METODA BELLMANOVIH FUNKCIJA — DOMAĆA ZADAĆA #2

Priredio: Vjekoslav Kovač <vjekovac@math.hr>
Datum: 14. 3. 2024.
Rok: Nema ga.

Upute

Odaberite <u>4 zadatka</u> između dolje zadanih 8 zadataka. Samo ta 4 zadatka će vam biti bodovani. Napišite rješenja vlastitim riječima, rukom ili tipkanjem, te ih pošaljite na gornju email adresu, po mogućnosti kao jednu PDF datoteku. Riješene domaće zadaće nužne su za prolaznu ocjenu iz ovog kolegija.

Prilikom rješavanja smijete koristiti bilo koje materijale koje nađete (pa i hintove iz osnovne literature), ali rješenja trebaju biti potpuna, tj. ne smiju bez dokaza koristiti neke napredne rezultate koji nisu bili dokazani na predavanjima ili negdje drugdje na preddiplomskom/diplomskom/doktorskom studiju. Nije nužno zadatak riješiti metodom Bellmanovih funkcija. Nadalje, nije dozvoljeno plagiranje, tj. doslovno kopiranje teksta iz literature. Smijete međusobno diskutirati, to se čak potiče, ali svatko mora svojim riječima napisati rješenja.

Zadaci

Zadaci iz zabilješke uz predavanja #8 i #9:

Zadatak 1. Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ i neka su S i T dva ograničena vremena zaustavljanja takva da je $S \le T$. Dokažite da vrijedi:

(a) $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$,
(b) $X_S, X_T \in \mathrm{L}^1$ i $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S$,
(c) $\mathbb{E}X_S = \mathbb{E}X_T$ i $\mathbb{E}|X_S| \le \mathbb{E}|X_T|$.

* * *

Zadatak 2. Neka je $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^{\infty}$ dijadska filtracija:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n &:= \sigma\big(\{I \in \mathcal{D} : I \subseteq [0,1\rangle,\ |I| = 2^{-n}\}\big) \\ &= \text{konačne unije intervala } [2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)\rangle;\ k = 0,1,2,\ldots,2^n-1.\end{aligned}$$

(a) Dokažite da je na sljedeći način opisana bijektivna korespondencija između ograničenih vremena zaustavljanja T obzirom na tu filtraciju i konačnih particija $\mathcal{I}$ od $[0,1\rangle$ na dijadske intervale.
   Ako je $\mathcal{I}$ konačna dijadska particija od $[0,1\rangle$ tada je $T\colon [0,1\rangle \to \mathbb{N}_0$, $T(\omega) := \log_2(1/|I|)$ za jedinstveni $I \in \mathcal{I}$ koji sadrži ω, vrijeme zaustavljanja.
   Obratno, ako je $T\colon [0,1\rangle \to \mathbb{N}_0$ ograničeno vrijeme zaustavljanja, tada se svaki skup $\{T = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ particionira u neku konačnu kolekciju $\mathcal{I}_n$ dijadskih intervala duljine 2^{-n} pa $\mathcal{I} = \bigcup_n \mathcal{I}_n$ čini dijadsku particiju od $[0,1\rangle$.
(b) Pokažite da je u gornjem slučaju $\mathcal{D}_T$ upravo familija svih konačnih unija članova iz $\mathcal{I}$ te da za $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$ vrijedi $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_T) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \big(\frac{1}{|I|}\int_I f\big)\mathbb{1}_I$.
(c) Neka su $f \in \mathrm{L}^1([0,1\rangle)$, $f \ge 0$, $\alpha \in \langle 0,+\infty\rangle$ i $m \in \mathbb{N}_0$. Opišite particiju pridruženu vremenu zaustavljanja $T(\omega) := n$ za najmanji $n \in \{0,1,2,\ldots,m\}$ takav da je $\mathbb{E}(f|\mathcal{D}_n) > \alpha$ ako takav n postoji, $T(\omega) := m$ ako takav n ne postoji.

