K O M P U T R I V I J

Izračunljivost

[zbirka zadataka]

Vedran Čačić

20. studenoga 2023.

$$\left[\begin{array}{rl} 0. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1,\ 0 \\ 1. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1,\ 19 \\ 2. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 4. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1,\ 16 \\ 5. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1,\ 7 \\ 6. & \textsc{go to}\ 3 \\ 7. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_3 \\ 8. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2,\ 11 \\ 9. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_3 \\ 10. & \textsc{go to}\ 7 \\ 11. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 12. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_3,\ 0 \\ 13. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 14. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 15. & \textsc{go to}\ 11 \\ 16. & \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2,\ 0 \\ 17. & \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 18. & \textsc{go to}\ 16 \end{array}\right]$$

Sadržaj

I. Obrađene cjeline 5

A. Strojevi s registrima 6
A.1. RAM-izračunljivost jednostavnih funkcija . . . 6
A.2. RAM-izračunljivost relacija . . . 6
A.3. RAM-izračunljivost restrikcijâ . . . 6
A.4. Makro-izračunljivost . . . 7
A.5. LOOP-izračunljivost . . . 8
A.6. Varijante RAM-strojeva . . . 9

B. Funkcijsko programiranje 10
B.1. Primitivno rekurzivne funkcije . . . 10
B.2. Primitivno rekurzivne relacije . . . 11
B.3. Rekurzivne funkcije . . . 12
B.4. Parcijalno rekurzivne funkcije . . . 13

C. Kodiranja 15
C.1. Dekodiranje RAM-programa . . . 15
C.2. Ostali zadaci s indeksima . . . 15
C.3. Kodiranje logike . . . 16
C.4. Ostali zadaci s kodiranjem . . . 17

D. Turing-izračunljivost 18
D.1. Teorijski zadaci . . . 18
D.2. Turingovi odlučitelji . . . 18
D.3. Jezične i prateće funkcije . . . 18
D.4. Turingovi strojevi za jezično zadane funkcije . . . 19
D.5. Turingovi strojevi za brojevno zadane funkcije . . . 19
D.6. Binarna i dekadska aritmetika . . . 19

E. Primjena teorema rekurzije i srodnih teorema 20
E.1. Opće rekurzije i rekurzivni sustavi . . . 20
E.2. Primjena teorema o parametru . . . 21
E.3. Samoreferirajuće funkcije . . . 22
E.4. Primjena teorema o fiksnoj točki . . . 23

F. Primjena Riceova teorema 24
F.1. Skupovi indeksa . . . 24

F.2. Skupovi kodova . . . 24
F.3. Višemjesne relacije . . . 25
F.4. Ostali zadaci . . . 26

G. Rekurzivno prebrojivi skupovi **27**
G.1. Neizračunljive funkcije . . . 27
G.2. Domene, slike i grafovi . . . 28
G.3. Ostali zadaci . . . 29

II. Neobrađene cjeline **31**

H. Realni brojevi **32**
H.1. Decimalni zapisi . . . 32
H.2. Invertirano potenciranje . . . 33
H.3. Kardinalni argument . . . 34

I. Aritmetička hijerarhija **35**

III. Kolokviji **36**

J. Teorija za prvi kolokvij **37**
J.1. Definicije i iskazi . . . 37
J.2. Dokazi . . . 38
J.3. Pitalice i primjeri . . . 39

K. Teorija za drugi kolokvij **41**
K.1. Definicije i iskazi . . . 41
K.2. Dokazi . . . 41
K.3. Pitalice i primjeri . . . 42

L. Primjeri prvog kolokvija **44**
L.1. (2018./19.) . . . 44
L.2. (2019./20.) . . . 44
L.3. (2020./21.) . . . 45
L.4. (2021./22.) . . . 46
L.5. (2022./23.) . . . 46

M. Primjeri drugog kolokvija **47**
M.1. (2018./19.) . . . 47
M.2. (2019./20.) . . . 47
M.3. (2020./21.) . . . 48
M.4. (2021./22.) . . . 49
M.5. (2022./23.) . . . 49

N. Primjeri popravnog kolokvija **50**
N.1. (2018./19.) 50
N.2. (2019./20.) 51
N.3. (2020./21.) 51
N.4. (2021./22.) 52
N.5. (2022./23.) 52

IV. Funkcijski API **54**

O. Funkcijski API [!Nedovršeno!] **55**
O.1. Osnovne funkcije i operatori 55
O.2. Složenije funkcije i operatori 60
O.3. Kodiranja 65
O.4. Interpreter za RAM-stroj 70
O.5. Turing-izračunljivost 76

V. Rješenja **81**

Dio I.

Obrađene cjeline

A. Strojevi s registrima

A.1. RAM-izračunljivost jednostavnih funkcija

A.1.1. Napišite RAM-program koji računa funkciju zadanu sa

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ paran} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}. \blacktriangle$$

A.1.2. Napišite RAM-programe koji računaju funkcije:
a) $\min^2$, b) $Z|_{\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}}$. ▲

A.1.3. Napišite program za RAM-stroj koji računa dvomjesnu funkciju max. ▲

A.1.4. Napišite RAM-program koji računa funkciju zadanu s $f(x,y) := \left\lceil \frac{y \cdot \operatorname{sgn} x}{3} \right\rceil$. ▲

A.1.5. Napišite RAM-program koji računa funkciju zadanu s $f(x) :=$ zbroj bitova u binarnom zapisu broja x. (Primjerice, $f(19) = f\big((10011)_2\big) = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$.) ▲

A.1.6. Napišite RAM-program koji računa funkciju $f(x) := x \bmod 3$. ▲

A.1.7. Neka je $f(n) :\simeq \begin{cases} 0, & n = 1 \\ n, & n > 2 \end{cases}$. Napišite RAM-program koji računa f. ▲

A.2. RAM-izračunljivost relacija

A.2.1. Napišite RAM-program koji pokazuje da je relacija $(=)$ RAM-izračunljiva. ▲

A.2.2. Dokažite da je skup (a) parnih, (b) neparnih brojeva RAM-izračunljiv. ▲

A.2.3. Dokažite pisanjem programa da je graf funkcije mul^2 RAM-izračunljiv. ▲

A.2.4. Dokažite (pisanjem programa) da su relacije $(<)$ i $(>)$ RAM-izračunljive. ▲

A.3. RAM-izračunljivost restrikcijâ

A.3.1. Neka je $S := \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 < x < y\}$. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju $f : S \to \mathbb{N}$ zadanu sa $f(x,y) := x - 1$. ▲

A.3.2. Neka je $S := \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y = 2\}$. Napišite program za RAM-stroj koji računa restrikciju konstante 1 na skup S. ▲

A.3.3. Napišite program za RAM-stroj koji računa restrikciju funkcije add^2 na Kartezijev produkt skupa svih parnih i skupa svih neparnih prirodnih brojeva.

A.3.4. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju $f : S \to \mathbb{N}$, zadanu pravilom $f(x,y) := \max\{x,y\} - \min\{x,y\}$, gdje je $S := \{(x+y, x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{N}^2 \wedge x \geq y\}$. ▲

A.3.5. Napišite RAM-programe koji računaju sljedeće restrikcije inicijalnih funkcija:
a) $Z|_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, b) $I_1^1|_{2\mathbb{N}}$. ▲

A.3.6. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju

a) $f : \{0,1,2,3,4\} \to \mathbb{N}$, $f(x) := x+2$,

b) $f : \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x+y=5\} \to \mathbb{N}$, $f(x,y) := y$

c) $f : \mathbb{N}^2 \times \{1\} \to \mathbb{N}$, $f(x,y,z) := x+y$

A.3.7. Označimo s R^2 relaciju „biti različit" na prirodnim brojevima.
Napišite RAM-program koji računa (a) konstantu 1, (b) funkciju min, restringiranu na R.

A.3.8. Napišite RAM-program koji računa restrikciju funkcije I_1^2 na (a) $\mathcal{G}_{S_c}$, (b) $\{(1,2)\}^c$. ▲

A.3.9. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju definiranu formulom

$$f(x,1,y) := x.$$

A.3.10. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju definiranu formulom

$$f(n,n) := n.$$

A.3.11. Napišite RAM-program koji računa restrikciju identitete na skup:
(a) $\{0,2,4\}$, (b) $\{1,2,3\}$, (c) svih neparnih prirodnih brojeva.

A.3.12. Napišite RAM-program koji računa funkciju definiranu formulom

$$f(n,2) := n+1.$$

A.3.13. Napišite RAM-program koji računa funkciju definiranu formulom

$$f(i,i+2) := i+1. \ ▲$$

A.4. Makro-izračunljivost

A.4.1. Napišite program za makro-stroj koji računa funkciju $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ zadanu sa

$$f(x,y,z) := \max\{x+y, x+z, y+z\}. \ ▲$$

A.4.2. Napišite program za makro-stroj koji računa funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zadanu s

$$f(x,y) := \min\{x+y, xy, x^y\}.$$

A.4.3. Napišite program za makro-stroj koji računa funkciju zadanu s

$$f(x,y) :\simeq \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor .$$

A.4.4. Neka je S skup svih prirodnih brojeva djeljivih s 3, te $f : S \to \mathbb{N}$, $f(x) := 2x + 1$. Napišite makro-program koji računa funkciju f.

A.4.5. Napišite program za makro-stroj koji računa restrikciju funkcije kvadriranja na skup prirodnih brojeva kongruentnih 2 modulo 3. ▲

A.4.6. Neka je P_H RAM-program koji računa funkciju H^2. Napišite makro-program koji računa funkciju $3 \mathbin{\text{ꝸ}} H$. ▲

A.4.7. Neka su f^5, g^5 i h^5 RAM-izračunljive funkcije.
Napišite makro-program koji računa njihov zbroj.

A.4.8. Napišite program za makro-stroj koji računa funkciju $f(x,y)$ čija vrijednost je $\log_y x$ ako je to dobro definiran prirodni broj, a $x + y$ inače. ▲

A.4.9. Napišite program za makro-stroj koji računa funkciju koja x preslikava u $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$. ▲

A.4.10. Koliko instrukcija ima spljoštenje makro-programa

$$\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{mmove}\ 7\ \textsc{from}\ \mathcal{R}_1..\ \textsc{to}\ \mathcal{R}_9.. \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_3, 1 \\ 2.\ \textsc{zero}\ \mathcal{R}_8 \end{bmatrix} ?\ ▲$$

A.5. LOOP-izračunljivost

A.5.1. Napišite (a) RAM-program, (b) makro-program, (c) LOOP-program koji računa funkciju blh (duljinu zapisa broja u pomaknutoj bazi 2).
(Primjerice, $\mathrm{blh}(51) = \mathrm{blh}\big((21211)_2\big) = 5$, $\mathrm{blh}(2) = 1$, $\mathrm{blh}(0) = 0$.)

A.5.2. Pisanjem programa dokažite da je skup prim-brojeva $\mathbb{P}$ primitivno rekurzivan. ▲

A.5.3. Neka je funkcija zn^3 zadana sa

$$zn(n,i,b) := \begin{cases} \text{znamenka na } i\text{-toj poziciji u zapisu broja } n \text{ u bazi } b, & b \geq 2 \\ n & \text{inače} \end{cases}$$

(pozicije znamenaka brojimo zdesna nalijevo počevši od 0, npr. $zn(123456, 2, 10) = 4$). Dokažite pisanjem programa da je zn primitivno rekurzivna funkcija.

A.5.4. Neka je funkcija zz^2 zadana sa

$$zz(n,b) := \begin{cases} \text{zbroj znamenaka broja } n \text{ u bazi } b, & b \geq 2 \\ n, & b = 1 \\ 0, & b = 0 \end{cases} .$$

Dokažite pisanjem programa da je zz primitivno rekurzivna funkcija.

A.5.5. Dokažite pisanjem programa da je svojstvo prirodnih brojeva „imati točno 3 prim-djelitelja" primitivno rekurzivno.

A.5.6. Dokažite da je svaka inicijalna funkcija LOOP-izračunljiva.

A.5.7. Dokažite pisanjem programa da je enumeracija prim-brojeva (rastući niz kojem je slika $\mathbb{P}$) primitivno rekurzivna.

A.5.8. Dokažite da je funkcija pow LOOP-izračunljiva.

A.5.9. Dokažite (pisanjem odgovarajućeg programa) da postoji RAM-izračunljiva funkcija koja nije LOOP-izračunljiva. ▲

A.6. Varijante RAM-strojeva

A.6.1. *RAMv2*-stroj definiramo kao i RAM-stroj, samo što RAMv2-programi imaju samo dva tipa instrukcija:

INC $\mathcal{R}_j$ Jednako kao kod RAM-, makro- i LOOP-programa.

DEC $\mathcal{R}_j$ & ℓ Ako je sadržaj registra $\mathcal{R}_j$ pozitivan, umanji ga za 1 i postavi PC na ℓ.

Inače samo poveća PC za 1.

Dokažite da je proizvoljna funkcija RAM-izračunljiva ako i samo ako je RAMv2-izračunljiva.

A.6.2. *RAMv3*-stroj definiramo kao i RAM-stroj, samo što RAMv3-programi nemaju instrukciju tipa GO TO (imaju samo instrukcije tipa INC i DEC). Dokažite da je proizvoljna funkcija RAM-izračunljiva ako i samo ako je RAMv3-izračunljiva. ▲

A.6.3. *RAMv4*-stroj definiramo kao i RAM-stroj, samo što RAMv4-programi mogu imati dodatnu instrukciju STOP, čije izvršavanje prekida izvršavanje RAM-programa (ali ne i eventualnih makro-programa koji sadrže taj RAM-program kao zvjezdica-instrukciju). Dokažite da je proizvoljna funkcija RAM-izračunljiva ako i samo ako je RAMv4-izračunljiva. ▲

B. Funkcijsko programiranje

B.1. Primitivno rekurzivne funkcije

B.1.1. Dokažite da je euklidska udaljenost na $\mathbb{N}$, zadana s $d(x, y) := |x - y|$, primitivno rekurzivna funkcija. Pomoću nje napišite simboličku definiciju jednakosti. ▲

B.1.2. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$ proizvoljan.
Dokažite da su funkcije $\min^k$ i $\max^k$ primitivno rekurzivne. ▲

B.1.3. Za prirodne brojeve a, b i c, sa $r(a, b, c)$ označimo broj (a) cjelobrojnih, (b) racionalnih, (c) realnih rješenja kvadratne jednadžbe $(a + 1)x^2 + bx + c = 0$. Je li funkcija r^3 primitivno rekurzivna? Obrazložite. ▲

B.1.4. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, sa a_n označimo n-tu znamenku zdesna (npr. $n = 3$ je znamenka stotica) u dekadskom zapisu broja $n!$ (n faktorijel). Ako $n!$ ima manje od n znamenaka, ili je $n = 0$, stavimo $a_n = 0$. Dokažite da je tako dobiveni niz primitivno rekurzivan.

B.1.5. Neka je f^1 primitivno rekurzivna funkcija. Neka je g^1 definirana s

$$g(n) := f\big(f\big(\cdots f(n)\cdots\big)\big),$$

gdje postoji n poziva funkcije f. Dokažite da je g također primitivno rekurzivna. ▲

B.1.6. Dokažite da je Eulerova funkcija φ, definirana s

$$\varphi(n) := \text{broj brojeva iz } [1 \cdot\cdot\, n] \text{ relativno prostih s } n,$$

primitivno rekurzivna.

B.1.7. Dokažite da su funkcije div^2 i mod^2 (rezultat i ostatak cjelobrojnog dijeljenja; dodefinirajmo $\mathrm{div}(x, 0) := \mathrm{mod}(x, 0) := x$) primitivno rekurzivne.

B.1.8. Neka je G^2 primitivno rekurzivna funkcija. Dokažite da je F^2, zadana s

$$F(x, y) := \min_{z \le y} G(x, z),$$

također primitivno rekurzivna. Gdje nastaje problem ako stavimo $z < y$?

B.1.9. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva koji je od nekog mjesta nadalje periodičan: postoje $m, t \in \mathbb{N}_+$ takvi da je za sve $n \ge m$, $a_{n+t} = a_n$. Dokažite da je taj niz primitivno rekurzivan.

B.1.10. Neka su G^1 i H^2 primitivno rekurzivne funkcije. Dokažite da je F^2, zadana s

$$\begin{aligned} F(x,0) &:= G(x), \\ F(x,z+1) &:= F\big(H(x,z),z\big), \end{aligned}$$

primitivno rekurzivna.

B.1.11. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$ te R^{k+1} primitivno rekurzivna relacija.
Znamo da je tada funkcija $F(\vec{x},z) := (\mu y < z)\, R(\vec{x},y)$ primitivno rekurzivna.
Dokažite to direktno, definirajući je primitivnom rekurzijom. ▲

B.1.12. Dokažite da je gcd (najveći zajednički djelitelj) primitivno rekurzivna funkcija, pišući Euklidov algoritam kao rekurziju s potpunom poviješću.

B.1.13. Dokažite „ograničenu" verziju teorema o grafu za primitivno rekurzivne funkcije:
F^k je primitivno rekurzivna ako i samo ako ima sljedeća dva svojstva:

- njen graf $\mathcal{G}_F$ je primitivno rekurzivan;
- postoji primitivno rekurzivna funkcija B^k takva da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $F(\vec{x}) \leq B(\vec{x})$.

B.1.14. Dokažite da Ackermannova funkcija A^2 nije primitivno rekurzivna. ▲

B.2. Primitivno rekurzivne relacije

B.2.1. Dokažite da je četveromjesna relacija S, zadana sa: $S(a,b,k,l)$ znači da se pravci eksplicitnih jednadžbi $y = ax + b$ i $y = kx + l$ sijeku u točki s cjelobrojnim koordinatama, primitivno rekurzivna.

B.2.2. Dokažite da je dvomjesna relacija „biti relativno prost sa" na skupu $\mathbb{N}$ primitivno rekurzivna.

B.2.3. Dokažite da je svojstvo prirodnih brojeva „može se prikazati kao zbroj dvaju kvadrata prirodnih brojeva" primitivno rekurzivno.

B.2.4. S $\tau(n)$ označavamo broj prirodnih djelitelja od n. ($\tau(0)$ se ne definira.) Dokažite da je relacija R^3 zadana s

$$R(x,y,z) :\Longleftrightarrow \tau(y) \in [x \cdot\cdot z\rangle$$

primitivno rekurzivna.

B.2.5. Dokažite da je relacija R^2, zadana s

$$n \mathrel{R} m :\Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\left(n^k + 2n^{k+1} = m\right),$$

primitivno rekurzivna.

B.2.6. Za paran broj kažemo da je *Goldbachov* ako je zbroj dva prim-broja. (Neparni brojevi nikada nisu Goldbachovi.) Dokažite da je svojstvo „biti Goldbachov" primitivno rekurzivno.

B.2.7. Dokažite da je svojstvo prirodnih brojeva „imati više jedinica nego nula u binarnom zapisu” primitivno rekurzivno.

B.2.8. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}$ primitivno rekurzivni skupovi. Dokažite da su i skupovi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A \times B$ također primitivno rekurzivni. ▲

B.2.9. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$ te R^k primitivno rekurzivna relacija. Dokažite da je

$$S := \{\, (\vec{x}, a, b) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid (\exists y \in \langle a \cdot\cdot\, b \rangle) R(\vec{x}, y) \,\}$$

također primitivno rekurzivna relacija.

B.2.10. Neka je $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ fiksni polinom.
Dokažite da je relacija N^2, zadana s $m \mathrel{N} n :\Longleftrightarrow p\left(\frac{m}{n}\right) = 0$, primitivno rekurzivna.
Vrijedi li isto za relaciju P zadanu s $m \mathrel{P} n :\Longleftrightarrow p\left(\frac{m}{n}\right) > 0$?

B.2.11. Za skup brojeva T, i $k \in \mathbb{N}_+$, definiramo brojevnu relaciju $N_T^k \subseteq \mathbb{N}^k$ sa:

$$N_T(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_1, a_0) :\Longleftrightarrow \text{„jednadžba } \sum_{i<k} a_i x^i = 0 \text{ ima rješenje u skupu } T\text{”}.$$

Dokažite da su za sve $k < 5$, relacije $N_{\mathbb{N}}^k$, $N_{\mathbb{Z}}^k$, $N_{\mathbb{Q}}^k$, $N_{\mathbb{R}}^k$ i $N_{\mathbb{C}}^k$ primitivno rekurzivne.

B.3. Rekurzivne funkcije

B.3.1. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan rekurzivan skup.
Dokažite da je S slika neke strogo rastuće rekurzivne funkcije.

B.3.2. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$, te G^{k+1}, H_1^k i H_2^k rekurzivne funkcije. Neka je F^k zadana s

$$F(\vec{x}) := \sum_{i=H_1(\vec{x})}^{H_2(\vec{x})} G(\vec{x}, i)$$

(prazne sume smatramo jednakima 0). Dokažite da je F rekurzivna funkcija.

B.3.3. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$, te G^{k+1}, H_1^k i H_2^k rekurzivne funkcije. Neka je F^k zadana s

$$F(\vec{x}) := \prod_{i=H_1(\vec{x})}^{H_2(\vec{x})} G(\vec{x}, i)$$

(prazne produkte smatramo jednakima 1). Dokažite da je F rekurzivna funkcija.

B.3.4. Dokažite da je Fibonaccijev niz rekurzivan. Je li i primitivno rekurzivan?

B.3.5. Funkcija „dvofaktorijel” definirana je sa

$$0!! := 1!! := 1, \qquad n!! = n \cdot (n-2)!! \quad \text{za} \quad n \geq 2\,.$$

Dokažite da je dvofaktorijel rekurzivna funkcija. Je li i primitivno rekurzivna?

B.3.6. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$, neka su g^k i h^{k+3} rekurzivne funkcije, te neka je f^{k+1} zadana sljedećim jednakostima:

$$f(\vec{x}, 0) := f(\vec{x}, 1) := g(\vec{x})$$
$$f(\vec{x}, y+2) := h\big(\vec{x}, f(\vec{x}, y), f(\vec{x}, y+1), y\big)$$

Dokažite da je f rekurzivna funkcija.

B.3.7. Navedite dva primjera definicije funkcije pomoću rekurzije koja nije primitivna. ▲

B.3.8. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$, te R^k rekurzivna relacija. Je li relacija

$$S := \bigcup_{(\vec{x}, y) \in R} \{\vec{x}\} \times [y \cdot\cdot +\infty\rangle$$

nužno rekurzivna? Dokažite ili opovrgnite.

B.3.9. Neka je G^1 rekurzivna funkcija. Dokažite da je F^1, zadana s

$$F(x) := \max_{y \le x} G(y),$$

također rekurzivna. Vrijedi li isto za funkciju $H(x) := \max_{y > x} G(y)$?

B.3.10. Neka je G^2 rekurzivna funkcija.
Dokažite da postoji rekurzivna funkcija F^2 koja ima sljedeća dva svojstva:

i) Za sve $i, j \in \mathbb{N}$, $F(i, j) \le F(i, j+1)$.

ii) Za sve $i, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} G(i, j) = 0$ ako i samo ako je $\sum_{j=0}^{n} F(i, j) = 0$. ▲

B.3.11. Pretvorite u simbolički zapis:

$$f(x, 0, y) = x + y,$$
$$f(x, z+1, y) = f(x, z, y) \cdot y.$$

B.3.12. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan rekurzivan skup. Dokažite da postoji rekurzivna bijekcija između S i $\mathbb{N}$. Što ako je S relacija mjesnosti veće od 1?

B.3.13. Neka je R (primitivno) rekurzivna relacija mjesnosti barem 2.
Dokažite da je graf njene minimizacije $\mathcal{G}_{\mu R}$ također (primitivno) rekurzivan.

B.4. Parcijalno rekurzivne funkcije

B.4.1. Za svaki $i \in \{0, 1, 2\}$ s P_i označimo skup svih prirodnih brojeva kongruentnih i modulo 3. Dokažite da postoji parcijalno rekurzivna funkcija f s domenom P_1 i slikom P_2. Je li takva funkcija jedinstvena? ▲

B.4.2. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Dokažite da je g, zadana s

$$g : \mathcal{I}_f \to \mathbb{N}, \qquad g(x) := 2x + 1,$$

parcijalno rekurzivna. ▲

B.4.3. Neka je S rekurzivan podskup od $\mathbb{N}$. Mora li funkcija $f : S \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$, biti parcijalno rekurzivna? ▲

B.4.4. Napišite parcijalno rekurzivnu funkciju $\mathrm{sort}^1 : \mathrm{Seq} \to \mathrm{Seq}$. ▲

B.4.5. Neka je f parcijalno rekurzivna funkcija, i S rekurzivan skup.
Dokažite da je i funkcija $f|_S$ (restrikcija f na S) parcijalno rekurzivna. ▲

B.4.6. Neka je $f(x, y) := y - x - 1$. Dokažite da je $f|_{f^{-1}[\mathbb{N}]}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

B.4.7. *Rep* konačnog niza $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ definiramo kao $(x_2, \ldots, x_k)$ (prazan niz nema definiran rep). Dokažite da postoji jednomjesna parcijalno rekurzivna funkcija koja kodu niza pridružuje kod njegova repa. Je li takva funkcija jedinstvena?
Postoji li primitivno rekurzivna funkcija s tim svojstvom?

B.4.8. Neka je $f(x) := 8x \dot{-} x \bmod 8$. Dokažite ili opovrgnite: slika funkcije f (oznaka $\mathcal{I}_f$) je primitivno rekurzivna. Što možete reći o izračunljivosti funkcije $f|_{\mathcal{I}_f}$?

C. Kodiranja

C.1. Dekodiranje RAM-programa

C.1.1. Odredite $\{2^{260^2-99} \cdot 5^{5^2} \cdot 7^{19} \cdot 2187\}(125, 332, 46)$.

C.1.2. Neka je $e = 2.187 \cdot 10^{13504}$.
Odredite domene funkcijâ $\{e\}^1$ i $\{e\}^2$ te izračunajte $\{e\}(12, 5)$.

C.1.3. Neka je $e = 2^{301} \cdot 3^{25} \cdot 5^{4501} \cdot 7^7$.
Odredite domenu i sliku funkcije $\{e\}^2$ i izračunajte $\{e\}(17, 19)$.

C.1.4. Odredite domenu i sliku jednomjesne funkcije s indeksom $2^{4501} \cdot 3^{73} \cdot 35^7$.

C.1.5. Odredite domenu i sliku jednomjesne funkcije s indeksom $2^{181} \cdot 3^7$.

C.1.6. Neka je $e = 128 \cdot 3^{22501} \cdot 5^{5^2} \cdot 7^7$.
Odredite domenu i sliku funkcije $\{e\}^1$ te izračunajte $\{e\}(2011)$.

C.1.7. Neka je $e = 2^{55} \cdot 3^{901} \cdot 5^7$. Odredite domenu i sliku funkcije $\{e\}^2$ i izračunajte $\{e\}(20, 12)$.

C.1.8. Neka je $e = \langle 900, 2700, 6 \rangle$.
Odredite domenu i sliku funkcije $\{e\}^2$ te izračunajte $\{e\}(0, 17)$. ▲

C.1.9. Neka je $e = \langle 67500, 6, 24, 162 \rangle$.
Odredite domenu i sliku funkcije $\{e\}^2$ te izračunajte $\{e\}(20, 12)$.

C.1.10. Izračunajte $\mathrm{comp}(153, 17, 1024, 2^{337501} \cdot 2187 \cdot 5^{73})$.

C.2. Ostali zadaci s indeksima

C.2.1. Broj e u heksadecimalnom zapisu završava znamenkama $\cdots 2600\,0000$. Odredite $\mathcal{I}_{\{e\}^2}$.

C.2.2. Neka je e indeks neke rekurzivne funkcije koji nije djeljiv s 1024. Izračunajte

$$\{262144e\}(6, 2, 8).$$

C.2.3. Neka je e indeks neke rekurzivne funkcije koji nije djeljiv s 1024 niti s 19, ali jest djeljiv sa 17. Izračunajte $\{2^{52482}e\}(3, 2)$.

C.2.4. a) Napišite primitivno rekurzivnu funkciju i^1, čija parcijalna specifikacija je:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in [1 \cdot\cdot k])\big(\{i(n)\}^k = I_n^k\big).$$

b) Napišite parcijalno rekurzivnu funkciju i^2 čija je domena $\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [1 \cdot\cdot k]\}$, a vrijednost $i(n,k)$ je (neki) indeks inicijalne funkcije I_n^k. ▲

C.2.5. a) Dokažite da postoji primitivno rekurzivna jednomjesna funkcija c takva da za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $k \in \mathbb{N}_+$ vrijedi $\{c(n)\}^k = C_n^k$.

b) Postoji li takva funkcija c i broj n_0 tako da vrijedi $\mathrm{lh}\big(c(n_0)\big) < n_0$? Detaljno obrazložite! ▲

C.2.6. Odredite dva indeksa za funkciju Sc, takva da nisu djeljivi jedan drugim. ▲

C.2.7. Odredite sve $i \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi $\mathrm{Prog}(i^2)$. ▲

C.2.8. Dokažite da ne postoji funkcija koja ima točno 3 indeksa. ▲

C.2.9. Kažemo da je prirodni broj e *parno sastavljen* ako je $e[i][j]$ paran broj za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Dokažite da postoji jedinstvena nerekurzivna dvomjesna funkcija s parno sastavljenim indeksom. Navedite primjer dvije rekurzivne funkcije s parno sastavljenim indeksima.

C.3. Kodiranje logike

C.3.1. Propozicijsku varijablu P_i kodiramo kao $\langle 0, i\rangle$, negaciju $\neg F$ kao $\langle 1, f\rangle$, te kondicional $(F \to G)$ kao $\langle 2, f, g\rangle$, gdje su f i g kodovi za F i G redom (ostale veznike shvaćamo kao pokrate na standardni način). Dokažite da su sljedeći skupovi rekurzivni:

a) skup kodova svih formula logike sudova;

b) skup kodova svih instanci sheme aksioma A1 $(A \to (B \to A))$.

C.3.2. Odredite RAM-program T i ulazne podatke $\vec{t}$ takve da problem zaključivanja

$$\big\{P(x,0) \to S(x,0), P\big(x, s(y)\big) \to Q(x,y), Q(x,0) \to Q(x,0), Q\big(x, s(y)\big) \to R(x,y),$$
$$R(x,y) \to P(x,y), P\big(0, s\big(s(s(0))\big)\big)\big\} \models^? \exists x \exists y\, S(x,y)$$

modelira zaustavljanje T-izračunavanja s $\vec{t}$, te odredite je li zaključak valjan.

C.3.3. Za neko kodiranje abecede $\Sigma_{\log}$, jedna od formula koje opisuju P-izračunavanje ima kod

$$(74666715168A466667153716888)_{12}.$$

Odredite jednu instrukciju od P (zajedno s rednim brojem), te odredite širinu od P i broj ulaznih podataka (mjesnost).

C.3.4. Smislite neko kodiranje proširene logičke abecede $\Sigma'_{\log} := \Sigma_{\log} \dot\cup \{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \exists\}$ koja sadrži sve logičke veznike i oba kvantifikatora, u pomaknutoj bazi 16 — tako da za formule (koje ne sadrže separator #) iz grafičkog izgleda običnog heksadecimalnog prikaza koda možemo „pročitati" formulu. ▲

C.3.5. Smislite abecedu što sličniju logičkoj, ali takvu da koristi samo 9 simbola (sa separatorom 10), tako da se kodovi formula mogu normalno čitati i pisati u dekadskom zapisu.

C.3.6. Propozicijsku varijablu P_i kodiramo kao $\langle 0, i\rangle$; negaciju $\neg\varphi$ kao $\langle 1, a\rangle$ gdje je a kod od φ; a ostale formule $(\varphi \circ \psi)$ kao $\langle t, a, b\rangle$, gdje je a kod od φ, b kod od ψ, a veza između $\circ$ i t dana je tablicom

$\circ$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
t	2	3	4	5

Dokažite da je skup kodova svih formula logike sudova rekurzivan.

C.4. Ostali zadaci s kodiranjem

C.4.1. Napišite primitivno rekurzivnu funkciju Width^1 koja svakom kodu RAM-programa P pridružuje širinu od P (najmanji prirodni broj m takav da su redni brojevi svih registara koji se pojavljuju u instrukcijama od P, strogo manji od m). Ako e nije kôd nijednog RAM-programa, $\mathsf{Width}(e) := 0$.

C.4.2. Dokažite da je funkcija prod zadana s $\mathsf{prod}(\langle x_1, \ldots, x_k\rangle) := x_1 \cdots x_k$ primitivno rekurzivna. Brojeve koji nisu kodovi konačnih nizova preslikajte u 0. Kod praznog niza preslikajte u 1.

C.4.3. Smislite kodiranje za stogove prirodnih brojeva (`elementtype` = $\mathbb{N}$). U tom kodiranju napišite konstante, primitivno rekurzivne prateće funkcije i relacije osnovnih metoda `MakeNull`, `Push`, `Pop`, `Top` i `Empty` apstraktnog tipa podataka `Stack`.

(Na primjer, Pop^1 je funkcija koja prima kod stoga i vraća kod tog stoga bez zadnjeg stavljenog elementa. To je parcijalna specifikacija: $\mathsf{Pop}(x)$ može biti bilo što ako $x \notin \mathsf{Stack}$.)

C.4.4. Smislite kodiranje za apstraktni tip podataka `Queue`, te realizirajte njegove osnovne metode `make_null`, `empty`, `enqueue`, `dequeue` i `front` na primitivno rekurzivan način.

C.4.5. *Neoznačeno binarno stablo* je ili prazno ili uređen par manjih neoznačenih binarnih stabala. Prazno stablo kodiramo nulom, a par stabala kao par njihovih kodova. Dokažite da je skup svih kodova neoznačenih binarnih stabala rekurzivan.

C.4.6. Neka je B^1 primitivno rekurzivna funkcija, neka je $k \in \mathbb{N}_+$, i neka je P RAM-program takav da za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, P-izračunavanje s $\vec{x}$ stane u najviše $B(\langle\vec{x}\rangle)$ koraka. Dokažite da je funkcija $\{\ulcorner P \urcorner\}^k$ koju računa P primitivno rekurzivna.

D. Turing-izračunljivost

D.1. Teorijski zadaci

D.1.1. Dokažite da je skup Turing-izračunljivih jezičnih funkcija (nad istom abecedom Σ) zatvoren na kompoziciju. ▲

D.1.2. Izračunajte $\beta^{-1}(/\bullet\bullet//\bullet)$. ▲

D.1.3. Definirajte Turingov stroj i pojam Turing-izračunljive jezične funkcije.

D.1.4. Dokažite da problem zaustavljanja za Turingove strojeve nad abecedom $\{a, b, c\}$ nije odlučiv.

D.1.5. Neka je Σ abeceda, $\mathbb{N}\Sigma$ neko njeno kodiranje, i $L \subseteq \Sigma^*$ jezik nad njom.
Dokažite da je $\langle L \rangle := \{\langle w \rangle : w \in L\}$:

a) rekurzivan skup ako i samo ako postoji Turingov odlučitelj koji prepoznaje L;

b) rekurzivno prebrojiv ako i samo ako postoji Turingov stroj koji prepoznaje L;

c) rekurzivno prebrojiv ako i samo ako postoji Turingov enumerator koji nabraja L.

D.1.6. Definirajte funkciju bin^4 i dokažite da je primitivno rekurzivna.
Specificirajte njen (jednostrani) inverz i objasnite gdje se koristi.

D.2. Turingovi odlučitelji

D.2.1. Konstruirajte Turingov odlučitelj koji prepoznaje jezik $\beta[\mathbb{N}^3]$.

D.2.2. Konstruirajte Turingov odlučitelj koji prepoznaje jezik $L_+ := \{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

D.2.3. Konstruirajte Turingov odlučitelj koji prepoznaje jezik $L_= := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$,
ali takav da se za vrijeme izračunavanja s w nikad ne pomakne dalje od pozicije $|w|$.
(Takve Turingove strojeve zovemo *ograničenima*.)

D.2.4. Nacrtajte dijagram Turingova odlučitelja za $\beta[>]$.

D.3. Jezične i prateće funkcije

D.3.1. Neka je $\Sigma := \{a, b, c\}$ abeceda, i $\mathbb{N}\Sigma$ kodiranje zadano abecednim redoslijedom.
Kojoj jezičnoj funkciji (ako ikojoj) φ nad Σ odgovara prateća funkcija $\mathbb{N}\varphi(x) := 9x + 5$? ▲

D.3.2. Neka je $f(x) := \mathrm{Recode}(x, 5, 5)$. Odredite jezičnu funkciju $\mathbb{N}^{-1}f$ nad $\Sigma := \{a, b, c, d, e\}$.
Ovisi li ona o izboru kodiranja $\mathbb{N}\Sigma$?

D.4. Turingovi strojevi za jezično zadane funkcije

D.4.1. Nad abecedom $\{a, b\}$ promotrimo jezik svih riječi parne duljine, i funkciju φ_h definiranu na tom jeziku koja svaku riječ w preslika u njenu prvu polovicu (prefiks od prvih $\frac{|w|}{2}$ znakova od w). Dokažite da je φ_h Turing-izračunljiva.

D.4.2. Neka je Σ abeceda koja sadrži znak #. Navedite komponente Turingova stroja koji računa jezičnu funkciju $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*$ zadanu s $\varphi(w) := \#w$.

D.5. Turingovi strojevi za brojevno zadane funkcije

D.5.1. Nacrtajte dijagrame Turingovih strojeva koji računaju sljedeće unarne reprezentacije inicijalnih funkcija: (a) $\bullet Z$, (b) $\bullet Sc$, (c) $\bullet I_1^1$.

D.5.2. Nacrtajte dijagrame Turingovih strojeva koji računaju sljedeće binarne reprezentacije inicijalnih funkcija: (a) βZ, (b) βSc, (c) βI_1^1, (d) βI_1^2, (e) βI_2^2, (f) βI_2^4.

D.5.3. Konstruirajte Turingov stroj koji računa funkciju π nad $\{a, b, c\}$ takvu da je $\mathbb{N}\pi = pd$.

D.5.4. Crtanjem dijagrama Turingova stroja dokažite da je funkcija $x \mapsto 2x$ Turing-izračunljiva.

D.6. Binarna i dekadska aritmetika

D.6.1. Odredite komponente Turingova stroja koji računa jezičnu funkciju φ nad abecedom $\Sigma := \{0, 1, \ldots, 9\}$, čija je domena jezik svih validnih dekadskih zapisa prirodnih brojeva, a svaki takav zapis preslikava u zapis sljedbenika. Primjerice, $\varphi(369) = 370$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(9999) = 10000$, dok ε, 000000 i 05 nisu u domeni od φ.

D.6.2. Opišite (na visokoj razini) rad Turingova stroja koji rješava zadatke sa zbrajanjem binarno zapisanih prirodnih brojeva, nad abecedom $\{0, 1, +\}$. Recimo, $\zeta(101{+}111) = 1100$, gdje je ζ funkcija koju taj stroj računa (jer je $5 + 7 = 12$). Postoji li ograničen takav stroj?

D.6.3. Opišite (na visokoj razini) rad Turingova stroja koji rješava zadatke s množenjem binarno zapisanih prirodnih brojeva, nad abecedom $\{0, 1, *\}$. Recimo, $\mu(101{*}111) = 100011$, gdje je μ funkcija koju taj stroj računa (jer je $5 \cdot 7 = 35$). Postoji li ograničen takav stroj?

D.6.4. Opišite (na visokoj razini) rad Turingova stroja koji rješava zadatke s potenciranjem binarno zapisanih prirodnih brojeva, nad abecedom $\{0, 1, \hat{}\}$. Recimo, $\pi(101\hat{}11) = 1111101$, gdje je π funkcija koju taj stroj računa (jer je $5^3 = 125$). Postoji li ograničen takav stroj?

E. Primjena teorema rekurzije i srodnih teorema

E.1. Opće rekurzije i rekurzivni sustavi

E.1.1. Neka je M totalna funkcija definirana s

$$M(n) :\simeq \begin{cases} n - 10, & n > 100 \\ M\big(M(n+11)\big), & \text{inače} \end{cases}$$

(ne morate dokazivati da je M time dobro definirana). Dokažite da je M rekurzivna funkcija. Je li i primitivno rekurzivna? ▲

E.1.2. Neka je c funkcija definirana sa

$$c(n) :\simeq \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1 + c\left(\dfrac{n}{2}\right), & n \text{ paran} \\ 1 + c\,(3n+1), & \text{inače} \end{cases}.$$

a) Dokažite da je c parcijalno rekurzivna funkcija.

b) Dokažite da c nije rekurzivna funkcija.

c) Napišite makro-program koji računa funkciju c.

d) Napišite RAM-program koji računa c. ▲

E.1.3. Dokažite da postoji parcijalno rekurzivna funkcija F koja zadovoljava sustav:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, 0) &:= x_1 + x_2, \\ F(x_1, x_2, y+1) &:\simeq \lfloor y \cdot \log_2 F(x_1+1, x_2+2, y) \dot{-} x_1 \rfloor. \end{aligned}$$ ▲

E.1.4. Dokažite da je sljedećim jednakostima definirana jedinstvena parcijalno rekurzivna funkcija:

$$\begin{aligned} f(n,0) &:\simeq \left\lceil \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k \right\rceil, \\ f(n,1) &:= 2, \\ f(n,y+2) &:\simeq \big(f(n,y)\big)^2 + f(n,y+1) + 7. \end{aligned}$$ ▲

E.1.5. Dokažite da je rješenje f sustava

$$\begin{aligned} f(x,0) &\simeq x \\ f(x,y+1) &\simeq f(x,0) \cdot f(x+1,1) \cdot f(x+2,2) \cdots f(x+y,y) \end{aligned}$$

jedinstveno, i da je to rekurzivna funkcija. ▲

E.1.6. Neka su $k, l \in \mathbb{N}_+$ te $G_1^{k+l}, \ldots, G_l^{k+l}$ parcijalno rekurzivne funkcije. Dokažite da postoje indeksi $\vec{e} \in \mathbb{N}^l$ takvi da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi *simultana opća rekurzija*

$$\begin{aligned} \{e_1\}(\vec{x}) &\simeq G_1(\vec{x}, \vec{e}), \\ &\vdots \\ \{e_l\}(\vec{x}) &\simeq G_l(\vec{x}, \vec{e}). \end{aligned}$$ ▲

E.2. Primjena teorema o parametru

E.2.1. Dokažite da za sve $k, l \in \mathbb{N}_+$ postoji primitivno rekurzivna funkcija compose_k^{l+1} takva da je za sve $(\vec{g}, h) \in \mathbb{N}^{l+1}$, $\text{compose}_k(\vec{g}^{\,l}, h)$ indeks funkcije $\{h\}^l \circ \big(\{g_1\}^k, \ldots, \{g_l\}^k\big)$.

E.2.2. Dokažite da postoji primitivno rekurzivna funkcija times_3^2 takva da je za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $\text{times}_3(m, n)$ neki indeks funkcije $\{m\}^3 \cdot \{n\}^3$. ▲

E.2.3. Dokažite da postoji rekurzivna funkcija F takva da je za sve prirodne brojeve m i n, vrijednost $F(m, n)$ neki indeks funkcije $\{m^2\}^4 + 2\{mn\}^4 + \{n^2\}^4$. ▲

E.2.4. Dokažite da postoji primitivno rekurzivna funkcija F^3 takva da je za sve $m, n, k \in \mathbb{N}$, $F(m, n, k)$ neki indeks funkcije zadane s $f(x, y) :\simeq \{m^2\}(x, y) + 3\{n + k\}(y, y, x)$. ▲

E.2.5. Dokažite da postoji primitivno rekurzivna funkcija G takva da je za sve prirodne brojeve m, vrijednost $G(m)$ neki indeks funkcije $\{m^3\}^1 + 2\{m\}^1$.

E.2.6. Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ postoji primitivno rekurzivna funkcija primRecurse_k čija parcijalna specifikacija glasi: ako je g indeks totalne k-mjesne funkcije G, i h indeks totalne $(k+2)$-mjesne funkcije H, tada je $\text{primRecurse}_k(g, h)$ neki indeks totalne $(k+1)$-mjesne funkcije $G \mathbin{\text{PR}} H$. ▲

E.2.7. Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ postoji primitivno rekurzivna funkcija Recursion_k^1 čija parcijalna specifikacija glasi: ako je g indeks $(k+1)$-mjesne funkcije G, tada $e := \text{Recursion}_k(g)$ ima svojstvo da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $\text{comp}(\vec{x}, e) \simeq G(\vec{x}, e)$.

