

METODA BELLMANOVIH FUNKCIJA — DOMAĆA ZADAĆA #1

Priredio: Vjekoslav Kovač <vjekovac@math.hr>

Datum: 26. 12. 2023.

Rok: Nema ga.

UPUTE

Odaberite 3 zadatka između dolje zadanih 6 zadataka. Samo ta 3 zadatka će vam biti bodovani. Napišite rješenja vlastitim riječima, rukom ili tipkanjem, te ih pošaljite na gornju email adresu, po mogućnosti kao jednu PDF datoteku. Riješene domaće zadaće nužne su za prolaznu ocjenu iz ovog kolegija.

Prilikom rješavanja smijete koristiti bilo koje materijale koje nađete (pa i hintove iz osnovne literature), ali rješenja trebaju biti potpuna, tj. ne smiju bez dokaza koristiti neke napredne rezultate koji nisu bili dokazani na predavanjima ili negdje drugdje na preddiplomskom/diplomskom/doktorskom studiju. Nije nužno zadatak riješiti metodom Bellmanovih funkcija. Nadalje, nije dozvoljeno plagiranje, tj. doslovno kopiranje teksta iz literature. Smijete međusobno diskutirati, to se čak potiče, ali svatko mora svojim riječima napisati rješenja.

ZADACI

Zadatak 1. Dokažite da vrijedi ocjena

$$\sum_{J \in \mathcal{D}} |J| \left| \langle f \rangle_{J_{\text{lijevi}}} - \langle f \rangle_{J_{\text{desni}}} \right|^{10} \leq C \|f\|_{10}^{10}$$

za neku konačnu konstantu C .

* * *

Zadatak 2. Dokažite da dijadski paraprodukt

$$\Lambda(f, g, h) := \sum_{J \in \mathcal{D}} |J| \langle f \rangle_J \left(\langle g \rangle_{J_{\text{lijevi}}} - \langle g \rangle_{J_{\text{desni}}} \right) \left(\langle h \rangle_{J_{\text{lijevi}}} - \langle h \rangle_{J_{\text{desni}}} \right)$$

zadovoljava i ocjenu

$$|\Lambda(f, g, h)| \leq C \|f\|_2 \|g\|_4 \|h\|_4$$

za neku konačnu konstantu C .

* * *

Zadatak 3. Izračunajte

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) := \sup \left\{ \langle f_1 f_2 \rangle_I : -1 \leq f_1 \leq 1, -1 \leq f_2 \leq 1, \langle f_1 \rangle_I = x_1, \langle f_2 \rangle_I = x_2 \right\}.$$

(Problem 1.1.1 iz knjige V–V.)

* * *

Zadatak 4. Izračunajte

$$\mathbf{B}^{\min}(x_1, x_2) := \inf \left\{ \langle f_1 f_2 \rangle_I : 0 \leq f_1 \leq 1, 0 \leq f_2 \leq 1, \langle f_1 \rangle_I = x_1, \langle f_2 \rangle_I = x_2 \right\}.$$

(Problem 1.1.2 iz knjige V–V.)

* * *

Zadatak 5. Izračunajte

$$\mathbf{B}(x_1, x_2; m, M) := \sup_{u, v} \frac{1}{|I|} \sum_{J \in \mathcal{D}(I)} |\langle u, h_J \rangle| |\langle v, h_J \rangle|,$$

gdje se supremum uzima po svim nenegativnim izmjerivim funkcijama u, v takvima da vrijedi

$$\langle u \rangle_I = x_1, \quad \langle v \rangle_I = x_2, \quad m \leq \sqrt{\langle u \rangle_J \langle v \rangle_J} \leq M \text{ za svaki } J \in \mathcal{D}(I).$$

(Problem 1.2.3 iz knjige V–V.)

* * *

Zadatak 6. Izračunajte

$$\mathbf{B}_{\min}(x_1, x_2; \varepsilon) := \inf_{\varphi \in \text{BMO}_\varepsilon(I)} \{ \langle e^\varphi \rangle_I : \langle \varphi \rangle_I = x_1, \langle \varphi^2 \rangle_I = x_2 \}.$$

(Problem 1.3.5 iz knjige V–V.)