* * *

Zadatak 3. Izvedite *Burkholderovu nejednakost* (teorem 6 s predavanja #8) iz *Burkholder–Davis–Gundyjeve nejednakosti* (teorem 10 s predavanja #9) ne mareći za konstantu; dakle obrnuto nego je bilo učinjeno na predavanjima.

* * *

Ostali zadaci:

Zadatak 4. Neka M označava dijadsku maksimalnu funkciju s početka odjeljka 1.6. Jednom kada je dokazan teorem 1.6.11, pažljivo argumentirajte da je najmanja moguća konstanta C_p u ocjeni

$$\|Mw\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|w\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ jednaka baš $C_p = \frac{p}{p-1}$.
(Problem 1.6.2 iz knjige V–V.)

* * *

Zadatak 5. (*Vrlo općenita varijanta maksimalne funkcije*) Neka je $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ funkcija koja ima monotonu i radijalnu L^1 majorantu, tj. postoji padajuća funkcija $\theta\colon [0,+\infty\rangle \to [0,+\infty]$ takva da je

$$|\varphi(x)| \leq \theta(|x|) \ \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^d \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \theta(|x|)dx < +\infty.$$

Tada maksimalna funkcija

$$(M_\varphi f)(x) := \sup_{r\in\langle 0,+\infty\rangle} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \frac{1}{r^d} \varphi\Big(\frac{1}{r}y\Big)\, dy \Big|$$

zadovoljava ocjene

$$\|M_\varphi f\|_{\mathrm{L}^1_{\text{slabi}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{d,\varphi} \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{i} \quad \|M_\varphi f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_{d,p,\varphi} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

za $p \in \langle 1, \infty]$.
Uputa: Umjesto da koristite Bellmanovu metodu, radije nejednakosti svedite na poznate ocjene za Hardy–Littlewoodovu maksimalnu funkciju, koja je (do na konstantu) posebni slučaj od M_φ kada je φ karakteristična funkcija standardne jedinične kugle u $\mathbb{R}^d$.

* * *

Zadatak 6.

(a) Dokažite da "parabolična" maksimalna funkcija

$$(M_{\text{par}} f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r} \Big| \int_0^r f(x+t^2)dt \Big|$$

zadovoljava ocjenu

$$\|M_{\text{par}} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za $p \in \langle 1, \infty]$.

Uputa: Zamjenom varijabli i dijadskim "razbijanjem" intervala integracije svedite traženu nejednakost na ocjene za H–L maksimalnu funkciju.

Napomena: Ovo je jedan od objekata koji su mnogo lakši u neprekidnom parametru ($\int_0^r \cdots dt$), nego u diskretnom parametru ($\sum_{t=0}^r$), jer zamjena varijabli čini čuda.

(b) Dokažite da bilinearna maksimalna funkcija

$$M_{\mathrm{bilin}}(f,g)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r}\Big|\int_{-r}^{r} f(x-t)g(x+t)dt\Big|$$

zadovoljava ocjenu

$$\|M_{\mathrm{bilin}}(f,g)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \le C_{p,p_1,p_2}\|f\|_{\mathrm{L}^{p_1}(\mathbb{R})}\|g\|_{\mathrm{L}^{p_2}(\mathbb{R})}$$

za $p, p_1, p_2 \in \langle 1, \infty]$ takve da je $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$.

Uputa: Opet nekako svedite na H–L maksimalnu funkciju.

Napomena: Poznato je da ocjena ostaje vrijediti i kada je $p \in \langle 2/3, 1]$, ali je tada dokaz mnogo složeniji i zahtijeva sofisticiranije tehnike (valne pakete i vremensko-frekvencijsku analizu). Posebni slučaj $p = 1$ je zapravo dugo godina bio otvoreni problem kojeg je bio postavio A. Calderón, a riješio M. Lacey.

* * *

Zadatak 7. Problem 1.7.2 iz knjige V–V.

* * *

Zadatak 8. Problem 1.7.3 iz knjige V–V.