[Drugim riječima, možemo isprogramirati primjenu teorema rekurzije, i tako dobiveni algoritam na indeksima je primitivno rekurzivan.] ▲

E.2.8. a) Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ postoji primitivno rekurzivna funkcija Fixpoint_k^1 čija parcijalna specifikacija glasi: ako je f indeks rekurzivne jednomjesne funkcije F, tada je $e := \text{Fixpoint}_k(f)$ neki broj takav da vrijedi $e \approx_k F(e)$.

b) Dokažite da za svaku rekurzivnu funkciju F^2 i za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ postoji rekurzivna funkcija G^1 takva da za sve x vrijedi $F\big(G(x), x\big) \approx_k G(x)$.

E.2.9. Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ postoji primitivno rekurzivna funkcija Minimize_k^1 čija parcijalna specifikacija glasi: ako je r indeks $(k+1)$-mjesne karakteristične funkcije relacije R^{k+1}, tada je $\text{Minimize}_k(r)$ neki indeks k-mjesne funkcije μR.

E.2.10. a) Dokažite da za sve $k \in \mathbb{N}_+$, $y \in \mathbb{N}$ i $e \in \text{Prog}$, vrijedi $S_k(y, e) \geq e$, s tim da se jednakost postiže samo za $y = 0$.

b) Dokažite da za sve $k, l \in \mathbb{N}_+$, $\vec{y} \in \mathbb{N}^l$ i $e \in \text{Prog}$, vrijedi $S_k(\vec{y}, e) \geq e$, s tim da se jednakost postiže samo za $y_1 = y_2 = \cdots = y_l = 0$.

E.3. Samoreferirajuće funkcije

E.3.1. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $W_e(x) \iff x \geq e$. (S W_e je označena domena jednomjesne funkcije s indeksom e.) ▲

E.3.2. Postoji li prirodni broj e za koji vrijedi:

a) $\mathcal{D}_{\{e\}^1} = \mathcal{I}_{\{e\}^1} = \{e\}$?

b) $\mathcal{D}_{\{e\}^1} = \{e\} \wedge \mathcal{I}_{\{e\}^1} = \{e\}^c$? ▲

E.3.3. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \{(e, e+t) \mid t \in \mathbb{N}\}$. ▲

E.3.4. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{I}_{\{e\}^1} = [e \cdot\cdot\, e + 127]$. ▲

E.3.5. Postoji li $q \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{q\}} = \{1\} \cup \{qn + 2012 \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $\{q\}(1) = 2012$? ▲

E.3.6. S E označimo skup svih parnih prirodnih brojeva. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da funkcija $\{e\}$ ima domenu $E \times E^c \times \{e\}$ i sliku $e \cdot E$. ▲

E.3.7. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \{e, 3e, 9e, 27e, 81e, \ldots\}$.

E.3.8. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \{(e, 0)\}$. ▲

E.3.9. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\{e\}(x) = ex$, za sve $x \in \mathbb{N}$. ▲

E.3.10. Dokažite da postoji jednomjesna rekurzivna funkcija f čija se domena sastoji točno od svih višekratnika jednog (fiksnog) indeksa od f. ▲

E.3.11. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = [0 \cdot\cdot\, e]$.

E.3.12. Postoji li $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \{(e, e)\}$?

E.3.13. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{D}_{\{e\}} = \{1 + e, 1 + e^2, 1 + e^3, \ldots\}.$$

E.3.14. Relacija K_r je definirana s $x\, K_r\, y :\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq r^2$. Postoji li $e \in \mathbb{N}$ takav da je
(a) $\mathcal{D}_{\{e\}} = K_e$? (b) $\mathcal{I}_{\{e\}} = K_e$? (c) $\mathcal{G}_{\{e\}} = K_e$? ▲

E.3.15. Dokažite da postoji prirodan broj e koji je indeks funkcije čija domena je skup $\{e, e+1\}$.

E.3.16. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \mathbb{N} \times \{e\}$.

E.3.17. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \left\{\sum_{i=1}^{e+1} i^i\right\}$.

E.3.18. Dokažite da postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = \{e + t \mid t \in K\}$. ▲

E.3.19. Dokažite da postoji $e \in K$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = K$. ▲

E.4. Primjena teorema o fiksnoj točki

E.4.1. Neka je g^2 rekurzivna funkcija.

a) Dokažite da postoji funkcija f koja zadovoljava sustav

$$\begin{aligned} f(x,y,0) &\simeq x+y \dot{-} 1, \\ f(x,y,z+1) &\simeq g\big(f(x+y,x,z), f(xy,x,z)\big). \end{aligned}$$

b) Dokažite da sustav iz (a) ima jedinstveno rješenje f.

c) Dokažite da je f iz (b) rekurzivna funkcija.

d) Dokažite da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$3\big(f(n,n+1,n)\big)^2 + \left\lceil \sqrt{f(n,n+1,n)} \right\rceil + 17 \approx_1 n.$$

E.4.2. Dokažite da postoji prirodni broj e takav da su e i e^2+3e+4 indeksi jedne te iste tromjesne funkcije. Postoji li e takav da je $\{e\}^k = \{e^2+3e+4\}^k$ za *sve* $k \in \mathbb{N}_+$? ▲

E.4.3. Neka je f^1 primitivno rekurzivna funkcija. Mora li skup

$$S := \left\{ e \in \mathbb{N} \;\middle|\; \{e\}^8 = \{f(e)\}^8 \right\}$$

biti (a) neprazan, (b) rekurzivan? ▲

E.4.4. Vrijedi li „uniformna" (po mjesnosti) verzija teorema o fiksnoj točki:

„za svaku rekurzivnu F^1 postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \in \mathbb{N}_+$ vrijedi $e \approx_k F(e)$"? ▲

F. Primjena Riceova teorema

F.1. Skupovi indeksa

F.1.1. Dokažite da skup indeksa svih tromjesnih funkcija koje poprimaju samo prim-vrijednosti (slika im je podskup od $\mathbb{P}$) nije rekurzivan. ▲

F.1.2. Je li skup indeksa svih ograničenih rekurzivnih funkcija rekurzivan? ▲

F.1.3. Je li skup $S := \{e \in \mathbb{N} \mid \{e\}^6$ je parcijalno rekurzivna funkcija$\}$ rekurzivan? ▲

F.1.4. Je li skup

$$\{a \in \mathbb{N} \mid a + 72 \text{ je indeks jednomjesne periodičke funkcije}\}$$

rekurzivan? Obrazložite. ▲

F.2. Skupovi kodova

F.2.1. Je li skup $\{\langle a, b\rangle \mid \forall x, y(\{ab\}(x, y) = xy)\}$ primitivno rekurzivan? Obrazložite. ▲

F.2.2. Označimo $W_e := \mathcal{D}_{\{e\}^1}$. Dokažite da $\{\langle a, b\rangle \mid W_{a\cdot b} = W_b\}$ nije rekurzivan skup.

F.2.3. a) Dokažite da $S := \{\langle a, b, c\rangle \mid \mathrm{comp}(c, a \cdot b) \simeq \mathrm{comp}(b, a + 2c)\}$ nije rekurzivan skup.

b) Neka je $S := \{\langle a, b, c\rangle \mid \mathrm{comp}(c, a + b) \simeq \mathrm{comp}(b, a \cdot c)\}$. Dokažite da S nije rekurzivan.

F.2.4. Dokažite da skup svih kodova parova $\langle a, b\rangle$, takvih da je $\mathcal{I}_{\{a\}^1} = \mathcal{I}_{\{b\}^1}$, nije rekurzivan.

F.2.5. Neka je S skup svih kodova oblika $\langle a, b, c\rangle$ takvih da je $a + c \in \mathcal{D}_{\{b\}}$.
Dokažite da S nije rekurzivan skup.

F.2.6. Neka je $S := \{\langle a, b, c\rangle \mid \{a\}(b) = c\}$. Dokažite da S nije rekurzivan skup.

F.2.7. Neka su

$$S_1 := \{\langle a, b\rangle \mid \mathrm{comp}(a, b) \simeq \mathrm{comp}(b, a)\},$$
$$S_2 := \{\langle a, b\rangle \mid \mathrm{comp}(a, b) = \mathrm{comp}(b, a)\}.$$

Jesu li skupovi S_1 i S_2 rekurzivni? Obrazložite.

F.2.8. Neka je S skup svih brojeva oblika $\langle a, b, c\rangle$ takvih da je $\{a\}(b) = \{b\}(c)$.
Dokažite da S nije rekurzivan.

F.3. Višemjesne relacije

F.3.1. Dokažite da je $\mathrm{Halt}_1 = \mathcal{D}_{\mathsf{comp}_1}$ rekurzivno prebrojiva relacija koja nije rekurzivna.

F.3.2. Dokažite da relacija R^3 zadana sa $R(a,b,c) :\Longleftrightarrow \mathcal{D}_{\{ab\}^1} = \mathcal{D}_{\{b+c\}^1}$ nije rekurzivna. ▲

F.3.3. Dokažite da relacija zadana sa $R(a,b,c,d) :\Longleftrightarrow \mathcal{I}_{\{a\}^1} = \{b,c,d\}$ nije rekurzivna.

F.3.4. Dokažite da relacija R^3 zadana sa

$$R(a,b,c) :\Longleftrightarrow \text{funkcija s indeksom } a \text{ je definirana svuda osim u } b \text{ i } c$$

nije rekurzivna. ▲

F.3.5. Definirajmo relaciju R^2 sa

$$R(a,b) :\Longleftrightarrow \mathsf{comp}(a,b) \simeq \lfloor \log_b a \rfloor.$$

a) Je li R rekurzivna relacija?

b) Postoji li $b \in \mathbb{N}$ takav da je $a \mathrel{R} b$ za sve $a \in \mathbb{N}$?

F.3.6. Je li relacija S^2, zadana s $x \mathrel{S} y :\Longleftrightarrow \{x^2\}^1 = \{y^2\}^1$ rekurzivna? Obrazložite. ▲

F.3.7. Dokažite da sljedeći skupovi nisu rekurzivni:

a) $\left\{e \in \mathbb{N} \,\middle|\, \{e\}^1 \text{ je konstantna (ne nužno totalna) funkcija}\right\}$;

b) $\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, \mathcal{D}_{\{a\}} = \{b\}^c\right\}$;

c) $\{e \in \mathbb{N} \mid 1 \mathrel{\mathcal{G}_{\{e\}}} 2011\}$;

d) $\left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \,\middle|\, (c,d) \in \mathcal{G}_{\{a+b\}}\right\}$.

F.3.8. Je li relacija R^3, zadana s $R(x,y,z) :\Longleftrightarrow z \in \mathcal{D}_{\{x+y\}}$, primitivno rekurzivna?

F.3.9. Dokažite da relacija R^3 zadana s

$$R(x,y,z) :\Longleftrightarrow x + y + z \approx_2 xyz$$

nije rekurzivna.

F.3.10. Dokažite nerekurzivnost dvomjesne relacije

$$S := \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, (j, j+1) \in \mathcal{D}_{\{i\}}\right\}.$$

F.3.11. Neka je P RAM-program koji računa funkciju comp_2, te neka je S^3 relacija definirana s

$$S(i,j,k) :\Longleftrightarrow \text{P-izračunavanje s } (j,i,i+k) \text{ stane.}$$

Dokažite da relacija S nije rekurzivna.

F.3.12. Je li skup

$$\{(a, b) \mid a + 2b + 1024 \text{ je indeks neke tromjesne totalne funkcije}\}$$

rekurzivan? Obrazložite. ▲

F.3.13. Definiramo:

$$f \operatorname{Fix} x :\Longleftrightarrow \{f\} \text{ preslikava } x \text{ u } x.$$

Je li Fix primitivno rekurzivna? Obrazložite.

F.3.14. Definiramo:

$$a \star b :\Longleftrightarrow \{a\}(b) \simeq \{2a + 1\}(2b + 1).$$

Dokažite da $\star$ nije rekurzivna. Bi li $\star$ bila rekurzivna da je definirana $s =$ umjesto $\simeq$? ▲

F.4. Ostali zadaci

F.4.1. Za $k \in \mathbb{N}_+$, definiramo dvomjesnu relaciju $\approx_k$ sa $e \approx_k f :\Longleftrightarrow \{e\}^k = \{f\}^k$. Dokažite da je to relacija ekvivalencije, s beskonačno mnogo klasa ekvivalencije koje su sve beskonačne, te nađite dva broja koja jesu, i dva broja koja nisu, u relaciji $\approx_k$ za svaki k.

F.4.2. Neka je F^1 rekurzivna funkcija koja je konstanta na svakoj $\approx_5$-klasi ekvivalencije. Dokažite da je F konstanta na čitavom $\mathbb{N}$. ▲

F.4.3. Gdje je greška u sljedećem zaključivanju?

Promotrimo skup Prog^c, svih prirodnih brojeva koji nisu kodovi RAM-programa. Dokazali smo da je Prog primitivno rekurzivan, te da je komplement svake primitivno rekurzivne relacije primitivno rekurzivan, dakle (ako shvatimo Prog kao jednomjesnu relaciju) Prog^c je primitivno rekurzivan. To znači da je karakteristična funkcija χ_{Prog^c} primitivno rekurzivna. Dokazali smo da je svaka primitivno rekurzivna funkcija rekurzivna, dakle χ_{Prog^c} je rekurzivna, pa je Prog^c rekurzivan.

Za svaki $k \in \mathbb{N}_+$, svaki $n \in \mathrm{Prog}^c$ je indeks prazne funkcije (konkretno, nikad ne vrijedi $T_k(\vec{x}, n, y)$, jer je $\mathrm{Prog}(n)$ jedan od uvjeta za to). Precizno, za svaka dva $m, n \in \mathrm{Prog}^c$ vrijedi $\{m\}^k = \otimes^k = \{n\}^k$. (Skup $\mathcal{F}$ je jednočlan skup $\{\otimes^k\}$.) Dakle Prog^c je k-invarijantan za svaki k (konkretno, recimo, Prog^c je 1-invarijantan).

Očito je $\mathrm{Prog}^c = \mathbb{N} \setminus \mathrm{Prog} \subseteq \mathbb{N}$. Po Riceovu teoremu, $\mathrm{Prog}^c = \varnothing$ ili $\mathrm{Prog}^c = \mathbb{N}$. Po definiciji komplementa, to znači $\mathrm{Prog} = \mathbb{N}$ ili $\mathrm{Prog} = \varnothing$. Kako vrijedi $1 = \ulcorner[]\urcorner \in \mathrm{Prog}$, očito je $\mathrm{Prog} \neq \varnothing$. Dakle, $\mathrm{Prog} = \mathbb{N}$, odnosno svaki prirodni broj je kod nekog RAM-programa. No to je očita besmislica. ▲

F.4.4. Neka je S skup svih indeksa jednomjesnih funkcija koje ne poprimaju vrijednost 0. Dokažite da S nije rekurzivno prebrojiv. ▲

F.4.5. Neka je Em skup svih indeksa prazne funkcije (svih mjesnosti). Dokažite da Em nije rekurzivno prebrojiv.

F.4.6. Neka je S 5-invarijantan skup. Je li $S \triangle \{n^2 + 7n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 7-invarijantan? Dokažite.

F.4.7. Je li Kleenejev skup K k-invarijantan za bilo koji $k \in \mathbb{N}_+$? Obrazložite.

G. Rekurzivno prebrojivi skupovi

G.1. Neizračunljive funkcije

G.1.1. Navedite pet funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ koje nisu rekurzivne.

G.1.2. Navedite primjer nerekurzivne funkcije s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$. Svoje tvrdnje detaljno dokažite.

G.1.3. Navedite primjer funkcije $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ koja nema indeks. Dokažite svoje tvrdnje.

G.1.4. Navedite 3 primjera nerekurzivnih podskupova od $\mathbb{N}$. Za jedan od tih skupova navedite po 2 prirodna broja koja se nalaze, odnosno ne nalaze u skupu.

G.1.5. Dokažite da postoji relacija R^2 takva da ni R ni R^c nisu rekurzivno prebrojive. Vrijedi li tvrdnja za ostale mjesnosti osim 2? ▲

G.1.6. Neka je S^3 relacija i $f : S \to \mathbb{N}$ parcijalno rekurzivna funkcija koja nije restrikcija nijedne rekurzivne funkcije. Dokažite da S nije rekurzivna relacija.

G.1.7. Dokažite ili opovrgnite: postoji rekurzivna funkcija L^2 takva da za svaku rekurzivnu funkciju f^1 postoji e takav da za svaki x vrijedi $f(x) = L(e, x)$. Vrijedi li ista tvrdnja za primitivno rekurzivne funkcije?

G.1.8. Dokažite da postoje funkcije f i g koje nisu rekurzivne, takve da je $f + g$ rekurzivna funkcija. ▲

G.1.9. Postoji li parcijalno rekurzivna funkcija r takva da je $\mathcal{G}_{\mathsf{Russell}} \subset \mathcal{G}_r$, te je skup $\mathcal{G}_r \setminus \mathcal{G}_{\mathsf{Russell}}$ beskonačan?

G.1.10. Dokažite da postoji parcijalno rekurzivna funkcija koju nije moguće zapisati kao minimizaciju rekurzivne relacije. ▲

G.1.11. Za relacije P^2 i Q^2 definiramo *kompoziciju* kao relaciju $R^2 := P \circ Q$ zadanu s

$$R(x, z) :\Longleftrightarrow \exists y\big(Q(x, y) \wedge P(y, z)\big)$$

(kompozicija jednomjesnih funkcija je specijalni slučaj toga, ako funkcije gledamo skupovnoteorijski kao relacije s funkcijskim svojstvom). Dokažite ili opovrgnite: kompozicija dviju rekurzivnih relacija je ponovo rekurzivna. Vrijedi li tvrdnja za primitivno rekurzivne relacije?

G.1.12. Neka je za svaki $i \in \mathbb{N}$, G_i^1 rekurzivna funkcija. Je li funkcija F^2 zadana sa

$$F(i, x) := G_i(x)$$

nužno rekurzivna? ▲

G.2. Domene, slike i grafovi

G.2.1. Dokažite da se svaka funkcija s konačnim grafom može proširiti do primitivno rekurzivne funkcije.

G.2.2. Neka su f i g brojevne funkcije takve da je simetrična razlika njihovih grafova $\mathcal{G}_f \triangle \mathcal{G}_g$ konačna. Dokažite: ako je f parcijalno rekurzivna, tada je i g takva.

G.2.3. Neka je f proizvoljna (brojevna) funkcija. Dokažite: $\exists_* G_f = \mathcal{D}_f$ i $\mu\mathcal{G}_f = f$.

G.2.4. Ima li svaka relacija selektor?

G.2.5. Neka je f strogo padajuća parcijalno rekurzivna funkcija. Dokažite da je $\mathcal{D}_f$ primitivno rekurzivan skup.

G.2.6. Neka je f strogo rastuća primitivno rekurzivna funkcija. Je li $\mathcal{I}_f$ nužno primitivno rekurzivan skup? Što ako je f parcijalno rekurzivna? Obrazložite.

G.2.7. Neka je f^1 padajuća (ne strogo) parcijalno rekurzivna funkcija. Je li $\mathcal{I}_f$ nužno primitivno rekurzivan skup? Detaljno obrazložite.

G.2.8. Neka je f padajuća totalna brojevna funkcija. Dokažite da su f, $\mathcal{G}_f$, $\mathcal{I}_f$ i $\mathcal{D}_f$ primitivno rekurzivni. ▲

G.2.9. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija.

a) Dokažite da je funkcija $ff : \mathcal{I}_f \to \mathbb{N}$ zadana sa $ff(x) = x^2$ parcijalno rekurzivna.

b) Koje je svojstvo funkcije f nužno i dovoljno da ff bude primitivno rekurzivna?

c) Vrijede li isti zaključci za *parcijalno* rekurzivnu funkciju f?

G.2.10. a) Postoji li rekurzivna funkcija f takva da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$m = f(n) \Longrightarrow \{m\}(n) \simeq \{n+1\}(m+1)?$$

b) Postoji li rekurzivna funkcija f takva da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$m = f(n) \Longleftrightarrow \{m\}(n) \simeq \{n+1\}(m+1)\,?$$

G.2.11. a) Postoji li relacija koja nije rekurzivno prebrojiva, ali ima primitivno rekurzivan selektor?

b) Postoji li relacija koja nije rekurzivno prebrojiva, ali je svaki njen selektor primitivno rekurzivan? ▲

G.2.12. Neka je A skup svih indeksa jednomjesnih totalnih funkcija.

a) Dokažite da A nije slika nijedne jednomjesne rekurzivne funkcije.

b) Dokažite da A nije rekurzivno prebrojiv. ▲

G.2.13. Neka je f brojevna funkcija. Dokažite: $f = \mu T$ za neku primitivno rekurzivnu relaciju T ako i samo ako je $\mathcal{G}_f$ primitivno rekurzivan.

G.2.14. Je li svaki neprazan rekurzivno prebrojiv skup slika nekog primitivno rekurzivnog *niza* (jednomjesne funkcije)? ▲

G.2.15. Za $S \subseteq \mathbb{N}$, *enumeracija* od S je strogo rastuća totalna funkcija f^1 čija je slika S.

a) Dokažite da svaki beskonačni skup prirodnih brojeva ima jedinstvenu enumeraciju.

b) Dokažite da je $S \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan i rekurzivan ako i samo ako je S slika neke strogo rastuće rekurzivne funkcije.

c) Vrijedi li tvrdnja (b) ako rekurzivnost zamijenimo primitivnom rekurzivnošću? ▲

G.2.16. Dokažite ili opovrgnite: Za svaku parcijalno rekurzivnu funkciju F postoji parcijalno rekurzivna funkcija G takva da je

a) $\mathcal{D}_F = \mathcal{I}_G$;

b) $\mathcal{I}_F = \mathcal{D}_G$.

G.2.17. Dokažite ili opovrgnite: za svaku rekurzivno prebrojivu relaciju R mjesnosti barem 2 postoji primitivno rekurzivna relacija Q s funkcijskim svojstvom, takva da je $\exists_* Q = \exists_* R$.

G.2.18. Neka je f^1 parcijalno rekurzivna injekcija. Dokažite da je njen inverz (parcijalna funkcija s domenom $\mathcal{I}_f$) također parcijalno rekurzivan. Što možete reći ako f nije injekcija?

G.2.19. Za $e \in \mathbb{N}$, označimo $W_e := \mathcal{D}_{\{e\}^1}$. Dokažite da postoji primitivno rekurzivan skup A takav da za sve $z \in \mathbb{N}$ vrijedi $\bigcap_{x \in A} W_x \neq W_z$.

G.3. Ostali zadaci

G.3.1. Za koje $i, j \in \mathbb{N}_+$ je relacija T_i (iz Kleenejeva teorema o normalnoj formi) svediva na T_j? Obrazložite odgovor.

G.3.2. Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbb{N}$. Dokažite: $A \times B$ je rekurzivno prebrojiv ako i samo ako su A i B oba rekurzivno prebrojivi. Je li uvjet nepraznosti nužan?

G.3.3. Neka je S rekurzivan podskup od $\mathbb{N}$. Dokažite ili opovrgnite: nužno postoji parcijalno rekurzivna funkcija f takva da je $\mathcal{D}_f = S$.

G.3.4. Mora li presjek beskonačne familije rekurzivnih skupova ponovo biti rekurzivan skup?

G.3.5. Dokažite da je skup rekurzivno prebrojivih relacija zatvoren na ograničenu univerzalnu kvantifikaciju. ▲

G.3.6. Neka je S rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$. Dokažite ili opovrgnite: postoji parcijalno rekurzivna funkcija f takva da je $\mathcal{D}_f = \mathcal{I}_f = S$.

G.3.7. Neka je $\mathcal{A}$ prebrojiva familija primitivno rekurzivnih podskupova od $\mathbb{N}$. Mora li skup $\bigcup \mathcal{A}$ biti rekurzivno prebrojiv? Detaljno obrazložite. ▲

G.3.8. Za funkciju f, s $\mathcal{N}_f$ označimo skup nultočaka od f (skup svih $\vec{x}$ takvih da je $f(\vec{x}) = 0$).

1. Dokažite: ako je f parcijalno rekurzivna, tada je $\mathcal{N}_f$ rekurzivno prebrojiv.
2. Je li svaki rekurzivno prebrojiv skup oblika $\mathcal{N}_f$ za neku parcijalno rekurzivnu funkciju f? Obrazložite.

G.3.9. Zadane su dvije tvrdnje za funkciju f^k:

(a) f je parcijalno rekurzivna;

(b) za svaki $a \in \mathbb{N}$, skup $\{\vec{x} \in \mathbb{N}^k \mid f(\vec{x}) = a\}$ je rekurzivno prebrojiv.

Vrijedi li (a)⇒(b)? Vrijedi li (b)⇒(a)? Obrazložite.

G.3.10. Dokažite: skup $A \subseteq \mathbb{N}$ je beskonačan i rekurzivno prebrojiv ako i samo ako je $A = \mathcal{I}_f$ za neku rekurzivnu injekciju f^1.

Dio II.

Neobrađene cjeline

H. Realni brojevi

H.1. Decimalni zapisi

H.1.1. Neka je

$$\sqrt{2} = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

decimalni zapis broja $\sqrt{2}$. Dokažite da je funkcija koja i preslikava u a_i primitivno rekurzivna.

H.1.2. Neka je

$$\sqrt[3]{5} = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

decimalni zapis broja $\sqrt[3]{5}$. Dokažite da je funkcija koja i preslikava u a_i primitivno rekurzivna.

H.1.3. Neka je

$$e = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

decimalni zapis broja e (baze prirodnog logaritma). Dokažite da je funkcija koja i preslikava u a_i rekurzivna.

H.1.4. Dokažite da je funkcija koja 0 preslikava u 0, a svaki pozitivni broj n u n-tu decimalu broja $\sqrt[n]{e}$, rekurzivna.

H.1.5. Neka je

$$\pi = a_0{,}a_1a_2a_3\ldots$$

decimalni zapis broja π (površine jediničnog kruga). Dokažite da je funkcija koja i preslikava u a_i rekurzivna.

H.1.6. Dokažite da postoji primitivno rekurzivna funkcija F^3 takva da za sve $x, y, n \in \mathbb{N}_+$ vrijedi: $F(x, y, n)$ je n-ta znamenka iza decimalne točke u decimalnom zapisu (proširenom nulama ako je konačan) broja $\frac{x}{y}$.

H.1.7. Dokažite da postoji primitivno rekurzivna funkcija G takva da je za sve $n \in \mathbb{N}_+$, $G(n)$ n-ta decimala iza decimalne točke u decimalnom zapisu (proširenom nulama ako je konačan) broja $(n+2)^{-2}$.

H.1.8. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva manjih od 10 takvih da vrijedi

$$\sqrt{3+\sqrt[3]{17}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Dokažite da postoji jedinstveni takav niz, i on je primitivno rekurzivan.

H.1.9. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva za koji vrijedi

$$\log_2 2012 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

i $(\forall n \in \mathbb{N}_+)(a_i < 10)$. Dokažite da postoji jedinstveni takav niz, i on je primitivno rekurzivan.

H.1.10. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva manjih od 10 za koji vrijedi

$$\sqrt[2012]{2012} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Dokažite da postoji jedinstveni takav niz, i da je on primitivno rekurzivan.

H.1.11. Za pozitivan realan broj α, s $[\alpha]$ označimo funkciju koja 0 preslikava u $\lfloor\alpha\rfloor$, a svaki pozitivni broj n u n-tu decimalu iza decimalne točke u decimalnom zapisu (nadopunjenom nulama ako je konačan) broja α.

Neka su α i β pozitivni realni brojevi. Dokažite ili opovrgnite: ako su $[\alpha]$ i $[\beta]$ rekurzivne, tada je nužno i $[\alpha+\beta]$ rekurzivna.

H.2. Invertirano potenciranje

H.2.1. Dokažite da je funkcija f^2 zadana s

$$f(x,y) := \begin{cases} \lfloor \log_x y \rfloor, & x > 1 \wedge y > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

primitivno rekurzivna. ▲

H.2.2. Dokažite da je dvomjesna funkcija f zadana s

$$f(m,n) := \left\lfloor \sqrt{\log_{m+3}(n+1)} \right\rfloor$$

primitivno rekurzivna.

H.2.3. Neka je $f(a,b) :\simeq \log_b a$ (za prirodne a i b) te $S(a,b) :\Longleftrightarrow f(a,b) \in \mathbb{N}$.
Dokažite da je $f|_S$ parcijalno rekurzivna funkcija.

H.2.4. Dokažite da je funkcija f^3, zadana s

$$f(a,x,y) := \left\lfloor \log_{a+2} \frac{x+1}{y+1} \right\rfloor,$$

rekurzivna. Je li i primitivno rekurzivna?

H.2.5. Dokažite da je funkcija f^3 zadana sa

$$f(m,n,k) := \left\lfloor \sqrt[k+11]{\frac{m+k}{(n+2)^k}} \right\rfloor,$$

primitivno rekurzivna.

H.2.6. Dokažite primitivnu rekurzivnost funkcije f^3 zadane sa

$$f(m,n,k) := \left\lfloor \sqrt[m+2]{\frac{\log(m+n+1)}{2\log(m+k+2)}} \right\rfloor.$$

H.2.7. Neka je f^3 definirana kao

$$f(m,n,k) := \left\lfloor \sqrt[k+1]{\frac{m+1}{n+1}} \right\rfloor.$$

Dokažite da je f primitivno rekurzivna.

H.2.8. Neka je $g(t,x) := \left\lfloor \sqrt[t^{\cdot}]{x} \right\rfloor$. ($t^{\cdot}$ je t ako je t pozitivan, a 1 ako je $t = 0$.)
Dokažite da je g primitivno rekurzivna funkcija.

H.3. Kardinalni argument

H.3.1. Neka je zadan broj $r \in \mathbb{N}$. Definiramo relaciju K_r^2 sa $x\, K_r\, y :\Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq r^2$.
Dokažite da je K_r primitivno rekurzivna. Što ako je $r \in \mathbb{R}$? ▲

H.3.2. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}_+$ definirajmo $G_\alpha(n) := \lfloor \alpha n \rfloor$.

a) Postoji li $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da funkcija G_α nije rekurzivna?

b) Postoji li takav $\alpha \in \mathbb{Q}_+$? ▲

I. Aritmetička hijerarhija

I.0.1. Za indeks jednomjesne funkcije f kažemo da je *rascijepljen* ako domena od f nije niti $\varnothing$ niti $\mathbb{N}$. Dokažite da je rascijepljenost jedna Σ_2 relacija. ▲

I.0.2. Dokažite ili opovrgnite: $\approx_1^2 \in \Pi_2$. ▲

I.0.3. Postoji li dvomjesna Δ_2 relacija koja prebraja sve jednomjesne Δ_2 relacije? Obrazložite. ▲

I.0.4. Dokažite da je relacija R^2 rekurzivno prebrojiva ako i samo ako je $R^2 \in \Sigma_1$.

I.0.5. Skicirajte aritmetičku hijerarhiju.
Označite relacije koje pokazuju da su odgovarajuće inkluzije prave.

I.0.6. a) Što znači da je relacija aritmetička?

b) Što znači da je dvomjesna relacija element od Π_3?

I.0.7. Dokažite da postoji tromjesna Σ_2 relacija koja prebraja sve dvomjesne Σ_2 relacije.

I.0.8. Dokažite da je 2-ekvivalentnost na indeksima jedna Π_2 relacija.

I.0.9. Dokažite teorem o aritmetičkoj hijerarhiji.

I.0.10. Dokažite da za svaku aritmetičku relaciju R postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $R \in \Sigma_n$.
Vrijedi li analogna tvrdnja za Π_n? A za Δ_n?

I.0.11. Dokažite teorem o aritmetičkom prebrajanju.

Dio III.

Kolokviji

J. Teorija za prvi kolokvij

J.1. Definicije i iskazi

J.1.1. Definirajte sljedeće pojmove:

a) RAM-izračunljiva funkcija;

b) operator μ;

c) rekurzivni podskup od $\mathbb{N}$.

J.1.2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

a) ekvivalentnost makro- i RAM-strojeva;

b) definicija rekurzivnih funkcija grananjem (po slučajevima);

c) rekurzivnost triju dvomjesnih funkcija definiranih simultanom primitivnom rekurzijom.

J.1.3. Definirajte sljedeće pojmove:

a) ekvivalentni RAM-programi;

b) skup primitivno rekurzivnih funkcija;

c) rekurzivna tromjesna relacija.

J.1.4. Iskažite sljedeće tvrdnje:

a) primitivna rekurzivnost ograničene sume;

b) rekurzivnost funkcije definirane operatorom povijesti;

c) primitivna rekurzivnost dviju jednomjesnih funkcija definiranih simultanom primitivnom rekurzijom.

J.1.5. Definirajte sljedeće pojmove:

a) makro-izračunljiva funkcija;

b) operator $\mathfrak{R}$;

c) rekurzivna dvomjesna relacija.

J.1.6. Iskažite sljedeće tvrdnje:

a) primitivna rekurzivnost višestrukih produkata;

b) odnos skupa svih makro-izračunljivih i skupa svih primitivno rekurzivnih funkcija;

c) primitivna rekurzivnost ograničene minimizacije.

J.1.7. Definirajte sljedeće pojmove:

a) makro-instrukcija;

b) primitivno rekurzivna tromjesna funkcija;

c) P-izračunavanje sa $\vec{x}$, gdje je P RAM-program a $\vec{x} \in \mathbb{N}^+$.

J.1.8. a) Definirajte konkatenaciju konačnih nizova.

b) Nabrojte tipove instrukcija makro-stroja.

c) Što znači da je jednomjesna funkcija definirana pomoću primitivne rekurzije?

d) Iskažite Kleenejev teorem o normalnoj formi.

J.1.9. Iskažite teorem ekvivalencije za jezične funkcije.

J.1.10. Neka je $k \in \mathbb{N}_+$. Što znači da (a) RAM-algoritam, (b) makro-algoritam P^k računa funkciju $f : S \to \mathbb{N}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{N}^k$?

J.1.11. Iskažite Church–Turingovu tezu.

J.1.12. Što znači da izraz $h\big(g(2), f(3,5)\big)$ ima vrijednost?

J.2. Dokazi

J.2.1. Dokažite da ograničenom minimizacijom primitivno rekurzivne funkcije do primitivno rekurzivne uključive granice ponovo dobijemo primitivno rekurzivnu funkciju.

J.2.2. Dokažite da je funkcija S_3^2 primitivno rekurzivna.

J.2.3. Dokažite da je skup RAM-izračunljivih funkcija zatvoren na operator μ.

J.2.4. Dokažite da je svaki konačni skup rekurzivan.

J.2.5. Dokažite primitivnu rekurzivnost konkatenacije konačnih nizova.

J.2.6. Zadan je broj $k \in \mathbb{N}_+$ i primitivno rekurzivna funkcija g^{k+1}. Dokažite da je funkcija zadana s

$$f(y, \vec{x}) := \prod_{i=3}^{y} g(i, \vec{x})$$

primitivno rekurzivna. Prazne produkte smatramo jednakima 1.

J.2.7. Dokažite da ograničenom egzistencijalnom kvantifikacijom rekurzivne relacije, do rekurzivne granice, ponovo dobivamo rekurzivnu relaciju.

J.2.8. Dokažite da ograničenom kvantifikacijom rekurzivne relacije između rekurzivnih granica ponovo dobivamo rekurzivnu relaciju.

J.2.9. Dokažite: ako su f^2, g^3 i h^3 RAM-izračunljive, tada je i $f \circ (g, h)$ RAM-izračunljiva.

J.2.10. Neka su Q^3 i R^3 disjunktne relacije: Q rekurzivna, a R primitivno rekurzivna. Neka su F^3 i G^3 funkcije: F primitivno rekurzivna, a G rekurzivna. Dokažite da je funkcija zadana s

$$H(x, y, z) :\simeq \begin{cases} F(x, y, z), & Q(x, y, z) \\ G(x, y, z), & R(x, y, z) \end{cases}$$

parcijalno rekurzivna. Navedite primjer koji pokazuje da H ne mora biti rekurzivna.

J.2.11. Definirajte funkciju bin^2, dokažite da je primitivno rekurzivna, te izračunajte $\mathrm{bin}(0, 3)$.

J.2.12. Neka je G^2 rekurzivna funkcija. Opišite što znači da je funkcija F definirana pomoću G rekurzijom s potpunom poviješću, i dokažite da je F rekurzivna.

J.2.13. Detaljno dokažite da je funkcija U primitivno rekurzivna.

J.2.14. Dokažite da je skup (a) makro-izračunljivih, (b) LOOP-izračunljivih funkcija zatvoren na primitivnu rekurziju.

J.2.15. Definirajte kodiranje konačnih nizova prirodnih brojeva.
Dokažite da je funkcija Code^5 primitivno rekurzivna.

J.2.16. Dokažite da je svaka konstantna totalna funkcija primitivno rekurzivna.

J.2.17. Dokažite da je konačna unija rekurzivnih relacija iste mjesnosti ponovo rekurzivna.

J.2.18. Dokažite ili opovrgnite: skup parcijalno rekurzivnih funkcija je najmanji skup koji sadrži sve primitivno rekurzivne funkcije i zatvoren je na minimizaciju.

J.3. Pitalice i primjeri

J.3.1. Točno ili netočno:

i) Jednomjesna funkcija f, zadana s: $f(n) = 1$ ako u decimalnom zapisu broja $\sqrt{2}$ postoji bar n uzastopnih znamenki 5, a inače $f(n) = 0$, je parcijalno rekurzivna.

ii) $\mathrm{comp}(x, 15, 2^{125}) \simeq A(x, 9, 7) \bmod 183$ (A je Ackermannova funkcija).

J.3.2. Napišite funkciju U kao kompoziciju funkcijâ pd, lh, ex i inicijalnih.

J.3.3. Odredite (ako postoji) neki y takav da vrijedi $T_2(13, 4, 128, y)$.

J.3.4. Točno ili netočno:

i) Jednomjesna funkcija f, zadana sa: $f(n) = 1$ ako u decimalnom zapisu broja π postoji bar n uzastopnih znamenki 7, a inače $f(n) = 0$, je parcijalno rekurzivna.

ii) $50 \in \mathcal{D}_{\mathsf{lh}}$.

iii) Relacija zadana s $\mathrm{Tot}(e) :\Longleftrightarrow \mathcal{D}_{\{e\}^1} = \mathbb{N}$ je rekurzivna.

J.3.5. Napišite funkciju C_2^4 kao kompoziciju inicijalnih funkcija.

J.3.6. a) Kada koristimo simbol $\simeq$?

b) Neka je P RAM-program, te a i b prirodni brojevi.
Što znači da P-izračunavanje s (a, b) stane?

c) Poredajte sljedeće skupove brojevnih funkcija od najmanjeg do najvećeg:
inicijalne, rekurzivne, parcijalno rekurzivne, primitivno rekurzivne.

d) Izračunajte $\mathsf{lh}(84) \dot{-} 50[2]$.

J.3.7. Točno ili netočno:

i) Funkcija Russell ima indeks.

ii) $T_2(x_1, x_2, e, y) \wedge T_2(x_1, x_2', e, y) \Rightarrow x_2 = x_2'$.

iii) Postoji kodiranje skupa svih funkcija klase C^1 s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

iv) Svi RAM-programi koji ne sadrže instrukciju INC $\mathcal{R}_0$ su međusobno ekvivalentni.

J.3.8. Napišite simboličku definiciju za funkciju pd.

J.3.9. Opišite postupak kodiranja nizova prirodnih brojeva s konačnim nosačem.
Objasnite čemu služi funkcija start i dokažite da je primitivno rekurzivna.
Navedite primjer niza s konačnim nosačem koji nije u slici funkcije start.

K. Teorija za drugi kolokvij

K.1. Definicije i iskazi

K.1.1. Definirajte dijagonalnu funkciju D_k.

K.1.2. Iskažite Churchov teorem.

K.1.3. Definirajte sljedeće pojmove:

a) kōd P-izračunavanja sa $\vec{x}$ (gdje je P RAM-program a $\vec{x} \in \mathbb{N}^+$);

b) makro-instrukcija;

c) rekurzivno prebrojiva četveromjesna relacija.

K.1.4. Definirajte pojam rekurzivno prebrojivog skupa (jednomjesne relacije).
Navedite tri primjera rekurzivno prebrojivih skupova.

K.1.5. Iskažite svih 5 verzija teorema o grananju. ▲

K.1.6. Što znači $R^3 \leq P^2$?

K.2. Dokazi

K.2.1. Dokažite da je svaka rekurzivno prebrojiva relacija projekcija neke rekurzivne relacije.

K.2.2. Dokažite Riceov teorem (pomoću teorema o fiksnoj točki).

K.2.3. Dokažite Postov teorem.

K.2.4. Dokažite lemu o restrikciji: restrikcija parcijalno rekurzivne funkcije na rekurzivno prebrojiv skup je ponovo parcijalno rekurzivna funkcija.

K.2.5. Dokažite teorem o fiksnoj točki.

K.2.6. Dokažite teorem o selektoru.

K.2.7. Imitirajući dokaz teorema rekurzije, dokažite da postoji prirodni broj q koji je indeks funkcije C^1_q. Koliko ima brojeva q s tim svojstvom?

K.2.8. Dokažite teorem o grafu za (a) totalne, (b) parcijalne funkcije.

K.2.9. Dokažite da je svaki rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$ koji sadrži broj 5, slika neke dvomjesne primitivno rekurzivne funkcije. Vrijedi li tvrdnja za ostale mjesnosti funkcije?

K.2.10. Dokažite teorem o parametru.

K.2.11. Dokažite projekcijsku karakterizaciju rekurzivno prebrojivih skupova.

K.2.12. Dokažite da je unija konačno mnogo rekurzivno prebrojivih skupova također rekurzivno prebrojiv skup.

K.2.13. Dokažite rekurzivno prebrojivu verziju teorema o grananju.

K.2.14. Dokažite da postoji parcijalno rekurzivna funkcija koja se ne može proširiti do rekurzivne funkcije.

K.2.15. Neka je $S \subset \mathbb{N}$ i $m := \min S^c$. Neka je $f : S \to \mathbb{N}$ parcijalno rekurzivna funkcija. Proširimo funkciju f na funkciju $\tilde{f}$ tako da dodefiniramo $\tilde{f}(m) := m$. Dokažite da je $\tilde{f}$ također parcijalno rekurzivna funkcija.

K.2.16. Neka je R^4 rekurzivno prebrojiva relacija. Dokažite da je Q^2, zadana s

$$Q(x, z) :\Longleftrightarrow \exists y\, \exists t\, R(x, y, z, t),$$

također rekurzivno prebrojiva.

K.2.17. U standardnom kodiranju $\Sigma_{\log}$:

1. Neka je $\mathrm{Uq}(n) := \langle \forall x_n \rangle$. Dokažite da je Uq^1 primitivno rekurzivna.
2. Neka je $\mathrm{Uqs}(n) := \langle \forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_n \rangle$. Dokažite da je i Uqs primitivno rekurzivna.
3. Dokažite da postoji primitivno rekurzivna funkcija Uc^1 takva da ako je f kod neke formule prvog reda φ, tada je $\mathrm{Uc}(f)$ kod nekog njenog univerzalnog zatvorenja.

K.3. Pitalice i primjeri

K.3.1. Točno ili netočno:

i) Ackermannova funkcija je RAM-izračunljiva.

ii) Ako vrijedi $\{i\}^7 = \{j\}^7$, tada vrijedi i $\{i\}^4 = \{j\}^4$.

K.3.2. Točno ili netočno:

i) Graf selektora od R nužno je jednak R (za sve barem dvomjesne relacije R).

ii) Selektor grafa od f nužno je jednak f (za sve funkcije f).

K.3.3. Navedite tri primjera rekurzivnih skupova, i tri primjera skupova (jednomjesnih relacija) koji nisu rekurzivni.

K.3.4. Točno ili netočno:

i) Skup kodova ispunjivih formula logike prvog reda je rekurzivan.

ii) Svaka brojevna relacija ima selektor (koji je brojevna funkcija).

iii) Postoji rekurzivno prebrojiva relacija na koju su svedive sve rekurzivno prebrojive relacije.

K.3.5. Koliko ima rekurzivno prebrojivih peteromjesnih relacija?

