobno diskutirati, to se čak potiče, ali svatko mora svojim riječima napisati rješenja.

## Zadaci

*Zadatak 1.* Dokažite da je operatorska polugrupa uniformno neprekidna ako i samo ako joj je generator ograničeni operator.

* * *

*Zadatak 2.* Ako je

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$

dokažite da je funkcija $f$ (na nekoj otvorenoj domeni) holomorfna ako i samo ako zadovoljava jednadžbu $\overline{\partial} f = 0$.

* * *

*Zadatak 3.* Neka je $T$ *Ahlfors–Beurlingov operator* definiran s

$$(Tf)(z) := -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}A(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|\zeta-z|\geq\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}A(\zeta)$$

za $z \in \mathbb{C}$ i za $f \in \mathrm{C}_c^1(\mathbb{C})$. Dokažite da je on izometrija na $\mathrm{L}^2(\mathbb{C})$, tj.

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{C})}.$$

* * *

*Zadatak 4.* Dokažite da Bellmanova funkcija Nazarova i Treila doista zadovoljava sva svojstva koja su se tvrdila i koristila na predavanju 20 (vidjeti slide-ove).

* * *

*Zadatak 5.* Dokažite da je *Luksemburška norma* iz predavanja 21 (vidjeti slide-ove) doista polunorma na prostoru izmjerivih funkcija na kojima je konačna.

* * *

*Zadatak 6.* Što je infinitezimalni generator operatorske (polu)grupe $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ na Banachovom prostoru $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, zadane s

$$(\widehat{T_t f})(\xi) = e^{i\xi_1/|\xi|}\widehat{f}(\xi)$$

za $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$? Je li ta polugrupa uniformno neprekidna?