

- a. Dokažite da je znamenka jedinica broja 2^{2^n} jednaka 6, za svaki prirodan broj n veći ili jednak 2.

- b. Dokažite da je za svaki prirodan broj n , broj $3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4$ djeljiv s 9.

- c. Dokažite da je produkt proizvoljnog broja faktorā od kojih svaki daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 6, ponovo broj koji daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 6.
Uputa: indukcijom po broju faktorā.

d. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$5 \mid 3 \cdot 6^n + 11^{n+1} + 1 \quad .$$

e. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$6 \mid 2 \cdot 7^n + 2 \cdot 13^{n+1} + 2 \quad .$$

f. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$7 \mid 5 \cdot 8^n + 22^{n+1} + 1 \quad .$$

g. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$8 \mid 4 \cdot 9^n + 2 \cdot 25^{n+1} + 2 \quad .$$

h. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$9 \mid 34 \cdot 10^n - 28^{n+1} + 3 \quad .$$

i. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$10 \mid 9 \cdot 21^n - 2 \cdot 31^{n+1} + 3 \quad .$$

j. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$12 \mid 4 \cdot 25^n + 49^{n+1} + 7 \quad .$$

n. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/4^n > 3n/4 \quad .$$

o. Za koje sve prirodne brojeve vrijedi

$$3^n < 2^n + 3n \quad ?$$

Uputa: Za prvih nekoliko brojeva provjerite direktno. Za ostale provjerite indukcijom.

p. Dokažite da vrijedi

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + \dots + 2006 \cdot 2^{2005} = 2005 \cdot 2^{2006} + 1$$

q. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\dots\sqrt{3\dots}}} > 2 \quad ,$$

pri čemu se na lijevoj strani nalaze bar dva znaka korijena.

r. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

(uputa: prvo izračunajte desnu stranu, kako je napravljeno na vježbama).

s. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2 - (1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \dots + n/2^n) = (n+2)/2^n \quad .$$

t. Izračunajte općenito vrijednost

$$1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 5) + \dots + 1/(n \cdot (n+1))$$

za prirodne n .

(Uputa: Izračunajte prvih nekoliko vrijednosti, iz toga naslutite opću formulu, i dokažite je indukcijom.)

u. Izračunajte općenito vrijednost razlomka

$$\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}$$

za prirodne n .

(Uputa: Izračunajte prvih nekoliko vrijednosti, iz toga naslutite opću formulu, i dokažite je indukcijom.)

v. Dokažite da za svaki prirodni n , broj

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{4n}$$

završava s dvije nule.

w. Za koje sve prirodne brojeve vrijedi

$$n^3 > n^2 + 3n + 9 \quad ?$$

Uputa: Za prvih nekoliko brojeva provjerite direktno. Za ostale provjerite indukcijom.