K.3.6. Točno ili netočno:

1. $\widetilde{\mathrm{Russell}}$ je surjekcija.
2. Funkcija $\mathbb{N}\Sigma^*_\beta$ je primitivno rekurzivna.
3. Skup svih indeksa funkcije Z je rekurzivno prebrojiv. ▲

L. Primjeri prvog kolokvija

L.1. (2018./19.)

L.1.1. U početnoj konfiguraciji s ulazom $(8, 3, 0)$ makro-stroj izvršava makro-program koji odgovara funkcijskom pozivu $P_{\mathsf{add}^3}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) \to \mathcal{R}_3$ USING $\mathcal{R}_3$... Napišite svih 5 makro-instrukcija tog programa, te makro-konfiguraciju stroja nakon svake od njih (nakon povratka na „gornju razinu"). ▲

L.1.2. Definirajte ograničenu minimizaciju, i dokažite da ograničenom minimizacijom rekurzivne relacije do primitivno rekurzivne granice dobivamo rekurzivnu funkciju. ▲

L.1.3. Napišite RAM-program koji računa funkciju: (a) Code^1; (b) $\mathsf{bis}(x) := \langle x, x \rangle$. ▲

L.1.4. Za prirodni broj n kažemo da je *palindrom u bazi* $b \geq 2$ ako se njegov zapis u bazi b jednako čita slijeva i zdesna. Recimo, 7 i 252 su palindromi u bazi 10, dok 2828 nije. Dokažite da je to svojstvo primitivno rekurzivno. ▲

L.1.5. Smislite kodiranje konačnih skupova prirodnih brojeva. Dokažite da je to kodiranje. Realizirajte prazan skup, ubacivanje broja u skup, kardinalnost skupa te provjeru je li zadani broj element skupa, na primitivno rekurzivan način. ▲

L.1.6. Dane su funkcije

$$\begin{aligned} \mathsf{pile}(n) &:= \mathsf{block}(0) * \mathsf{block}(1) * \cdots * \mathsf{block}(n-1), \\ \mathsf{block}(n) &:= \langle 60 \cdot 375^{n+1}, 6, 24 \cdot 27^n \rangle. \end{aligned}$$

(a) Za sve $e \in \{\mathsf{block}(0), \mathsf{block}(1), \mathsf{block}(5), \mathsf{pile}(2), \mathsf{pile}(7), \mathsf{pile}(0)\}$ izračunajte $\{e\}(2, 4, 1, 3)$.

(b) Za sve $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_+$, odredite funkciju $\{\mathsf{pile}(n)\}^k$.

(c) Napišite funkciju pile u obliku iz kojeg se vidi da je primitivno rekurzivna. ▲

L.2. (2019./20.)

L.2.1. Opišite postupak spljoštenja makro-programa, spljoštite: $\begin{bmatrix} 0.\ \text{ZERO}\ \mathcal{R}_2 \\ 1.\ \text{REMOVE}\ \mathcal{R}_1\ \text{TO}\ \mathcal{R}_3 \\ 2.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_4 \end{bmatrix}$, i za taj primjer definirajte (statičku) funkciju ν koja opisuje transformaciju vrijednosti programskih brojača pri izvršavanju programa. ▲

L.2.2. Definirajte operator ograničenog množenja ($\prod$) i dokažite da čuva rekurzivnost. ▲

L.2.3. Neka su P^3 i Q^3 primitivno rekurzivne disjunktne relacije te neka su G^3 i H^3 parcijalno rekurzivne funkcije. Definirajte funkciju $\mathrm{if}\{P : G, Q : H\}$ (po slučajevima; svakako napišite i njenu domenu), i dokažite da je parcijalno rekurzivna. ▲

L.2.4. Objasnite što znači oznaka $\mathbin{\widehat{3}}$, navedite primjer računanja $m \mathbin{\widehat{3}} n$ (za $m, n > 20$), i dokažite da je to primitivno rekurzivna operacija. ▲

L.2.5. Dokažite pisanjem programa da je Fibonaccijev niz RAM-izračunljiv. ▲

L.2.6. Smislite kodiranje skupa $\mathbb{Z}$, dokažite da je to kodiranje, te realizirajte ulaganje $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Z}$, apsolutnu vrijednost, i oduzimanje, kao primitivno rekurzivne funkcije na kodovima. ▲

L.2.7. Neka je $e \in \mathbb{N}$ broj koji nije djeljiv s 3, takav da $\{e\}^1$ nije ni prazna niti totalna funkcija. Dokažite da postoji jedinstveni takav broj e, i odredite njegov heksadecimalni zapis. ▲

L.2.8. Postoji li jezična funkcija φ nad $\Sigma := \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ takva da je

$$\mathbb{N}\varphi(x) = \mathrm{pd}(x) \mathbin{/\!/} 4\,?$$

Ovisi li ona o kodiranju $\mathbb{N}\Sigma$? Ako postoji, konstruirajte Turingov stroj koji je računa. ▲

L.3. (2020./21.)

L.3.1. Definirajte operator povijesti funkcije. Dokažite da je funkcija G rekurzivna ako i samo ako je njena povijest $\overline{G}$ rekurzivna. ▲

L.3.2. Formalno definirajte (napišite mu sve komponente) prvi fragment transpiliranog Turingova stroja nad abecedom $\{0, 1\}$, i objasnite čemu služi te kako točno transformira konfiguraciju. ▲

L.3.3. Za prirodni broj kažemo da je *gladak* ako su mu svi eksponenti u rastavu na primfaktore višeznamenkasti. Dokažite da postoji jedinstvena jednomjesna rekurzivna funkcija s glatkim indeksom. Navedite primjer dvije parcijalno rekurzivne jednomjesne funkcije s glatkim indeksima. ▲

L.3.4. Neka je $f(x) := x \mathbin{/\!/} 8 \dot{-} x \bmod 8$. Dokažite ili opovrgnite: slika funkcije f (oznaka $\mathcal{I}_f$) je primitivno rekurzivna. Što možete reći o izračunljivosti funkcije $f|_{\mathcal{I}_f}$? ▲

L.3.5. Osmislite kodiranje Gaußovih cijelih brojeva (to su kompleksni brojevi kojima su realni i imaginarni dio cjelobrojni). Dokažite da je to kodiranje. Realizirajte imaginarnu jedinicu i, kompleksno konjugiranje i ulaganje skupa $\mathbb{N}$ na primitivno rekurzivan način. ▲

L.3.6. Crtanjem dijagrama Turingova stroja dokažite da je operacija prirodnog oduzimanja (restrikcija funkcije sub na relaciju $\geq$) Turing-izračunljiva. ▲

L.4. (2021./22.)

L.4.1. Napišite specifikaciju i implementaciju makroa ARGS $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j$.
Objasnite čemu služi i zašto je specifikacija (s obzirom na uvjet na i i j) baš takva.
Odredite duljinu i širinu RAM-programa P takvog da je $(\text{ARGS } \mathcal{R}_7, \mathcal{R}_5) = P^*$.

L.4.2. Definirajte operator ograničene minimizacije i dokažite da čuva primitivnu rekurzivnost.

L.4.3. Nacrtajte dijagram koji povezuje brojevne funkcije f^4 i $\mathbb{N}\beta f$. Dokažite da komutira. Izrazite f kao kompoziciju $\mathbb{N}\beta f$ i primitivno rekurzivnih funkcija.

L.4.4. Funkcija višeg reda MAP je definirana kao $\text{MAP}\big(f^1, (x_1, \ldots, x_n)\big) \simeq \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$.
Dokažite da je njena prateća funkcija, $\text{map}(e, \langle \vec{x} \rangle) \simeq \langle \text{MAP}(\{e\}^1, \vec{x}) \rangle$, parcijalno rekurzivna.

L.4.5. Smislite kodiranje konačnih podskupova od $\mathbb{Z}$. Dokažite da mu je slika primitivno rekurzivna. Izračunajte kod praznog skupa. Primitivno rekurzivno realizirajte dodavanje elementa u skup. Realizirajte „biti podskup" kao primitivno rekurzivnu relaciju.

L.4.6. Nacrtajte dijagram Turingova stroja koji računa jezičnu funkciju $\mathbb{N}^{-1}\text{Sc}$ nad abecedom $\{i, z, r\}$ kodiranom abecednim redom.

L.5. (2022./23.)

L.5.1. Definirajte degeneriranu primitivnu rekurziju, iskažite tvrdnju da je skup RAM-izračunljivih funkcija zatvoren na taj operator, i dokažite je direktno pisanjem programa.

L.5.2. RAM-program P širine 2 počinje instrukcijom $0.\ \text{INC } \mathcal{R}_1$.
Napišite sve konfiguracije Turingovog stroja nad abecedom $\{x, y\}$ koji simulira P-izračunavanje s 3, od prvog ulaska u stanje p_0 do prvog ulaska u stanje p_1.

L.5.3. Napišite RAM-program koji računa funkciju blh (duljina zapisa broja u pomaknutoj bazi 2). Primjeri: $\text{blh}(4) = |12| = 2$, $\text{blh}(31) = |11111| = 5$, $\text{blh}(0) = |\varepsilon| = 0$.

L.5.4. Označimo s $f(n)$ broj znamenaka broja $n!$ (faktorijel broja n).
Dokažite da je restrikcija $f|_{\mathcal{I}_f}$ funkcije f na vlastitu sliku parcijalno rekurzivna.

L.5.5. Za skup X kažemo da je *h-konačan* ako je konačan i svi elementi su mu h-konačni. Primjerice, $t := \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ je h-konačan, dok $\{6, \sqrt{2}\}$ nije. Za kodiranje h-konačnih skupova $h(X) := \sum_{x \in X} 2^{h(x)}$: (a) primitivno rekurzivno realizirajte relaciju $\in$, funkciju card i ulaganje prirodnih brojeva ($n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$); (b) izračunajte $h(t)$ i $h^{-1}(256)$; (c) odgovorite koju skupovnu operaciju prati bitovni ili.

L.5.6. Dokažite da je jezična funkcija koja pretvara unarni zapis prirodnog broja (pomoću $\bullet$) u dekadski (pomoću 0, 1, ..., 9), Turing-izračunljiva.

L.5.7. Neka su M i N LOOP-programi te $\mathcal{R}_j$, $\mathcal{R}_k$ i $\mathcal{R}_l$ različiti registri. Napišite LOOP-program (s potprogramima M i N) IF $\mathcal{R}_j$ THEN M ELSE N USING $\mathcal{R}_k$,$\mathcal{R}_l$ ekvivalentan naredbi if programskog jezika C: ako je sadržaj $\mathcal{R}_j$ pozitivan, izvrši M, a ako je nula, izvrši N.
$\mathcal{R}_k$ i $\mathcal{R}_l$ su pomoćni registri koje treba resetirati (ne pojavljuju se u M i N).

M. Primjeri drugog kolokvija

M.1. (2018./19.)

M.1.1. Definirajte dijagonalu funkcije, i pomoću nje dokažite teorem rekurzije. ▲

M.1.2. Iskažite i dokažite rekurzivno prebrojivu verziju teorema o grananju. Navedite jednu (teorijsku) primjenu tog teorema. ▲

M.1.3. U nekom kodiranju logičke abecede $\Sigma_{\log} = \{\mathtt{x}, \mathtt{c}, \mathtt{f}, \mathtt{R}, \mathtt{,}, \mathtt{'}, \mathtt{(}, \mathtt{)}, \neg, \to, \forall, \#\}$ (ne nužno onom kanonskom), jedna od formula koje opisuju P-izračunavanje s $\vec{u}^k$ ima kod

$$(\mathtt{494BA\,B2AB2\,21594\,BAB2A\,B2211})_{12}.$$

Je li moguće samo na osnovi te formule zaključiti stane li to izračunavanje? Obrazložite.
Možete li sa sigurnošću odrediti k (mjesnost od $\vec{u}$)? Zašto? ▲

M.1.4. Neka je H^3 zadana parcijalno rekurzivna funkcija.
Dokažite da postoji jedinstvena parcijalno rekurzivna funkcija F koja zadovoljava sustav

$$\begin{aligned} F(0, x) &= 0, \\ F(y+1, x) &\simeq H\big(F(y, 2x), y, x\big). \end{aligned}$$ ▲

M.1.5. Dokažite da sljedeća relacija nije rekurzivna:

$$GR(a, b) :\Longleftrightarrow b \text{ je indeks karakteristične funkcije grafa od } \{a\}^3.$$

Je li projekcija $\exists_* GR$ rekurzivna? Dokažite. ▲

M.1.6. Neka je R brojevna relacija. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:
(a) R je rekurzivno prebrojiva; (b) $R \leq HALT$; (c) $R \leq K$. ▲

M.2. (2019./20.)

M.2.1. Definirajte funkciju (zajedno s pomoćnim funkcijama) koja svodi Kleenejev skup na problem valjanosti, i dokažite da je primitivno rekurzivna. ▲

M.2.2. Dokažite teorem o parametru. ▲

M.2.3. Dokažite da je $(\approx_1, \approx_2, \approx_3, \dots)$ strogo padajući niz prebrojivih relacijâ ekvivalencije. ▲

M.2.4. Napišite specifikaciju i navedite jednu implementaciju funkcijâ pair, fst i snd, te dokažite (za tu implementaciju) da su primitivno rekurzivne i čine kodiranje skupa $\mathbb{N}^2$. ▲

M.2.5. U nekom kodiranju logičke abecede, jedna od formula koje opisuju P-izračunavanje s $\vec{x}$ ima kod $(8122\,8B39\,2A61\,28B3\,92AA)_{12}$. Odredite tu i još jednu formulu u tom skupu. Možete li odrediti kod te druge formule? Možete li odrediti širinu od P? ▲

M.2.6. Dokažite da postoji prirodni broj t takav da je domena funkcije $\{t\}$ jednaka $K \cup \{t\}$. *Bonus:* dokažite da postoji $t \in K$ takav da vrijedi $\mathcal{D}_{\{t\}} = K$. ▲

M.2.7. Dokažite da relacija zadana s $R(a,b) :\Longleftrightarrow \mathcal{I}_{\{a+5\}^2} = \mathcal{I}_{\{b\}^3} \neq \varnothing$ nije rekurzivna. ▲

M.2.8. Za brojevnu relaciju R mjesnosti barem 2, dane su tri tvrdnje sljedećeg oblika:
ako je a)*svaki*; b)*neki*; c)*jedini selektor za* R *rekurzivan,* R *je rekurzivno prebrojiva.*
Za sve tri tvrdnje odgovorite jesu li istinite, te jednu od njih dokažite ili opovrgnite. ▲

M.3. (2020./21.)

M.3.1. Dokažite da je univerzalno zatvorenje primitivno rekurzivno preslikavanje na formulama prvog reda (precizirajte što to točno znači).

M.3.2. Neka je R^5 rekurzivno prebrojiva relacija. Dokažite da je $\exists_*\exists_* R$ također rekurzivno prebrojiva. (Ako provodite isti postupak dvaput, precizno opišite što se mijenja od jedne do druge primjene.)

M.3.3. Neka je $P \in \mathcal{P}rog$ i $\vec{u} \in \mathbb{N}^+$. Jedna od formula koje opisuju P-izračunavanje s $\vec{u}$ ima kod

$$(10A1\ A17A\ 1780\ 5777\ 7731\ B17B\ 1772)_{12}.$$

Odredite (ako je moguće) tu formulu, duljinu i širinu od P, te duljinu od $\vec{u}$. Ako se nešto ne može jednoznačno odrediti, navedite sve mogućnosti i primjere za svaku.

M.3.4. Dokažite da postoji jedinstvena rekurzivna funkcija f^2 koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} f(x, y+2) \simeq f\big(f(x+1, y), y+1\big) \\ f(x,1) \simeq f(x,0) \simeq x^2 \end{cases}.$$

M.3.5. Neka je P^5 relacija zadana s

$$P(a,b,c,d,e) :\Longleftrightarrow \mathrm{comp}(a,b,c) \simeq \mathrm{comp}(d,e).$$

Dokažite da P^C nije rekurzivno prebrojiva.

M.3.6. Neka je R^3 rekurzivno prebrojiva relacija (podskup od $\mathbb{N}^3$). Dokažite ili opovrgnite: svaki podskup od R je rekurzivno prebrojiv ako i samo ako je R konačan skup.

M.4. (2021./22.)

M.4.1. Dokažite da Kleenejev skup K nije rekurzivan (i lemu potrebnu u dokazu).

M.4.2. Neka su G_1^3 i G_2^3 parcijalno rekurzivne funkcije. Dokažite da postoje e_1 i e_2 takvi da za sve x vrijedi

$$\{e_1\}(x) \simeq G_1(x, e_1, e_2),$$
$$\{e_2\}(x) \simeq G_2(x, e_1, e_2).$$

M.4.3. Dokažite teorem o selektoru.

M.4.4. U Peanovoj strukturi $(\mathbb{N}, 0, Sc, +, \cdot)$, koje svojstvo broja x_0 izražava formula koda

$$(1234\,2344\,1567\,4676\,7634\,9987\,6763\,4499\,9839)_{12}\,?$$

M.4.5. Dokažite da postoji rekurzivna funkcija f koja zadovoljava sustav

$$f(x, 0) = 2^x,$$
$$f(x, y + 1) \simeq x^y + f(x^x, y)\ .$$

M.4.6. Za jedan od sljedeća dva skupa:

$$S_1 := \{e \mid e \text{ je indeks funkcije } \mathrm{add}^k \text{ za neki } k \geq 2\},$$
$$S_2 := \{e \mid e \text{ je indeks funkcije } \mathrm{mul}^k \text{ za neki } k \geq 2\};$$

dokažite da nije rekurzivan.
Označite u svom dokazu mjesto gdje takav dokaz ne prolazi za onaj drugi skup.

M.4.7. Odredite nužne i dovoljne uvjete na relaciju S^k takve da svaka rekurzivna relacija T^l (za svaki $l \in \mathbb{N}_+$) bude svediva na nju. Dokažite svoje tvrdnje!

M.5. (2022./23.)

M.5.1. Postoji li parcijalno rekurzivna funkcija iz $\mathbb{N}$ u $\{0, 1\}$ takva da ne postoji njeno rekurzivno proširenje? Dokažite svoje tvrdnje!

M.5.2. Dokažite teorem o grafu za parcijalne funkcije (pomoću teorema o selektoru).

M.5.3. U nekom kodiranju logičke abecede, jedna od formulā koje opisuju P-izračunavanje s $\vec{u}^k$ ima kod $(1223\,24C5\,6783\,24C5\,6778\,1232\,B257\,C567\,8362\,5C56\,777)_{12}$.
Je li k jedinstveno određen? Stane li to izračunavanje? Obrazložite!

M.5.4. Dokažite da je svako rješenje sljedećeg sustava rekurzivna funkcija:

$$f(x, 0) \simeq f(x, 1) \simeq x^x$$
$$f(x, y + 2) \simeq f\big(f(x, y), y + 1\big).$$

M.5.5. Definirajmo dvomjesnu brojevnu relaciju s $a \operatorname{Dom} b :\Longleftrightarrow \{b\} = \chi_{\mathcal{D}_{\{a\}}}$.
Je li Dom primitivno rekurzivna? Obrazložite! Odredite kardinalnost skupa $(\exists_* \mathrm{Dom})^c$.

M.5.6. Ako su R i S rekurzivno prebrojive brojevne relacije (ne nužno iste mjesnosti), mora li $R \times S$ biti rekurzivno prebrojiva? Vrijedi li obrat? Dokažite!

N. Primjeri popravnog kolokvija

N.1. (2018./19.)

N.1.1. Dokažite da su skupovi $\mathcal{P}\mathrm{rog}$ i $\mathcal{C}\mathrm{omp}$ prebrojivi (beskonačni).

N.1.2. Dokažite da ograničenim brojenjem rekurzivne relacije dobijemo rekurzivnu funkciju, te da njenom ograničenom kvantifikacijom ponovo dobijemo rekurzivnu relaciju.

N.1.3. Dokažite da skup K nije rekurzivan (i lemu potrebnu u dokazu).

N.1.4. Neka je R rekurzivno prebrojiva relacija. Definirajte primitivno rekurzivnu relaciju P čija je R projekcija. Može li se postići da P ima funkcijsko svojstvo?

N.1.5. Neka je $\mathcal{R}_j$ registar, te P^* makro. Definirajte makro WHILE $\mathcal{R}_j$ DO P^*, čija je semantika ista kao semantika petlje `while` u jeziku C: dok je sadržaj $\mathcal{R}_j$ pozitivan, izvršava P^*.

N.1.6. Za konačni niz $\vec{x}$ kažemo da je *palindrom* ako je jednak svom obrnutom nizu: recimo, $(1, 15, 1)$ i (7) su palindromi, dok $(28, 82)$ nije. Dokažite da je svojstvo „biti palindrom" na skupu svih konačnih nizova prirodnih brojeva primitivno rekurzivno.

N.1.7. Svaki *LOOP-program* je konačan neprazan niz LOOP-instrukcija. Svaka *LOOP-instrukcija* je ili INC $\mathcal{R}_j$, ili DEC $\mathcal{R}_j$, ili $\mathcal{R}_j\{L\}$, gdje je $\mathcal{R}_j$ registar, a L LOOP-program. Smislite kodiranje LOOP-instrukcija i LOOP-programa.

N.1.8. Dokažite ili opovrgnite: za svaki $e \in \mathbb{N}$ postoji $f \in \mathrm{Prog}$ koji nije djeljiv s 256, takav da za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ vrijedi $e \approx_k f$.

N.1.9. Dokažite: brojevna funkcija f je dobivena minimizacijom neke primitivno rekurzivne relacije R ako i samo ako joj je graf primitivno rekurzivan.

N.1.10. Nad logičkom abecedom $\Sigma_{\log}$ konstruirajte Turingov stroj koji preslikava formule prvog reda u njihove negacije (to je parcijalna specifikacija — ako ulaz nije formula prvog reda, stroj može raditi bilo što).

N.1.11. Dokažite da postoji rekurzivna funkcija f^2 čija slika se sastoji od svih višekratnika od e, gdje je e neki (fiksni) indeks za f.

N.1.12. Dokažite da skup indeksa svih tromjesnih funkcija koje poprimaju vrijednost 7 nije rekurzivan, ali jest rekurzivno prebrojiv. Što možete reći o komplementu tog skupa?

N.2. (2019./20.)

N.2.1. Definirajte što znači da je skup funkcija zatvoren na minimizaciju.
Dokažite da je skup RAM-izračunljivih funkcija zatvoren na minimizaciju.

N.2.2. Napišite specifikaciju funkcijâ lh i part.
Dokažite da postoje primitivno rekurzivne funkcije koje zadovoljavaju tu specifikaciju.

N.2.3. Definirajte strukturu $\mathfrak{N}$ korištenu u dokazu da $\Gamma_t \vDash \zeta$ povlači $K(t)$, i dokažite $\mathfrak{N} \vDash \pi_t$.

N.2.4. Dokažite da je svaki neprazni rekurzivno prebrojivi skup prirodnih brojeva slika nekog primitivno rekurzivnog niza.

N.2.5. Napišite makro-program koji odlučuje jesu li dva broja relativno prosti.
Smijete koristiti RAM-programe P^2_{add}, P^2_{sub}, P^2_{mul}, P^2_{div}, $P^2_{<}$ i $P^2_{=}$ za odgovarajuće funkcije.

N.2.6. Neka je $f(x, y) := x \bmod 7 + y^2$. Je li $\mathcal{I}_f$ primitivno rekurzivan skup? Obrazložite.

N.2.7. Smislite kodiranje skupa $\mathbb{N}[x]$ polinomâ u jednoj varijabli s prirodnim koeficijentima.
Primitivno rekurzivno realizirajte polinom x, zbrajanje, derivaciju i evaluaciju u točki.

N.2.8. Može li kôd P-izračunavanja s $\vec{x}$ biti manji od $\langle \vec{x} \rangle$? A od $\ulcorner P \urcorner$? Dokažite.

N.2.9. Nad logičkom abecedom $\Sigma_{\log}$ konstruirajte Turingov stroj koji računa
funkciju parcijalno specificiranu kao $\vartheta : \mathsf{F1}^2 \to \mathsf{F1}$, zadanu s $\vartheta(\phi, \psi) := (\phi \to \psi)$.
(Ne morate provjeriti da su na ulazu doista formule, ali morate provjeriti da je mjesnost 2.)

N.2.10. Neka su G i H rekurzivne funkcije. Dokažite da postoji rekurzivna funkcija F
takva da vrijedi $F(2x + 1) = H\big(F(x)\big)$ i $F(2x + 2) = G\big(F(x)\big)$ za sve $x \in \mathbb{N}$.

N.2.11. Dokažite da je skup svih 3-invarijantnih skupova zatvoren na skupovnu razliku $\setminus$.

N.2.12. Navedite primjer rekurzivno prebrojive relacije R takve da je $\mu R = \chi_{K^C}$.
Postoji li rekurzivna relacija R s tim svojstvom?

N.2.13. Neka je $E(t, k) :\Leftrightarrow t \approx_k 0$. Dokažite da $\exists_* E$ nije slika nijednog rekurzivnog niza.

N.3. (2020./21.)

N.3.1. Nacrtajte dijagram koji povezuje brojevne funkcije f^3 i $\mathbb{N}\beta f$. Dokažite da taj dijagram komutira. Izrazite f pomoću $\mathbb{N}\beta f$ i primitivno rekurzivnih funkcija.

N.3.2. Neka je $Q^3 \leq R^2$. Koja od tvrdnji „Q je rekurzivno prebrojiva” i „R je rekurzivno prebrojiva” povlači onu drugu? Navedite dokaz odnosno kontraprimjer.

N.3.3. Neka je $\mathcal{R}_j$ registar te P^* makro. Definirajte makro DO P^* WHILE $\mathcal{R}_j$, sa semantikom petlje `do...while` iz jezika C.

N.3.4. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Smislite kodiranje grupe permutacija S_n. Dokažite da je slika kodiranja rekurzivna; realizirajte sve potrebno za grupu (identitetu, kompoziciju i inverz).

N.3.5. Nađite primitivno rekurzivnu funkciju koja indeksu totalne funkcije H^2 pridružuje indeks funkcije $0 \mathbin{\mathrm{FR}} H$.

N.3.6. Jesu li funkcije Russell i $\widetilde{\mathrm{Russell}}$ surjekcije? Koliko fiksnih točaka imaju? Obrazložite sve odgovore.

N.3.7. Odredite sve $k \in \mathbb{N}_+$ za koje je relacija $\approx_k$ rekurzivna. Dokažite svoje tvrdnje.

N.3.8. Neka su Q i R brojevne relacije iste mjesnosti veće od 2.
Dokažite ili opovrgnite: $Q \leq R$ ako i samo ako $\exists_* Q \leq \exists_* R$.

N.4. (2021./22.)

N.4.1. Definirajte konfiguraciju RAM-stroja i relaciju prijelaza između konfiguracija po RAM-programu P. Dokažite ili opovrgnite: $c \rightsquigarrow c$ ako i samo ako je c završna konfiguracija.

N.4.2. Ako imamo kodiranje $\mathbb{N}S$ skupa S, objasnite što znači da je binarna operacija $*$ na skupu S primitivno rekurzivna. Dokažite to za operaciju konkatenacije na $S := \mathbb{N}^*$.

N.4.3. Iskažite i dokažite teorem o parametrima (pomoću teorema o parametru).

N.4.4. Napišite RAM-program koji računa funkciju $\mathsf{snd} = \$(1, \mathsf{part})$.

N.4.5. Definirajmo $\textsc{filter}\big(R^1, (x_1, \ldots, x_n)\big) :\simeq (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, gdje je $i_1 < \cdots < i_k$ i $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{t \in [1 \cdot\cdot\, n] \mid R(x_t)\}$. Primjer: $\textsc{filter}\big(\mathbb{P}, (0, 7, 6, 2, 1, 3)\big) = (7, 2, 3)$. Dokažite da je prateća funkcija, $\mathsf{filter}(e, \langle \vec{x} \rangle) :\simeq \langle \textsc{filter}(R, \vec{x}) \rangle$ gdje je $\chi_R = \{e\}^1$, makro-izračunljiva.

N.4.6. Dokažite da postoji jedinstvena primitivno rekurzivna funkcija F^1 takva da je $F = \overline{\overline{F}}$.

N.4.7. Postoji li $e \in \mathsf{Prog}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{e\}} = [0 \cdot\cdot\, e]^2$ i $\mathcal{I}_{\{e\}} = [0 \cdot\cdot\, e]$?
Postoji li $f \in \mathsf{Prog}$ takav da je $\mathcal{D}_{\{f\}} = [0 \cdot\cdot\, f]$ i $\mathcal{I}_{\{f\}} = [0 \cdot\cdot\, f^2]$? Obrazložite svoje tvrdnje!

N.4.8. Dokažite da skup $\{e \mid e$ je indeks funkcije I_4^k za neki $k\}$ nije primitivno rekurzivan.

N.4.9. Dokažite ili opovrgnite: ako su R^k i Q^l rekurzivno prebrojive brojevne relacije, tada je i $(R \times Q)^{k+l}$ takva. Vrijedi li obrat?

N.5. (2022./23.)

N.5.1. Dokažite da svaki RAM-algoritam računa jedinstvenu brojevnu funkciju.

N.5.2. Dokažite da je relacija svedivosti $\leq$ (na skupu svih brojevnih relacija) tranzitivna.

N.5.3. Navedite primjer relacije B^1 takve da ni B ni B^c nisu rekurzivno prebrojive.
Dokažite svoje tvrdnje!

N.5.4. Napišite makro-program koji odlučuje svojstvo „biti palindrom” (u bazi 10).
Smijete koristiti RAM-programe za osnovne računske operacije add, sub, mul, div i mod.

N.5.5. Neka su $j, l, a, b \in \mathbb{N}$ te L LOOP-program. Napišite LOOP-program

$$a \cdot\cdot b \to \mathcal{R}_j\{L\} \text{ USING } \mathcal{R}_l$$

čija semantika je petlja koja izvršava L uvrštavanjem za $\mathcal{R}_j$ vrijednosti a, $a+1$, ..., b. Ako je $a > b$ ne događa se ništa. $\mathcal{R}_l$ je pomoćni registar ($j \neq l$) koji treba resetirati.

N.5.6. Odredite domenu i sliku funkcije $\{\langle 540, 750^2, 6, 6, 24\rangle\}^3$.

N.5.7. Nad abecedom $\{\mathtt{i}, \mathtt{z}, \mathtt{r}\}$ kodiranom abecednim redom, konstruirajte Turingov stroj koji računa funkciju $\mathbb{N}^{-1}f$, gdje je $f(x) := 27(x+1)+7$.

N.5.8. Promotrite funkciju koja prima varijablu x i formulu φ i vraća formulu $\exists! x\varphi$ (u osnovnom logičkom jeziku). Dokažite da je njena prateća funkcija primitivno rekurzivna.

N.5.9. Dokažite da postoji $e \in \mathsf{Prog}$ takav da je funkcija $\{e\}^1$ definirana samo u broju e te njena vrijednost tamo iznosi e.

N.5.10. Dokažite ili opovrgnite:

a) Ako je skup S k-invarijantan za neki k, onda je i l-invarijantan za svaki $l > k$.

b) Ako je skup S k-invarijantan za neki k, onda je i l-invarijantan za svaki $l < k$.

Dio IV.

Funkcijski API

O. Funkcijski API [!Nedovršeno!]

O.1. Osnovne funkcije i operatori

Nulfunkcija

Vrsta: inicijalna funkcija
Ime: Z
Mjesnost: 1
Argumenti: x: irelevantan
Vraća: 0

Sljedbenik

Vrsta: inicijalna funkcija
Ime: Sc
Mjesnost: 1
Argumenti: x: bilo koji prirodni broj
Vraća: $x + 1$

Koordinatna projekcija

Vrsta: familija inicijalnih funkcija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
n: broj iz $[1 \cdot\cdot k]$
Ime: I_n
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: k prirodnih brojeva
Vraća: x_n

Karakteristična funkcija

Vrsta: operator koji po definiciji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: brojevna relacija mjesnosti k
Mjesnost: k
Oznaka: χ_R
Argumenti: $\vec{x}$: ulaz za R
Vraća: 1 ako vrijedi $R(\vec{x})$, inače 0

Kompozicija

Vrsta: osnovni operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost i parcijalnu rekurzivnost
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
$G_1, G_2, \ldots, G_l$: l brojevnih funkcija mjesnosti k
H: brojevna funkcija mjesnosti l
Oznaka: $H \circ (G_1, G_2, \ldots, G_l)$
Točkovni zapis: $H\big(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \ldots, G_l(\vec{x})\big)$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Domena: $(\forall i \in [1 \cdot\cdot\, l])(\vec{x} \in \mathcal{D}_{G_i}) \wedge \big(G_1(\vec{x}), G_2(\vec{x}), \ldots, G_l(\vec{x})\big) \in \mathcal{D}_H$
Vraća: $H(g_1, g_2, \ldots, g_l)$ nakon: $g_i \leftarrow G_i(\vec{x})$ za sve $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$

Konstanta

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih funkcija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
n: prirodni broj
Ime: C_n
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: irelevantni
Vraća: n

Primitivna rekurzija

Vrsta: osnovni operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
G: totalna brojevna funkcija mjesnosti k (inicijalizacija petlje)
H: totalna brojevna funkcija mjesnosti $k + 2$ (tijelo petlje)
Oznaka: $G \mathbin{\mathrm{PR}} H$
Mjesnost: $k + 1$
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: kontekst
y: broj izvršavanja tijela petlje
Domena: funkcija je totalna
Vraća: z nakon $z \leftarrow G(\vec{x})$; $z \leftarrow H(\vec{x}, 0, z)$; $z \leftarrow H(\vec{x}, 1, z)$; $\cdots$; $z \leftarrow H(\vec{x}, y - 1, z)$

Zbrajanje

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih funkcija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Ime: add
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: pribrojnici
Točkovni zapis: $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$
Vraća: zbroj svih argumenata

Množenje

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih funkcija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Ime: mul
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: faktori
Točkovni zapis: $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$
Vraća: umnožak svih argumenata

Potenciranje

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Ime: pow
Mjesnost: 2
Argumenti: x: baza
y: eksponent
Točkovni zapis: x^y
Vraća: vrijednost potencije x na y

Degenerirana primitivna rekurzija

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: a: prirodni broj, početni uvjet
H: totalna brojevna funkcija mjesnosti 2
Oznaka: $a \mathbin{\mathrm{PR}} H$
Mjesnost: 1
Argumenti: y: broj poziva funkcije H
Vraća: z nakon $z \leftarrow a$; $z \leftarrow H(0, z)$; $z \leftarrow H(1, z)$; $\cdots$; $z \leftarrow H(y - 1, z)$

Faktorijel

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Ime: factorial
Mjesnost: 1
Argumenti: n: prirodni broj
Točkovni zapis: $n!$
Vraća: umnožak svih prirodnih brojeva iz $[1 \cdot\cdot\, n]$

Zamjena nule jedinicom

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 1
Argumenti: x: prirodni broj
Točkovni zapis: $x^{\cdot}$
Vraća: x ako je pozitivan, inače 1

Prethodnik

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Ime: pd
Mjesnost: 1
Argumenti: x: prirodni broj
Vraća: $x - 1$ ako je to prirodan broj, inače 0

Ograničeno oduzimanje

Vrsta: primitivno rekurzivna operacija
Ime: sub
Mjesnost: 2
Argumenti: x: umanjenik
y: umanjitelj
Oznaka: $\dot{-}$
Točkovni zapis: $x \dot{-} y$
Vraća: $x - y$ ako je to prirodan broj, inače 0

Pozitivnost

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Oznaka: $\mathbb{N}_+$
Mjesnost: 1
Argumenti: x: prirodni broj promatran kao istinitosna vrijednost
Vraća: je li $x > 0$

Obrnuti strogi uređaj

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Oznaka: $>$
Točkovni zapis: $x > y$
Mjesnost: 2
Argumenti: x, y: prirodni brojevi za usporedbu
Vraća: je li x strogo veći od y

Strogi uređaj

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Oznaka: $<$
Točkovni zapis: $x < y$
Mjesnost: 2
Argumenti: x, y: prirodni brojevi za usporedbu
Vraća: je li x strogo manji od y

Projekcija

Vrsta: operator koji ne čuva rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: brojevna relacija mjesnosti $k+1$
Oznaka: $\exists_* R$
Točkovni zapis: $\exists y\, R(\vec{x}, y)$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: kontekst
Vraća: vrijedi li $R(\vec{x}, y)$ za neki prirodni broj y

Minimizacija

Vrsta: osnovni operator koji čuva parcijalnu rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: brojevna relacija mjesnosti $k+1$
Oznaka: μR
Točkovni zapis: $\mu y\, R(\vec{x}, y)$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: kontekst
Domena: $\exists y\, R(\vec{x}, y)$
Vraća: najmanji y takav da vrijedi $R(\vec{x}, y)$

Prazna relacija

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih relacija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Oznaka: $\varnothing$
Točkovni zapis: $\perp$
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: irelevantni
Vraća: laž

Prazna funkcija

Vrsta: familija parcijalno rekurzivnih funkcija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Ime: $\otimes$
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: irelevantni
Domena: prazna

O.2. Složenije funkcije i operatori

Komplement

Vrsta: operator na relacijama koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: brojevna relacija mjesnosti k
Oznaka: R^C
Točkovni zapis: $\neg R(\vec{x})$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Vraća: laž ako je $R(\vec{x})$, inače istinu

Nestrogi uređaj

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Oznaka: $\leq$
Točkovni zapis: $x \leq y$
Mjesnost: 2
Argumenti: x, y: prirodni brojevi za usporedbu
Vraća: je li x manji ili jednak y

Obrnuti nestrogi uređaj

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Oznaka: $\geq$
Točkovni zapis: $x \geq y$
Mjesnost: 2
Argumenti: x, y: prirodni brojevi za usporedbu
Vraća: je li x veći ili jednak y

Presjek

Vrsta: operator na relacijama koji čuva (primitivnu) rekurzivnost i rekurzivnu prebrojivost
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
$R_1, R_2, \ldots, R_l$: brojevne relacije mjesnosti k
Oznaka: $\bigcap_{i=1}^{l} R_i$
Točkovni zapis: $R_1(\vec{x}) \wedge R_2(\vec{x}) \wedge \cdots \wedge R_l(\vec{x})$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Vraća: jesu li sve $R_1(\vec{x}), R_2(\vec{x}), \ldots, R_l(\vec{x})$ istina

Unija

Vrsta: operator na relacijama koji čuva (primitivnu) rekurzivnost i rekurzivnu prebrojivost
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
$R_1, R_2, \ldots, R_l$: brojevne relacije mjesnosti k
Oznaka: $\bigcup_{i=1}^{l} R_i$
Točkovni zapis: $R_1(\vec{x}) \vee R_2(\vec{x}) \vee \cdots \vee R_l(\vec{x})$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Vraća: je li barem jedna od $R_1(\vec{x}), R_2(\vec{x}), \ldots, R_l(\vec{x})$ istina

Skupovna razlika

Vrsta: operator na relacijama koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R, P: brojevne relacije mjesnosti k
Oznaka: $R \setminus P$
Točkovni zapis (komplement): $R(\vec{x}) \rightarrow P(\vec{x})$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Vraća: istinu ako je $R(\vec{x})$, ali ne $P(\vec{x})$; inače laž

Simetrična skupovna razlika

Vrsta: operator na relacijama koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R, P: brojevne relacije mjesnosti k
Oznaka: $R \triangle P$
Točkovni zapis (komplement): $R(\vec{x}) \leftrightarrow P(\vec{x})$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Vraća: je li točno jedna od $R(\vec{x})$ i $P(\vec{x})$ istina

Jednakost

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Oznaka: $=$
Točkovni zapis: $x = y$
Mjesnost: 2
Argumenti: x, y: prirodni brojevi za usporedbu
Vraća: jesu li x i y jednaki

Grananje

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
$R_1, R_2, \ldots, R_l$: disjunktne brojevne relacije mjesnosti k
$G_0, G_1, G_2, \ldots, G_l$: brojevne funkcije mjesnosti k
Oznaka: $\mathrm{if}\{R_1 : G_1, R_2 : G_2, \ldots, R_l : G_l, G_0\}$
Točkovni zapis $(l = 1)$: $\begin{cases} G_1(\vec{x}), & R_1(\vec{x}) \\ G_0(\vec{x}), & \text{inače} \end{cases}$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Domena: $R_i(\vec{x})$ i postoji $G_i(\vec{x})$ za neki $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$; ili nijedan $R_i(\vec{x})$ i postoji $G_0(\vec{x})$
Vraća: $G_i(\vec{x})$ ako vrijedi $R_i(\vec{x})$ za bilo koji $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$; inače $G_0(\vec{x})$

Strogo grananje

Vrsta: operator koji čuva parcijalnu rekurzivnost
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
$R_1, R_2, \ldots, R_l$: disjunktne brojevne relacije mjesnosti k
$G_1, G_2, \ldots, G_l$: brojevne funkcije mjesnosti k
Oznaka: $\mathrm{if}\{R_1 : G_1, R_2 : G_2, \ldots, R_l : G_l\}$
Točkovni zapis $(l = 2)$: $\begin{cases} G_1(\vec{x}), & R_1(\vec{x}) \\ G_2(\vec{x}), & R_2(\vec{x}) \end{cases}$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Domena: $R_i(\vec{x})$ i postoji $G_i(\vec{x})$ za neki $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$
Vraća: $G_i(\vec{x})$ ako vrijedi $R_i(\vec{x})$ za bilo koji $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$

Konačna relacija

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih relacija
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
$\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_l}$: k-torke prirodnih brojeva
Oznaka: $\{\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_l}\}$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Vraća: je li $\vec{x}$ jednak bilo kojoj $\vec{c_i}$, za $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$

Editiranje totalne funkcije

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k, l: pozitivni prirodni brojevi
G: totalna brojevna funkcija mjesnosti k
$\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_l}$: različite k-torke prirodnih brojeva
$y_1, y_2, \ldots, y_l$: l prirodnih brojeva
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Domena: funkcija je totalna
Vraća: y_i ako je $\vec{x} = \vec{c_i}$ za neki $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$; inače $G(\vec{x})$

Proširenje nulom

Vrsta: operator koji ne čuva parcijalnu rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
G: brojevna funkcija mjesnosti k
Oznaka: $\tilde{G}$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: k prirodnih brojeva
Domena: funkcija je totalna
Vraća: $G(\vec{x})$ ako postoji; inače 0

Dinamizacija

Vrsta: operator koji ne čuva parcijalnu rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
$G_0, G_1, G_2, \ldots$: brojevne funkcije mjesnosti k
Mjesnost: $k + 1$
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: ulaz za izabranu funkciju
i: redni broj izabrane funkcije
Vraća: $G_i(\vec{x})$ ako postoji

Ograničena suma

Vrsta: operator koji u oba smjera čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
G: totalna funkcija mjesnosti k
Točkovni zapis: $\sum_{i<y} G(\vec{x}, y)$
Mjesnost: k
Domena: funkcija je totalna
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k - 1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: prvih koliko vrijednosti od G treba zbrojiti
Vraća: zbroj $G(\vec{x}, 0) + G(\vec{x}, 1) + \cdots + G(\vec{x}, y - 1)$

Ograničeni produkt

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
G: totalna funkcija mjesnosti k
Točkovni zapis: $\prod_{i<y} G(\vec{x}, i)$
Mjesnost: k
Domena: funkcija je totalna
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k-1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: prvih koliko vrijednosti od G treba pomnožiti
Vraća: umnožak $G(\vec{x}, 0) \cdot G(\vec{x}, 1) \cdots G(\vec{x}, y-1)$

Ograničeno brojenje

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: relacija mjesnosti k
Točkovni zapis: $(\# i < y)\, R(\vec{x}, i)$
Mjesnost: k
Domena: funkcija je totalna
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k-1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: granica do koje se broje elementi od R
Vraća: broj k-torki u R kojima je zadnja koordinata manja od y, a ostale koordinate su $\vec{x}$

Ograničena egzistencijalna kvantifikacija

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: relacija mjesnosti k
Točkovni zapis: $(\exists i < y)\, R(\vec{x}, i)$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k-1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: granica do koje ispitujemo elemente od R
Vraća: vrijedi li $R(\vec{x}, i)$ za neki $i \in [0 \cdot\cdot\, y\rangle$

Ograničena univerzalna kvantifikacija

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: relacija mjesnosti k
Točkovni zapis: $(\forall i < y)\, R(\vec{x}, i)$
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k-1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: granica do koje ispitujemo elemente od R
Vraća: vrijedi li $R(\vec{x}, i)$ za sve $i \in [0 \cdot\cdot\, y\rangle$

Ograničena minimizacija

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
R: relacija mjesnosti k
Točkovni zapis: $(\mu i < y)\, R(\vec{x}, i)$
Mjesnost: k
Domena: funkcija je totalna
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k-1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: granica do koje se traži element od R
Vraća: najmanji $i \in [0 \cdot\cdot\, y\rangle$ takav da vrijedi $R(\vec{x}, i)$ ako takav postoji; inače y

O.3. Kodiranja

Kodiranje

Vrsta: intuitivno (neformalno) izračunljiva funkcija
Parametri: $\mathcal{K}$: skup koji sadrži objekte osim prirodnih brojeva
Ime: $\mathbb{N}\mathcal{K}$
Mjesnost: 1
Domena: $\mathcal{K}$
Argumenti: κ: objekt s kojim se radi
Vraća: kōd od κ

Dekodiranje

Vrsta: parcijalno specificirana, intuitivno (neformalno) izračunljiva funkcija
Parametri: $\mathcal{K}$: skup koji sadrži objekte osim prirodnih brojeva
Ime: $\mathbb{N}\mathcal{K}^{-1}$
Mjesnost: 1
Argumenti: x: kōd nekog objekta κ
Vraća: (jedinstveni) objekt κ čiji je x kōd

Prateća funkcija

Vrsta: operator koji u intuitivnom (neformalnom) smislu čuva izračunljivost
Parametri (za mjesnost 1): $\mathcal{K}$: skup koji sadrži objekte osim prirodnih brojeva
$\mathbb{N}\mathcal{K}$: kodiranje skupa $\mathcal{K}$
φ: funkcija iz $\mathcal{K}$ u $\mathcal{K}$
Mjesnost: 1
Argumenti: x: kōd nekog objekta κ
Vraća: kōd objekta $\varphi(\kappa)$, ako postoji

Kodiranje konačnih nizova

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih funkcija, i jedan broj (konstruktori)
Parametri: k: prirodni broj
Ime: Code
Mjesnost: k (broj ako je $k = 0$)
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: k prirodnih brojeva (ako je $k > 0$)
Točkovni zapis: $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$; $\langle\rangle$ ako je $k = 0$
Vraća: $2^{x_1+1} \cdot 3^{x_2+1} \cdots p_{k-1}^{x_k+1}$ ($2, 3, \ldots, p_{k-1}$ su prvih k prim-brojeva); 1 ako je $k = 0$

Povijest

Vrsta: operator koji u oba smjera čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
G: totalna funkcija mjesnosti k
Oznaka: $\overline{G}$
Mjesnost: k
Domena: funkcija je totalna
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k - 1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: prvih koliko vrijednosti od G treba zapamtiti
Vraća: $\langle G(\vec{x}, 0), G(\vec{x}, 1), \ldots, G(\vec{x}, y - 1) \rangle$

Cjelobrojno dijeljenje

Vrsta: primitivno rekurzivna operacija
Oznaka: $/\!/$
Mjesnost: 2
Argumenti: x: djeljenik
y: djelitelj (može biti 0)
Točkovni zapis: $x /\!/ y$
Vraća: najveće cijelo od $\frac{x}{y}$ ako je $y > 0$; inače x

Ostatak cjelobrojnog dijeljenja

Vrsta: primitivno rekurzivna operacija
Oznaka: mod
Mjesnost: 2
Argumenti: x: djeljenik
y: djelitelj (može biti 0)
Točkovni zapis: $x \mathrm{ mod } y$
Vraća: ostatak pri dijeljenju x s y ako je $y > 0$; inače x

Djeljivost

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Mjesnost: 2
Argumenti: y: djelitelj (može biti 0)
x: djeljenik
Točkovni zapis: $y \mid x$
Vraća: je li x djeljiv s y (ako je $y = 0$, vraća je li $x = 0$)

Prim-brojevi

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Mjesnost: 1
Oznaka: $\mathbb{P}$
Argumenti: n: prirodni broj
Vraća: je li n prost

Enumeracija prim-brojeva

Vrsta: primitivno rekurzivni niz
Ime: prime
Mjesnost: 1
Argumenti: n: prirodni broj
Točkovni zapis: p_n
Vraća: n-ti po veličini prim-broj (počevši s $p_0 = 2$)

Sljedeći prim-broj

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: nextprime
Mjesnost: 1
Argumenti: p: prim-broj, dakle $p = p_n$ za neki n
Vraća: p_{n+1}, sljedeći prim-broj po veličini nakon p

Primorijel

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 1
Argumenti: p: prim-broj
Točkovni zapis: $p\#$
Vraća: umnožak svih prim-brojeva iz $[2 \cdot\cdot p]$

Eksponent prim-faktora

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: ex
Mjesnost: 2
Argumenti: x: pozitivni prirodni broj
i: redni broj prim-broja p_i
Vraća: broj faktora p_i u rastavu od x

Duljina konačnog niza

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: lh
Mjesnost: 1
Argumenti: c: kōd konačnog niza $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$
Vraća: k, duljinu konačnog niza $\vec{x}$

Član konačnog niza

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: part
Mjesnost: 2
Argumenti: c: kōd konačnog niza $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$
i: redni broj člana (počevši od 0)
Točkovni zapis: $c[i]$
Vraća: x_{i+1} ako postoji, inače 0

Kodovi konačnih nizova

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: Seq
Mjesnost: 1
Argumenti: c: prirodni broj
Vraća: je li $c = \langle \vec{x} \rangle$ za neki $\vec{x} \in \mathbb{N}^*$

Kodovi nepraznih konačnih nizova

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: Seq′
Mjesnost: 1
Argumenti: c: prirodni broj
Vraća: je li $c = \langle \vec{x} \rangle$ za neki $\vec{x} \in \mathbb{N}^+$

Prateća funkcija konkatenacije konačnih nizova

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna operacija
Oznaka: $*$
Mjesnost: 2
Argumenti: $c = \langle \vec{x} \rangle$ za neki $\vec{x} \in \mathbb{N}^*$
$d = \langle \vec{y} \rangle$ za neki $\vec{y} \in \mathbb{N}^*$
Točkovni zapis: $c * d$
Vraća: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, kōd konkatenacije konačnih nizova $\vec{x}$ i $\vec{y}$

Simultana primitivna rekurzija

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: prirodni broj
l: pozitivni prirodni broj
$\vec{G} := (G_1, G_2, \ldots, G_l)$: l totalnih funkcija mjesnosti k (l prirodnih brojeva za $k = 0$)
$\vec{H} := (H_1, H_2, \ldots, H_l)$: l totalnih funkcija mjesnosti $k + l + 1$ (tijelo petlje)
i: redni broj tražene funkcije, $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$
Mjesnost: $k + 1$
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, k prirodnih brojeva (ako je $k > 0$)
y: broj izvršavanja tijela petlje
Vraća: z_i nakon $\vec{z} \leftarrow \vec{G}(\vec{x})$; $\vec{z} \leftarrow \vec{H}(\vec{x}, 0, \vec{z})$; $\vec{z} \leftarrow \vec{H}(\vec{x}, 1, \vec{z})$; $\cdots$; $\vec{z} \leftarrow \vec{H}(\vec{x}, y - 1, \vec{z})$

Rekurzija s poviješću

Vrsta: operator koji čuva (primitivnu) rekurzivnost
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
G: totalna funkcija mjesnosti k
Mjesnost: k
Argumenti: $\vec{x}$: kontekst, $k - 1$ prirodnih brojeva (ako je $k > 1$)
y: broj poziva funkcije G
Vraća: z nakon: $p \leftarrow \langle\rangle$; $(y + 1)$ puta $\{z \leftarrow G(\vec{x}, p);\ p \leftarrow p * \langle z \rangle\}$

Stražnji član konačnog niza

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: rpart
Mjesnost: 2
Argumenti: c: kōd konačnog niza $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$
i: redni broj člana (počevši od 0 zdesna)
Vraća: x_{k-i} ako postoji, inače 0

Fibonaccijevi brojevi

Vrsta: primitivno rekurzivni niz
Ime: Fib
Mjesnost: 1
Argumenti: n: prirodni broj
Točkovni zapis: F_n
Vraća: n-ti Fibonaccijev broj (F_n je zbroj F_{n-1} i F_{n-2} ako oni postoje, a inače n)

Kodovi formula logike sudova

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: PF
Mjesnost: 1
Argumenti: n: prirodni broj
Vraća: je li n kōd neke formule logike sudova (propozicijske varijable, negacije ili kondicionala)

O.4. Interpreter za RAM-stroj

Kodiranje RAM-instrukcija

Vrsta: kodiranje
Mjesnost: 1
Domena: $\mathcal{I}ns$
Argumenti: I: RAM-instrukcija
Točkovni zapis: $\ulcorner I \urcorner$
Vraća: kōd instrukcije I (inkrementa, dekrementa ili bezuvjetnog skoka)

Kodiranje RAM-instrukcije inkrementa

Vrsta: primitivno rekurzivni konstruktor
Ime: codeINC
Mjesnost: 1
Argumenti: j: adresa registra koji se inkrementira
Točkovni zapis: $\ulcorner \textsc{inc}\ \mathcal{R}_j \urcorner$
Vraća: $\langle 0, j \rangle$, kōd instrukcije koja inkrementira $\mathcal{R}_j$

Kodiranje RAM-instrukcije dekrementa

Vrsta: primitivno rekurzivni konstruktor
Ime: codeDEC
Mjesnost: 2
Argumenti: j: adresa registra koji se inkrementira
l: odredište na koje prelazi izvršavanje programa ako je sadržaj $\mathcal{R}_j$ nula
Točkovni zapis: $\ulcorner \textsc{dec}\ \mathcal{R}_j, l \urcorner$
Vraća: $\langle 1, j, l \rangle$, kōd instrukcije koja dekrementira $\mathcal{R}_j$ ako može, a inače postavlja PC na l

Kodiranje RAM-instrukcije bezuvjetnog skoka

Vrsta: primitivno rekurzivni konstruktor
Ime: codeGOTO
Mjesnost: 1
Argumenti: l: odredište na koje prelazi izvršavanje programa
Točkovni zapis: $\ulcorner$GO TO $l\urcorner$
Vraća: $\langle 2, l\rangle$, kōd instrukcije koja postavlja PC na l

Kodovi RAM-instrukcija inkrementa

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: InsINC
Mjesnost: 1
Argumenti: i: prirodni broj
Vraća: je li i kōd neke RAM-instrukcije tipa INC

Kodovi RAM-instrukcija dekrementa

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: InsDEC
Mjesnost: 1
Argumenti: i: prirodni broj
Vraća: je li i kōd neke RAM-instrukcije tipa DEC

Kodovi RAM-instrukcija bezuvjetnog skoka

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: InsGOTO
Mjesnost: 1
Argumenti: i: prirodni broj
Vraća: je li i kōd neke RAM-instrukcije tipa GO TO

Kodovi RAM-instrukcija

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Ime: Ins
Mjesnost: 1
Argumenti: i: prirodni broj
Vraća: je li i kōd ikakve RAM-instrukcije (bilo kojeg tipa)

Adresa registra zahvaćenog instrukcijom

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 1
Ime: regn
Argumenti: i: prirodni broj
Vraća: j ako je $i = \ulcorner$INC $\mathcal{R}_j\urcorner$ ili $i = \ulcorner$DEC $\mathcal{R}_j, l\urcorner$; inače 0

Odredište instrukcije

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 1
Ime: dest
Argumenti: i: prirodni broj
Vraća: l ako je $i = \ulcorner \textsc{dec}\ \mathcal{R}_j, l \urcorner$ ili $i = \ulcorner \textsc{go to}\ l \urcorner$; inače 0

Kodiranje RAM-programa

Vrsta: kodiranje
Mjesnost: 1
Argumenti: $P = (I_0, I_1, \ldots, I_{n-1})$: RAM-program
Točkovni zapis: $\ulcorner P \urcorner$
Vraća: $\langle \ulcorner I_0 \urcorner, \ulcorner I_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner I_{n-1} \urcorner \rangle$, kōd RAM-programa P

Kodovi RAM-programa

Vrsta: primitivno rekurzivno svojstvo prirodnih brojeva
Mjesnost: 1
Ime: Prog
Argumenti: e: prirodni broj
Vraća: je li e kōd nekog RAM-programa

Kodiranje nizova s konačnim nosačem

Vrsta: kodiranje
Argumenti: $(r_i)_i$: niz s konačno mnogo članova različitih od nule
Točkovni zapis: $\langle r_0, r_1, r_2, \ldots, 0, 0, \ldots \rangle$
Vraća: broj u čijem rastavu na prim-faktore ima r_i faktora p_i, za sve i

Kodiranje stanja registara RAM-konfiguracije

Vrsta: kodiranje
Mjesnost: 1
Argumenti: c: RAM-konfiguracija (preciznije, samo registri bez programskog brojača)
Točkovni zapis: $c[\mathcal{R}]$
Vraća: $\langle c(\mathcal{R}_0), c(\mathcal{R}_1), c(\mathcal{R}_2), \ldots, 0, 0, \ldots \rangle$

Početna RAM-konfiguracija zadanog ulaza

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Ime: start
Mjesnost: 1
Argumenti: x: kōd konačnog niza $\vec{x}$
Vraća: $\langle 0, \vec{x}, 0, 0, \ldots \rangle$, kōd stanja registara početne konfiguracije RAM-stroja s ulazom $\vec{x}$

Izlazni podatak završne RAM-konfiguracije

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: result
Argumenti: r: kōd stanja registara RAM-stroja u završnoj konfiguraciji c
Domena specifikacije: $r > 0$
Vraća: izlazni podatak (sadržaj registra $\mathcal{R}_0$) konfiguracije c

Prateća funkcija prijelaza stanja registara

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: NextReg
Mjesnost: 2
Argumenti: i: kōd RAM-instrukcije I (ili 0)
r: kōd stanja registara prije izvršavanja instrukcije I
Vraća: kōd stanja registara nakon izvršavanja instrukcije I (ili r ako je $i = 0$)

Prateća funkcija prijelaza programskog brojača

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: NextCount
Mjesnost: 3
Argumenti: i: kōd RAM-instrukcije I
r: kōd stanja registara prije izvršavanja instrukcije I
p: vrijednost programskog brojača prije izvršavanja instrukcije I
Vraća: vrijednost programskog brojača nakon izvršavanja instrukcije I

Stanje registara korakom izračunavanja

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: Reg
Mjesnost: 3
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$
e: kōd RAM-programa P
n: broj koraka izračunavanja
Vraća: kōd stanja registara nakon n koraka P-izračunavanja s $\vec{x}$

Programski brojač korakom izračunavanja

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: Count
Mjesnost: 3
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$
e: kōd RAM-programa P
n: broj koraka izračunavanja
Vraća: vrijednost programskog brojača nakon n koraka P-izračunavanja s $\vec{x}$

Završnost konfiguracije

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija
Mjesnost: 3
Ime: Final
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$ (inače vraća laž)
e: kōd RAM-programa P (inače vraća laž)
n: broj koraka izračunavanja
Vraća: je li dostignuta završna konfiguracija nakon n koraka P-izračunavanja s $\vec{x}$

Problem zaustavljanja

Vrsta: rekurzivno prebrojiva ali nerekurzivna relacija
Ime: HALT
Mjesnost: 2
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$ (inače vraća laž)
e: kōd RAM-programa P (inače vraća laž)
Vraća: stane li P-izračunavanje s $\vec{x}$

Brojenje koraka RAM-izračunavanja

Vrsta: parcijalno rekurzivna funkcija
Ime: step
Mjesnost: 2
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$
e: kōd RAM-programa P
Domena: P-izračunavanje s $\vec{x}$ stane
Vraća: broj koraka nakon kojih P-izračunavanje s $\vec{x}$ prvi put dostigne završnu konfiguraciju

Graf brojenja koraka RAM-izračunavanja

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija s funkcijskim svojstvom
Ime: Step
Mjesnost: 3
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$ (inače vraća laž)
e: kōd RAM-programa P (inače vraća laž)
n: broj koraka izračunavanja
Vraća: je li n jednak $\mathrm{step}(x, e)$

Univerzalna funkcija

Vrsta: parcijalno rekurzivna funkcija
Ime: univ
Mjesnost: 2
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$
e: kōd RAM-programa P
Domena: P-izračunavanje s $\vec{x}$ stane
Vraća: rezultat P-izračunavanja s $\vec{x}$

Kodiranje RAM-izračunavanja

Vrsta: kodiranje
Argumenti: $(c_n)_n$: RAM-izračunavanje koje stane (samo registri bez programskog brojača)
Vraća: $\langle c_0[\mathcal{R}], c_1[\mathcal{R}], \ldots, c_{n_0}[\mathcal{R}]\rangle$, gdje je n_0 mjesto prve pojave završne konfiguracije

Graf koda RAM-izračunavanja

Vrsta: primitivno rekurzivna relacija s funkcijskim svojstvom
Ime: $\check{T}$
Mjesnost: 3
Argumenti: x: kōd nepraznog konačnog niza $\vec{x}$ (inače vraća laž)
e: kōd RAM-programa P (inače vraća laž)
t: kōd RAM-izračunavanja $(c_n)_n$ (inače vraća laž)
Vraća: je li $(c_n)_n$ upravo P-izračunavanje s $\vec{x}$

Kriške grafa koda RAM-izračunavanja

Vrsta: familija primitivno rekurzivnih relacija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Ime: T_k
Mjesnost: $k+2$
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: ulaz izračunavanja
e: kōd RAM-programa P (inače vraća laž)
t: kōd RAM-izračunavanja $(c_n)_n$ (inače vraća laž)
Vraća: je li $(c_n)_n$ upravo P-izračunavanje s $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Kriške problema zaustavljanja

Vrsta: familija nerekurzivnih relacija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Ime: Halt_k
Mjesnost: $k+1$
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: ulaz izračunavanja
e: kōd RAM-programa P (inače vraća laž)
Vraća: stane li P-izračunavanje s $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Rezultat RAM-izračunavanja

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Ime: U
Mjesnost: 1
Argumenti: t: kōd RAM-izračunavanja koje stane
Vraća: rezultat tog RAM-izračunavanja

Kriške univerzalne funkcije

Vrsta: familija parcijalno rekurzivnih funkcija
Parametri: k: pozitivni prirodni broj
Ime: comp_k
Mjesnost: $k+1$
Argumenti: $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$: ulaz izračunavanja
e: kōd RAM-programa P
Vraća: rezultat P-izračunavanja s $\vec{x}$, ako postoji

Funkcije zadane indeksima

Vrsta: familija parcijalno rekurzivnih funkcija
Parametri: e: prirodni broj
k: pozitivni prirodni broj
Oznaka: $\{e\}$
Mjesnost: k
Argumenti: $x_1, x_2, \ldots, x_k$: k prirodnih brojeva
Vraća: $\mathrm{comp}_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, e)$, ako postoji

Prateće funkcije višeg reda

Vrsta: operator koji u suprotnom smjeru po definiciji čuva izračunljivost
Parametri (za mjesnost 1): k, l: pozitivni prirodni brojevi
F: funkcija iz $\mathcal{C}omp_k$ u $\mathcal{C}omp_l$
Oznaka: $\mathbb{N}F$
Argumenti: e: prirodni broj
Vraća: neki indeks za $F(\{e\}^k)$, ako postoji

O.5. Turing-izračunljivost

Kodiranje ulazne abecede

Vrsta: familija kodiranja
Parametri: b: pozitivni prirodni broj
Σ: skup s b elemenata
$\leq$: linearni (refleksivni) uređaj na Σ
Oznaka: σ
Mjesnost: 1
Argumenti: α: znak iz Σ
Vraća: broj znakova $\beta \in \Sigma$ takvih da je $\beta \leq \alpha$

Shortlex

Vrsta: operator (proširenje) na uređajima
Parametri: b: pozitivni prirodni broj
Σ: skup s b elemenata
$\preceq$: linearni (refleksivni) uređaj na Σ
Mjesnost: 2
Oznaka: $\prec$
Argumenti: u, v: riječi nad Σ
Vraća: je li u kraća od v, ili je pak u jednake duljine kao v i pritom leksikografski prije v

Kodiranje ulaznih riječi

Vrsta: operator (proširenje) na kodiranjima
Parametri: b: pozitivni prirodni broj
Σ: skup s b elemenata
σ: kodiranje abecede Σ
Mjesnost: 1
Oznaka: σ
Argumenti: $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$: riječ nad Σ
Točkovni zapis: $\langle\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\rangle$
Vraća: broj čiji je zapis $\big(\sigma(\alpha_1)\sigma(\alpha_2)\cdots\sigma(\alpha_k)\big)_b = \sum_{i=1}^{k}\big(\sigma(\alpha_i)\cdot b^{k-i}\big)$ u pomaknutoj bazi b

Duljina riječi

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 2
Ime: slh
Argumenti: n: kōd riječi w nad nekom abecedom Σ
b: pozitivni prirodni broj, broj znakova u Σ
Vraća: $|w|$, duljinu riječi w

Ekstrakcija znaka iz riječi

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 3
Ime: sdigit
Argumenti: n: kōd riječi w nad nekom abecedom Σ
i: redni broj ekstrahiranog znaka, počevši od nule slijeva
b: pozitivni prirodni broj, broj znakova u Σ
Domena specifikacije: $i < \mathrm{slh}(n, b)$
Vraća: kōd i-tog znaka od w

Prateća funkcija konkatenacije riječi

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 3
Ime: sconcat
Argumenti: m: kōd riječi w nad nekom abecedom Σ
n: kōd riječi v nad istom abecedom Σ
b: pozitivni prirodni broj, broj znakova u Σ
Točkovni zapis: $m \mathbin{\widehat{\mathfrak{b}}} n$
Vraća: kōd konkatenacije $\langle wv \rangle$

Prefiks riječi

Vrsta: parcijalno specificirana primitivno rekurzivna funkcija
Mjesnost: 3
Ime: sprefix
Argumenti: n: kōd riječi w nad nekom abecedom Σ
i: duljina prefiksa
b: pozitivni prirodni broj, broj znakova u Σ
Domena specifikacije: $i \leq \mathrm{slh}(n, b)$
Vraća: kōd riječi koja se sastoji od prvih i znakova od w

Prateća funkcija jezične funkcije

Vrsta: operator koji u oba smjera čuva izračunljivost
Parametri: Σ: abeceda
σ: kodiranje od Σ
φ: jezična funkcija nad Σ
Mjesnost: 1
Oznaka: $\mathbb{N}\varphi$
Argumenti: n: kōd riječi w nad Σ
Vraća: kōd riječi $\varphi(w)$, ako ona postoji

Kodiranje stanja Turingova stroja

Vrsta: kodiranje
Parametri: $\mathcal{T}$: Turingov stroj (prepoznavač, odlučitelj ili enumerator)
q_0: početno stanje od $\mathcal{T}$
$q_+ \in \{q_z, q_a, q_p\}$: završno, prihvaćajuće ili izlazno stanje od $\mathcal{T}$
$q_- \in \{q_x, q_r\}$: stanje greške ili stanje odbijanja od $\mathcal{T}$ (ako postoji)
Mjesnost: 1
Domena: Q, skup stanja od $\mathcal{T}$
Oznaka: $\mathbb{N}Q$
Argument: q: stanje od $\mathcal{T}$
Vraća: broj iz $[0 \cdot\cdot\, a\rangle$, gdje je a broj stanja od $\mathcal{T}$; $q_0 \mapsto 0, q_+ \mapsto 1, q_- \mapsto 2$

Kodiranje radne abecede Turingova stroja

Vrsta: kodiranje
Parametri: $\mathcal{T}$: Turingov stroj, s ulaznom abecedom Σ i prazninom $\sqcup$
σ: kodiranje od Σ
Mjesnost: 1
Domena: Γ, radna abeceda od $\mathcal{T}$
Oznaka: $\mathbb{N}\Gamma$
Argumenti: γ: mogući znak na traci od $\mathcal{T}$
Vraća: nulu za $\gamma = \sqcup$; $\sigma(\gamma)$ za $\gamma \in \Sigma$; inače broj iz $\langle \operatorname{card}\Sigma \cdot\cdot \operatorname{card}\Gamma \rangle$

Kodiranje trake Turingova stroja

Vrsta: kodiranje
Parametri: $\mathcal{T}$: Turingov stroj, s radnom abecedom Γ i prazninom $\sqcup$
$\mathbb{N}\Gamma$: kodiranje od Γ
Domena: $(t_n)_n : \mathbb{N} \to \Gamma$, pri čemu je $t_n = \sqcup$ za sve osim konačno mnogo brojeva n
Argumenti: $(t_n)_n$: moguća traka od $\mathcal{T}$
Točkovni zapis: $\langle t_0 t_1 t_2 \cdots \sqcup\sqcup \ldots \rangle$
Vraća: broj $\sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{N}\Gamma(t_n) \cdot b^n\big)$, gdje je $b := \operatorname{card}\Gamma$

Pisanje riječi na traku

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Parametri: $\mathcal{T}$: Turingov stroj, s ulaznom abecedom Σ, radnom abecedom Γ i prazninom $\sqcup$
σ: kodiranje riječi nad Σ
$\mathbb{N}\Gamma$: kodiranje od Γ
Ime: Recode
Mjesnost: 3
Argumenti: $r = \sigma(w)$ za neku riječ w nad Σ
b': broj elemenata u Σ
b: broj elemenata u Γ
Domena specifikacije: $b' < b$
Vraća: $\langle w \sqcup\sqcup \ldots \rangle$

Čitanje riječi s trake

Vrsta: primitivno rekurzivna funkcija
Parametri: $\mathcal{T}$: Turingov stroj, s ulaznom abecedom Σ, radnom abecedom Γ i prazninom $\sqcup$
σ: kodiranje riječi nad Σ
$\mathbb{N}\Gamma$: kodiranje od Γ
Ime: Recode
Mjesnost: 3
Argumenti: $t = \langle w \sqcup\sqcup \ldots \rangle$ za neku riječ w nad Σ
b: broj elemenata u Γ
b': broj elemenata u Σ
Domena specifikacije: $b' < b$ i zapis t u bazi b koristi samo znamenke iz $[1 \cdot\cdot b']$ (ili je $t = 0$)
Vraća: $\langle w \rangle$

Dio V.

Rješenja

A.1.1 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 6 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 6 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 4 \end{bmatrix}$

A.1.2 a) $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 4 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 2 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \end{bmatrix}$

A.1.3 Jedan takav je:

$$P_{max} := \begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 7 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 4 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 10 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 4 \\ 7.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 10 \\ 8.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 9.\ \textsc{go to}\ 7 \end{bmatrix}.$$

A.1.4 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 6 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 1 \end{bmatrix}$

Funkcija sgn na $\mathbb{N}$ poprima samo dvije vrijednosti: 0 u nuli, a 1 na pozitivnim brojevima, pa se podudara s karakterističnom funkcijom $\chi_{\mathbb{N}_+}$. Dakle, $f(0, y) = 0$ (što osigurava 0. instrukcija), a inače je $f(x, y) = \lceil \frac{y}{3} \rceil$.

A.1.5 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 5 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 9 \\ 6.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 7.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 0 \\ 8.\ \textsc{go to}\ 6 \end{bmatrix}$

A.1.6 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 6 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 5 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$

A.1.7 $\begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 8 \\ 2.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 2 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 4.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 6.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 8 \\ 7.\ \text{GO TO}\ 5 \end{bmatrix}$

A.2.1 $P_= := \begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \\ 3.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 5 \\ 4.\ \text{GO TO}\ 6 \\ 5.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$

A.2.2 (a) $\begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$ ili $\begin{bmatrix} 0.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 2.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_0, 0 \\ 3.\ \text{GO TO}\ 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$.

A.2.3 $\begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 8 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 5 \\ 2.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_4 \\ 3.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_3, 11 \\ 4.\ \text{GO TO}\ 1 \\ 5.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_4, 0 \\ 6.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_2 \\ 7.\ \text{GO TO}\ 5 \\ 8.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_3, 10 \\ 9.\ \text{GO TO}\ 11 \\ 10.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$

Graf k-mjesne funkcije je $(k+1)$-mjesna relacija, pa zapravo treba napisati RAM-program koji računa karakterističnu funkciju tog grafa. Ta funkcija je tromjesna — prima x, y i z, te provjerava je li $x \cdot y = z$ (odnosno, je li točka (x, y, z) element grafa funkcije mul^2): ako jest vraća 1, inače vraća 0.

A.2.4 $P_< := \begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 4 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$, $P_> := \begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 3 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$.

A.3.1 $\begin{bmatrix} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 1 \\ 2.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 5 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 4.\ \text{GO TO}\ 1 \\ 5.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_2, 5 \end{bmatrix}$

Za razliku od karakterističnih funkcija (koje su totalne, pa izračunavanje uvijek mora stati), restrikcije $F|_S$ obično nisu totalne pa moramo osigurati da izračunavanje ne stane za ulaze koji nisu u skupu S. Ovdje je to postignuto posljednjom instrukcijom.

A.3.2 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 3 \\ 2.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 6 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 5 \\ 6.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \end{bmatrix}$

A.3.4 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 3 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 1 \\ 2.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 8 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 6.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 7.\ \textsc{go to}\ 3 \end{bmatrix}$

Ako je $(z, r) \in S$, tada je očito $z = x + y \geq x - y = r$, dakle $z - r \in \mathbb{N}$. Također, tada je $\max\{z, r\} = z$ i $\min\{z, r\} = r$, pa je $f(z, r) = z - r = (x + y) - (x - y) = 2y$ paran broj.

S druge strane, ako je $z - r \in 2\mathbb{N}$, tada (uz $y := \frac{z-r}{2} \in \mathbb{N}$ i $x := y + r \geq y$) vrijedi $(z, r) \in S$, i $f(z, r) = z - r$.

Dakle, samo treba izračunati $z - r$ (izraz koji nema vrijednost za $z < r$) i provjeriti da je to paran broj.

A.3.5 (a) $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 5 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 1 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 4.\ \textsc{go to}\ 0 \end{bmatrix}$.

A.3.8 (a) $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 10 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 7 \\ 3.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 10 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 4 \\ 7.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 10 \\ 8.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 10 \\ 9.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 9 \end{bmatrix}$.

A.3.10 $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 5 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 5 \end{bmatrix}$

A.3.12 $\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 1 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 4 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 3 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 7 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 4 \end{array}\right]$

A.3.13 $\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 1 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 4 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 4 \\ 5.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 7 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 6 \end{array}\right]$

A.4.1 Koristimo funkcijske makroe koji odgovaraju RAM-programima P_{add} koji je napisan dolje i P_{max} koji je napisan u rješenju zadatka A.1.3.

$$P_{add} := \left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 3 \end{array}\right] \qquad Q_f := \left[\begin{array}{l} 0.\ P_{add}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_4\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_8.. \\ 1.\ P_{add}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3) \to \mathcal{R}_5\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_8.. \\ 2.\ P_{add}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3) \to \mathcal{R}_6\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_8.. \\ 3.\ P_{max}(\mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5) \to \mathcal{R}_7\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_8.. \\ 4.\ P_{max}(\mathcal{R}_7, \mathcal{R}_6) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_8.. \end{array}\right]$$

A.4.5 $\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{move}\ \mathcal{R}_1\ \textsc{to}\ \mathcal{R}_2\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_3 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 1 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 2 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 5 \\ 4.\ \textsc{go to}\ 1 \\ 5.\ P_{mul}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_3.. \end{array}\right]$,

gdje je $P_{mul} := \left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 3 \\ 1.\ P_{add}(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_3.. \\ 2.\ \textsc{go to}\ 0 \end{array}\right]^{\flat}$, a P_{add} je napisan u rješenju zadatka A.4.1.

A.4.6 $\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 7 \\ 4.\ P_H(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_3.. \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 3 \end{array}\right]$

A.4.8
$$\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_3 \\ 1.\ P_{>}(\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_3) \to \mathcal{R}_4\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_7.. \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_4, 10 \\ 3.\ \textsc{move}\ \mathcal{R}_1\ \textsc{to}\ \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_7 \\ 4.\ P_{pow}(\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0) \to \mathcal{R}_5\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_7.. \\ 5.\ P_{=}(\mathcal{R}_5,\mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_6\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_7.. \\ 6.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_6, 8 \\ 7.\ \textsc{go to}\ 11 \\ 8.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 10 \\ 9.\ \textsc{go to}\ 4 \\ 10.\ P_{add}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_7.. \end{array}\right]$$

gdje je
$$P_{pow} := \left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 4 \\ 2.\ P_{mul}(\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_3.. \\ 3.\ \textsc{go to}\ 1 \end{array}\right]^{\flat},$$

a P_{mul}, P_{add}, $P_{>}$ i $P_{=}$ su napisani već prije.

$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1^i$	$\mathcal{R}_2^i$	$\mathcal{R}_3^C$	$\mathcal{R}_4^?$	$\mathcal{R}_5$	$\mathcal{R}_6^?$
z	x	y	1	$y > 1$	y^z	$y^z = x$

Legenda (superskripti oznaka registara):
i: ulaz C: konstanta ?: bool

A.4.9
$$\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{move}\ \mathcal{R}_1\ \textsc{to}\ \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_4 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 2 \\ 3.\ P_{mul}(\mathcal{R}_0,\mathcal{R}_0) \to \mathcal{R}_2\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_4.. \\ 4.\ P_{\leq}(\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_3\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_4.. \\ 5.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_3, 2 \end{array}\right]$$

A.4.10 $7 \cdot (2+3) + 1 + 2 = 38$.

A.5.2 Napisat ćemo LOOP-program koji računa funkciju $\chi_{\mathbb{P}}$. Iz toga će slijediti da je $\chi_{\mathbb{P}}$ LOOP-izračunljiva, te je $\chi_{\mathbb{P}}$ primitivno rekurzivna, odnosno skup $\mathbb{P}$ je primitivno rekurzivan. Jedan takav LOOP-program je

$$\begin{array}{l} L_{\mathbb{P}} := (\textsc{inc}\ \mathcal{R}_2; L_{>}(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_0\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_6..; \\ \quad \mathcal{R}_1\{\ L_{|}(\mathcal{R}_3,\mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_4\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_6..; \\ \quad\quad \mathcal{R}_4\{\ L_{>}(\mathcal{R}_3,\mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_5\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_6..; \\ \quad\quad\quad \mathcal{R}_5\{\textsc{dec}\ \mathcal{R}_0\} \\ \quad\quad \};\textsc{inc}\ \mathcal{R}_3; \\ \quad \}) \end{array}$$

— koristili smo potprograme koji računaju relacije $>$ i $|$, koji postoje jer su te relacije primitivno rekurzivne pa su LOOP-izračunljive.

$\mathcal{R}_0^?$	$\mathcal{R}_1^i$	$\mathcal{R}_2^C$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4^?$	$\mathcal{R}_5^?$
$x \in \mathbb{P}$	x	1	y	$y \mid x$	$y > 1$

A.5.9 Za RAM-algoritam P^1, gdje je $P := [\ 0.\ \textsc{go to}\ 0\ ]$, očito ni za koji x P-izračunavanje s x ne stane (PC je nakon svakog koraka 0), što znači da P^1 računa praznu funkciju $\otimes^1$. Dakle, $\otimes^1$ je RAM-izračunljiva. S druge strane, $\otimes^1$ nije LOOP-izračunljiva jer su sve LOOP-izračunljive funkcije totalne, a $\otimes^1$ to očito nije ($\mathcal{D}_{\otimes^1} = \varnothing \neq \mathbb{N}$).

A.6.2 Očito, svaki RAMv3-program je RAM-program, pa je jedan smjer trivijalan. Za drugi smjer, neka je f^k RAM-izračunljiva, i neka je P^k RAM-algoritam koji je računa. Označimo s $m := \max\{m_P, k+1\}$ širinu tog algoritma. Iz definicije RAM-izračunavanja slijedi da čitavo vrijeme P-izračunavanja s bilo kojim $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, registar $\mathcal{R}_m$ ima sadržaj 0. To pak znači da bezuvjetni skok $\textsc{go to}\ \ell$ možemo simulirati instrukcijom $\textsc{dec}\ \mathcal{R}_m, \ell$. Ako s P' označimo program dobiven iz P zamjenom svih instrukcija tipa $\textsc{go to}$ na navedeni način, očito je P' RAMv3-program k-ekvivalentan s P. Dakle, RAMv3-algoritam $(P')^k$ računa f, pa je f RAMv3-izračunljiva.

A.6.3 Očito, svaki RAM-program je RAMv4-program, pa je jedan smjer trivijalan. Za drugi smjer, neka je f RAMv4-izračunljiva, i neka je P RAMv4-program koji je računa. Označimo s n duljinu tog programa. Iz definicije zaustavljanja RAMv4-izračunavanja slijedi da izvršavanje instrukcije STOP postavlja PC na n, odnosno moguće ju je simulirati instrukcijom GO TO n. Ako s P' označimo RAM-program dobiven iz P zamjenom svake instrukcije STOP instrukcijom GO TO n, očito je P' RAM-program ekvivalentan s P. Dakle, P' također računa f, pa je f RAM-izračunljiva.

B.1.1 $\mathsf{rsub}^2 := \mathsf{sub} \circ (I_2^2, I_1^2)$, $d = \mathsf{add} \circ (\mathsf{sub}, \mathsf{rsub})$. $f_0 := \mathsf{sub} \circ (C_1^1, I_1^1)$, $\chi_= = f_0 \circ d$.

B.1.2 Dokažimo za minimum; za maksimum je sve potpuno analogno. Za $k = 1$, $\min(x) = x$, dakle $\min^1 = I_1^1$, što je inicijalna funkcija pa je primitivno rekurzivna. Za $k = 2$,

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & \text{inače} \end{cases},$$

što znači da je $\min^2$ definirana grananjem iz primitivno rekurzivnih grana I_1^2 i I_2^2 i primitivno rekurzivnog uvjeta $<$, pa je primitivno rekurzivna. Dalje dokazujemo matematičkom indukcijom. Očito $\min(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = \min\big(\min(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}\big)$, odnosno simbolički $\min^{k+1} = \min^2 \circ (\min^k \circ (I_1^{k+1}, \ldots, I_k^{k+1}), I_{k+1}^{k+1})$.
Funkcija $\min^2$ je primitivno rekurzivna po upravo dokazanom (baza indukcije), funkcija $\min^k$ je primitivno rekurzivna po pretpostavci indukcije, dok su koordinatne projekcije primitivno rekurzivne jer su inicijalne. Kako je skup primitivno rekurzivnih funkcija zatvoren na kompoziciju, funkcija $\min^{k+1}$ je također primitivno rekurzivna. Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja.

B.1.3 Jest. Označimo s $r_S(a, b, c)$ broj rješenja te kvadratne jednadžbe u skupu S.
(a) Cjelobrojna rješenja očito ne mogu biti pozitivna jer je za njih već prvi član pozitivan, dakle dovoljno je prebrojiti sve $x \in \mathbb{N}$ takve da je $-x$ rješenje. Oni moraju biti djelitelji slobodnog člana c, dakle za $c > 0$ moraju biti manji ili jednaki c. Za $c = 0$ rješenja su 0 i $-\frac{b}{a+1}$, dakle jedno je sigurno cjelobrojno, a drugo ako i samo ako $a + 1 \mid b$.

$$r_{\mathbb{Z}}(a, b, c) = \begin{cases} (\# x \le c)\big((a+1)x^2 + c = bx\big), & c > 0 \\ 1 + \chi_{|}(a+1, b), & \text{inače} \end{cases}$$

(b) Iz formule za rješenja $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a+1)c}}{2(a+1)}$ zaključujemo da će dvostruko rješenje sigurno biti racionalno $\frac{-b}{2(a+1)}$, a ako nije dvostruko, bit će racionalno ako i samo ako je diskriminanta kvadrat racionalnog broja — što iz teorije brojeva znamo da je ekvivalentno tome da bude potpun kvadrat prirodnog broja.

$$\mathsf{Posq}(n) :\Longleftrightarrow n > 0 \wedge (\exists m \le n)(m^2 = n)$$

$$r_{\mathbb{Q}}(a, b, c) = \begin{cases} 2, & \mathsf{Posq}\big(b^2 \dot{-} 4(a+1)c\big) \\ 1, & b^2 = 4(a+1)c \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

(c) Samo treba usporediti diskriminantu s nulom, odnosno b^2 s $4(a+1)c$.

$$r_{\mathbb{R}} = \begin{cases} 2, & b^2 > 4(a+1)c \\ 1, & b^2 = 4(a+1)c \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

B.1.5 Očito, broj primjena funkcije f i broj na koji se ona primjenjuje su nezavisni — nemamo nikakav način da iz $f(1)$ izračunamo $f\big(f(2)\big)$. Zato definiramo pomoćnu funkciju koja ih tretira kao dva odvojena argumenta.

$$h(n,0) := n$$
$$h(n,m+1) := f\big(h(n,m)\big)$$

Ta funkcija je primitivno rekurzivna jer ima simboličku definiciju $h = I_1^1 \mathbin{\text{PR}} f \circ I_3^3$. No tada je i $g = h \circ (I_1^1, I_1^1)$ primitivno rekurzivna.

B.1.11 Baza je jednostavna: za $z = 0$ sigurno nema takvih $y < z$ (jer nema *nikakvih* $y < 0$).

$$F(\vec{x},0) = 0 \qquad\qquad G(\vec{x}) := 0 \ \text{ (ili } a := 0 \text{ u degeneriranom slučaju)}$$

Za korak, imamo tri slučaja. U prvom, najmanji y je nađen već prije, dakle prethodna vrijednost $F(\vec{x},z)$ je manja od z.
Ako nije, moguće je (drugi slučaj) da je baš nađen u tom koraku, što će biti ako vrijedi $R(\vec{x},z)$ i pritom ne vrijedi prvi slučaj, što znači $F(\vec{x},z) = z$.
Treći slučaj je da najmanji y još uvijek nije nađen niti u z-tom koraku; tada naravno treba vratiti $z+1$ po definiciji ograničene minimizacije.

$$F(\vec{x},z+1) = \begin{cases} F(\vec{x},z), & F(\vec{x},z) < z \\ z, & F(\vec{x},z) = z \wedge R(\vec{x},z) \\ Sc(z), & \text{inače} \end{cases} \qquad H(\vec{x},z,t) := \begin{cases} t, & t < z \vee R(\vec{x},z) \\ z+1, & \text{inače} \end{cases}$$

Vidimo da je uvijek $F = G \mathbin{\text{PR}} H$ (ili $F = 0 \mathbin{\text{PR}} H^2$).

B.1.14 A^2 je zadana dinamizacijom ($A(m,n) := A_m(n)$) sljedeće familije primitivno rekurzivnih funkcija („kriški"):

$$A_0 := Sc$$
$$A_{m+1}(n) := (\underbrace{A_m \circ A_m \circ \cdots \circ A_m}_{n+1 \text{ poziva } A_m})(1)$$

Na primjer, $A_0(n) = Sc(n) = n+1$, $A_1(n)$ je $(n+1)$-terostruki sljedbenik od 1, dakle $n+2$ („dvosljedbenik"), dok je $A_2(n)$ $(n+1)$-terostruki „dvosljedbenik" od 1, dakle $2n+3$.
Da sama A^2 nije primitivno rekurzivna, dokazujemo nizom tvrdnji. Da bismo ih lakše iskazali, uvodimo oznaku $f^k < g^k$ (i analogno $f \le g$, $f > g$, $f \ge g$) kao pokratu za $(\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k)\big(f(\vec{x}) < g(\vec{x})\big)$. Lako se vidi da su to parcijalni uređaji.
$\boxed{\text{T0}}$: $\forall m\,(A_m \ge Sc)$. Dokaz: indukcijom po m. Baza je trivijalna.
Pretpostavimo (P1) $A_m \ge Sc$. Tada dokazujemo $A_{m+1}(n) \ge n+1$ indukcijom po n.

Baza: $A_{m+1}(0) = A_m(1) \overset{P1}{\geq} Sc(1) = 2 > 0 + 1$. Pretpostavimo (P2) $A_{m+1}(n) \geq n + 1$.
Tada je $A_{m+1}(n+1) = A_m\big(A_{m+1}(n)\big) \overset{P1}{\geq} A_{m+1}(n) + 1 \overset{P2}{\geq} (n+1) + 1$.
$\boxed{T1}$: Svaka kriška A_m je strogo rastuća funkcija. Dokaz: za $m = 0$ to je očito.
Inače, $A_{m+1}(n+1) = A_m\big(A_{m+1}(n)\big) \overset{T0}{\geq} Sc\big(A_{m+1}(n)\big) > A_{m+1}(n)$.
$\boxed{T2}$: $A_{m+1}(n) \geq A_m(n+1)$ (A^2 raste po sporednim dijagonalama). Dokaz indukcijom po n.
Baza je definicija od A_{m+1}. Pretpostavimo $A_{m+1}(n) \geq A_m(n+1) \overset{T0}{\geq} Sc(n+1) = n+2$.
Tada $A_{m+1}(n+1) = A_m\big(A_{m+1}(n)\big) \overset{T1}{>} A_m(n+2)$.
$\boxed{T3}$: Niz kriški $(A_m)_m$ je strogo rastući. Doista, $A_{m+1}(n) \overset{T2}{\geq} A_m(n+1) \overset{T1}{>} A_m(n)$.
Za totalnu funkciju f^k kažemo da je *Ackermann-dominirana* (skraćeno AD) ako postoji kriška A_c takva da je $f < A_c \circ add^k$. (Za $k = 1$ to jednostavno glasi $f^1 < A_c$.)
$\boxed{T4}$: Sve inicijalne funkcije su AD. Doista, $Z < Sc = A_0 \overset{T3}{<} A_1$,
a $I_n^k(\vec{x}) = x_n \leq x_1 + \cdots + x_k = add(\vec{x}) < Sc\big(add(\vec{x})\big) = A_0\big(add(\vec{x})\big)$.
$\boxed{T5}$: Kompozicija bilo kojih dviju kriški je AD. Doista, neka su A_s i A_t dvije kriške, i označimo $\nu := \max\{s,t\}$. Tada je $\nu + 1 > t$, pa je $A_t < A_{\nu+1}$ zbog (T3). Sada zaključujemo

$$(A_s \circ A_t)(x) = A_s\big(A_t(x)\big) \overset{T1}{<} A_s\big(A_{\nu+1}(x)\big) \overset{T3}{\leq} A_\nu\big(A_{\nu+1}(x)\big) = A_{\nu+1}(x+1) \overset{T2}{\leq} A_{\nu+2}(x).$$

$\boxed{T6}$: Zbroj konačno mnogo kriški je AD. Doista, uz oznake kao u (T5) imamo $A_s + A_t \overset{T3}{\leq} A_\nu + A_\nu = 2A_\nu < 2A_\nu + 3 = A_2 \circ A_\nu$, što je AD prema (T5). Dalje indukcijom po broju pribrojnika.
$\boxed{T7}$: Skup AD funkcijâ zatvoren je na kompoziciju. Dokaz: neka su $k, l \in \mathbb{N}_+$ te neka su G_1^k, G_2^k, ..., G_l^k, H^l AD funkcije (dominirane kriškama A_{s_1}, A_{s_2}, ..., A_{s_l}, A_t redom). Tada je

$$\big(H \circ (G_1, \ldots, G_l)\big)(\vec{x}) = H\big(G_1(\vec{x}), \ldots, G_l(\vec{x})\big) < A_t\big(G_1(\vec{x}) + \cdots + G_l(\vec{x})\big) \overset{T1}{\leq}$$

[uz pokratu $x := add(\vec{x})$] $\quad \overset{T1}{\leq} A_t\big(A_{s_1}(x) + \cdots + A_{s_l}(x)\big) \overset{T6}{\leq} A_t\big(A_c(x)\big) \overset{T5}{\leq} A_d(x)$ (za neke c i d).

$\boxed{T8}$: G^k je AD ako i samo ako je $G_+ := G^k + add^k$ AD. Dokaz: neka je $G < A_c \circ add^k$. Tada $G(\vec{x}) + add(\vec{x}) < A_c\big(add(\vec{x})\big) + A_0\big(add(\vec{x})\big)$, pa ($\Rightarrow$) slijedi iz (T6). ($\Leftarrow$) slijedi iz $G \leq G_+$.
$\boxed{T9}$: Skup AD funkcijâ zatvoren je na primitivnu rekurziju. Po definiciji trebamo dokazati da ako su (za $k \in \mathbb{N}_+$) G^k i H^{k+2} (totalne) AD funkcije, tada je i $F^{k+1} := G \mathbin{\text{PR}} H$ takva, no zbog (T8) je dovoljno dokazati da ako su G_+ i H_+ AD, tada je i F_+ AD. Pa neka su G_+ i H_+ dominirane kriškama A_g i A_h redom. Označimo $f := \max\{g, 1+h\}$ i tvrdimo da je F_+ dominirana kriškom A_f. Tvrdnju $F_+(\vec{x}, y) < A_f\big(add(\vec{x}, y)\big)$ dokazujemo indukcijom po y.
Baza: $F_+(\vec{x}, 0) = F(\vec{x}, 0) + add(\vec{x}, 0) = G(\vec{x}) + add(\vec{x}) = G_+(\vec{x}) < A_g\big(add(\vec{x})\big) \overset{T3}{\leq} A_f\big(add(\vec{x}, 0)\big)$.
Pretpostavimo $F_+(\vec{x}, y) < A_f\big(add(\vec{x}, y)\big)$ za neki y. Tada (uz korištenje $a < b \Leftrightarrow a + 1 \leq b$)

$$\begin{aligned} &F_+(\vec{x}, y+1) = F(\vec{x}, y+1) + add(\vec{x}, y+1) = H\big(\vec{x}, y, F(\vec{x}, y)\big) + add(\vec{x}) + y + 1 \leq \\ &\leq H\big(\vec{x}, y, F(\vec{x}, y)\big) + add(\vec{x}) + y + F(\vec{x}, y) + 1 = H_+\big(\vec{x}, y, F(\vec{x}, y)\big) + 1 \leq A_h\big(add(\vec{x}) + y + F(\vec{x}, y)\big) = \\ &= A_h\big(F_+(\vec{x}, y)\big) \leq A_{f-1}\big(F_+(\vec{x}, y)\big) < A_{f-1}\big(A_f\big(add(\vec{x}, y)\big)\big) = A_f\big(add(\vec{x}, y) + 1\big) = A_f\big(add(\vec{x}, y+1)\big). \end{aligned}$$

Sada iz (T4), (T7) i (T9) slijedi da je svaka primitivno rekurzivna funkcija AD. Kad bi A^2 bila primitivno rekurzivna, tada bi takva bila i A^1, zadana s $A(x) := A_x(x)$ ($A^1 = A^2 \circ (I_1^1, I_1^1)$ je njena simbolička definicija). Dakle, A^1 bi bila AD, pa bi postojao c takav da je $A^1 < A_c$. Posebno bi za c vrijedilo $A(c) < A_c(c)$, što je nemoguće jer po definiciji A^1 vrijedi jednakost.

B.2.8 Lako je vidjeti (točkovna definicija lijevo, simbolička desno)

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cup B}(x) &= \chi_A(x) \dot{-} \chi_B(x) + \chi_B(x) & \chi_{A\cup B} &= \mathsf{add}^2 \circ \big(\mathsf{sub} \circ (\chi_A, \chi_B), \chi_B\big) \\
\chi_{A\cap B}(x) &= \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) & \chi_{A\cap B} &= \mathsf{mul}^2 \circ (\chi_A, \chi_B) \\
\chi_{A\setminus B}(x) &= \chi_A(x) \dot{-} \chi_B(x) & \chi_{A\setminus B} &= \mathsf{sub} \circ (\chi_A, \chi_B) \\
\chi_{A\times B}(x,y) &= \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) & \chi_{A\times B} &= \mathsf{mul}^2 \circ (\chi_A \circ \mathsf{I}_1^2, \chi_B \circ \mathsf{I}_2^2)
\end{aligned}$$

(recimo za treći redak: kako su $\chi_A(x), \chi_B(x) \in \{0,1\}$, jedini način na koji njihova ograničena razlika može biti 1 je $1 \dot{-} 0$, što znači $x \in A$ i $x \notin B$, odnosno $x \in A \setminus B$).
Funkcije add^2, mul^2 i sub su primitivno rekurzivne, funkcije I_1^2 i I_2^2 su inicijalne pa su primitivno rekurzivne, a funkcije χ_A i χ_B su primitivno rekurzivne po pretpostavci zadatka. Jer je skup primitivno rekurzivnih funkcija zatvoren na kompoziciju, karakteristične funkcije skupova $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A \times B$ su primitivno rekurzivne, pa su i ti skupovi primitivno rekurzivni.

B.3.7 Standardne definicije Fibonaccijeva niza i Ackermannove funkcije imaju traženo svojstvo: Fibonaccijev niz jer u rekurziji koristi dvije prethodne vrijednosti a ne samo jednu, a Ackermannova funkcija jer ima ugniježđenu rekurziju.
(Primijetite da to što je funkcija zadana rekurzijom koja nije primitivna ne znači ništa po pitanju primitivne rekurzivnosti same funkcije: konkretno, Fibonaccijev niz jest primitivno rekurzivan, dok Ackermannova funkcija nije. Niti to što je funkcija dobivena primitivnom rekurzijom $G \mathbin{\mathsf{PR}} H$ ne znači da mora biti primitivno rekurzivna, ako G i H nisu takve.)

B.3.10 Definiramo $F(i,j) := \sum_{k\le j} G(i,k)$. F je dobivena kao ograničena suma rekurzivne funkcije G, pa je i sama rekurzivna. Svojstvo (i) vrijedi jer je $F(i,j+1) = F(i,j)+G(i,j+1)$, a $G(i,j+1) \ge 0$ jer je to prirodni broj.
Smjer ($\Leftarrow$) u (ii) vrijedi jer iz $\sum_{j=0}^{n} F(i,j) = 0$ slijedi da su svi pribrojnici 0 (jer su prirodni brojevi), pa specijalno i zadnji od njih, koji je upravo jednak $F(i,n) = \sum_{j=0}^{n} G(i,j)$.
Preostalo je dokazati smjer ($\Rightarrow$) u (ii). Opet, $\sum_{j=0}^{n} G(i,j) = 0$ znači da je posljednji pribrojnik desno $F(i,n) = 0$. No prema (i) su svi ostali pribrojnici $F(i,j), j < n$ manji ili jednaki njemu, pa su i oni 0, odnosno čitava suma je 0.

B.4.1 Funkcija $F := \mathsf{Sc}|_{P_1}$ očito ima domenu P_1 (jer je Sc totalna), i slika joj je podskup od P_2 jer je $\mathsf{Sc}(3k+1) = 3k+2 \in P_2$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. No vrijedi i druga inkluzija, jer za svaki $3k+2 \in P_2$ postoji prethodnik $3k+1 \in P_1$ (ključno je $3k+2 \neq 0$). F je parcijalno rekurzivna kao restrikcija inicijalne funkcije na primitivno rekurzivan skup (relacija $P_1(x) \Leftrightarrow x \bmod 3 = 1$ je dobivena iz primitivno rekurzivne jednakosti, operacije $\bmod$ i konstanti). Nije jedinstvena, jer F', dobivena iz nje editiranjem $F'(1) := 5$, $F'(4) := 2$, također zadovoljava sve uvjete (samo smo „prespojili" uređene parove $(1,2)$ i $(4,5)$).

B.4.2 Po teoremu enumeracije, $\mathcal{I}_f$ je rekurzivno prebrojiv skup. Funkcija $G := \mathsf{Sc} \circ \mathsf{mul} \circ (\mathsf{C}_2^1, \mathsf{I}_1^1)$ je primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija. Sada je $g = G|_{\mathcal{I}_f}$ parcijalno rekurzivna po teoremu o restrikciji.

B.4.3 Da. Funkcija $\mathsf{Sq} := \$(2, \mathsf{pow})$ je rekurzivna kao specijalizacija rekurzivne funkcije. Sada je f parcijalno rekurzivna prema zadatku B.4.5.

B.4.4 Naravno, postoje brojni algoritmi za sortiranje. Evo deklarativnog pristupa:

$$\begin{aligned}
\mathsf{count}(s,x) &:= \big(\#\, i < \mathsf{lh}(s)\big)\big(s[i] = x\big)\\
\mathsf{isPermutation}(r,s) &:\Leftrightarrow \big(\forall i < \mathsf{lh}(r)\big)\big(\mathsf{count}(r,r[i]) = \mathsf{count}(s,r[i])\big)\\
\mathsf{increasing}(r) &:\Leftrightarrow \big(\forall i < \mathsf{pd}(\mathsf{lh}(r))\big)\big(r[\mathsf{Sc}(i)] \geq r[i]\big)\\
\mathsf{sort}(s) &:\simeq \mu\, r\,\big(\mathsf{Seq}(s) \wedge \mathsf{Seq}(r) \wedge \mathsf{isPermutation}(r,s) \wedge \mathsf{increasing}(r)\big)
\end{aligned}$$

B.4.5 Prvo rješenje: Ako je f prazna, ili je S prazan, ili se mjesnosti ne podudaraju, restrikcija je prazna pa je parcijalno rekurzivna. Inače, označimo s k mjesnost funkcije f i skupa S. Po teoremu o grananju (parcijalno rekurzivna verzija), $f|_S = \mathsf{if}\{S : f\}$ je parcijalno rekurzivna.

Drugo rješenje: Znamo da je svaki rekurzivan skup rekurzivno prebrojiv. Dakle S je rekurzivno prebrojiv, pa je po teoremu o restrikciji $f|_S$ parcijalno rekurzivna.

C.1.8 Broj e je očito kod konačnog niza; da bismo vidjeli je li kod RAM-programa, moramo vidjeti da su svi članovi tog niza kodovi RAM-instrukcija (kojima su odredišta manja ili jednaka $\mathsf{lh}(e) = 3$).
Prvi je $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = \langle 1,1,1\rangle = \mathsf{codeDEC}(1,1) = \ulcorner \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 1\urcorner$.
Drugi je triput veći, dakle $\langle 1,2,1\rangle = \ulcorner \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 1\urcorner$.
Treći je $6 = 2\cdot 3 = \langle 0,0\rangle = \mathsf{codeINC}(0) = \ulcorner \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0\urcorner$.
Jedino odredište je $1 \leq 3$, pa je $e \in \mathsf{Prog}$, odnosno $e = \ulcorner P \urcorner$, gdje je $P = \begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 1\\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 1\\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0\end{bmatrix}$.
Označimo s $f := \{e\}^2$ dvomjesnu funkciju koju P računa. P-izračunavanje s $(x,0)$ ne stane ni za koji x:

$$(0,x,0,\ldots,0) \rightsquigarrow (0,\mathsf{pd}(x),0,\ldots,1) \rightsquigarrow (0,\mathsf{pd}(x),0,\ldots,1) \rightsquigarrow \cdots,$$

dok za $y > 0$, P-izračunavanje s (x,y) stane:

$$(0,x,y,\ldots,0) \rightsquigarrow (0,\mathsf{pd}(x),y,\ldots,1) \rightsquigarrow (0,\mathsf{pd}(x),y-1,\ldots,2) \rightsquigarrow (1,\mathsf{pd}(x),y-1,\ldots,3),$$

s izlaznim podatkom 1. Konkretno, $f(0,17) = 1$, te je $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}\times\mathbb{N}_+$, i $\mathcal{I}_f = \{1\}$.

C.2.4 a) RAM-program $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_n, 3\\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0\\ 2.\ \textsc{go to}\ 0\end{bmatrix}$ ovisi samo o n i računa I^k_n za sve $1 \leq n \leq k$, što znači da samo trebamo izračunati njegov kod.

$$i(n) = \langle\langle 1,n,3\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,0\rangle\rangle = \langle 7500\cdot 3^n, 6, 24\rangle = 2^{1+7500\cdot 3^n}\cdot 2187\cdot 5^{25},$$

iz čega se vidi da je i primitivno rekurzivna funkcija.

b) Jednom kad imamo funkciju i^1, ovo je jednostavna restrikcija:

$$i(n,k) :\simeq \begin{cases} i(n), & 1 \leq n \wedge n \leq k \end{cases}$$

koja je parcijalno rekurzivna jer je i^1 primitivno rekurzivna, te je uvjet presjek dvije primitivno rekurzivne relacije.

C.2.5 a) $c_1 := \overline{C_6^1}$ je jedna takva: $c_1(n) = \langle 6, 6, \ldots, 6\rangle$, što je kod RAM-programa od n instrukcija, svaka od kojih je INC $\mathcal{R}_0$. Taj program očito računa C_n (proizvoljne mjesnosti).

b) Za c_2 uzmimo funkciju koja se svuda podudara s c_1, osim što definiramo $c_2(14) := \ulcorner P \urcorner$,

$$P := \left[\begin{array}{l} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 2 \\ 1.\ \text{GO TO}\ 0 \\ \hline 2.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ 4.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ 5.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ 6.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ 7.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ 8.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_1 \\ \hline 9.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 13 \\ 10.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 11.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 12.\ \text{GO TO}\ 9 \end{array}\right].$$

Funkcija c_2 je dobivena editiranjem primitivno rekurzivne (po lemi o povijesti) funkcije c_1, pa je primitivno rekurzivna.

Također, za $n \neq 14$, očito je $c_2(n) = c_1(n)$ indeks od C_n (argument kao u (a)). Za $n = 14$, želimo vidjeti da P računa C_{14} (očito je $\mathrm{lh}\big(c_2(14)\big) = \mathrm{lh}(\ulcorner P \urcorner) = 13 < 14$). P se sastoji od tri fragmenta. Nakon prvog (prve dvije instrukcije) je $\mathcal{R}_1$ resetiran, nakon drugog (sljedećih 7 instrukcija) mu je sadržaj jednak 7, a treći fragment efektivno ima semantiku $r_0' = 2r_1 = 14 \wedge r_1' = 0 \wedge pc' = 13$. Dakle, P-izračunavanje s $\vec{x}$ uvijek stane za svaki $\vec{x}$, i izlazni podatak mu je 14.

C.2.6 $s := \ulcorner \left[\begin{array}{l} 0.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 1.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \\ 3.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \end{array}\right] \urcorner = \langle 22500, 6, 24, 6\rangle$, $t := \ulcorner \left[\begin{array}{l} 0.\ \text{INC}\ \mathcal{R}_0 \\ 1.\ \text{DEC}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 2.\ \text{GO TO}\ 0 \end{array}\right] \urcorner = \langle 6, 22500, 24\rangle$.

Tada je $\mathrm{ex}(s, 0) = 22501 > 7 = \mathrm{ex}(t, 0)$, pa $s \nmid t$. Isto tako je $\mathrm{ex}(t, 1) > \mathrm{ex}(s, 1)$, pa $t \nmid s$.

C.2.7 Broj i^2 u rastavu na prim-faktore ima sve eksponente parne, što bi značilo da mu je svaki part (prethodnik eksponenta) ili 0 ili neparni broj. No ako bi taj broj bio kod RAM-programa s bar jednom instrukcijom I_0, tada bi moralo vrijediti $i^2[0] = \ulcorner I_0 \urcorner \in \mathrm{Ins} \subseteq 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (svaki kod RAM-instrukcije je kod nepraznog konačnog niza, dakle pozitivni parni broj), što je nemoguće. Dakle, jedini kandidat je kod praznog programa 1, koji zadovoljava uvjet jer je $1^2 = 1 \in \mathrm{Prog}$.

C.2.8 Dokazat ćemo i više: skup indeksa bilo koje brojevne funkcije je ili prazan ili beskonačan (prebrojiv, jer je podskup od $\mathbb{N}$). Iz toga slijedi da ne može imati kardinalnost 3. Naravno, ako f nije parcijalno rekurzivna, tada (po teoremu ekvivalencije) nema indeks, pa je skup njenih indeksa prazan.

Ako pak f jest parcijalno rekurzivna, opet po teoremu ekvivalencije f postoji RAM-program P_0 koji je računa, pa označimo s e_0 njegov kod. Dakle, vrijedi $\mathrm{Prog}(e_0)$, i $\{e_0\}^k = f^k$ (s k smo označili mjesnost funkcije f).

To znači da za svaki $\vec{x} \in \mathcal{D}_f$ P_0-izračunavanje s $\vec{x}$ stane, dakle nakon nekog konačnog broja koraka s vrijednost programskog brojača postane $\mathrm{lh}(e_0)$ i registar $\mathcal{R}_0$ sadrži broj $f(\vec{x})$. Ako na kraj programa dodamo n primjeraka instrukcije INC $\mathcal{R}_1$, i taj novi program označimo s P_n, očito će P_n-izračunavanje s $\vec{x}$ stati (nakon $s + n$ koraka) za svaki $\vec{x} \in \mathcal{D}_f$, i u $\mathcal{R}_0$ će ostati isti broj (samo će se broj u $\mathcal{R}_1$ promijeniti).

Za svaki pak $\vec{x} \in \mathcal{D}_f^c$, uvijek će biti $c(\text{PC}) < \mathrm{lh}(e_0)$, pa P_n-izračunavanje s $\vec{x}$ također ne stane (izvršavaju se iste instrukcije jer se P_0 i P_n podudaraju u prvih $\mathrm{lh}(e_0)$ instrukcijâ, te je uvijek $c(\text{PC}) < \mathrm{lh}(e_0) \leq \mathrm{lh}(e_0) + n = \mathrm{lh}(\ulcorner P_n \urcorner)$).

Drugim riječima, programi P_0 i P_n su ekvivalentni za svaki n, pa računaju istu k-mjesnu funkciju — konkretno, f. To znači da je za svaki n, $e_n := \ulcorner P_n \lrcorner$ također indeks funkcije f. No svi brojevi e_n su međusobno različiti, jer su vrijednosti funkcije lh na njima različite: konkretno, $\mathrm{lh}(e_i) - \mathrm{lh}(e_j) = i - j$. Dakle, funkcija f ima beskonačno mnogo indeksa.

C.3.4 Evo jednog pokušaja (ako imate bolji, javite mi se!):

$\mathbb{N}\Sigma'_{\log}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G
$\Sigma'_{\log}$	$'$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow$	$\wedge$	,	(	$\neg$	x	)	$\forall$	R	c	$\vee$	$\exists$	f	#

D.1.1 Neka je Σ abeceda, neka su φ i ψ dvije Turing-izračunljive jezične funkcije nad Σ te neka su $\mathcal{T}_\varphi = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \sqcup_1, \delta_1, q_1, q_{z1})$ i $\mathcal{T}_\psi = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \sqcup_2, \delta_2, q_2, q_{z2})$ Turingovi strojevi koji ih računaju redom.
Prvo „ujedinimo praznine": neka je $\sqcup$ novi znak koji ne postoji ni u Γ_1 ni u Γ_2, i zamijenimo u funkciji prijelaza δ_1 svugdje (u znakovnom ulazu i izlazu) $\sqcup_1$ s $\sqcup$, a u δ_2 svugdje zamijenimo $\sqcup_2$ s $\sqcup$. Tako dobijemo δ'_1 i δ'_2. Označimo $\Gamma := \big((\Gamma_1 \setminus \{\sqcup_1\}) \cup (\Gamma_2 \setminus \{\sqcup_2\})\big) \dot\cup \{\sqcup, ?\}$ (čemu služi novododani znak ? objasnit ćemo uskoro).
Drugo, disjunktificiramo skupove stanja i dodamo još neka nova stanja „između". Naime, osnovna ideja je „serijski spojiti" $\mathcal{T}_\varphi$ i $\mathcal{T}_\psi$, tako da iz stanja q_{z1} prijeđemo u q_2, čime iz završne konfiguracije $\mathcal{T}_\varphi$ (i samo iz nje) prelazimo u početnu konfiguraciju $\mathcal{T}_\psi$. No pozicije se ne moraju poklapati: u završnoj konfiguraciji pozicija stroja $\mathcal{T}_\varphi$ može biti bilo gdje na traci, i moramo je dovesti na početak, pomičući se ulijevo sve dok ne detektiramo lijevi rub.
Dakle, $Q := Q_1 \times \{1\} \dot\cup Q_2 \times \{2\} \dot\cup \Gamma \times \{3,4\} \dot\cup \{(q_x, 5)\}$. Ideja stanja oblika $(\alpha, 3)$ je da zapamtimo znak (zamjenjujući ga s ?), kako bismo ga mogli vratiti (kroz stanje $(\alpha, 4)$) nakon što pokušajem lijevog pomaka i čitanjem ? ili nekog drugog znaka γ zaključimo jesmo li na lijevom rubu. To znači da δ možemo definirati sljedećim jednadžbama ($\Gamma'_1 := (\Gamma_1 \setminus \{\sqcup_1\}) \dot\cup \{\sqcup\}$):

$$
\begin{aligned}
\delta\big((q,1),\alpha\big) &:= \big((p,1),\beta,d\big) && \text{ako je } \delta'_1(q,\alpha) = (p,\beta,d)\\
\delta\big((q,2),\alpha\big) &:= \big((p,2),\beta,d\big) && \text{ako je } \delta'_2(q,\alpha) = (p,\beta,d)\\
\delta\big((q_{z1},1),\alpha\big) &:= \big((\alpha,3),?,-1\big) && \text{za sve } \alpha \in \Gamma'_1\\
\delta\big((\alpha,3),?\big) &:= \big((q_2,2),\alpha,-1\big) && \text{za sve } \alpha \in \Gamma'_1\\
\delta\big((\alpha,3),\gamma\big) &:= \big((\alpha,4),\gamma,1\big) && \text{za sve } \alpha,\gamma \in \Gamma'_1\\
\delta\big((\alpha,4),?\big) &:= \big((q_{z1},1),\alpha,-1\big) && \text{za sve } \alpha \in \Gamma'_1
\end{aligned}
$$

Naravno, stanje $(q_x, 5)$ upotrijebimo kao i obično za proširenje δ do „totalnosti".
Sada je jasno da $\mathcal{T} := (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, \delta, q_1, q_{z2})$ računa kompoziciju $\varphi \circ \psi$:
ako je w iz $\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi} = \{v \in \mathcal{D}_\varphi \mid \varphi(v) \in \mathcal{D}_\psi\}$, $\mathcal{T}$-izračunavanje s w prolazi kroz konfiguracije

$$
\begin{aligned}
\big((q_1,1),0,w\sqcup\dots\big) \rightsquigarrow^* \big((q_{z1},1),p,\varphi(w)\sqcup\dots\big) \rightsquigarrow^{3p} \big((q_{z1},1),0,\varphi(w)\sqcup\dots\big) \rightsquigarrow^2\\
\rightsquigarrow^2 \big((q_2,2),0,\varphi(w)\sqcup\dots\big) \rightsquigarrow^* \big((q_{2z},2),p',\psi\big(\varphi(w)\big)\sqcup\dots\big) \circlearrowleft .
\end{aligned}
$$

Ako pak $w \notin \mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}$, tada ili $w \notin \mathcal{D}_\varphi$ (pa prvo $\rightsquigarrow^*$-računanje ne završi), ili $\varphi(w) \in \Sigma^* \setminus \mathcal{D}_\psi$ (pa drugo $\rightsquigarrow^*$-računanje ne završi). U svakom slučaju $\mathcal{T}$-izračunavanje s w tada ne stane.

D.1.2 Kako β ima domenu $\mathbb{N}^+$, rezultat je neki neprazni konačni niz prirodnih brojeva (izraz ima vrijednost jer je β surjekcija na Σ_β^*). Kako je broj separatora / u zadanoj riječi jednak 3, zaključujemo da traženi konačni niz mora biti iz $\mathbb{N}^4$. Njegov prvi element je broj znakova • prije prvog separatora (dakle 0, jer takvih nema), drugi element jednak mu je broju znakova • između prvog i drugog separatora (dakle 2), treći je opet 0 jer su drugi i treći separator susjedni, a četvrti je jednak broju •-a od zadnjeg separatora do kraja riječi, što je u ovom slučaju 1. Sve u svemu, rješenje je $(0, 2, 0, 1)$.

D.3.1 Neka je w proizvoljna riječ nad Σ. Dekodiranjem dobijemo $5 = \langle \mathrm{ab} \rangle$. Tada vrijedi: $\langle \varphi(w) \rangle = \mathbb{N}\varphi(\langle w \rangle) = 9\langle w \rangle + 5 = 3^2 \cdot \langle w \rangle + \langle \mathrm{ab} \rangle = \langle w \rangle \cdot 3^{\mathrm{slh}(\langle \mathrm{ab} \rangle, 3)} + \langle \mathrm{ab} \rangle = \langle w \rangle \mathbin{\widehat{3}} \langle \mathrm{ab} \rangle = \langle w\mathrm{ab} \rangle$ pa zbog injektivnosti kodiranja slijedi $\varphi(w) = w\mathrm{ab}$.

E.1.1 Za dokaz da je M rekurzivna, dovoljno je promotriti funkciju G^2 zadanu s

$$G(n, e) :\simeq \begin{cases} n \dot{-} 10, & n > 100 \\ \mathrm{comp}\big(\mathrm{comp}(n + 11, e), e\big), & \text{inače} \end{cases}.$$

Po teoremu o grananju (parcijalno rekurzivna verzija, dvije grane, s „inače”), G je parcijalno rekurzivna, jer je definirana po slučajevima iz parcijalno rekurzivnih grana

$$\begin{aligned} G_1^2 &:= \mathrm{sub} \circ (I_1^2, C_{10}^2), \\ G_2^2 &:= \mathrm{comp}_1 \circ (\mathrm{comp}_1 \circ (\mathrm{add}^2 \circ (I_1^2, C_{11}^2), I_2^2), I_2^2), \end{aligned}$$

i rekurzivnog uvjeta R^2 čija je karakteristična funkcija

$$\chi_R := \chi_> \circ (I_1^2, C_{100}^2).$$

Po teoremu rekurzije, postoji e_1 takav da za sve n vrijedi $\mathrm{comp}(n, e_1) \simeq G(n, e_1)$. Dokažimo da $M_1 := \{e_1\}^1$ zadovoljava definicijsku jednadžbu od M zadanu u zadatku.
Za $n > 100$ vrijedi $R(e_1, n)$, i $n - 10 > 90 > 0$, pa imamo

$$\begin{aligned} M_1(n) \simeq \{e_1\}(n) \simeq \mathrm{comp}(n, e_1) \simeq G(n, e_1) \simeq \mathrm{if}\big\{R : G_1, G_2\big\}(n, e_1) \simeq G_1(n, e_1) \simeq \\ \big(\mathrm{sub} \circ (I_1^2, C_{10}^2)\big)(e_1, n) \simeq I_1^2(n, e_1) \dot{-} C_{10}^2(n, e_1) = n \dot{-} 10 = \max\{n - 10, 0\} = n - 10. \end{aligned}$$

Za preostale n imamo (početak kao gore)

$$\begin{aligned} M_1(n) \simeq \cdots \simeq \mathrm{if}\big\{R : G_1, G_2\big\}(n, e_1) \simeq G_2(n, e_1) \simeq \mathrm{comp}\big(\mathrm{comp}(n + 11, e_1), e_1\big) \simeq \\ \simeq \{e_1\}\big(\{e_1\}(n + 11)\big) \simeq M_1\big(M_1(n + 11)\big). \end{aligned}$$

Po pretpostavci zadatka time je M dobro definirana, pa je jedinstvena, odnosno $M = M_1$. To znači da M ima indeks (konkretno, e_1), pa je parcijalno rekurzivna. Kako je u zadatku zadano da je $M = M_1$ totalna funkcija, ona je i rekurzivna.
Za dokaz da je M *primitivno* rekurzivna, moramo ili naći primitivno rekurzivnu gornju ogradu za broj „koraka” u računanju od M, ili naći zatvoreni oblik od M (može se pokazati da je $M(n) = 91$ za sve $n \leq 100$), ili primijeniti trik.

Naime, prirodnih brojeva n za koje ne vrijedi $n > 100$ ima konačno mnogo (konkretno, 101), pa slučaj „inače" može nastupiti u samo konačno mnogo slučajeva. To znači da je funkcija M (zadano je da je totalna) dobivena editiranjem primitivno rekurzivne funkcije

$$M_2(n) := n \dot{-} 10,$$

pa je primitivno rekurzivna.

E.1.2 a) Definiramo funkciju G^2 sa

$$G(n, e) :\simeq \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \mathrm{Sc}\big(\mathrm{comp}(n /\!\!/ 2, e)\big), & 2 \mid n \\ \mathrm{Sc}\big(\mathrm{comp}\big(\mathrm{Sc}(3 \cdot n), e\big)\big), & \text{inače} \end{cases}.$$

Vidimo da je G definirana po slučajevima iz parcijalno rekurzivnih funkcija i rekurzivnih uvjeta, pa je parcijalno rekurzivna. Po teoremu rekurzije, postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathrm{comp}(n, e_1) \simeq G(n, e_1)$. Dokažimo da funkcija $c_1 := \{e_1\}^1$ zadovoljava gornju funkcijsku jednadžbu.

Za $n = 1$, imamo

$$c_1(1) \simeq \mathrm{comp}(1, e_1) \simeq G(1, e_1) = 0.$$

Za parne n, recimo $n = 2m$, imamo

$$\begin{aligned} c_1(2m) &\simeq \mathrm{comp}(2m, e_1) \simeq G(2m, e_1) \simeq \mathrm{Sc}\big(\mathrm{comp}(2m /\!\!/ 2, e_1)\big) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Sc}\big(\{e_1\}(m)\big) \simeq \mathrm{Sc}(c_1(m)) \simeq 1 + c_1(m) \simeq 1 + c_1\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

Za preostale n imamo

$$\begin{aligned} c_1(n) &\simeq G(n, e_1) \simeq \mathrm{Sc}\big(\mathrm{comp}\big(\mathrm{Sc}(3 \cdot n), e_1\big)\big) \simeq \\ &\simeq 1 + \{e_1\}(3n + 1) \simeq 1 + c_1(3n + 1). \end{aligned}$$

Kako je c definirana tom funkcijskom jednadžbom, zaključujemo $c = c_1 = \{e_1\}^1$, pa funkcija c ima indeks e_1, dakle c je parcijalno rekurzivna.

b) Otvoren je problem (Collatzova slutnja) je li $\mathcal{D}_c = \mathbb{N}_+$. No za odgovor na ovo pitanje ne trebamo rješavati Collatzovu slutnju — dovoljno je primijetiti da za $n = 0$ vrijedi drugi slučaj, pa imamo

$$c(0) \simeq 1 + c\left(\frac{0}{2}\right) \simeq 1 + c(0).$$

Kad bi 0 bila u $\mathcal{D}_c$, recimo $c(0) =: t \in \mathbb{N}$, tada bi ovo gornje značilo $t = 1 + t$, što je kontradikcija. Dakle, c nije definirana u nuli, što znači da nije totalna, pa nije ni rekurzivna funkcija.

c) Plan registara: $\begin{array}{cc|ccc} \mathcal{R}_0 & \mathcal{R}_1^{\mathsf{i}} & \mathcal{R}_2^{\mathsf{C}} & \mathcal{R}_3^{\mathsf{C}} & \mathcal{R}_4^{?} \\ \hline c(n) & n & 2 & 3 & 2 \mid n \end{array}$.

Znamo da su funkcije C_2^1, C_3^1, mul^2 i div, te relacija djeljivosti $|$, RAM-izračunljive, pa postoje RAM-programi (u donjem programu označeni redom s P_{C_2}, P_{C_3}, P_{mul}, $P_{/\!/}$ i $P_{|}$) koji ih računaju.

$$\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 2.\ P_{C_2}(\mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_2\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_5.. \\ 3.\ P_{C_3}(\mathcal{R}_3) \to \mathcal{R}_3\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_5.. \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 14 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 6.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 7.\ P_{|}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_4\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_5.. \\ 8.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_4, 11 \\ 9.\ P_{/\!/}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \to \mathcal{R}_1\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_5.. \\ 10.\ \textsc{go to}\ 4 \\ 11.\ P_{\mathsf{mul}}(\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_1) \to \mathcal{R}_1\ \textsc{using}\ \mathcal{R}_5.. \\ 12.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 13.\ \textsc{go to}\ 4 \end{array}\right]$$

d) RAM-program koji računa c nalazi se na naslovnici ove zbirke.

E.1.3 Prvo definirajmo funkciju fld^1 pomoću

$$\mathsf{fld}(x) := \left\{ \lfloor \log_2 x \rfloor, \quad x > 0 \right. .$$

Ako za $x > 0$ označimo $y := \mathsf{fld}(x) \in \mathbb{N}$, iz definicije funkcije najveće cijelo slijedi

$$y \le \log_2 x < y + 1,$$

odnosno $2^y \le x < 2^{y+1}$, iz čega $\mathsf{fld}(x) = \mu y(x < 2^{y+1})$.
Funkcija fld nije definirana u $x = 0$, što možemo općenito iskazati pomoću

$$\mathsf{fld}(x) \simeq \mu y(x > 0 \wedge x < 2^{y+1}).$$

Iz ove zadnje parcijalne jednakosti slijedi da je fld parcijalno rekurzivna (dobivena je minimizacijom presjeka dvije rekurzivne relacije).
Funkcija G^4, zadana sa

$$G(x_1, x_2, y, f) :\simeq \begin{cases} x_1 + x_2, & y = 0 \\ \mathsf{fld}\left(\mathsf{comp}\big(x_1 + 1, x_2 + 2, \mathsf{pd}(y), f\big)^{\mathsf{pd}(y)}\right) \dot{-} x_1, & y > 0 \end{cases},$$

je parcijalno rekurzivna, jer je definirana grananjem iz parcijalno rekurzivnih grana i rekurzivnih uvjeta. Po teoremu rekurzije, postoji $f \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x_1, x_2, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathsf{comp}(x_1, x_2, y, f) \simeq G(x_1, x_2, y, f)$. Želimo dokazati da je $\{f\}^3$ rješenje zadanog sustava.

Prva jednadžba: neka su x_1 i x_2 proizvoljni prirodni brojevi. Tada

$$\{f\}(x_1, x_2, 0) \simeq \mathsf{comp}(x_1, x_2, 0, f) \simeq G(x_1, x_2, 0, f) \simeq x_1 + x_2$$

i desna strana uvijek ima vrijednost, pa je mora imati i lijeva, i jednake su.
Druga jednadžba: neka su x_1, x_2 i y proizvoljni prirodni brojevi. Tada je

$$\begin{aligned}
\{f\}(x_1, x_2, y+1) &\simeq \mathsf{comp}(x_1, x_2, y+1, f) \simeq G(x_1, x_2, y+1, f) \simeq \\
&\simeq \mathsf{fld}\Big(\mathsf{comp}\big(x_1+1, x_2+2, \mathsf{pd}(y+1), f\big)^{\mathsf{pd}(y+1)}\Big) \dot{-} x_1 \simeq \\
&\simeq \Big\lfloor \log_2\big(\mathsf{comp}(x_1+1, x_2+2, y, f)\big)^y \Big\rfloor \dot{-} x_1 \simeq \\
&\simeq \lfloor y \cdot \log_2 \mathsf{comp}(x_1+1, x_2+2, y, f) \rfloor \dot{-} x_1 \simeq \\
&\simeq \lfloor y \cdot \log_2 \{f\}(x_1+1, x_2+2, y) \dot{-} x_1 \rfloor .
\end{aligned}$$

Dakle, $F := \{f\}^3$ je jedno rješenje gornjeg sustava. Kako očito ima indeks (konkretno, f), F je parcijalno rekurzivna.

E.1.4 Označimo s $g := \$(0, f)$ (prvi redak). Tada g očito nije definirana u 0 jer je tada 0 u nazivniku, a niti u 1 jer red $1 + 1 + 1 + \cdots$ ne konvergira. U svim ostalim $n > 1$ je g definirana (geometrijski red s količnikom između 0 i 1 konvergira), i štoviše, suma tog reda je $\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1} \in \langle 1, 2]$, pa je $g(n) = \left\lceil \frac{n}{n-1} \right\rceil = 2$ za sve $n \geq 2$.
Drugim riječima, do na čudnu domenu, funkcija f se u vrijednostima podudara s totalnom funkcijom h zadanom s

$$\begin{aligned}
h(x, y) &:= 2, \text{ za } y < 2, \\
h(x, y) &:= \big(h(x, y-2)\big)^2 + h(x, y-1) + 7, \text{ za } y \geq 2,
\end{aligned}$$

koja je čak primitivno rekurzivna jer je definirana rekurzijom s potpunom poviješću:

$$G(x, p) := \begin{cases} 2, & \mathsf{lh}(p) < 2 \\ \big(\mathsf{rpart}(p, 1)\big)^2 + \mathsf{rpart}(p, 0) + 7, & \text{inače} \end{cases}$$

je primitivno rekurzivna, i vrijedi $h(x, y) = G\big(x, \overline{h}(x, y)\big)$.
Sve u svemu, imamo $f = h|_{\mathcal{D}_f}$, gdje je $\mathcal{D}_f = (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{N} \cup \{(1, 0), (1, 1)\}$. Možda je lakše razmišljati o komplementu: $f(x, y)$ *nema* vrijednost za $x = 0 \wedge y < 2$ (početak rješenja) te za $x \geq 2 \wedge y < 2$ (indukcijom po x: izraz za $f(2, y)$ bi koristio $f(0, y) = g(y)$ što nema vrijednost za $y \in \{0, 1\}$, a svaki $f(x+1, y)$ bi koristio $f(x, y)$, što po pretpostavci indukcije nema vrijednost za $y \in \{0, 1\}$). Dakle $\mathcal{D}_f{}^c = \{1\}^c \times \{0, 1\}$ je primitivno rekurzivna kao Kartezijev produkt komplementa konačnog skupa s konačnim skupom, pa je i $\mathcal{D}_f$ primitivno rekurzivna. Sada je $f = h|_{\mathcal{D}_f} = \mathsf{if}\big\{\mathcal{D}_f : h\big\}$ parcijalno rekurzivna po propoziciji o restrikciji.
Jedinstvenost slijedi standardno jakom indukcijom: pretpostavimo da imamo neku drugu f' koja također zadovoljava sustav iz zadatka. Tada se f i f' podudaraju kada je prvi argument 0 (prva jednadžba) ili 1 (druga jednadžba: obje su 2), te iz pretpostavke da se podudaraju za sve $y < m$ za neki $m \geq 2$ slijedi da se podudaraju za $m - 1$ i $m - 2$, pa se po trećoj jednadžbi podudaraju i u m.

E.1.5 (Primijetimo da naivna primjena teorema rekurzije ne prolazi. Trebali bismo ga primijeniti na funkciju

$$G_2(x,y,e) :\simeq \begin{cases} x, & y = 0 \\ \prod_{i<y} \mathsf{comp}(x+i,i,e), & y > 0 \end{cases},$$

ali ni po čemu ne možemo zaključiti da je ta funkcija parcijalno rekurzivna. Ograničeni produkti su definirani primitivnom rekurzijom, dakle mogu se primjenjivati samo na totalne funkcije, što comp_2 sigurno nije. Niti korištenje funkcije mul ne pomaže, jer bi joj mjesnost trebala ovisiti o argumentu y.)

$\boxed{\text{Prvo}}$ pokažimo da je svako rješenje f sustava totalna funkcija, tako što ćemo pokazati da vrijedi $\forall y \forall x \mathcal{D}_f(x,y)$, jakom indukcijom po y.

Neka je f_0 proizvoljno rješenje sustava. Pretpostavimo da za neki y', za sve $t < y'$ i za sve x vrijedi $\mathcal{D}_{f_0}(x,t)$. Neka je sad x' proizvoljan (trebamo dokazati da je $(x',y') \in \mathcal{D}_{f_0}$). Ako je $y' = 0$, tada je prema prvoj jednadžbi $f_0(x',y') \simeq f_0(x',0) \simeq x'$, što ima vrijednost.

Ako je pak $y' > 0$, tada je $y' = y+1$ za neki y (prethodnik od y'). Tada je prema drugoj jednadžbi vrijednost $f_0(x',y') \simeq f_0(x',y+1)$ dobivena množenjem $y+1$ vrijednosti funkcije f_0 na parovima $(x'+i,i), i \in [0 \cdot\cdot y]$. No svaka od tih vrijednosti postoji prema pretpostavci indukcije (primijenjenoj na $x := x'+i \in \mathbb{N}$ i $t := i \leq y < y+1 = y'$), a $\mathsf{mul}^{y'}$ je totalna funkcija (u ovom trenutku y' je konkretni prirodni broj), pa i $f_0(x',y')$ mora imati vrijednost.

$\boxed{\text{Drugo}}$, koristeći totalnost od f, zapišimo sustav u ekvivalentnom obliku, tako da možemo koristiti funkciju mul fiksne mjesnosti. Prvo primijetimo da zbog upravo dokazanog možemo koristiti znakove $=$ umjesto $\simeq$ u zapisu sustava (svaka jednadžba na lijevoj strani ima vrijednost funkcije f). Za $y = 0$, imamo $f(x,0) = x$. Za $y = 1$, imamo $f(x,1) = f(x,0) = x$ također. Za $y \geq 2$, recimo $y = t+2$ za $t \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned} f(x,t+2) &= \big(f(x,0) \cdot f(x+1,1) \cdots f(x+t,t)\big) \cdot f(x+t+1,t+1) = \\ &= f(x,t+1) \cdot f(x+t+1,t+1). \end{aligned}$$

Dakle, svako rješenje polaznog sustava je ujedno i rješenje sustava

$$\begin{aligned} f(x,0) &= f(x,1) = x \\ f(x,y+2) &= f(x,y+1) \cdot f(x+y+1,y+1), \end{aligned}$$

a lako se vidi da vrijedi i obrat.

$\boxed{\text{Treće}}$, zapišimo taj ekvivalentni sustav u obliku opće rekurzije i primijenimo teorem.

$$\mathsf{comp}(x,y,e) \simeq G(x,y,e) :\simeq \begin{cases} x, & y < 2 \\ \mathsf{comp}\big(x,\mathsf{pd}(y),e\big) \cdot \mathsf{comp}\big(x+\mathsf{pd}(y),\mathsf{pd}(y),e\big), & y \geq 2 \end{cases}$$

G je parcijalno rekurzivna, pa po teoremu rekurzije postoji e_1 takav da za sve $x,y \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathsf{comp}(x,y,e_1) \simeq G(x,y,e_1)$.

$\boxed{\text{Četvrto}}$, pokažimo da je $f_1 := \{e_1\}^2$ totalna funkcija: dokažimo da je za sve $x,y \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in \mathcal{D}_{f_1}$, indukcijom po y (za sve x).

Za $y \in \{0,1\}$ (baza), za proizvoljni x,

$$f_1(x,y) \simeq \{e_1\}(x,y) \simeq \mathsf{comp}(x,y,e_1) \simeq G(x,y,e_1) \simeq x,$$

i desna strana uvijek ima vrijednost, pa je mora imati i lijeva (i moraju biti jednake).
Za $y = z$ (pretpostavka), pretpostavimo da za sve $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x, z) \in \mathcal{D}_{f_1}$.
Za $y = z + 1 \geq 2$ (korak), neka je $x \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada je

$$\begin{aligned} f_1(x, z+1) &\simeq \{e_1\}(x, z+1) \simeq \mathrm{comp}(x, z+1, e_1) \simeq G(x, z+1, e_1) \simeq \\ &\simeq \mathrm{comp}\big(x, \mathrm{pd}(z+1), e_1\big) \cdot \mathrm{comp}\big(x + \mathrm{pd}(z+1), \mathrm{pd}(z+1), e_1\big) \simeq \\ &\simeq \mathrm{comp}(x, z, e_1) \cdot \mathrm{comp}(x+z, z, e_1) \simeq f_1(x, z) \cdot f_1(x+z, z), \end{aligned}$$

i desna strana ima vrijednost jer je mul^2 totalna, te oba faktora imaju vrijednost po pretpostavci indukcije — pa i lijeva strana mora imati vrijednost, dakle $(x, z+1) \in \mathcal{D}_{f_1}$.
$\boxed{\text{Peto}}$, dokažimo da totalna funkcija f_1 zadovoljava originalni sustav. Za prvu jednadžbu, $f_1(x, 0) = G(x, 0, e_1) = x$. Za drugu jednadžbu, dokazujemo da vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$, indukcijom po y. Za $y = 0$,

$$f_1(x, 0+1) = f_1(x, 1) = G(x, 1, e_1) = x = f_1(x, 0).$$

Pretpostavimo da za $y = z$, za sve $x \in \mathbb{N}$,

$$f_1(x, z+1) = f_1(x, 0) \cdot f_1(x+1, 1) \cdots f_1(x+z, z).$$

Tada za $y = z + 1$, imamo

$$\begin{aligned} f_1(x, y+1) &= f_1(x, z+2) = \mathrm{comp}(x, z+2, e_1) = G(x, z+2, e_1) = \\ &= \mathrm{comp}\big(x, \mathrm{pd}(z+2), e_1\big) \cdot \mathrm{comp}\big(x + \mathrm{pd}(z+2), \mathrm{pd}(z+2), e_1\big) = \\ &= \mathrm{comp}(x, z+1, e_1) \cdot \mathrm{comp}(x+z+1, z+1, e_1) = \\ &= f_1(x, z+1) \cdot f_1(x+z+1, z+1) = (\text{pretpostavka indukcije}) \\ &= f_1(x, 0) \cdot f_1(x+1, 1) \cdots f_1(x+z, z) \cdot f_1(x+z+1, z+1) = \\ &= f_1(x, 0) \cdot f_1(x+1, 1) \cdots f_1(x+y, y). \end{aligned}$$

I $\boxed{\text{šesto}}$, dokažimo da je f_1 jedinstveno rješenje originalnog sustava. Neka je f_2 proizvoljno njegovo rješenje. Prema prvom dijelu dokaza, f_2 je totalna funkcija. Dakle, želimo dokazati da je $f_2(x, y) = f_1(x, y)$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$. To dokazujemo, ovoga puta jakom, indukcijom po y. Opet, zbog totalnosti f_1 i f_2, možemo pisati jednakosti u jednadžbama sustava (umjesto parcijalnih jednakosti).
Baza ($y = 0$): po prvoj jednadžbi je $f_2(x, 0) = x = f_1(x, 0)$.
Pretpostavka ($y \leq z$): pretpostavimo da za neki $z \in \mathbb{N}$, za sve $x \in \mathbb{N}$ i za sve $y \leq z$ vrijedi $f_2(x, y) = f_1(x, y)$.
Korak ($y = z + 1$): imamo po drugoj jednadžbi i pretpostavci indukcije,

$$\begin{aligned} f_2(x, y) = f_2(x, z+1) &= f_2(x, 0) \cdot f_2(x+1, 1) \cdots f_2(x+z, z) = \\ &= f_1(x, 0) \cdot f_1(x+1, 1) \cdots f_1(x+z, z) = f_1(x, z+1) = f_1(x, y). \end{aligned}$$

Dakle, svako rješenje jednako je f_1, odnosno f_1 je jedinstveno rješenje. Kako smo dokazali da je f_1 totalna funkcija, i parcijalno je rekurzivna jer ima indeks (konkretno, e_1), zaključujemo da je f_1, jedinstveno rješenje originalnog sustava, rekurzivna funkcija.

E.1.6 Provodimo korak po korak dokaza običnog teorema rekurzije, s jedinom razlikom što umjesto jedne funkcije sada imamo l njih (u čitavom dokazu i označava proizvoljni element od $[1 \cdot\cdot l]$). Prvo definiramo $D_{k,i}(\vec{y}^l) := S_k(\vec{y}, y_i)$ — to su primitivno rekurzivne funkcije jer je S_k^{l+1} takva. Zatim definiramo $H_i(\vec{x}^k, \vec{y}^l) :\simeq G_i\big(\vec{x}, D_{k,1}(\vec{y}), \ldots, D_{k,l}(\vec{y})\big)$ — to su parcijalno rekurzivne funkcije jer su G_i takve. Dakle, svaka od njih ima indeks: odaberimo po jedan za svaku H_i i nazovimo ga h_i. Tvrdimo da brojevi $e_i := D_{k,i}(\vec{h})$ imaju traženo svojstvo. Doista, za sve $\vec{x}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned}\{e_i\}(\vec{x}) &\simeq \mathsf{comp}_k(\vec{x}, e_i) \simeq \mathsf{comp}_k\big(\vec{x}, D_{k,i}(\vec{h})\big) \simeq \mathsf{comp}_k\big(\vec{x}, S_k(\vec{h}, h_i)\big) \simeq \mathsf{comp}_{k+l}(\vec{x}, \vec{h}, h_i) \simeq \\ &\simeq \{h_i\}(\vec{x}, \vec{h}) \simeq H_i(\vec{x}, \vec{h}) \simeq G_i\big(\vec{x}, D_{k,1}(\vec{h}), \ldots, D_{k,l}(\vec{h})\big) \simeq G_i(\vec{x}, e_1, \ldots, e_l) \simeq G_i(\vec{x}, \vec{e}).\end{aligned}$$

E.2.2 Oznaka $f \cdot g$, gdje su f i g funkcije, zapravo označava kompoziciju $\mathsf{mul}^2 \circ (f, g)$. Znamo da je funkcija mul^2 primitivno rekurzivna, pa je parcijalno rekurzivna, pa ima indeks. Označimo s t jedan indeks za mul^2. Sada je jasno da $\mathsf{times}_3(m, n)$ treba dati indeks kompozicije funkcijâ $\{t\}^2 = \mathsf{mul}^2$, $\{m\}^3$ i $\{n\}^3$, dakle

$$\mathsf{times}_3(m, n) := \mathsf{compose}_3(m, n, t)$$

odnosno simbolički $\mathsf{times}_3 = \$(t, \mathsf{compose}_3^3)$, što je primitivno rekurzivna funkcija kao specijalizacija primitivno rekurzivne.

E.2.3 Definirajmo funkciju $H(x, y, z) := x + 2y + z$. Očito želimo

$$\{F(m, n)\}^4 = H^3 \circ (\{m^2\}^4, \{mn\}^4, \{n^2\}^4),$$

dakle F možemo definirati sa

$$F(m, n) := \mathsf{compose}_4(m^2, mn, n^2, h)$$

gdje je h neki indeks od H (koji postoji jer je $H = \mathsf{add}^4 \circ (I_1^3, I_2^3, I_2^3, I_3^3)$ parcijalno, štoviše primitivno, rekurzivna). Iz toga slijedi da je F definirana kompozicijom iz primitivno rekurzivnih funkcija $\mathsf{compose}_4^4$, pow, mul^2, koordinatnih projekcija, C_2^2 i C_h^2, pa je primitivno rekurzivna.

E.2.4 Ovdje je lakše primijeniti direktno teorem o parametrima nego compose (jer drugi funkcijski poziv $\{n+k\}(y, y, x)$ nije s istim argumentima kao originalni $f(x, y)$). Funkcija zadana s

$$G(x, y, m, n, k) :\simeq \mathsf{comp}_2(x, y, m^2) + 3\,\mathsf{comp}_3(y, y, x, n + k)$$

je parcijalno rekurzivna jer je dobivena kompozicijom parcijalno rekurzivnih funkcija, pa po teoremu ekvivalencije ima indeks: jedan takav označimo s g. Sada specijalizacijom zadnja 3 argumenta lako dobijemo funkciju F:

$$F(m, n, k) := S_2(m, n, k, g),$$

odnosno $F = \$(g, S_2^4)$ je primitivno rekurzivna kao specijalizacija primitivno rekurzivne funkcije.

E.2.6 Definirajmo funkciju

$$L(\vec{x}, y, g, h, e) :\simeq \begin{cases} \mathsf{comp}_k(\vec{x}, g), & y = 0 \\ \mathsf{comp}_{k+2}\big(\vec{x}, \mathsf{pd}(y), \mathsf{comp}_{k+3}\big(\vec{x}, \mathsf{pd}(y), g, h, e\big), h\big), & \text{inače} \end{cases}.$$

L^{k+4} je dobivena grananjem iz parcijalno rekurzivnih grana i rekurzivnog uvjeta, pa je parcijalno rekurzivna. Po teoremu rekurzije, postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, te $y, g, h \in \mathbb{N}$, vrijedi $\mathsf{comp}_{k+3}(\vec{x}, y, g, h, e_1) \simeq L(\vec{x}, y, g, h, e_1)$.
Definiramo $\mathsf{primRecurse}_k := \$(e_1, S^3_{k+1})$, odnosno

$$\mathsf{primRecurse}_k(g, h) := S_{k+1}(g, h, e_1).$$

To je primitivno rekurzivna funkcija kao specijalizacija primitivno rekurzivne funkcije. Dokažimo da zadovoljava specifikaciju.
Neka su $g, h \in \mathbb{N}$ takvi da su $G := \{g\}^k$ i $H := \{h\}^{k+2}$ totalne funkcije. Označimo $f := \mathsf{primRecurse}_k(g, h)$. Trebamo dokazati da je $\{f\}^{k+1} = G \mathbin{\mathbb{R}} H$. Drugim riječima, trebamo dokazati jednakost dviju $(k+1)$-mjesnih funkcija. Desna (označimo je s F) je svakako totalna jer je dobivena primitivnom rekurzijom iz totalnih funkcija.
Dokazat ćemo da je f indeks za F, odnosno da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, za sve $y \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, y, f) \simeq F(\vec{x}, y),$$

iz čega će onda slijediti da je i lijeva funkcija totalna, te su jednake jer se podudaraju na svim elementima domene. Tu pomoćnu tvrdnju dokazat ćemo indukcijom po y, za fiksni $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Baza ($y = 0$):

$$\begin{aligned} \mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, 0, f) &\simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, 0, \mathsf{primRecurse}_k(g, h)\big) \simeq \\ &\simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, 0, S_{k+1}(g, h, e_1)\big) \simeq \mathsf{comp}_{k+3}(\vec{x}, 0, g, h, e_1) \simeq L(\vec{x}, 0, g, h, e_1) \simeq \\ &\simeq \mathsf{comp}_k(\vec{x}, g) \simeq \{g\}^k(\vec{x}) \simeq G(\vec{x}) \simeq (G \mathbin{\mathbb{R}} H)(\vec{x}, 0) \simeq F(\vec{x}, 0). \end{aligned}$$

Pretpostavka ($y = z$): pretpostavimo da vrijedi $\mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, z, f) \simeq F(\vec{x}, z)$ za neki prirodni broj z. S obzirom na definiciju $f = S_{k+1}(g, h, e_1)$, pretpostavka se može zapisati u obliku $\mathsf{comp}_{k+3}(\vec{x}, z, g, h, e_1) \simeq F(\vec{x}, z)$.

Korak ($y = z + 1$): početak je isti kao kod baze:

$$\begin{aligned} \mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, z+1, f) &\simeq \cdots \simeq L(\vec{x}, z+1, g, h, e_1) \simeq \\ &\simeq \mathsf{comp}_{k+2}\big(\vec{x}, \mathsf{pd}(z+1), \mathsf{comp}_{k+3}\big(\vec{x}, \mathsf{pd}(z+1), g, h, e_1\big), h\big) \simeq \\ &\simeq \{h\}^{k+2}\big(\vec{x}, z, \mathsf{comp}_{k+3}(\vec{x}, z, g, h, e_1)\big) \simeq H\big(\vec{x}, z, F(\vec{x}, z)\big) \simeq F(\vec{x}, z+1). \end{aligned}$$

E.2.7 <u>Prvo rješenje</u>. Primijenimo teorem rekurzije na parcijalno rekurzivnu funkciju L^{k+2} zadanu s

$$L(\vec{x}, y, e) :\simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, S_k(y, e), y\big)$$

— dobijemo broj $e_k \in \mathbb{N}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ i za sve $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, y, e_k) \simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, S_k(y, e_k), y\big). \qquad (*)$$

Sada definiramo $\mathsf{Recursion}_k(g) := S_k(g, e_k)$, odnosno $\mathsf{Recursion}_k = \$(e_k, S_k^2)$. Ta funkcija je primitivno rekurzivna; provjerimo da ima traženo svojstvo. Neka su $k \in \mathbb{N}_+$ i $g \in \mathbb{N}$ proizvoljni, i označimo $e := \mathsf{Recursion}_k(g) = S_k(g, e_k)$. Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathsf{comp}_k(\vec{x}, e) \simeq \mathsf{comp}_k\big(\vec{x}, S_k(g, e_k)\big) \simeq \mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, g, e_k) \simeq (*)\\ \simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, S_k(g, e_k), g\big) \simeq G\big(\vec{x}, S_k(g, e_k)\big) \simeq G(\vec{x}, e).\end{aligned}$$

<u>Drugo rješenje</u>. Doslovno isprogramiramo dokaz teorema rekurzije: definiramo funkciju H^{k+2} s

$$H(\vec{x}, y, g) := \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, D_k(y), g\big).$$

H je parcijalno rekurzivna, pa ima indeks. Fiksiramo jedan i označimo ga s h_k. Onda primijenimo teorem o parametru, i dijagonaliziramo: $\mathsf{Recursion}_k := D_k \circ \$(h_k, S_{k+1})$ je primitivno rekurzivna kao kompozicija dvije takve.
Za provjeru, kao i prije, neka su $k \in \mathbb{N}_+$ i $g \in \mathbb{N}$ proizvoljni, i označimo $e' := \mathsf{Recursion}_k(g) = D_k\big(S_{k+1}(g, h_k)\big)$. Za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathsf{comp}_k(\vec{x}, e') \simeq \mathsf{comp}_k\big(\vec{x}, D_k\big(S_{k+1}(g, h_k)\big)\big) \simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, S_{k+1}(g, h_k), S_{k+1}(g, h_k)\big) \simeq\\ \simeq \mathsf{comp}_{k+2}\big(\vec{x}, S_{k+1}(g, h_k), g, h_k\big) \simeq \{h_k\}\big(\vec{x}, S_{k+1}(g, h_k), g\big) \simeq H\big(\vec{x}, S_{k+1}(g, h_k), g\big) \simeq\\ \simeq \mathsf{comp}_{k+1}\big(\vec{x}, D_k\big(S_{k+1}(g, h_k)\big), g\big) \simeq \mathsf{comp}_{k+1}(\vec{x}, e', g) \simeq \{g\}(\vec{x}, e') \simeq G(\vec{x}, e').\end{aligned}$$

E.3.1 Funkcija G^2 zadana s $G(x, e) :\simeq \mathsf{comp}\big(x, \chi_{\geq}(x, e)\big)$ je parcijalno rekurzivna kao kompozicija parcijalno rekurzivnih funkcija. Po teoremu rekurzije, postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve x vrijedi $\mathsf{comp}(x, e_1) \simeq \mathsf{comp}\big(x, \chi_{\geq}(x, e_1)\big)$. No desna strana ima vrijednost točno za $x \geq e_1$ (jer je 1 indeks totalne funkcije Z, dok je 0 indeks prazne funkcije $\otimes^1$), pa je tada mora imati i lijeva. Dakle $W_{e_1}(x) \iff x \geq e_1$, pa je e_1 traženi broj.

E.3.2 a) Postoji. Definiramo

$$G(x, e) :\simeq \Big\{e, \quad e = x\,,$$

odnosno simbolički $G^2 := \mathsf{if}\big\{(=) : I_2^2\big\}$, pa je G parcijalno rekurzivna. Po teoremu rekurzije postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da je za sve $x \in \mathbb{N}$, $\mathsf{comp}_1(x, e_1) \simeq G(x, e_1)$ — dakle $\{e_1\}^1$ je definirana samo u e_1, i tamo poprima vrijednost e_1. Odnosno, broj e_1 ima tražena svojstva.

b) Ne postoji, jer općenito ne postoji funkcija s konačnom domenom i beskonačnom slikom. Formalno, za svaku funkciju f vrijedi $\mathrm{card}(\mathcal{D}_f) \geq \mathrm{card}(\mathcal{I}_f)$, pa bismo imali $1 \geq \aleph_0$, što je kontradikcija.

E.3.3 S obzirom na to da se domena sastoji od uređenih parova prirodnih brojeva, zaključujemo da se radi o funkciji $\{e\}^2$. Definiramo relaciju P^4 sa

$$P(x, y, e, t) :\iff x = e \wedge y = e + t.$$

Relacija P je primitivno rekurzivna, pa je $\exists_* P$ rekurzivno prebrojiva. To znači da postoji parcijalno rekurzivna funkcija G^3 takva da je $\exists_* P = \mathcal{D}_G$ (konkretno, $G = \mu P$, ali to nam zapravo nije bitno). Po teoremu rekurzije, postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathrm{comp}_2(x, y, e_1) \simeq G(x, y, e_1)$. Tada je

$$(x, y) \in \mathcal{D}_{\{e_1\}^2} \iff (x, y, e_1) \in \mathcal{D}_{\mathrm{comp}_2} \iff (x, y, e_1) \in \mathcal{D}_G = \exists_* P \iff$$
$$\iff \exists t\, P(x, y, e_1, t) \iff \exists t\, (x = e_1 \wedge y = e_1 + t) \iff (x, y) \in \{(e_1, e_1 + t) \mid t \in \mathbb{N}\}$$

pa su ta dva skupa jednaki.
[Naravno, $R := \exists_* P$ se može napisati i kao $R(x, y, e) \iff x = e \wedge y \geq e$, iz čega slijedi da je čak primitivno rekurzivna — ali za zadatak nam je dovoljno da je rekurzivno prebrojiva.]

E.3.4 Definiramo funkciju G^2 s

$$G(x, e) := x \bmod 128 + e.$$

G je (čak primitivno) rekurzivna, pa po teoremu rekurzije postoji e_1 takav da za sve x vrijedi $\mathrm{comp}(x, e_1) \simeq x \bmod 128 + e_1$. Slika jednomjesne funkcije s indeksom e_1 tada je

$$\mathcal{I}_{\{e_1\}^1} = \{\mathrm{comp}_1(x, e_1) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x \bmod 128 + e_1 \mid x \in \mathbb{N}\} = [e_1 \cdot\cdot\, e_1 + 127].$$

E.3.5 S obzirom na to da računamo funkciju s indeksom q u točki (broju) 1, i domena joj se sastoji od prirodnih brojeva, radi se o jednomjesnoj funkciji $\{q\}^1$. Dakle, za primjenu teorema rekurzije treba nam dvomjesna funkcija koja prima argument i indeks tražene funkcije.
Po teoremu o grananju (rekurzivno prebrojiva verzija), funkcija G^2 zadana s

$$G(x, e) :\simeq \begin{cases} 2012, & x = 1 \\ 0, & \exists n (x = en + 2012) \end{cases}$$

je parcijalno rekurzivna. (Drugi uvjet je rekurzivno prebrojiv jer je dobiven projekcijom rekurzivne relacije $P(x, e, n) :\iff x = en + 2012$. Uvjeti su disjunktni jer je $en + 2012 \geq 2012 > 1$.)
Po teoremu rekurzije, postoji q takav da je za sve x, $\mathrm{comp}_1(x, q) \simeq G(x, q)$. Dakle,

$$x \in \mathcal{D}_{\{q\}^1} \iff (x, q) \in \mathcal{D}_{\mathrm{comp}_1} \iff (x, q) \in \mathcal{D}_G \iff$$
$$\iff x = 1 \vee \exists n (x = qn + 2012) \iff x \in \{1\} \cup \{qn + 2012 \mid n \in \mathbb{N}\},$$

pa su ta dva skupa jednaki. Također je $\{q\}(1) \simeq \mathrm{comp}_1(1, q) \simeq G(1, q) = 2012$.

E.3.6 Iz oblika domene (Kartezijev produkt tri podskupa od $\mathbb{N}$) zaključujemo da se radi o tromjesnoj funkciji $\{e\}^3$. Dakle, za primjenu teorema rekurzije treba nam funkcija G^4. Jedna takva je

$$G(x, y, z, e) :\simeq \begin{cases} xz, & 2 \mid x \wedge 2 \nmid y \wedge z = e \end{cases}$$

— parcijalno je rekurzivna jer je dobivena restrikcijom primitivno rekurzivne funkcije na primitivno rekurzivan skup. Po teoremu rekurzije, postoji e_1 takav da za sve x, y, z vrijedi $\mathrm{comp}_3(x, y, z, e_1) \simeq G(x, y, z, e_1)$. Tada je

$$(x, y, z) \in \mathcal{D}_{\{e_1\}^3} \iff (x, y, z, e_1) \in \mathcal{D}_{\mathrm{comp}_3} \iff (x, y, z, e_1) \in \mathcal{D}_G \iff$$
$$\iff 2 \mid x \wedge 2 \nmid y \wedge z = e_1 \iff E(x) \wedge \neg E(y) \wedge z = e_1 \iff (x, y, z) \in E \times E^c \times \{e_1\},$$

pa je $\mathcal{D}_{\{r\}^3} = E \times E^c \times \{e_1\}$. Također je

$$\begin{aligned} t \in \mathcal{I}_{\{e_1\}^3} &\iff \big(\exists (x,y,z) \in \mathcal{D}_{\{e_1\}^3}\big)\big(\{e_1\}(x,y,z) = t\big) \iff \\ &\iff (\exists\, x \in E)(\exists\, y \in E^c)(\exists\, z \in \{e_1\})(xz = t) \iff \\ &\iff (\exists\, x \in E)(t = e_1 x) \iff t \in e_1 \cdot E, \end{aligned}$$

pa je $\mathcal{I}_{\{e_1\}^3} = e_1 \cdot E$. Dakle e_1 je traženi broj.

E.3.8 Iz činjenice da se u domeni nalazi uređeni par brojeva, zaključujemo da se radi o dvomjesnoj funkciji $\{e\}^2$. Dakle, za primjenu teorema rekurzije trebamo tromjesnu funkciju G, takvu da $G(x,y,e)$ ima vrijednost samo kada je $(x,y) = (e,0)$. U tu svrhu, definiramo relaciju P^3 sa

$$P(x,y,e) :\iff x = e \wedge y = 0$$

— ona je primitivno rekurzivna kao presjek dviju primitivno rekurzivnih relacija. Sada je

$$G(x,y,e) :\simeq \mathrm{comp}_1\big(0, \chi_P(x,y,e)\big)$$

tražena funkcija (gdje vrijedi P, comp_1 računa nulfunkciju indeksa 1, a gdje ne vrijedi, računa praznu funkciju indeksa 0). Po teoremu rekurzije, postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\mathrm{comp}_2(x,y,e_1) \simeq G(x,y,e_1)$, dakle izraz $\{e_1\}(x,y) \simeq \mathrm{comp}_2(x,y,e_1) \simeq G(x,y,e_1)$ ima vrijednost točno onda kad vrijedi $P(x,y,e_1)$, odnosno kad je $(x,y) = (e_1,0)$.

E.3.9 Funkcija mul^2 je primitivno rekurzivna, pa je i parcijalno rekurzivna. Primjenom teorema rekurzije na tu funkciju dobivamo indeks e takav da je $\{e\}^1$ rješenje opće rekurzije

$$\mathrm{comp}(x,e) \simeq \mathrm{mul}(x,e) = e \cdot x.$$

Budući da je mul^2 totalna funkcija, desna strana uvijek ima vrijednost, pa je mora imati i lijeva — i moraju biti jednake, a to točno znači da je za sve $x \in \mathbb{N}$, $\{e\}(x) = ex$.

E.3.10 Pretpostavimo da je f takva, i e njen indeks takav da je $\mathcal{D}_f = e \cdot \mathbb{N}$. No činjenica da je f rekurzivna znači da je totalna, pa je $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, odnosno $e = 1$. To pak znači da postoji samo jedan kandidat, $f = \{1\}^1 = Z$, a ona zadovoljava uvjete.

E.3.14 a) Postoji. Funkcija G^3 zadana s $G(x,y,e) :\simeq \mathrm{comp}_1\big(0, \chi_{\leq}(x^2+y^2, e^2)\big)$ je parcijalno rekurzivna kao kompozicija parcijalno rekurzivnih funkcija. Po teoremu rekurzije, postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathrm{comp}_2(x,y,e_1) \simeq \mathrm{comp}_1\big(0, \chi_{\leq}(x^2+y^2, e_1^2)\big).$$

No desna strana ima vrijednost točno za $x^2 + y^2 \leq e_1^2$ (jer je 1 indeks totalne funkcije Z, dok je 0 indeks prazne funkcije $\otimes^1$), pa isto mora vrijediti i za lijevu stranu. To točno znači $(x,y) \in \mathcal{D}_{\{e_1\}^2} \iff x\, K_{e_1}\, y$, pa je e_1 traženi broj.

b) Ne postoji. Za svaki e i k, $\{e\}^k$ je brojevna funkcija, čija slika je *jednomjesna* relacija (podskup od $\mathbb{N}$). S druge strane, svaka K_e je *dvomjesna*, pa se mjesnosti ne slažu.

c) Ne postoji. Naime, graf bilo koje funkcije ima funkcijsko svojstvo. Za $e \geq 1$, vrijedi $0\ K_e\ 0$, a također i $0\ K_e\ 1$, pa K_e nema funkcijsko svojstvo. Kada je pak $e = 0$, lijeva strana je graf prazne funkcije, dakle prazna relacija, dok je desna neprazna zbog $0\ K_0\ 0$. Dakle nikako ne mogu biti jednake.

E.3.18 Primjenom teorema rekurzije na (parcijalno rekurzivnu, kao kompoziciju dvije takve) funkciju $G := \mathsf{Russell} \circ \mathsf{sub}$ dobijemo $e_2 \in \mathsf{Prog}$ takav da je $\{e_2\}^1 = \$(e_2, G^2)$, dakle

$$x \in \mathcal{D}_{\{e_2\}} = \mathcal{D}_{\$(e_2,G^2)} \iff (x, e_2) \in \mathcal{D}_G = \mathcal{D}_{\mathsf{Russell} \circ \mathsf{sub}} \iff \mathsf{sub}(x, e_2) = x \dot{-} e_2 \in \mathcal{D}_{\mathsf{Russell}} = K.$$

Dokažimo da je ova zadnja tvrdnja ekvivalentna s $x \in K_2 := \{e_2 + t \mid t \in K\}$. Smjer ($\Leftarrow$) je očit: ako je $x \in K_2$ oblika $e_2 + t$ za neki $t \in K$, tada je $x \geq e_2$, i $x \dot{-} e_2 = t \in K$.
Za smjer ($\Rightarrow$), označimo $t := x \dot{-} e_2$. Ključno je da $0 \notin K$, pa t mora biti pozitivan, odnosno $x > e_2$, iz čega $t = x - e_2$ (obično oduzimanje). Sada je $x = e_2 + t \in K_2$ zbog $t \in K$.
Po aksiomu ekstenzionalnosti imamo $\mathcal{D}_{\{e_2\}} = K_2$, što smo trebali.

E.3.19 Relacija zadana s

$$R(x, e) :\iff K(x) \vee x = e$$

je rekurzivno prebrojiva kao unija dvije takve ($K = \mathcal{D}_{\mathsf{Russell}}$, a jednakost je (primitivno) rekurzivna pa je rekurzivno prebrojiva). Po definiciji, postoji $G \in \mathcal{C}omp_2$ takva da je $R = \mathcal{D}_G$. Po teoremu rekurzije, postoji e_1 takav da za sve x vrijedi $\{e_1\}(x) \simeq G(x, e_1)$. To znači da je $x \in \mathcal{D}_{\{e_1\}} \Leftrightarrow R(x, e_1) \Leftrightarrow x \in K \vee x = e_1$, odnosno $\mathcal{D}_{\{e_1\}} = K \cup \{e_1\}$.
Specijalno, za $x := e_1$, vrijedi $e_1 \in \mathcal{D}_{\{e_1\}} \Leftrightarrow R(e_1, e_1)$, što je istina jer je desni disjunkt ispunjen ($e_1 = e_1$). Dakle vrijedi $\mathcal{H}alt_1(e_1, e_1)$, iz čega slijedi $e_1 \in K$. Također iz toga slijedi $\mathcal{D}_{\{e_1\}} = K \cup \{e_1\} = K$. Dakle e_1 je traženi broj.

E.4.2 Funkcija $F(e) := e^2 + 3e + 4$ je primitivno rekurzivna, dakle rekurzivna. Po teoremu o fiksnoj točki, postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $e \approx_3 e^2 + 3e + 4$.
Ako to treba vrijediti za sve pozitivne k, tada ne možemo primijeniti teorem o fiksnoj točki, ali svejedno možemo lako naći e takav da ni e ni $e^2 + 3e + 4$ nisu kodovi programa, pa su za svaku mjesnost indeksi prazne funkcije. Recimo, $e = 0$ je takav: $F(0) = 4 = \langle 1 \rangle \notin \mathsf{Prog}$ jer $1 = \langle\rangle \notin \mathsf{Ins}$.

E.4.3 a) Mora, po teoremu o fiksnoj točki.

b) Ne mora — recimo, za primitivno rekurzivnu (inicijalnu) funkciju $f := Z$, skup S nije rekurzivan, jer

$$S(e) \iff e \approx_8 Z(e) = 0 \iff \{e\}^8 = \{0\}^8 = \otimes^8,$$

dakle S je tada skup svih indeksa 8-mjesne prazne funkcije, pa nije rekurzivan po Riceovu teoremu.

(S *može* biti rekurzivan: recimo, za $f := I_1^1$ je $S = \mathbb{N}$, jer je $\approx_8$ refleksivna relacija.)

E.4.4 Ne vrijedi: funkcija zadana s $F(e) := \langle\langle 1, Sc(e), 0\rangle\rangle = \ulcorner\!\lfloor\ 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_{e+1}, 0\ \rfloor\!\urcorner$ je čak primitivno rekurzivna, ali nema „uniformnu" fiksnu točku. Pretpostavimo da takav e postoji, i tvrdimo da sigurno $e \not\approx_{e+1} F(e)$. U tu svrhu, označimo za $i \in \{0, 1\}$, $\vec{x}_i := (0, 0, \ldots, 0, i) \in \mathbb{N}^{e+1}$. Jasno je da je $\{F(e)\}(\vec{x}_1) = 0$, dok $\vec{x}_0 \notin \mathcal{D}_{\{F(e)\}}$.

Ako $e \notin \mathrm{Prog}$, tada dobivamo kontradikciju jer je $\{e\}^{e+1}$ prazna funkcija, dok je $\{F(e)\}^{e+1}$ definirana u $\vec{x}_1$. No ako je $e \in \mathrm{Prog}$, opet dobivamo kontradikciju: neka je P RAM-program čiji je e kod, i označimo s m širinu od P. Očito je $m < e = \ulcorner P \urcorner$ (jer je ili $m = 0$, ili se $\mathcal{R}_{m-1}$ mora pojaviti u nekoj instrukciji I programa P pa je $m - 1 < \ulcorner I \urcorner < \ulcorner P \urcorner$). Kako se $\vec{x}_0$ i $\vec{x}_1$ podudaraju na prvih e mjesta, proizlazi da P-izračunavanje s $\vec{x}_0$ stane ako i samo ako P-izračunavanje s $\vec{x}_1$ stane (ponašanje programa P ne može ovisiti o sadržaju registara nakon $\mathcal{R}_m$) — a to je nemoguće ako želimo da P bude ekvivalentan s $\left[\ 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_{e+1}, 0\ \right]$.

F.1.1 Označimo promatrani skup s T. Taj skup je 3-invarijantan: za $e \in T$ i $\{e\}^3 = \{f\}^3$ imamo $\mathcal{I}_{\{f\}^3} = \mathcal{I}_{\{e\}^3} \subseteq \mathbb{P}$, dakle $f \in T$.
RAM-program $\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \end{array}\right]$ računa funkciju C_2^3 koja je tromjesna i slika joj je $\mathcal{I}_{C_2^3} = \{2\} \subseteq \mathbb{P}$, pa je kod tog programa $\langle 6, 6\rangle = 6^7 \in T$, odnosno $T \neq \varnothing$. S druge strane, prazan program računa tromjesnu nulfunkciju C_0^3 čija slika je $\mathcal{I}_{C_0^3} = \{0\} \nsubseteq \mathbb{P}$, pa njegov kod $\langle\rangle = 1 \notin T$, iz čega slijedi $T \neq \mathbb{N}$. Po Riceovu teoremu, T nije rekurzivan skup.

F.1.2 Označimo taj skup sa T. Kako je rekurzivna funkcija $\{1\}^1 = Z$ ograničena (slika joj je jednočlana), imamo $1 \in T$. Također, kako nijedna rekurzivna funkcija I_1^k nije ograničena (sve su surjekcije), imamo $i(1) \notin T$ (definicija funkcije i^1 nalazi se u rješenju zadatka C.2.4). Dakle, $\varnothing \subset T \subset \mathbb{N}$.
Sada želimo dokazati da je skup T 1-invarijantan. U tu svrhu, neka je $e \in T$ i $\{e\}^1 = \{f\}^1$. Prvo znači da je $\{e\}^k$ ograničena za neki k. No tada je specijalno i $\{e\}^1$ ograničena, jer iz $\{e\}^1(x) \simeq \{e\}^k(x, 0, \ldots, 0)$ slijedi $\mathcal{I}_{\{e\}^1} \subseteq \mathcal{I}_{\{e\}^k}$. Tada iz $\{e\}^1 = \{f\}^1$ slijedi da je i $\{f\}^1$ ograničena, pa je f također indeks neke ograničene rekurzivne funkcije, odnosno $f \in T$.
Po Riceovu teoremu, skup T ne može biti rekurzivan.

F.1.3 Jest. Za svaki $e \in \mathbb{N}$, funkcija $\{e\}^6$ ima indeks (konkretno, e) pa je po teoremu ekvivalencije parcijalno rekurzivna. To znači da je $S = \mathbb{N}$, odnosno $\chi_S = C_1^1 = Sc \circ Z$, što je primitivno rekurzivna funkcija.

F.1.4 Označimo promatrani skup sa S, i uvedimo novi skup

$$T := \{\, e \in \mathbb{N} \mid \{e\}^1 \text{ je periodička} \,\}.$$

Po definiciji skupa S, za svaki $a \in \mathbb{N}$ imamo $a \in S \iff a + 72 \in T$.
Skup T je neprazan: Z^1 je periodička, dakle $1 \in T$. Također, T je pravi podskup od $\mathbb{N}$: identiteta I_1^1 nije periodička, dakle $i(1) = \langle\langle 1, 1, 3\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle\rangle \notin T$.
Ako je $e \in T$ i $\{e\}^1 = \{f\}^1$, tada je ta funkcija periodička, pa je i $f \in T$. Dakle T je 1-invarijantan.
Kad bi S bio rekurzivan, za svaki $e \geq 72$ bismo mogli utvrditi je li u T tako da provjerimo je li $e - 72 \in S$. Drugim riječima, za $e \geq 72$ vrijedi $\chi_T(e) = \chi_S(e \dot{-} 72)$. Kako brojeva manjih od 72 ima samo konačno mnogo, zaključujemo da je χ_T (očito je totalna) dobivena editiranjem funkcije $e \mapsto \chi_S(e \dot{-} 72)$, te bi bila rekurzivna. To je kontradikcija s Riceovim teoremom, dakle S nije rekurzivan.

F.2.1 Označimo taj skup sa S, i uvedimo skup

$$T := \{a \in \mathbb{N} \mid \langle a, 1\rangle \in S\} = \big\{a \in \mathbb{N} \,\big|\, \forall x, y\big(\{a\}(x, y) = \mathrm{mul}(x, y)\big)\big\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \{a\}^2 = \mathrm{mul}^2\}.$$

Iz zadnje jednakosti slijedi da je T skup svih indeksa funkcije mul^2. Taj skup je očito 2-invarijantan: ako je $e \in T$ i $(\mathrm{mul}^2 =)\ \{e\}^2 = \{f\}^2$, tada je i $f \in T$.
Kad bi S bio primitivno rekurzivan, tada bismo iz

$$\langle a, 1\rangle = 2^{1+a} \cdot 3^{1+1} = 18 \cdot 2^a \in S \iff a \in T$$

imali $\chi_T(a) = \chi_S(18 \cdot 2^a)$, pa bi i T bio primitivno rekurzivan (funkcija $a \mapsto 18 \cdot 2^a$ je primitivno rekurzivna). Specijalno, bio bi rekurzivan, pa bi po Riceovu teoremu bio ili $\mathbb{N}$ ili $\varnothing$. Prvo je kontradikcija jer npr. $0 \notin T$, a drugo bi značilo da mul^2 nema indeks, što je kontradikcija s teoremom ekvivalencije, jer je mul^2 primitivno rekurzivna. Zaključujemo da S nije primitivno rekurzivan.

F.3.2 Promotrimo skup

$$T := \{c \in \mathbb{N} \mid R(0, 0, c)\} = \{c \in \mathbb{N} \mid \mathcal{D}_{\{c\}^1} = \mathcal{D}_{\{0+c\}^1} = \mathcal{D}_{\{0\cdot 0\}^1} = \mathcal{D}_{\otimes^1} = \varnothing^1\}.$$

Drugim riječima, T je skup svih indeksa prazne funkcije $\otimes^1$, pa je očito 1-invarijantan.
Iz njegove definicije je $c \in T \iff (0, 0, c) \in R$, odnosno $\chi_T = \chi_R \circ (Z, Z, I_1^1)$. To znači $T \leq R$, pa kad bi R bila rekurzivna, bila bi i T. To bi po Riceovu teoremu značilo $T = \varnothing$ ili $T = \mathbb{N}$. No nijedno od toga ne vrijedi: $T \neq \varnothing$ jer $0 \in T$ ($\{0\} = \otimes$), dok $T \neq \mathbb{N}$ jer $1 \notin T$ ($\{1\} = Z \neq \otimes$).

F.3.4 Kako je R tromjesna, b i c su prirodni brojevi, pa „svuda" označava skup $\mathbb{N}$, odnosno radi se o *jednomjesnoj* funkciji $\{a\}^1$ čija domena je $W_a = \mathbb{N} \setminus \{b, c\}$.
Definiramo skup $T := \{a \in \mathbb{N} \mid R(a, 0, 1)\}$, dakle T je skup svih indeksa jednomjesnih funkcija čija domena je $M := \{0, 1\}^c$. RAM-program $\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0 \end{bmatrix}$ računa funkciju $(Z|_M)^1$, pa je njegov kod $\langle\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 1, 1, 0\rangle\rangle = 6^{181} \in T$. S druge strane, prazan RAM-program računa totalnu funkciju Z^1 čija domena je $\mathbb{N} \neq M$, pa je njegov kod $1 \notin T$. Dakle, $\varnothing \subset T \subset \mathbb{N}$.
Ako je $e \in T$ i $\{e\}^1 = \{f\}^1$, tada su im domene jednake: $W_f = W_e = M$, odnosno $f \in T$. To znači da je skup T 1-invarijantan.
Kad bi R bila rekurzivna relacija, tad bi zbog

$$\chi_T(a) = \chi_R(a, 0, 1) \qquad (\text{simbolički: } \chi_T = \chi_R \circ (I_1^1, Z, Sc \circ Z))$$

i T bio rekurzivan, što je kontradikcija s Riceovim teoremom. Dakle R nije rekurzivna.

F.3.6 Iz zadatka C.2.7 znamo da je jedini potpuni kvadrat koji je kod RAM-programa broj 1. To znači da za bilo koje $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ vrijedi $x\ S\ y$, odnosno $x^2 \approx_1 y^2$, jer je $\{x^2\}^1 = \{y^2\}^1 = \otimes^1$. Također vrijedi $1\ S\ 1$, jer je $\approx_1$ refleksivna relacija. Dakle imamo $\{(1, 1)\} \cup (\mathbb{N} \setminus \{1\})^2 \subseteq S$.
No vrijedi i obrat, jer za bilo koji (x, y) koji nije iz lijeve strane, točno jedna koordinata je različita od 1: zbog simetričnosti, $\textsc{bsomp}\ x = 1 \neq y$. Tada $y^2 \notin \mathrm{Prog}$ pa je $\{y^2\}^1 = \otimes^1$, dok je $\{x^2\}^1 = \{1\}^1 = C_0^1$. To su očito različite funkcije, pa $x \not\sim y$.
Iz toga slijedi da je $S = \{1\} \times \{1\} \cup \{1\}^c \times \{1\}^c$ rekurzivan skup, kao unija Kartezijevih produkata konačnih skupova i njihovih komplemenata.
[Alternativni zapis je $x\ S\ y \iff x = 1 \leftrightarrow y = 1$, iz kojeg se odmah vidi da je S rekurzivna.]

F.3.12 Označimo taj skup sa S, i definirajmo skup T kao

$$T := \{\, e \in \mathbb{N} \mid \{e\}^3 \text{ je totalna funkcija} \,\}.$$

Kako je C_0^3 totalna, $1 \in T$, dakle $T \neq \varnothing$. Kako $\otimes^3$ nije totalna, $0 \notin T$, dakle $T \neq \mathbb{N}$.
Ako je $e \in T$ i $\{e\}^3 = \{f\}^3$, to je totalna funkcija, dakle $f \in T$, pa je skup T 3-invarijantan.
Sada treba uočiti da vrijedi $S(a,b) \iff T(a+2b+1024)$, odnosno $\chi_T(a+2b+1024) = \chi_S(a,b)$.
Kada bi S bio rekurzivan, tada bismo za sve brojeve $e \geq 1024$ mogli utvrditi jesu li u T tako da provjerimo je li uređeni par $(e-1024, 0)$ u S. Formalno, $\chi_T(e)$ se podudara s $\chi_S(e \dot{-} 1024, 0)$ svuda osim u konačno mnogo točaka (na brojevima manjima od 1024), dakle kad bi S bio rekurzivan, tada bi i T bio takav, što je kontradikcija s Riceovim teoremom.

F.3.14 Da je $\star$ definirana s = umjesto $\simeq$, bila bi trivijalno rekurzivna jer bi bila prazna: naime, uvijek bar jedna strana te „jednakosti" nema vrijednost: za $a = 0$ je to lijeva, a za $a > 0$ je to desna. Naime, $2a + 1 \notin \mathrm{Prog}$ za sve $a > 0$.
To zapravo pokazuje da parcijalna jednakost u definiciji od $\star$ znači da *ni lijeva ni desna* strana nemaju vrijednost. Precizno, ako fiksiramo b na npr. 0, dobijemo relaciju

$$S(a) :\iff a \star 0 \iff \{a\}(0) \simeq \{2a+1\}(1),$$

i za $a > 0$ to je ekvivalentno s $0 \notin \mathcal{D}_{\{a\}^1} \iff: T(a)$ (jer desna strana nema vrijednost).
Kad bi $\star$ bila rekurzivna, bila bi to i S jer je $S \leq (\star)$: iz definicije od S je $\chi_S = \chi_\star \circ (I_1^1, Z)$.
No χ_T je dobivena editiranjem χ_S (ne podudaraju se samo eventualno u nuli), pa bi tada i χ_T bila rekurzivna, što nije po Riceovu teoremu: $\mathcal{D}_{\{0\}^1} = \mathcal{D}_{\otimes^1} = \varnothing^1 \not\ni 0$ znači $0 \in T$, dok $\mathcal{D}_{\{1\}^1} = \mathcal{D}_{C_0^1} = \mathbb{N} \ni 0$ znači $1 \notin T$; a T je 1-invarijantna jer $T \ni e \approx_1 f$ znači $0 \notin \mathcal{D}_{\{e\}^1} = \mathcal{D}_{\{f\}^1}$, odakle $f \in T$.

F.4.2 Označimo $S := \{n \in \mathbb{N} \mid F(n) = F(0)\}$. Ako je $S \ni x \approx_5 y$, tada su x i y u istoj $\approx_5$-klasi ekvivalencije, pa je $F(0) = F(x) = F(y)$, iz čega $F(y) = F(0)$, pa je $y \in S$. Dakle S je 5-invarijantan.
S druge strane, $\chi_S(n) = \chi_=\big(F(n), F(0)\big)$ (simbolički, $\chi_S = \chi_= \circ (F, C_{F(0)}^1)$) pokazuje da je S rekurzivan skup. Po Riceovu teoremu, $S = \varnothing$ ili $S = \mathbb{N}$.
No $0 \in S$ jer je $F(0) = F(0)$ (F je totalna funkcija), dakle $S \neq \varnothing$. Jedino dakle može biti $S = \mathbb{N}$, a to znači da je za sve $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = F(0)$, odnosno F je konstanta.

F.4.3 Zapravo, Prog^C nije k-invarijantan ni za jedan k. Uvjet k-invarijantnosti *nije*

$$e \in T \wedge f \in T \Longrightarrow e \approx_k f$$

(što doista vrijedi u ovom slučaju, za $T := \mathrm{Prog}^C$, za svaki k), već „obrnuto",

$$e \in T \wedge e \approx_k f \Longrightarrow f \in T$$

što ne vrijedi, ni za jedan k, jer $0 \in T$, i $0 \approx_k 2^{25}$ za sve $k \in \mathbb{N}_+$, ali $2^{25} \notin T$ jer $2^{25} \in \mathrm{Prog}$. Konkretno, $2^{25} = \ulcorner[\,0.\ \textsc{go to}\ 0\,]\urcorner$.
Drugim riječima, „biti sintaksno (ne)ispravan program" je praktički po definiciji sintaksno svojstvo, i naravno da je odlučivo. Ono nije semantičko svojstvo, jer za svaki sintaksno

neispravan program postoji sintaksno ispravan program [0. GO TO 0] koji mu je ekvivalentan. „Prijevara" ovog zadatka je da „biti sintaksno neispravan program" nalikuje na, i podskup je od, semantičkog svojstva „računati praznu funkciju". No kao što vidimo, inkluzija je prava: ta svojstva nisu jednaka.

F.4.4 Standardnom primjenom Riceova teorema dokaže se da S nije rekurzivan: recimo, $0 \in S$, $1 \notin S$, te je $S = \ulcorner\{f \in \mathcal{C}omp_1 \mid 0 \notin \mathcal{I}_f\}\urcorner$ 1-invarijantan. No

$$e \notin S \iff \{e\}^1 \text{ poprima vrijednost } 0 \iff 0 \in \mathcal{I}_{\{e\}^1} \iff \exists x\, \{e\}(x) \simeq 0 \iff$$
$$\iff \exists x\, \mathcal{G}_{\{e\}^1}(x,0) \iff \exists x \exists z \big(T_1(x,e,z) \wedge U(z) = 0\big)$$

pokazuje da je (ako ovo pod kvantifikatorima označimo s $P(e,x,z)$) $S^c = \exists_* \exists_* P = \exists_* \hat{P}$ rekurzivno prebrojiv po projekcijskoj karakterizaciji ($\hat{P} \leq P$ je primitivno rekurzivna jer je P primitivno rekurzivna kao presjek dvije takve).
Sada iz Postova teorema (obratom po kontrapoziciji) slijedi da S nije rekurzivno prebrojiv.

G.1.5 Tvrdimo da je

$$R(a,b) :\iff K(a) \leftrightarrow K(b)$$

takva. Za početak, primijetimo da je $\mathrm{Russell}(1) = 1 + \{1\}(1) = 1 + Z(1) = 1 + 0 = 1$, dakle $1 \in K$, te $0 \notin K$ jer $0 \notin \mathrm{Prog}$.
Sada iz toga slijedi $R(a,0) \iff \big(K(a) \leftrightarrow \bot\big) \iff \neg K(a)$, pa imamo $K^c \leq R$. Dakle, kad bi R bila rekurzivno prebrojiva, tada bi i K^c bila rekurzivno prebrojiva, što smo dokazali da nije.
Analogno, $R(a,1) \iff \big(K(a) \leftrightarrow \top\big) \iff K(a)$, iz čega $\neg R(a,1) \iff \neg K(a)$, odnosno $K^c \leq R^c$, pa zaključujemo da ni R^c nije rekurzivno prebrojiva.
Što se ostalih mjesnosti tiče, za $k > 2$ očito možemo definirati

$$R^k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) :\iff R^2(x_1, x_2).$$

Iz toga slijedi $\chi_{R^2}(a,b) = \chi_{R^k}(a,b,0,\ldots,0)$, dakle $R^2 \leq R^k$, pa ni R^k ni (analogno) $(R^k)^c$ nije rekurzivno prebrojiva.
Još je preostala mjesnost 1. Tu možemo primijeniti kontrakciju: $R^1 := \hat{R^2}$, odnosno

$$R^1(x) :\iff R^2\big(\mathrm{fst}(x), \mathrm{snd}(x)\big).$$

Iz toga pak slijedi $\chi_{R^2}(a,b) = \chi_{R^1}(\mathrm{pair}(a,b))$, simbolički $\chi_{R^2} = \chi_{R^1} \circ \mathrm{pair}$, te je $R^2 \leq R^1$, i opet imamo da ni R^1 ni njen komplement nisu rekurzivno prebrojive.

G.1.8 $\chi_K + \chi_{K^c} = C_1^1$.

G.1.10 Funkcija $Z|_K$ je parcijalno rekurzivna po teoremu o restrikciji. Kad bi bilo $Z|_K = \mu R$ za neku rekurzivnu R^2, to bi značilo da (a) za sve $x \in K$ mora biti $R(x,0)$ (jer jedino tako vrijednost minimizacije može biti 0), te (b) za sve $x \notin K$ mora biti $x \notin \mathcal{D}_{\mu R} = \exists_* R$, odnosno $x \not R\, y$ za sve y, specijalno $\neg R(x,0)$. Drugim riječima, ispalo bi

$$K(x) \iff R(x,0),$$

pa bi K bila svediva na R, što je nemoguće jer R jest rekurzivna, a K nije.

G.1.12 Nije. To se može vidjeti na sljedeći zanimljiv način. Neka je H proizvoljna jednomjesna totalna funkcija. Za svaki $i \in \mathbb{N}$, označimo $G_i := \chi_{\{H(i)\}}$. Kako je H totalna, $\{H(i)\}$ je uvijek jednočlan skup, pa je rekurzivan, odnosno G_i je rekurzivna funkcija za svaki i.
No tada je F definirana formulom iz zadatka zapravo $\chi_{\mathcal{G}_H}$, što se vidi na sljedeći način: vrijednosti koje poprima su samo 0 i 1, jer su to vrijednosti koje poprimaju sve G_i; totalna je jer su sve G_i totalne; a za sve $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ imamo

$$F(x, y) = G_x(y) = \chi_{\{H(x)\}}(y) = 1 \iff y = H(x) \iff y \simeq H(x) \wedge x \in \mathcal{D}_H = \mathbb{N} \iff \mathcal{G}_H(x, y).$$

Kad bi F nužno bila rekurzivna, to bi značilo da je $\mathcal{G}_H$ rekurzivan skup, pa bi (po teoremu o grafu za totalne funkcije) H bila rekurzivna.
Dakle, pretpostavka da je F uvijek rekurzivna vodila bi do zaključka da je *svaka* totalna jednomjesna funkcija rekurzivna, što znamo da nije istina (recimo, funkcija $\widetilde{\mathrm{Russell}}$ je kontra-primjer).

G.2.8 Kako je f brojevna funkcija, mjesnost joj može biti samo 1: ni za koji $k > 1$ nemamo prirodni totalni uređaj na $\mathbb{N}^k$ s obzirom na koji bi funkcija bila padajuća. Iz toga i totalnosti slijedi da je domena $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, što je primitivno rekurzivan skup.
Što se slike tiče, f^1 je totalna pa je $f(0) \in \mathbb{N}$, označimo ga s y_0. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ je $x \geq 0$, pa jer je f padajuća imamo $f(x) \leq f(0) = y_0$. Dakle nijedan broj u $\mathcal{I}_f$ nije veći od y_0, odnosno slika od f je podskup konačnog skupa $[0 \cdot\cdot\, y_0]$. To znači da je i $\mathcal{I}_f$ konačna, pa je primitivno rekurzivna.
Za samu funkciju f, razmišljamo ovako: slika od f je očito neprazni (sadrži y_0) podskup od $\mathbb{N}$, pa zbog dobre uređenosti ima najmanji element — označimo ga sa z. Očito je $z = \min \mathcal{I}_f \in \mathcal{I}_f$, pa postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) = z$. Fiksirajmo jedan takav i označimo ga s x_0. S jedne strane, za sve $x \geq x_0$ je $f(x) \leq f(x_0) = z$ jer je f padajuća, a s druge, za sve x je $f(x) \in \mathcal{I}_f$, dakle $f(x) \geq \min \mathcal{I}_f = z$. Dakle f se podudara s konstantom z u svim točkama nakon x_0, odnosno razlikuje se od nje samo u konačno mnogo točaka (sve su manje od x_0). Dakle, f je dobivena konačnom promjenom (editiranjem) primitivno rekurzivne funkcije C^1_z, pa je i sama primitivno rekurzivna.
Sada iz $\mathcal{G}_f(x, y) \Leftrightarrow y = f(x)$ (f je totalna) slijedi da je $\chi_{\mathcal{G}_f}$ dobivena kompozicijom iz $\chi_=$, f i koordinatnih projekcija, pa je primitivno rekurzivna, što znači da je $\mathcal{G}_f$ primitivno rekurzivan.

G.2.11 a) Naravno. Relacija može biti proizvoljno kompliciranija od svog selektora. Recimo, postoji čak nearitmetička relacija koja ima nulfunkciju Z za selektor. Jednostavno, svih podskupova od $\mathbb{N}^2$ koji sadrže skup $\mathbb{N} \times \{0\}$ ima (nakon komplementiranja s obzirom na $\mathbb{N}^2$, što je bijekcija) jednako kao i svih podskupova od $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_+$, dakle $2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \mathfrak{c}$. Kako svih rekurzivnih / rekurzivno prebrojivih / aritmetičkih relacija ima samo $\aleph_0$, sigurno među ovim gornjima postoje svakakve „ružne" relacije, a svaka od njih ima Z za selektor jer je nadskup od $\mathcal{G}_Z = \mathbb{N} \times \{0\}$.

b) Opet, da. Promotrimo proizvoljan „ružan" podskup D od $\mathbb{N}$ (recimo, za skup koji nije rekurzivno prebrojiv možemo uzeti $D := K^c$), i definirajmo relaciju kao

$$R := \{0\} \times D \cup \mathbb{N}_+ \times \{0\}.$$

Iz te definicije slijedi da je za svaki y, $R(0,y) \Leftrightarrow D(y)$, odnosno $\chi_D(y) = \chi_R(0,y)$, simbolički $\chi_D = \chi_R \circ (Z, I_1^1)$, odnosno $D \leq R$, što znači da je R bar jednako „ružna" kao i D (konkretno, nije rekurzivno prebrojiva).

Ipak, kako se D pojavljuje samo kad je prva koordinata 0, svaki selektor f za R mora imati svojstvo $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{N}_+$ (i mora biti definiran u 0 jer je očito D neprazan), drugim riječima f je s konačnim nosačem, pa je primitivno rekurzivna.

G.2.12 a) Ovo je klasični Russellov paradoks (dijagonalizacija). Pretpostavimo da je $A = \mathcal{I}_{f^1}$, gdje je f rekurzivna. Definiramo $g(n) := \mathrm{comp}\big(n, f(n)\big) + 1$. Primijetimo da smo mogli koristiti '=' u definiciji (g je totalna) jer je za svaki n, $\{f(n)\}$ totalna funkcija zbog $f(n) \in \mathcal{I}_f = A$, pa je $n \in \mathcal{D}_{\{f(n)\}}$. Očito je $g = \mathrm{Sc} \circ \mathrm{comp}_1 \circ (I_1^1, f)$ parcijalno rekurzivna kao kompozicija takvih, pa je zbog totalnosti rekurzivna. Specijalno ima indeks — fiksirajmo neki i označimo ga s e. Tada bi po definiciji bilo $e \in A$ (e jest indeks jedne jednomjesne totalne funkcije, konkretno g), pa bi po definiciji slike bilo $e = f(m)$ za neki $m \in \mathbb{N}$. No tada je $g(m) = \mathrm{comp}\big(m, f(m)\big) + 1 = \mathrm{comp}(m, e) + 1 = \{e\}(m) + 1 = g(m) + 1$, što je nemoguće jer je $g(m) \in \mathbb{N}$ zbog totalnosti od g.

b) Ovo je kontrapozicija teorema enumeracije: kad bi A bio rekurzivno prebrojiv, bio bi slika neke jednomjesne (čak primitivno) rekurzivne funkcije, jer je očito $A \neq \varnothing$ (npr. $1 \in A$) — a to smo u (a) vidjeli da ne može biti.

G.2.14 Jest. Teorem enumeracije nam daje *dvomjesnu* funkciju G^2, no lako je vidjeti da $\hat{G}(x) := G\big(\mathrm{fst}(x), \mathrm{snd}(x)\big)$ ima istu sliku i jednomjesna je.
$\subseteq$: Za $y_0 \in \mathcal{I}_{\hat{G}}$, postoji $x_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $y_0 = \hat{G}(x_0) = G\big(\mathrm{fst}(x_0), \mathrm{snd}(x_0)\big) \in \mathcal{I}_G$.
$\supseteq$: Za $y \in \mathcal{I}_G$, postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takav da je $y = G(a, b)$. Tada je $x := \mathrm{pair}(a, b) \in \mathbb{N}$ i vrijedi $\mathcal{I}_{\hat{G}} \ni \hat{G}(x) = G\big(\mathrm{fst}(x), \mathrm{snd}(x)\big) = G\big(\mathrm{fst}\big(\mathrm{pair}(a, b)\big), \mathrm{snd}\big(\mathrm{pair}(a, b)\big)\big) = G(a, b) = y$.
[Naravno, za proizvoljnu mjesnost $k \geq 3$ također imamo primitivno rekurzivnu funkciju s istom slikom, recimo G^k zadanu s $G(x_1, x_2, \ldots, x_k) := G(x_1, x_2)$.]

G.2.15 a:$\exists$) Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan. Tada je specijalno S neprazan, pa po dobroj uređenosti od $\mathbb{N}$ ima najmanji element: označimo ga s a. Također, za svaki $m \in \mathbb{N}$, skup $S \setminus [0 \cdot\cdot\, m]$ je neprazan (jer je lijeva strana beskonačna, a desna konačna) podskup od $\mathbb{N}$, pa ima najmanji element koji označimo s $g(m)$. Po Dedekindovu teoremu rekurzije, tada je s $e(0) := a$, $e(n+1) := g\big(e(n)\big)$ određena funkcija e, koja je očito rastuća (po definiciji je $g(m) > m$ za sve m, pa specijalno za $m := e(n)$ imamo $e(n+1) > e(n)$), i slika joj je podskup od S (jer je $a \in S$, i $g(m) \in S$ za sve m). Dokažimo da vrijedi jednakost.

Pretpostavimo suprotno da je $\mathcal{I}_e \subset S$. Tada je skup $S \setminus \mathcal{I}_e$ neprazan podskup od $\mathbb{N}$, pa ima najmanji element: označimo ga s t. Svi elementi od S manji od t tada jesu u slici od e, a ima ih konačno mnogo (najviše t) i $a = e(0) = \min S$ je među njima, pa postoji najveći takav, označimo ga sa s. Očito je $t = g(s)$, a kako je s u slici od e, recimo $s = e(n)$, imamo $t = e(n+1) \in \mathcal{I}_e$, kontradikcija.

a:!) Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan, i pretpostavimo da postoje dvije enumeracije za S, označimo ih s e i f. Kako je $e \neq f$, zbog dobre uređenosti $\mathbb{N}$ postoji prvi broj i na kojem se

razlikuju: označimo $b := e(i)$ i $c := f(i)$. Tada su b i c različiti prirodni brojevi, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $b < c$. Kako su e i f enumeracije od S, vrijedi $b = e(i) \in \mathcal{I}_e = S = \mathcal{I}_f$, pa postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $b = f(j)$. No $f(j) = b < c = f(i)$ povlači $j < i$ jer je f (pa i f^{-1}) rastuća, ali to je nemoguće jer za sve $j < i$ vrijedi $e(j) = f(j)$ (i je prvo mjesto gdje se e i f razlikuju), pa bismo imali $b = e(i) = f(j) = e(j)$, kontradikciju s činjenicom da je e (kao rastuća funkcija) injekcija.

b:$\Rightarrow$) Neka je S beskonačan i rekurzivan. Trebamo isprogramirati dokaz egzistencije iz (a). Kao i prije, označimo $a := \min S$. Definiramo funkcije

$$g(x) := \mu y(y \in S \wedge x < y),$$
$$e := a \mathbin{\text{PR}} g \circ I_2^2.$$

Funkcija g je parcijalno rekurzivna, jer je dobivena minimizacijom konjunkcije dviju rekurzivnih relacija — i totalna je, jer je S beskonačan: od svakog x postoji veći $y \in S$. Dakle g je rekurzivna funkcija, a tada je e rekurzivna jer je dobivena degeneriranom primitivnom rekurzijom iz nje. Kao i prije (definicije su iste, samo su napisane „izračunljivo"), dobijemo da je e strogo rastuća i slika joj je S.

b:$\Leftarrow$) Neka je e rekurzivna i strogo rastuća, te $S = \mathcal{I}_e$. Prvo, e mora biti injekcija, pa je $S = \mathcal{I}_e \sim \mathcal{D}_e = \mathbb{N}$, odnosno S je beskonačan. Drugo, indukcijom se lako pokaže da za sve n vrijedi $e(n) \geq n$. [Doista, $e(0) \geq 0$, i iz $e(n) \geq n$ slijedi $e(n+1) > e(n) \geq n$, dakle $e(n+1) \geq n+1$.] To znači da je u standardnom uvjetu za pripadnost slici od e,

$$y \in S \iff \exists x\big(y \simeq e(x)\big) \iff \exists x\, \mathcal{G}_e(x, y),$$

moguće ograničiti x sa y. Doista, za bilo koji takav x vrijedi $x \leq e(x) = y$, pa imamo $y \in S \iff (\exists x \leq y)\, \mathcal{G}_e(x, y)$. Dakle, S je dobiven ograničenom kvantifikacijom iz $\mathcal{G}_e$, koji je rekurzivan po teoremu o grafu za totalne funkcije — pa je i sam rekurzivan.

c) Smjer ($\Leftarrow$) vrijedi potpuno jednako kao u (b) — isti dokaz prolazi. Ali smjer ($\Rightarrow$) ne vrijedi: definiramo jednomjesnu Ackermannovu funkciju s $A(x) := A(x, x, x)$. Očito je A^1 rekurzivna i strogo rastuća, ali (manje očito) nije primitivno rekurzivna. To slijedi iz tehničke činjenice $A(x, y, z) \leq A\big(\max(x, y, z) + 3\big)$, pa bismo mogli napisati

$$A(x, y, z) = \big(\mu t \leq A\big(\max(x, y, z) + 3\big)\big)\, \mathcal{G}_{A^3}(x, y, z, t).$$

Graf od A^3 jest primitivno rekurzivan, pa kad bi A^1 bila primitivno rekurzivna, iz te jednakosti bi slijedilo da je A^3 primitivno rekurzivna, kontradikcija.

Sada $S := \mathcal{I}_{A^1}$ jest slika strogo rastuće rekurzivne funkcije, pa je beskonačan (kao u (b:$\Leftarrow$)). No S je i primitivno rekurzivan, jer (opet, kao u (b:$\Leftarrow$)) vrijedi

$$y \in S \iff (\exists x \leq y)\, \mathcal{G}_{A^3}(x, x, x, y),$$

a $\mathcal{G}_{A^3}$ je primitivno rekurzivan. Ali S ne može imati primitivno rekurzivnu enumeraciju jer već ima enumeraciju A^1 koja nije primitivno rekurzivna, a po (a:!), ne može imati nijednu drugu.

G.3.5 Neka je $k \in \mathbb{N}_+$ i R^k rekurzivno prebrojiva. Definiramo Q^k s $Q(\vec{x}, y) :\Leftrightarrow (\forall i < y) R(\vec{x}, i)$. Želimo dokazati da je i Q rekurzivno prebrojiva.
Po projekcijskoj karakterizaciji, postoji rekurzivna relacija P^{k+1} takva da je $R = \exists_* P$. Tada je

$$Q(\vec{x}, y) :\Leftrightarrow (\forall i < y)\, \exists z\, P(\vec{x}, i, z) \Leftrightarrow \exists t\, (\forall i < y)(\exists z < t) P(\vec{x}, i, z).$$

Dokažimo drugu ekvivalenciju (prva vrijedi po definiciji). ($\Rightarrow$) Ako za svaki $i \in [0 \cdot\cdot\, y\rangle$ postoji „dobar" z (označimo ga sa z_i), tada očito postoji i gornja granica za sve njih: $t := 1 + \max_{i=0}^{y} z_i$. Tada je svaki z_i manji od t, pa vrijedi desna strana. ($\Leftarrow$) Ako postoji takav t, očito za svaki $i \in [0 \cdot\cdot\, y\rangle$ postoji „dobar" z (manji od t, ali to nas ovdje ne zanima), pa vrijedi lijeva strana.
Sada je Q^k projekcija relacije Q^{k+1}, koja je zadana s $Q(\vec{x}, y, t) :\Leftrightarrow (\forall i < y)(\exists z < t) P(\vec{x}, i, z)$, i kao takva je rekurzivna, jer je dobivena dvostrukom ograničenom kvantifikacijom (do rekurzivne granice) relacije P. Po projekcijskoj karakterizaciji, Q je rekurzivno prebrojiva.

G.3.7 Pokazat ćemo da ne mora. Znamo da skup K^c nije rekurzivno prebrojiv. Iz toga očito slijedi da je taj skup beskonačan (konačni skupovi su čak primitivno rekurzivni, dakle svakako rekurzivno prebrojivi), odnosno prebrojiv (jer je podskup od $\mathbb{N}$).
Označimo mu elemente redom s $d_0, d_1, \ldots$ (naravno, funkcija $i \mapsto d_i$ nije izračunljiva jer je K^c njena slika, ali svakako *postoji* jer je $\mathbb{N}$ dobro uređen). Za svaki $i \in \mathbb{N}$ stavimo $A_i := \{d_i\}$.
Svaki skup A_i je jednočlan, dakle primitivno rekurzivan, i $i \neq j$ povlači $A_i \neq A_j$, dakle familija $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \big\{\{d\} \;\big|\; d \in K^c\big\}$ je prebrojiva. No $\bigcup \mathcal{A} = K^c$, skup koji nije rekurzivno prebrojiv.

H.2.1 Relacija zadana uvjetom $x > 1 \wedge y > 0$ i nulfunkcija su očito primitivno rekurzivne, pa je dovoljno promotriti prvi slučaj. Označimo $z := f(x, y)$ u tom slučaju. Po definiciji funkcije najveće cijelo vrijedi

$$z \leq \log_x y < z + 1$$

odnosno (djelujući funkcijom $\exp_x$, koja je strogo rastuća zbog $x > 1$) $x^z \leq y < x^{z+1}$. To znači da je $z + 1$ najmanji t takav da vrijedi $x^t > y$. Štoviše, takav t sigurno nije 0, jer je $x^0 = 1 \leq y$, pa z možemo dobiti primjenom funkcije pd na taj najmanji t.
Također je jasno da tu minimizaciju možemo ograničiti: zbog $x > 1$ je $x \geq 2$, pa je $x^y \geq 2^y > y$, odnosno y je sigurno jedan takav t. Drugim riječima, najmanji takav t je sigurno manji ili jednak y, pa je u tom slučaju $f(x, y) = \mathrm{pd}\big((\mu t \leq y)(\mathrm{pow}(x, t) > y)\big)$, što je primitivno rekurzivna funkcija od x i y.

H.3.1 Bio r iz $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{R}$, svejedno je: relacija $K_r \subseteq \mathbb{N}^2$ je uvijek *konačna* (jer očito $x\, K_r\, y$ povlači $x, y \leq r$, pa je K_r podskup kvadrata konačnog skupa $\big[0 \cdot\cdot\, \lfloor r \rfloor\big]$), pa je primitivno rekurzivna.
[Primijetimo da to nije u koliziji s činjenicom da primitivno rekurzivnih funkcija ima prebrojivo mnogo, jer za mnoge r-ove K_r će biti jedna te ista relacija. Čak i za $r \in \mathbb{N}$: recimo, $K_3 = K_2 = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$.]

H.3.2 a) Ako su α i β različiti pozitivni realni brojevi, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\alpha < \beta$. Jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, postoji razlomak $\frac{m}{n}$, skraćen do kraja i s pozitivnim

nazivnikom, takav da vrijedi $\alpha < \frac{m}{n} < \beta$. Kako je $0 < \alpha < \frac{m}{n}$, i $n > 0$, zaključujemo $m > 0$, odnosno m i n su prirodni brojevi. Sada je

$$G_\alpha(n) = \lfloor n\alpha \rfloor \leq n\alpha < n \cdot \frac{m}{n} = m$$

prirodni broj koji je manji od m, dok je

$$G_\beta(n) = \lfloor n\beta \rfloor = \left\lfloor n\left(\frac{m}{n} + \delta\right)\right\rfloor = m + \lfloor n\delta \rfloor \geq m + 0 = m$$

(s δ smo označili razliku $\beta - \frac{m}{n} \in \mathbb{R}_+$). Dakle vrijedi $G_\alpha(n) < m \leq G_\beta(n)$, odnosno postoji bar jedan prirodni broj na kojem se G_α i G_β razlikuju, pa su to različite funkcije.

Drugim riječima, preslikavanje $G : \mathbb{R}_+ \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ zadano s $G(\alpha) := G_\alpha$ je injekcija. To znači da svih funkcija G_α ima neprebrojivo mnogo ($\mathrm{card}(\mathcal{I}_G) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_G) = \mathrm{card}(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{c} > \aleph_0$), pa ne mogu sve biti rekurzivne (svaka rekurzivna funkcija ima indeks, i različite funkcije imaju različite indekse, dakle rekurzivnih funkcija ima najviše koliko ima i indeksa, prebrojivo mnogo). Dakle sigurno postoji $\alpha \in \mathbb{R}_+$ takav da G_α nije rekurzivna.

b) Ne: za svaki $\alpha \in \mathbb{Q}_+$, funkcija G_α je rekurzivna. Konkretno, ako je $\alpha = \frac{m}{n}$ gdje su $m, n \in \mathbb{N}_+$, tada je $G_\alpha(x) = \left\lfloor \frac{mx}{n} \right\rfloor = mx \mathbin{/\!/} n$ primitivno rekurzivna funkcija od x.

I.0.1 Uvjet $\mathcal{D}_{\{e\}} \neq \varnothing$ se može zapisati kao $\exists x \exists n \mathsf{Final}(\langle x \rangle, e, n)$, dakle Σ_1 relacija, a uvjet $\mathcal{D}_{\{e\}} \neq \mathbb{N}$ kao $\exists x' \neg \exists n' \mathsf{Final}(\langle x' \rangle, e, n')$, što je ekvivalentno Σ_2 relaciji $\exists x' \forall n' \neg \mathsf{Final}(\langle x' \rangle, e, n)$. Rascijepljenost je onda presjek jedne Σ_1 i jedne Σ_2 relacije, dakle Σ_2 relacija. Eksplicitno,

$$\text{„}e \text{ je rascijepljen”} \iff \exists t \forall n \big(\mathsf{Final}(\langle t[0] \rangle, e, t[1]) \wedge \neg \mathsf{Final}(\langle t[2] \rangle, e, n)\big).$$

I.0.2 Tvrdnja vrijedi.

$$e \approx_1 f \iff \forall x \big(\exists y\, \exists z \big(T_1(x, e, y) \wedge T_1(x, f, z) \wedge U(y) = U(z)\big) \vee \\ \vee \big(\forall n \neg \mathsf{Final}(\langle x \rangle, e, n) \wedge \forall m \neg \mathsf{Final}(\langle x \rangle, f, m)\big)\big).$$

Kontrakcijom kvantifikatora po y i z dobijemo kvantifikatorski prefiks $\forall\exists$ karakterističan za Π_2 relacije. Kvantifikatori po m i n se mogu izvući sasvim na početak i kontrahirati s kvantifikatorom po x. Ono što ostane nakon $\forall x \forall m \forall n \exists y \exists z$ je primitivno rekurzivna relacija.

I.0.3 Klasična dijagonalizacija: pretpostavimo da postoji, i označimo je s R^2. Definiramo $P(x) :\iff \neg R(x, x)$. Očito je $P \leq R^c \in \Delta_2$, pa je i $P^1 \in \Delta_2$. Kako R prebraja sve takve, postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je za sve x, $P(x) \iff R(x, e)$. Specijalno za $x := e$, dobijemo $R(e, e) \iff P(e) \iff \neg R(e, e)$, što je očito kontradikcija. Dakle, takva relacija ne postoji.

K.1.5 Svima je zajedničko sljedeće: neka su $k, l \in \mathbb{N}_+$, neka su $R_1^k, \ldots, R_l^k$ u parovima disjunktne relacije, te $G_0^k, G_1^k, \ldots, G_l^k$ funkcije, sve iste mjesnosti. Definiramo po slučajevima dvije funkcije $F_1^k := \mathrm{if}\big\{R_1 : G_1, \ldots, R_l : G_l, G_0\big\}$ i $F_2^k := \mathrm{if}\big\{R_1 : G_1, \ldots, R_l : G_l\big\}$. Tada:

ako su svi uvjeti R_i ...	i sve grane G_i su ...	tada je i funkcija ...
primitivno rekurzivni	primitivno rekurzivne	F_1 primitivno rekurzivna
rekurzivni	rekurzivne	F_1 rekurzivna
rekurzivni	parcijalno rekurzivne	F_1 parcijalno rekurzivna
rekurzivni	parcijalno rekurzivne	F_2 parcijalno rekurzivna
rekurzivno prebrojivi	parcijalno rekurzivne	F_2 parcijalno rekurzivna

K.3.6 1. Istina. Očito poprima vrijednost 0 jer K nije čitav $\mathbb{N}$ (recimo $\widetilde{\mathrm{Russell}}(0) = 0$), a poprima i sve sljedbenike (dakle sve ostale prirodne brojeve): za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $t := \overline{C_6}(n)$ indeks konstantne funkcije C_n (koja je totalna pa je svakako $t \in K$), pa je $\widetilde{\mathrm{Russell}}(t) = \mathrm{Russell}(t) = \mathrm{comp}(t,t) + 1 = \{t\}(t) + 1 = C_n(t) + 1 = n + 1$.

2. Laž. $\mathbb{N}\Sigma_\beta^*$ uopće nije brojevna funkcija (niti relacija), pa nikako ne može biti primitivno rekurzivna. Radi se o kodiranju, dakle neformalno izračunljivoj funkciji, dok je primitivna rekurzivnost formalizacija izračunljivosti.

3. Laž. Prema zadatku G.2.12(b), skup Tot svih indeksa jednomjesnih totalnih funkcija nije rekurzivno prebrojiv, a lako je vidjeti da je F^1 totalna ako i samo ako je $Z \circ F$ nulfunkcija. Dakle, Tot je svediv na traženi skup Zer, pomoću prateće funkcije od $F \mapsto Z \circ F$ (konkretno, recimo $\$(1, \mathrm{compose}_1)$, koja je primitivno rekurzivna kao specijalizacija primitivno rekurzivne funkcije), pa niti Zer ne može biti rekurzivno prebrojiv.

L.1.1 Prvo izračunajmo $b = 1 + \max\{4-1, 3-1, 3, 2, 2, 0\} = 4$. Tražene makro-konfiguracije su:

		$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4$	$\mathcal{R}_5$	$\mathcal{R}_6$	$\mathcal{R}_7$	$\mathcal{R}_8$..	PC	AC
	početna konfiguracija	0	8	3	0	0	0	0	0	0	0	0
0.	MMOVE 4 FROM $\mathcal{R}_0$.. TO $\mathcal{R}_4$..	0	0	0	0	0	8	3	0	0	1	0
1.	ARGS $\mathcal{R}_6, \mathcal{R}_6, \mathcal{R}_4$	0	3	3	0	0	8	3	0	0	2	0
2.	$P_{\mathrm{add}^3}{}^*$	6	0	0	0	0	8	3	0	0	3	0
3.	REMOVE $\mathcal{R}_0$ TO $\mathcal{R}_7$	0	0	0	0	0	8	3	6	0	4	0
4.	MMOVE 4 FROM $\mathcal{R}_4$.. TO $\mathcal{R}_0$..	0	8	3	6	0	0	0	0	0	5	0

L.1.2 Neka je $k \in \mathbb{N}_+$, neka je R^{k+1} relacija i H^k funkcija. Za funkciju F^k definiranu s

$$F(\vec{x}) := \mu y\big(y < H(\vec{x}) \to R(\vec{x}, y)\big)$$

kažemo da je dobivena ograničenom minimizacijom relacije R do granice H.
Neka je R rekurzivna, a H primitivno rekurzivna.
Tada je relacija zadana s $P(\vec{x}, y) :\Leftrightarrow y < H(\vec{x})$, svediva na relaciju strogog uređaja ($<$), pa je rekurzivna. Onda je i relacija Q, dobivena kao kondicional iz P i R, rekurzivna — a $F = \mu Q$ je parcijalno rekurzivna.
Također je $\mathcal{D}_F = \exists_* Q = \mathbb{N}^k$, jer za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ postoji $y := H(\vec{x})$ (H je totalna) takav da vrijedi $Q(\vec{x}, y)$ (jer je $P(\vec{x}, y) \Leftrightarrow H(\vec{x}) < H(\vec{x})$ laž). To znači da je F totalna funkcija, pa je rekurzivna, što smo trebali dokazati.

L.1.3 $\mathsf{Code}(x) = \langle x \rangle = 2^{x+1}$, $\mathsf{bis}(x) = \langle x, x \rangle = 2^{x+1} \cdot 3^{x+1} = 6^{x+1}$.

$$P_{\mathsf{Code}^1} = \begin{bmatrix} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 10 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 7 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 3 \\ 7.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 2 \\ 8.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 9.\ \textsc{go to}\ 7 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathsf{bis}} = \begin{bmatrix} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_1 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 12 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 7 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 3 \\ 7.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 2 \\ 8.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 9.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 10.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 11.\ \textsc{go to}\ 7 \end{bmatrix}.$$

L.1.4 Prvo rješenje: uspoređujemo znamenke s početka i s kraja.

$$\mathsf{ndigits}(n, b) := (\mu t \le n)(b^t > n) \qquad \mathsf{digit}(n, b, i) := n \mathbin{/\!/} b^i \bmod b$$
$$\mathsf{Palin}(n, b) \Leftrightarrow b \ge 2 \wedge \big(\forall i < \mathsf{ndigits}(n, b)\big)\big(\mathsf{digit}(n, b, i) = \mathsf{digit}(n, b, \mathsf{ndigits}(n, b) \dot{-} \mathsf{Sc}(i))\big)$$

Drugo rješenje: ekstrahiramo sve znamenke u konačni niz.

$$\mathsf{digits}(b, n) := \begin{cases} \langle\rangle = 1, & n = 0 \\ \mathsf{digits}(b, n \mathbin{/\!/} b) * \langle n \bmod b \rangle, & \text{inače} \end{cases}$$

znači da je digits definirana rekurzijom s potpunom poviješću, jer je $n \mathbin{/\!/} b < n$ za $n > 0$:

$$\mathsf{digits}(b, n) = G\big(b, \overline{\mathsf{digits}}(b, n)\big) \quad \text{za} \quad G(b, p) := \begin{cases} 1, & p = 1 \\ p[\mathsf{lh}(p) \mathbin{/\!/} b] * \langle \mathsf{lh}(p) \bmod b \rangle, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada samo treba reći da je niz znamenaka palindrom (i da je baza legalna).

$$\mathsf{Palin}(s) :\Leftrightarrow s = \overline{\mathsf{rpart}}\big(s, \mathsf{lh}(s)\big) \qquad \mathsf{Palin}(n, b) \Leftrightarrow b \ge 2 \wedge \mathsf{Palin}\big(\mathsf{digits}(b, n)\big)$$

L.1.5 <u>Prvo rješenje:</u> $\ulcorner S \urcorner := \langle \chi_S \rangle$. Naime, ako je S skup prirodnih brojeva, χ_S je niz boolova, i nosač mu je upravo S. Dakle, ako je S konačan, možemo kodirati χ_S kao niz s konačnim nosačem. Efektivno, jer su svi eksponenti 0 ili 1, $\ulcorner S \urcorner = \prod_{i \in S} p_i$.
To preslikavanje je injekcija kao kompozicija dviju injekcija, s primitivno rekurzivnom slikom:

$$\mathsf{Set}(y) \Leftrightarrow (\forall i \le y)\big(\mathsf{ex}(y, i) \in \{0, 1\}\big)$$
$$\mathsf{empty} := \ulcorner \varnothing \urcorner = \langle 0, 0, 0, \ldots \rangle = 1$$
$$\mathsf{Element}(x, s) :\Leftrightarrow \mathsf{Set}(s) \wedge \mathsf{prime}(x) \mid s$$
$$\mathsf{card}(s) := (\# x < s)\, \mathsf{Element}(x, s)$$
$$\mathsf{insert}(s, x) := \begin{cases} s, & \mathsf{Element}(x, s) \\ s \cdot x, & \text{inače} \end{cases}$$

<u>Drugo rješenje:</u> $\ulcorner S \urcorner := \sum_{i \in S} 2^i$. Ovo je čak bijekcija (jer svaki broj ima jedinstveni binarni zapis). $\mathsf{empty} := 0$ (prazna suma). $\mathsf{Element}(x, s) :\Leftrightarrow s \mathbin{/\!/} 2^x \bmod 2 = 1$ (ekstrakcija i-tog bita). card je definirana jednako kao u prvom rješenju, a insert slično, samo umjesto $s \cdot x$ ima $s + 2^x$.

L.1.6 Prvo, $\mathsf{block}(n) = \langle 2^2 \cdot 3^{n+2} \cdot 5^{3n+4}, 2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3^{3n+1} \rangle = \langle \langle 1, n+1, 3n+3 \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 2, 3n \rangle \rangle = \langle \ulcorner \textsc{dec}\ \mathcal{R}_{n+1}, 3n+3 \urcorner, \ulcorner \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \urcorner, \ulcorner \textsc{go to}\ 3n \urcorner \rangle$ — to jest kôd niza od 3 RAM-instrukcije, ali taj niz je RAM-program samo za $n = 0$ (inače odredište početne instrukcije $3n+3$ nije manje ili jednako duljini „programa" 3), i taj program računa I_1.

$$\mathsf{No\ pile}(n) = \ulcorner \begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 3 \\ 1.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 2.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 3.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 6 \\ 4.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 5.\ \textsc{go to}\ 3 \\ \vdots \\ (3n-3).\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_n, 3n \\ (3n-2).\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ (3n-1).\ \textsc{go to}\ 3n-3 \end{bmatrix} \urcorner \text{ je uvijek kôd RAM-programa.}$$

Taj RAM-program je očito generalizacija od $\mathsf{P}_{\mathsf{add}^3}$, odnosno nadodaje sadržaje prvih n ulaznih registara na izlazni registar.

$$\begin{aligned}
&\{\mathsf{block}(0)\}(2,4,1,3) = \mathsf{I}_1(2,4,1,3) = 2 \\
&\{\mathsf{block}(1)\}(2,4,1,3) \text{ nema vrijednost, jer } \mathsf{block}(1) \notin \mathsf{Prog} \\
&\{\mathsf{block}(5)\}(2,4,1,3) \text{ nema vrijednost, jer } \mathsf{block}(5) \notin \mathsf{Prog} \\
&\{\mathsf{pile}(2)\}(2,4,1,3) = 2+4 = 6 \\
&\{\mathsf{pile}(7)\}(2,4,1,3) = 2+4+1+3+0+0+0 = 10 \\
&\{\mathsf{pile}(0)\}(2,4,1,3) = \{\ulcorner[\ ]\urcorner\}(2,4,1,3) = 0
\end{aligned}$$

Iz toga odmah čitamo i funkcije koje ti programi računaju:

$$\begin{aligned}
n \geq k &\Longrightarrow \{\mathsf{pile}(n)\}^k = \mathsf{add}^k, \\
n \in [1 \cdot\cdot k\rangle &\Longrightarrow \{\mathsf{pile}(n)\}^k = \mathsf{I}_1^k + \cdots + \mathsf{I}_n^k, \\
n = 0 &\Longrightarrow \{\mathsf{pile}(n)\}^k = \mathsf{C}_0^k.
\end{aligned}$$

Što se tiče funkcije pile, ona je očito definirana degeneriranom primitivnom rekurzijom

$$\begin{aligned}
\mathsf{pile}(0) &= 1, \\
\mathsf{pile}(n+1) &= \mathsf{pile}(n) * \mathsf{block}(n),
\end{aligned}$$

dakle $\mathsf{pile} = 1 \mathbin{\mathsf{PR}} \mathsf{H}$, gdje je $\mathsf{H}(n,z) := z * \mathsf{block}(n)$.

L.2.1 Neka je Q makro-program. Postupak spljoštenja Q je:
Maknemo prvi makro iz Q, neka je to i. P^*. U Q sve redne brojeve i odredišta veća od i povećamo za $n_{\mathsf{P}} - 1$. Zatim u Q dodamo sve instrukcije iz P, kojima redne brojeve i odredišta povećamo za i. To sve činimo dok god ima makroa u Q.

$$\begin{bmatrix} 0.\ \textsc{zero}\ \mathcal{R}_2 \\ 1.\ \textsc{remove}\ \mathcal{R}_1\ \textsc{to}\ \mathcal{R}_3 \\ 2.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_4 \end{bmatrix}^\flat = \begin{bmatrix} 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 2 \\ 1.\ \textsc{go to}\ 0 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_3, 4 \\ 3.\ \textsc{go to}\ 2 \\ 4.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 7 \\ 5.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_3 \\ 6.\ \textsc{go to}\ 4 \\ 7.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \nu(0,0) = 0 & \nu(0,1) = 1 \\ \nu(0,2) = & \nu(1,0) = 2 \\ \nu(1,1) = 3 & \nu(1,2) = 4 \\ \nu(1,3) = 5 & \nu(1,4) = 6 \\ \nu(1,5) = & \nu(2,0) = 7 \\ & \nu(3,0) = 8 \end{array}$$

L.2.2 Neka je $k \in \mathbb{N}_+$ i G^k totalna funkcija. Za funkciju F^k definiranu s $F(\vec{x}, y) := \prod_{i<y} G(\vec{x}, i)$ kažemo da je dobivena ograničenim množenjem iz funkcije G.
Ako je G rekurzivna funkcija, F se može dobiti primitivnom rekurzijom (točkovno):

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, 0) &= 1 \\ F(\vec{x}, y+1) &= F(\vec{x}, y) \cdot G(\vec{x}, y) \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je i ona rekurzivna. Preciznije, vrijedi $F = C_1^{k-1} \mathbin{\text{PR}} H$ (ili $F = 1 \mathbin{\text{PR}} H$ za $k = 1$) gdje je H rekurzivna jer je dobivena kompozicijom iz rekurzivne G, primitivno rekurzivne mul^2 i koordinatnih projekcija — a skup rekurzivnih funkcija je zatvoren na (degeneriranu) primitivnu rekurziju.

L.2.3 Označimo $F := \mathrm{if}\{P : G, Q : H\}$. Ona je definirana s

$$F(x, y, z) := \begin{cases} G(x, y, z), & P(x, y, z) \\ H(x, y, z), & Q(x, y, z) \end{cases}, \text{ ako je } (x, y, z) \in \mathcal{D}_F := (P \cap \mathcal{D}_G) \cup (Q \cap \mathcal{D}_H).$$

Jer su funkcije G i H parcijalno rekurzivne, imaju indekse: označimo ih redom s g i h. Funkcija zadana s $E(x, y, z) := g \cdot \chi_P(x, y, z) + h \cdot \chi_Q(x, y, z)$ je primitivno rekurzivna (jer je dobivena kompozicijom primitivno rekurzivnih C_g^3, C_h^3, χ_P, χ_Q, add^2 i mul^2), i ima svojstvo da je njena vrijednost jednaka $g \cdot 1 + h \cdot 0 = g$ na P, $g \cdot 0 + h \cdot 1 = h$ na Q (jer su P i Q disjunktne), a $g \cdot 0 + h \cdot 0 = 0$ izvan njih.
Kako je g indeks od G, h indeks od H, a 0 indeks od $\otimes^3$, zaključujemo da je $F(x, y, z) \simeq \mathrm{comp}\big(x, y, z, E(x, y, z)\big)$, pa je F parcijalno rekurzivna kao kompozicija parcijalno rekurzivne comp_3, primitivno rekurzivne E i koordinatnih projekcija.

L.2.4 $\widehat{3}$ je oznaka za brojevnu operaciju koja odgovara konkatenaciji zapisa operanada u pomaknutoj bazi 3. Odnosno, $(v)_3 \mathbin{\widehat{3}} (w)_3 = (vw)_3$, gdje su $v, w \in \{1, 2, 3\}^*$.
To je primitivno rekurzivna operacija jer za $m = (a_1 a_2 \cdots a_r)_3$ i $n = (b_1 b_2 \cdots b_s)_3$:

$$\begin{aligned} m \mathbin{\widehat{3}} n = (a_1 \cdots a_r b_1 \cdots b_s)_3 &= a_1 \cdot 3^{r+s-1} + \cdots + a_r \cdot 3^s + b_1 \cdot 3^{s-1} + \cdots + b_s = \\ &= 3^s \cdot (a_1 \cdot 3^{r-1} + \cdots + a_r) + (b_1 \cdots b_s)_3 = 3^s \cdot (a_1 \cdots a_r)_3 + n = m \cdot 3^{\mathrm{slh}(n,3)} + n, \end{aligned}$$

pa je dobivena kompozicijom iz primitivno rekurzivnih add^2, mul^2, C_3^2, slh i koordinatnih projekcija.

$$100 \mathbin{\widehat{3}} 25 = 100 \cdot 3^3 + 25 = 2725$$

L.2.5

$$\left[\begin{array}{l} 0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 1.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 12 \\ 2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 5 \\ 3.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_3 \\ 4.\ \textsc{go to}\ 2 \\ 5.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_2, 9 \\ 6.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \\ 7.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_3 \\ 8.\ \textsc{go to}\ 5 \\ 9.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_3, 1 \\ 10.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_2 \\ 11.\ \textsc{go to}\ 9 \end{array}\right]$$

L.2.6 Kodiramo nenegativni broj n kao $\langle n, 0\rangle$, a negativni $-m$ kao $\langle 0, m\rangle$ (svaki cijeli broj je razlika dva prirodna, pri čemu je barem jedan operand 0).

$$\begin{aligned} \mathsf{cancel}(a, b) &:= \langle a \dot{-} b, b \dot{-} a\rangle \\ \mathsf{Integer}(c) &:\Longleftrightarrow c = \mathsf{cancel}(c[0], c[1]) \\ \mathsf{abs}(c) &:= c[0] + c[1] \\ \mathsf{from}(n) &:= \langle n, 0\rangle \\ \mathsf{subtract}(c, d) &:= \mathsf{cancel}(c[0] + d[1], c[1] + d[0]) \end{aligned}$$

L.2.7 Kad e ne bi bio u Prog, $\{e\}^1$ bi bila prazna funkcija: dakle $e = \ulcorner P \urcorner$ za neki $P \in \mathcal{P}rog$.
Kad bi P bio prazan program, $\{e\}^1$ bi bila totalna nulfunkcija: dakle $n_P \geq 1$.
Kad bi n_P bio 2 ili veći, e bi bio djeljiv s $p_1 = 3$. Dakle $n_P = 1$, odnosno $P = \left[\ 0.\ I\ \right]$.
I je neka RAM-instrukcija, pa mora biti tipa INC, DEC ili GO TO, i ako ima odredište, ono mora biti 0 ili 1.
No vrijedi i više: ako I nema odredište, ili je ono jednako 1, P-izračunavanje uvijek stane, pa je $\{e\}$ totalna funkcija. Dakle I ima odredište 0.
Također, ako I nema registar, ili je on različit od $\mathcal{R}_1$, P-izračunavanje s x ne ovisi o x, pa je $\{e\}^1$ ili prazna ili totalna funkcija. Dakle I mora imati registar $\mathcal{R}_1$.
Kako I mora imati i registar i odredište, zaključujemo da mora biti tipa DEC.
Dakle, jedino je moguće $e = \ulcorner\left[\ 0.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_1, 0\ \right]\urcorner = \langle\langle 1, 1, 0\rangle\rangle = 2^{181} = 2 \cdot 16^{45} = (20^{45})_{16}$.
To doista jest rješenje, jer P^1 računa (ni praznu ni totalnu) funkciju $Z|_{\mathbb{N}_+}$, a $3 \nmid 2^{181}$.

L.2.8 Svakako postoji, i jednaka je $\varphi = \mathbb{N}^{-1}(\mathbb{N}\varphi)$ — te je Turing-izračunljiva jer je $\mathbb{N}\varphi$ čak primitivno rekurzivna, kao kompozicija takvih funkcija: pd, C_4^1 i operacije $\mathbin{/\!/}$.
Neka je $w \in \Sigma^*$ proizvoljna. Ako je $w = \varepsilon$, tada je $\langle w\rangle = 0$, pa je $\varphi(w) = w$ jer je $\mathbb{N}\varphi(0) = \mathsf{pd}(0) \mathbin{/\!/} 4 = 0$. Inače, $w = v\alpha$, gdje je α posljednji znak u w, i $x := \langle w\rangle = \langle v\alpha\rangle = \langle v\rangle \mathbin{\widehat{4}} \langle\alpha\rangle = \langle v\rangle \cdot 4 + \langle\alpha\rangle$, pa je $\langle\varphi(w)\rangle = \mathbb{N}\varphi(x) = \mathsf{pd}(x) \mathbin{/\!/} 4 = (\langle v\rangle \cdot 4 + \langle\alpha\rangle \dot{-} 1) \mathbin{/\!/} 4$.
Kako je $\alpha \in \Sigma$, vrijedi $\langle\alpha\rangle \in \{1, 2, 3, 4\}$, pa ograničeno oduzimanje možemo zamijeniti običnim, i $z := \langle\alpha\rangle - 1 \in \{0, 1, 2, 3\}$. No tada je $\langle\varphi(w)\rangle = \left\lfloor \frac{\langle v\rangle \cdot 4 + z}{4} \right\rfloor = \langle v\rangle + \left\lfloor \frac{z}{4} \right\rfloor = \langle v\rangle$, iz čega po injektivnosti kodiranja zaključujemo $\varphi(v\alpha) = v$.

Dakle φ briše zadnji znak u riječi, a ε ostavlja na miru. Iz toga vidimo da ne ovisi o $\mathbb{N}\Sigma$. Računa je Turingov stroj $(\{q_0, q_-, q_z\}, \Sigma, \Gamma := \Sigma \uplus \{\sqcup\}, \sqcup, \delta, q_0, q_z)$, gdje je

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \alpha) &:= (q_0, \alpha, 1),\ \alpha \in \Sigma;\\
\delta(q_0, \sqcup) &:= (q_-, \sqcup, -1);\\
\delta(q_-, \beta) &:= (q_z, \sqcup, -1),\ \beta \in \Gamma.
\end{aligned}$$

L.3.1 Neka je $k \in \mathbb{N}_+$ i G^k totalna funkcija. Funkciju F^k zadanu s

$$F(\vec{x}, y) := \langle G(\vec{x}, 0), G(\vec{x}, 1), \ldots, G(\vec{x}, y-1)\rangle$$

zovemo povijest funkcije G i označavamo je s $\overline{G} := F$.
Ako je G rekurzivna, tada je $\overline{G}(\vec{x}, y) = \prod_{i<y} p_i^{1+G(\vec{x},i)}$, dakle $\overline{G}$ je dobivena ograničenim množenjem funkcije dobivene kompozicijom iz rekurzivnih funkcija G, Sc, prime, pow i koordinatnih projekcija, pa je također rekurzivna.
Ako je $\overline{G}$ rekurzivna, tada je $G(\vec{x}, y) = \overline{G}(\vec{x}, y+1)[y]$, dakle G je dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija $\overline{G}$, part, Sc i koordinatnih projekcija, pa je također rekurzivna.

L.3.2 $F_1 = (\{n_\$, n_0, n_1, n_\sqcup, q_x\}, \{0, 1\}, \{\sqcup, 0, 1, \$\}, \sqcup, \delta, n_\$, n_\sqcup)$, gdje je δ zadana tablicom

	$\sqcup$	0	1	\$
$n_\$$	$(n_\sqcup, \$, 1)$	$(n_0, \$, 1)$	$(n_1, \$, 1)$	$(q_x, \$, -1)$
n_0	$(n_\sqcup, 0, 1)$	$(n_0, 0, 1)$	$(n_1, 0, 1)$	$(q_x, \$, -1)$
n_1	$(n_\sqcup, 1, 1)$	$(n_0, 1, 1)$	$(n_1, 1, 1)$	$(q_x, \$, -1)$
q_x	$(q_x, \sqcup, -1)$	$(q_x, 0, -1)$	$(q_x, 1, -1)$	$(q_x, \$, -1)$

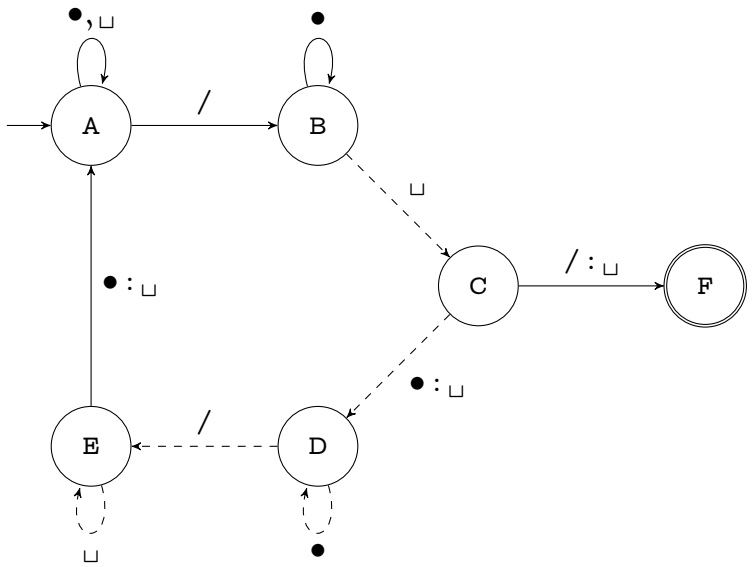
Služi pripremi trake za početak kodiranja ulazne riječi u unarni zapis. Ukratko, označava lijevi rub trake znakom \$ i pomiče čitav ulaz jedno mjesto udesno. Transformira početnu konfiguraciju $(n_\$, 0, w_\sqcup \ldots)$ u $(n_\sqcup, |w|+1, \$w_\sqcup \ldots)$.

L.3.3 Egzistencija: Z je jednomjesna inicijalna funkcija, pa je rekurzivna. Jedan njen indeks je $\langle \text{codeGOTO}(1)\rangle = 2^{73}$, i gladak je jer je 73 dvoznamenkast.
Jedinstvenost: neka je e gladak i $\{e\}^1$ rekurzivna. Za $e \notin \text{Prog}$ je $\{e\}^1 = \otimes^1$, koja nije rekurzivna jer nije totalna, pa postoji RAM-program P takav da je $e = \ulcorner P \urcorner$. Kako RAM-algoritam P^1 računa rekurzivnu funkciju, P-izračunavanje s x mora stati za svaki x. Eksponenti od e su tada sljedbenici kodova instrukcija programa P.
Tvrdnja: P ne sadrži instrukciju INC $\mathcal{R}_0$. Doista, kad bi i-ta instrukcija od P bila INC $\mathcal{R}_0$, eksponent od p_i u e bi bio $1 + \text{codeINC}(0) = 7$, pa ne bi bio višeznamenkast.
Sada se lako (indukcijom po n) dokaže da je $\text{Reg}(x, e, n)$ neparan za sve x i n [$\text{start}(x)$ je neparan, a $\$(i, \text{NextReg})$ čuva neparne brojeve za višeznamenkast $i \in \text{Ins}$], odnosno u $\mathcal{R}_0$ čitavo vrijeme izračunavanja s x stoji 0. Budući da svako takvo izračunavanje mora stati, rezultat mu je $\{e\}(x) = 0$ za sve x, odnosno $\{e\}^1 = Z$.
Primjeri: Jedan primjer je već naveden: Z je rekurzivna pa i parcijalno rekurzivna. Drugi primjer je $\otimes^1$, s glatkim indeksom $\ulcorner[0.\ \text{GO TO } 0]\urcorner = 2^{25}$.

L.3.4 Funkcija f je dobivena kompozicijom iz primitivno rekurzivnih operacija $\mathbin{/\!/}$, $\dot{-}$ i mod, te konstante 8 i identitete, pa je primitivno rekurzivna.
Za svaki $y \in \mathbb{N}$ je $8y \in \mathbb{N}$ i $f(8y) = 8y \mathbin{/\!/} 8 \dot{-} 8x \bmod 8 = y \dot{-} 0 = y$, pa je f surjekcija. Iz toga slijedi da joj je slika $\mathcal{I}_f = \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna (karakteristične funkcije $\chi_{\mathbb{N}} = C_1^1$), i da je $f|_{\mathcal{I}_f} = f^1|_{\mathbb{N}} = f$ primitivno rekurzivna (pa je svakako izračunljiva).

L.3.5 Kodiramo cijele brojeve funkcijom $\mathbb{NZ}(m) := \ulcorner m \urcorner := \begin{cases} \langle m, 0\rangle, & m \geq 0 \\ \langle 0, -m\rangle, & \text{inače} \end{cases}$, a Gaußove brojeve pomoću $\mathbb{NC}_{\mathbb{Z}}(z) := \ulcorner z \urcorner := \ulcorner \Re(z) \urcorner * \ulcorner \Im(z) \urcorner$.
Parcijalno specificirani (lijevi) inverz je zadan s $\mathbb{NC}_{\mathbb{Z}}^{-1}(c) := c[0] - c[1] + (c[2] - c[3])i$, iz čega slijedi da se radi o injekciji. Također su obje te funkcije intuitivno izračunljive, što se vidi iz zapisa u obliku izraza čije vrijednosti se mogu izračunati za svaki ulazni podatak (Gaußov cijeli broj z ili njegov kod c).
Slika je zadana s $\mathrm{Gauss}(c) :\Leftrightarrow \mathrm{Seq}(c) \wedge \mathrm{lh}(c) = 4 \wedge c[0] \cdot c[1] + c[2] \cdot c[3] = 0$ (to karakterizira kodove oblika $\langle p, q, r, s\rangle$ pri čemu je barem jedan od brojeva p i q, kao i barem jedan od brojeva r i s, jednak nuli), što je primitivno rekurzivno kao konjunkcija tri relacije: jedna je primitivno rekurzivna Seq, a druge dvije su dobivene svođenjem na primitivno rekurzivnu jednakost pomoću primitivno rekurzivnih funkcija lh i part, konstanti $C_n^1, n < 5$, identitete i operacija zbrajanja i množenja.
Imaginarna jedinica je realizirana kao broj (kôd) $\ulcorner i \urcorner = \langle 0, 0, 1, 0\rangle = 1050$. Kompleksno konjugiranje je realizirano pratećom funkcijom $\mathrm{conj}(z) := \langle c[0], c[1], c[3], c[2]\rangle$, koja je primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcijâ Code^4, part te već spomenutih konstanti i identitete. Ulaganje prirodnih brojeva je realizirano konstruktorom $\ulcorner n \urcorner := \langle n, 0, 0, 0\rangle$, koji je primitivno rekurzivan kao kompozicija identitete, Code^4 i Z.

L.3.6



M.1.1 Za $k \in \mathbb{N}_+$, za parcijalno rekurzivnu funkciju H^{k+1}, definiramo *dijagonalu* od H kao h-specijalizaciju od H:

$$\partial H(\vec{x}) :\simeq H(\vec{x}, h),$$

gdje je h jedan (fiksni) indeks od H.
Postoji primitivno rekurzivna funkcija D_k koja indeks h za H preslikava u indeks dijagonale ∂H dobivene pomoću h. Konkretno, jer je $\partial H = \$(H, h)$, možemo staviti $D_k(h) := S_k(h, h)$.
Neka je G^{k+1} parcijalno rekurzivna funkcija. Definiramo $H(\vec{x}, f) :\simeq G\big(\vec{x}, D_k(f)\big)$: to je parcijalno rekurzivna funkcija kao kompozicija takvih. Tvrdimo da je njena dijagonala rješenje opće rekurzije s funkcijom G, odnosno da za indeks te dijagonale $e := D_k(h)$ (gdje je h neki indeks za H) vrijedi $\{e\}^k = \$(e, G)$. Doista, za svaki $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ imamo

$$\{e\}(\vec{x}) \simeq \partial H(\vec{x}) \simeq H(\vec{x}, h) \simeq G\big(\vec{x}, D_k(h)\big) \simeq G(\vec{x}, e).$$

M.1.2 Neka su $k, l \in \mathbb{N}_+$, neka su $G_1^k, \ldots, G_l^k$ parcijalno rekurzivne funkcije, te $R_1^k, \ldots, R_l^k$ u parovima disjuntkne rekurzivno prebrojive relacije. Tada je i $F^k := \mathrm{if}(R_1 : G_1, \ldots, R_l : G_l)$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $i \in [1 \cdot\cdot\, l]$ definiramo $H_i := G_i|_{R_i}$ — to su parcijalno rekurzivne funkcije po lemi o restrikciji, pa su njihovi grafovi rekurzivno prebrojivi po teoremu o grafu. Tvrdimo da je $\mathcal{G}_F = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{G}_{H_i}$.
Iz $\mathcal{G}_F(\vec{x}, y)$ slijedi $\mathcal{D}_F(\vec{x})$, pa postoji (jedinstveni, jer su $\mathcal{D}_{H_i}$ disjunktni kao podskupovi disjunktnih R_i) $j \in [1 \cdot\cdot\, l]$ takav da je $\vec{x} \in \mathcal{D}_{H_j} = \mathcal{D}_{G_j} \cap R_j$, i tada je $y = F(\vec{x}) = G_j(\vec{x}) = H_j(\vec{x})$. Dakle $(\vec{x}, y) \in \mathcal{G}_{H_j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{G}_{H_i}$, pa je $\mathcal{G}_F \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{G}_{H_i}$. Za drugu inkluziju, ako je $\mathcal{G}_{H_j}(\vec{x}, y)$ za neki (jedinstveni) j, tada je $\vec{x} \in \mathcal{D}_{H_j} \subseteq R_j$, pa je $F(\vec{x}) \simeq G_j(\vec{x}) = y$, odnosno $\mathcal{G}_F(\vec{x}, y)$.
Iz dokazane jednakosti $\mathcal{G}_F$ je rekurzivno prebrojiv kao unija l rekurzivno prebrojivih (po teoremu o grafu) skupova, pa je po teoremu o grafu (drugi smjer) F parcijalno rekurzivna. □

Teorem se primjenjuje u dokazu Postova teorema: ako su R i R^c rekurzivno prebrojive, tada je $\chi_R = \mathrm{if}(R : C_1^k, R^c : C_0^k)$ parcijalno rekurzivna, pa je R rekurzivna.

M.1.3 Znamenka 1 mora kodirati) kojom završavaju sve formule u osnovnom jeziku, dok ili 4 ili 9 mora kodirati ((ne radi se o završnoj formuli jer ona mora počinjati s ¬∀x∀x', pa drugi i četvrti znak moraju biti jednaki). Kako imamo dvije devetke a tri jedinice, zaključujemo da je $\langle ()\rangle = 4$, i radi se o formuli ι_i za neki i. Kako je već treći znak zagrada, mora biti $i = 0$ (nema mjesta za znakove ' nakon R), a iz ponovljenog dijela u unutarnjim zagradama zaključujemo da formula ima oblik $R_0(\vec{v}) \to R_0(\vec{v})$.
Unutar tog ponovljenog dijela (BAB2AB22) samo su tri različite znamenke, a sigurno se moraju pojavljivati znakovi x, ' i ,, pa zaključujemo da nema drugih. Konkretno, $\vec{v} = (x_0, x_1, x_2)$, pa formula odgovara instrukciji 0. GO TO 0. Iz toga pak slijedi da je PC tijekom izračunavanja uvijek $0 \le |P|$, pa izračunavanje ne stane bez obzira na ulaz $\vec{u}$ i ostale instrukcije.
Mjesnost k ne možemo odrediti sa sigurnošću: znamo da su relevantni registri $\mathcal{R}_0$ (izlazni), $\mathcal{R}_1$ (ulazni) i $\mathcal{R}_2$ (ulazni ili pomoćni). Dakle k može biti 1 ili 2.

M.1.4 Definiramo funkciju G^3 s

$$G(y, x, e) :\simeq \begin{cases} 0, & y = 0 \\ H\big(\mathrm{comp}_2(\mathrm{pd}(y), 2 \cdot x, e), \mathrm{pd}(y), x\big), & \text{inače} \end{cases}$$

— G je definirana grananjem i kompozicijom iz parcijalno rekurzivne comp_2 te primitivno rekurzivnih mul^2, pd, konstanti i koordinatnih projekcija (uvjet je rekurzivan). Dakle G je parcijalno rekurzivna, pa po teoremu rekurzije postoji $e_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $\{e_1\}(y,x) \simeq G(y,x,e_1)$. Pokažimo da $F_1 := \{e_1\}$ zadovoljava zadani sustav.
Za prvu jednadžbu, za sve x je $F_1(0,x) \simeq \{e_1\}(0,x) \simeq G(0,x,e_1) = 0$, pa je $F_1(0,x) = 0$.
Za drugu jednadžbu, za sve x i y je $y+1 > 0$, pa je

$$\begin{aligned} F_1(y+1,x) \simeq \{e_1\}(y+1,x) \simeq G(y+1,x,e_1) \simeq H\big(\mathrm{comp}_2\big(\mathrm{pd}(y+1), 2\cdot x, e_1\big), \mathrm{pd}(y+1), x\big) \simeq \\ \simeq H\big(\mathrm{comp}_2(y, 2x, e_1), y, x\big) \simeq H\big(\{e_1\}(y,2x), y, x\big) \simeq H\big(F_1(y,2x), y, x\big). \end{aligned}$$

Dakle, sustav ima rješenje F_1, i ono je parcijalno rekurzivno (jer ima indeks e_1). Dokažimo da je jedinstveno. Neka je F_2 proizvoljno rješenje sustava (ne zahtijevamo da bude parcijalno rekurzivno). Dokazujemo $\forall y \forall x \big(F_2(y,x) = F_1(y,x)\big)$, matematičkom indukcijom po y.
Baza: za $y = 0$, za proizvoljni x, i $F_1(0,x)$ i $F_2(0,x)$ su 0, jer i F_1 i F_2 zadovoljavaju prvu jednadžbu sustava. Pretpostavimo da je za $y = t$, za sve x, $F_1(t,x) = F_2(t,x)$.
Korak: neka je sad $y = t+1$, i x_0 proizvoljan. Iz toga što F_1 i F_2 zadovoljavaju drugu jednadžbu sustava, i po pretpostavci indukcije za $x := 2x_0$, imamo

$$F_1(t+1,x_0) \simeq H\big(F_1(t,2x_0), t, x_0\big) \simeq H\big(F_2(t,2x_0), t, x_0\big) \simeq F_2(t+1,x_0).$$

Dakle $F_2 = F_1$, odnosno rješenje je jedinstveno.

M.1.5 Definiramo skup T pomoću

$$\begin{aligned} T(a) :\Longleftrightarrow GR(a,1) \Longleftrightarrow 1 \text{ je indeks karakteristične funkcije grafa od } \{a\}^3 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \chi_{\mathcal{G}^4_{\{a\}^3}} = \{1\}^4 = C^4_0 \Longleftrightarrow \mathcal{G}_{\{a\}^3} = \varnothing^4 \Longleftrightarrow \{a\}^3 = \otimes^3. \end{aligned}$$

Prazna funkcija $\otimes^3$ ima indeks (npr. 0), pa je $T \neq \varnothing$. Također, $1 \notin T$, jer je $\{1\}^3 = C^3_0 \neq \otimes^3$, pa je $T \neq \mathbb{N}$. Skup T je i 3-invarijantan: $T \ni e \approx_3 f$ znači $\otimes^3 = \{e\}^3 = \{f\}^3$, pa je i $f \in T$.
Po Riceovu teoremu, T nije rekurzivan. Iz $T(a) \Longleftrightarrow GR(a,1)$ slijedi $\chi_T = \chi_{GR} \circ (I^1_1, C^1_1)$, dakle $T < GR$, pa jer T nije rekurzivan, nije ni GR.
[Alternativno, možemo definirati $S(b) :\Leftrightarrow GR(0,b)$. Tada je S skup svih indeksa od $\chi_{\mathcal{G}^4_{\{0\}^3}} = \chi_{\mathcal{G}^4_{\otimes^3}} = \chi_{\varnothing^4} = C^4_0$, pa po korolaru Riceova teorema $S = \ulcorner\{C^4_0\}\urcorner$ nije rekurzivan, a $S \leq GR$.]
Što se projekcije tiče, označimo $P := \exists_* GR$. Tada imamo (za svaki a)

$$\begin{aligned} P(a) \Longleftrightarrow \exists b\, GR(a,b) \Longleftrightarrow \chi_{\mathcal{G}_{\{a\}^3}} \text{ ima indeks} \Longleftrightarrow \chi_{\mathcal{G}_{\{a\}^3}} \text{ je parcijalno rekurzivna} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \chi_{\mathcal{G}_{\{a\}^3}} \text{ je rekurzivna (jer je totalna)} \Longleftrightarrow \mathcal{G}_{\{a\}^3} \text{ je rekurzivan.} \end{aligned}$$

P je očito neprazan skup: recimo, $0 \in P$ jer je $\mathcal{G}_{\{0\}^3} = \mathcal{G}_{\otimes^3} = \varnothing^4$ konačan pa je rekurzivan. Također, P je 3-invarijantan: ako je $P \ni e \approx_3 f$, tada je graf od $\{e\}^3$ rekurzivan — no $\{f\}^3$ je ista funkcija, pa i ona ima rekurzivan graf, odnosno $f \in P$.
Još je jedino potrebno dokazati $P \neq \mathbb{N}$: parcijalno rekurzivna funkcija $G^3 := Z \circ \mathrm{Russell} \circ I^3_1$ ima graf $K \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{0\} \geq K$, pa (nijedan, zbog invarijantnosti) njen indeks nije u P.
Po Riceovu teoremu, $P = \exists_* GR$ nije rekurzivan skup.

M.1.6 (c)⇒(b) slijedi iz tranzitivnosti svedivosti, jer $K \le \mathit{Halt}_1 \le \mathit{HALT}$ (konkretno, vrijedi $K(x) \Leftrightarrow \mathit{Halt}_1(x,x) \Leftrightarrow \mathit{HALT}(\langle x\rangle, x)$).
(b)⇒(a) slijedi iz propozicije da je svaka relacija svediva na rekurzivno prebrojivu relaciju također rekurzivno prebrojiva, jer je $\mathit{HALT} = \mathcal{D}_{\mathsf{univ}}$ rekurzivno prebrojiva.
(a)⇒(c) je najzanimljivije. Pretpostavimo da je $R = \mathcal{D}_F$ za neku rekurzivno prebrojivu funkciju F. Definiramo parcijalno rekurzivnu funkciju $H(d,\vec{x}) :\simeq F(\vec{x})$, i (čak primitivno) rekurzivnu $G(\vec{x}) := S_1(\vec{x}, h)$ gdje je h neki fiksni indeks za H^{k+1}. Riječima, funkciji F dodamo *dummy* argument na početak, i onda specijaliziramo sve ostale.
To znači da je za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, $G(\vec{x})$ indeks $\vec{x}$-specijalizacije od H, odnosno za sve $d \in \mathbb{N}$ imamo

$$\{G(\vec{x})\}(d) \simeq H(d,\vec{x}) \simeq F(\vec{x}),$$

pa je $d \in \mathcal{D}_{\{G(\vec{x})\}}$ ako i samo ako je $\vec{x} \in \mathcal{D}_F = R$. Specijalno to vrijedi za $d := G(\vec{x})$, pa imamo $R(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathit{Halt}_1\big(G(\vec{x}), G(\vec{x})\big) \Leftrightarrow K\big(G(\vec{x})\big)$. Dakle $\chi_R = \chi_K \circ G$, a G je rekurzivna, pa je $R \le K$.

M.2.1 Funkcija zadana s $\mathsf{Repeat}(\langle w\rangle, n) := \langle w^n\rangle$, je primitivno rekurzivna, jer vrijedi:

$$\mathsf{Repeat}(x,0) = \langle\varepsilon\rangle = 0, \qquad \mathsf{Repeat}(x,n+1) = \mathsf{Repeat}(x,n) \mathbin{\widehat{12}} x,$$

pa je $\mathsf{Repeat} = Z \mathbin{\mathbb{R}} \mathsf{sconcat} \circ (I^3_3, I^3_1, C^3_{12})$. Tada je primitivno rekurzivna i funkcija

$$\mathsf{Numeral}(u) := \langle\overline{u}\rangle = \langle s(s(\cdots o \cdots))\rangle = \mathsf{Repeat}(\langle f(\rangle, u) \mathbin{\widehat{12}} \langle c\rangle \mathbin{\widehat{12}} \mathsf{Repeat}(\langle)\rangle, u),$$

gdje su $\langle f(\rangle = (37)_{12} = 43$, $\langle c\rangle = 2$ i $\langle)\rangle = 8$ konstante, a $\widehat{12}$ je primitivno rekurzivna (asocijativna) operacija kao 12-specijalizacija primitivno rekurzivne funkcije sconcat.
$\mathsf{Pi}(u) := \langle\pi_u\rangle = \langle R_0(o, \overline{u}, o, o, \dots)\rangle = \langle R(c,\rangle \mathbin{\widehat{12}} \mathsf{Numeral}(u) \mathbin{\widehat{12}} \mathsf{Repeat}(\langle,c\rangle, m-2)$, gdje je $m \ge 2$ širina jednog fiksnog RAM-algoritma P^1 za Russell, je primitivno rekurzivna iz istog razloga; kao i $\mathsf{Phi}(u) := \langle\varphi_u\rangle = \langle(\pi_u \to \psi)\rangle = \langle(\rangle \mathbin{\widehat{12}} \mathsf{Pi}(u) \mathbin{\widehat{12}} \langle\to\psi)\rangle$, gdje je $\psi := \big(\overline{\iota_0} \to (\overline{\iota_1} \to (\cdots \zeta \cdots)\big)$ formula koja ne ovisi o u.
Znamo $K(u) \Leftrightarrow (\vDash \varphi_u) \Leftrightarrow \mathsf{Phi}(u) = \langle\varphi_u\rangle \in \langle \mathit{Valid}\rangle$, odnosno $K \overset{\mathsf{Phi}}{\le} \langle \mathit{Valid}\rangle$.

M.2.2 Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}_+$ i označimo $I := \textsc{inc}\ \mathcal{R}_{k+1}$. Funkcija $C_{\ulcorner I \urcorner}$ je primitivno rekurzivna, i $\overline{C_{\ulcorner I \urcorner}}(y)$ je kod RAM-programa $Y := \big[\ t.\ I\ \big]_{t<y}$ sa semantikom $r_{k+1} = 0 \Rightarrow r'_{k+1} = y$. Na Y konkateniramo P', dobiven iz RAM-programa P koda e (ako takav postoji) pomicanjem svih odredišta za y. Tako dobijemo spljoštenje makro-programa $Q := \left[\begin{smallmatrix} 0.\ Y^* \\ 1.\ P^* \end{smallmatrix}\right]$ koji računa $\$(y, \{e\}^{k+1})$.
$H(y,e,t) := e[t] \cdot \big(\langle 1,5,3\rangle\big[e[t][0]\big]\big)^y$ je primitivno rekurzivna funkcija koja pomiče odredište t-te instrukcije od P za y, a instrukcije tipa $\textsc{inc}$ ostavlja na miru. Dakle $S(y,e) := \ulcorner Q^\flat \urcorner = \ulcorner Y \urcorner * \ulcorner P' \urcorner = \overline{C_{\ulcorner I \urcorner}}(y) * \overline{H}\big(y, e, \mathsf{lh}(e)\big)$ za $e \in \mathsf{Prog}$, a inače $S(y,e) := \ulcorner\big[\ 0.\ \textsc{go to}\ 0\ \big]\urcorner$ (indeks prazne funkcije), je primitivno rekurzivna po teoremu o grananju.

M.2.3 Za svaki $k \in \mathbb{N}_+$ je $\{e\}^k = \{e\}^k$ (refleksivnost), $\{e\}^k = \{f\}^k$ povlači $\{f\}^k = \{e\}^k$ (simetričnost), a $\{e\}^k = \{f\}^k = \{g\}^k$ povlači $\{e\}^k = \{g\}^k$ (tranzitivnost).
Prebrojivost slijedi iz refleksivnosti: $e \mapsto (e,e)$ je injekcija s $\mathbb{N}$ u $\approx_k$, a $\approx_k$ ne može biti neprebrojiva jer je podskup prebrojivog $\mathbb{N}^2$.

Za monotonost, dovoljno je dokazati $(\approx_k) \supset (\approx_{k+1})$ (univerzalno po k). Za inkluziju, iz $e \approx_{k+1} f$ slijedi da za sve $(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1}$ vrijedi $\{e\}(\vec{x}, y) \simeq \{f\}(\vec{x}, y)$. Specijalno to vrijedi za $y = 0$, no $\{e\}(\vec{x}, 0) \simeq \{S(e, 0)\}(\vec{x}) \simeq \{e\}(\vec{x})$ jer je $S(e, 0) = e$ (i analogno za f). To znači $\{e\}(\vec{x}) \simeq \{f\}(\vec{x})$, odnosno $e \approx_k f$.
Još treba vidjeti strogost. Označimo $e := \langle \mathsf{codeDEC}(k+1, 0) \rangle$. Funkcija $\{e\}^k$ je prazna (jer je u početnoj konfiguraciji uvijek $r_{k+1} = 0$), pa je $e \approx_k 0$. No $e \not\approx_{k+1} 0$ jer $\{e\}^{k+1}$ nije prazna: recimo, $\{e\}^{k+1}(1, \ldots, 1) = 0$. Dakle $(e, 0) \in (\approx_k) \setminus (\approx_{k+1})$.

M.2.4 Specifikacija: $\mathsf{fst}^1 \circ \mathsf{pair}^2 = I_1^2$, $\mathsf{snd}^1 \circ \mathsf{pair}^2 = I_2^2$
(ili točkovno: za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathsf{fst}\big(\mathsf{pair}(x, y)\big) = x$ i $\mathsf{snd}\big(\mathsf{pair}(x, y)\big) = y$).
Jedna implementacija: $\mathsf{fst} := \mathsf{arg}_1$, $\mathsf{snd} := \mathsf{arg}_2$, $\mathsf{pair} := \mathsf{bin}^2$. Primitivna rekurzivnost slijedi iz primitivne rekurzivnosti (za sve $k \in \mathbb{N}_+$) funkcijâ arg_k i bin^k. Također je (uz oznaku $t := (211\cdots1211\cdots12)_2$, gdje ima x jedinica u prvom bloku, a y u drugom) $\mathsf{pos2}(t, 0) = 0$, $\mathsf{pos2}(t, 1) = x + 1$, a $\mathsf{pos2}(t, 2) = x + y + 2$, pa je
$\mathsf{arg}_1\big(\mathsf{bin}(x, y)\big) = \mathsf{arg}_1(\langle \bullet^x / \bullet^y \rangle) = \mathsf{streak1}(t, 0) = x + 1 \dot{-} \mathsf{Sc}(0) = x$ i
$\mathsf{arg}_2\big(\mathsf{bin}(x, y)\big) = \mathsf{streak1}(t, 1) = x + y + 2 \dot{-} \mathsf{Sc}(x + 1) = y$.
Injektivnost: ako je $\mathsf{bin}(a, b) = \mathsf{bin}(c, d) =: p$, tada $a = \mathsf{arg}_1(p) = c$ i $b = \mathsf{arg}_2(p) = d$.
Primitivna rekurzivnost slike: $\mathcal{I}_{\mathsf{bin}^2}(p) \Leftrightarrow p = \mathsf{bin}\big(\mathsf{arg}_1(p), \mathsf{arg}_2(p)\big)$ $(\mathcal{I}_{\mathsf{bin}^2} \preceq (=))$.

M.2.5 Označimo traženu formulu s φ. Sve formule završavaju zatvorenom zagradom, pa je $\langle) \rangle = (\mathtt{A})_{12} = 10$. U kodu ima 3 znamenke $\mathtt{A}$ i 3 znamenke 8 (i nikoje više), pa mora biti $\langle (\rangle = 8$. Sada vidimo da je φ oblika $(\varphi_1 \to \varphi_2)$, odnosno opisuje izvršavanje neke instrukcije RAM-programa. Dakle $1 = \langle \mathtt{R} \rangle$ a $2 = \langle \mathtt{'} \rangle$, pa je $6 = \langle \mathtt{\to} \rangle$, $\varphi_1 = R_2(\vec{t})$ a $\varphi_2 = R_1(\vec{t})$, gdje je $\langle \vec{t} \rangle = (\mathtt{B392})_{12}$. Uvijek je $m \geq 2$, a $m \geq 3$ bi značilo (dva zareza i još tri neprazne riječi između) duljinu od $\langle \vec{t} \rangle$ barem 5, pa je $m = 2$. $\vec{t}$ završava znakom $\mathtt{'}$, pa mora biti $9 = \langle x \rangle$ (u signaturi ne postoji ni c_1 ni f_1), a onda je $3 = \langle , \rangle$. Dakle prvi znak u $\vec{t}$ je term sam za sebe, a nije x jer je $11 \neq 9$, pa mora biti c.
Sve u svemu, $\varphi = \big(R_2(o, y) \to R_1(o, y)\big) = \iota_2^0$. Sada možemo odrediti i formulu $\iota_2^+ = \big(R_2(s(x), y) \to R_3(x, y)\big)$, ali ne i njen kod — jer nam za njega treba $\langle s \rangle = \langle f \rangle \in \{4, 5, 7, 12\}$, a ne znamo koji je od te četiri mogućnosti.
Također, znamo da je jedna od instrukcijâ programa P jednaka $2.\ \textsc{dec}\ \mathcal{R}_0, 1$, dakle $\mathcal{R}_0$ je relevantan za P, ali ne znamo je li $\mathcal{R}_1$ relevantan za P (u drugim instrukcijama) ili je u formulama samo jer je ulazni. Dakle, $m_P \in \{1, 2\}$, ali ne znamo koja je.

M.2.6 Iz oblika domene zaključujemo da se radi o jednomjesnoj funkciji $\{t\}^1$.
Relacija zadana s $R(x, e) :\Leftrightarrow K(x) \vee x = e$ je rekurzivno prebrojiva kao unija dvije takve (druga je čak primitivno rekurzivna), pa je domena neke parcijalno rekurzivne funkcije G. Po teoremu rekurzije postoji $t \in \mathbb{N}$ takav da je $\{t\}(x) \simeq G(x, t)$.
Lijeva strana ima vrijednost za $x \in \mathcal{D}_{\{t\}}$, a desna za $R(x, t)$, odnosno $x \in K \vee x \in \{t\}$.
Po ekstenzionalnosti, $\mathcal{D}_{\{t\}} = K \cup \{t\}$.
Specijalno, za $x := t$ imamo $\{t\}(t) \simeq G(t, t)$, odnosno $\mathsf{Russell}(t) \simeq \mathsf{Sc}\big(G(t, t)\big)$.
No sada desna strana sigurno ima vrijednost (jer je Sc totalna a $(t, t) \in (=) \subseteq R = \mathcal{D}_G$), pa mora imati i lijeva. Drugim riječima, $t \in \mathcal{D}_{\mathsf{Russell}} = K$, pa je $K \cup \{t\} = K$.

M.2.7 $P := [0.\ \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0]$ računa C_1 te je $\ulcorner P \urcorner = \langle \ulcorner \textsc{inc}\ \mathcal{R}_0 \urcorner \rangle = \langle 6 \rangle = 2^{6+1} = 128 = 123 + 5$.
Zato definiramo $T(b) :\Leftrightarrow R(123, b) \Leftrightarrow \mathcal{I}_{\{b\}^3} = \mathcal{I}_{\{128\}^2} = \mathcal{I}_{C_1^2} = \{1\} \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{I}_{\{b\}^3} = \{1\}$.
Iz $\chi_T = \chi_R \circ (C_{123}^1, I_1^1)$ slijedi $T \leq R$. Dakle, kad bi R bila rekurzivna, bila bi i T.
No T je 3-invarijantna: iz $T \ni e \approx_3 f$ slijedi $\{1\} = \mathcal{I}_{\{e\}^3} = \mathcal{I}_{\{f\}^3}$, pa je $f \in T$.
Također, $T \neq \varnothing$ jer je $128 \in T$ (jer je $\mathcal{I}_{\{128\}^3} = \mathcal{I}_{C_1^3} = \{1\}$) i $T \neq \mathbb{N}$ jer $0 \notin T$ (jer je $\mathcal{I}_{\{0\}^3} = \mathcal{I}_{\otimes^3} = \varnothing \neq \{1\}$). No, po Riceovu teoremu to je nemoguće, pa R ne može biti rekurzivna.

M.2.8 Tvrdnje (a) i (b) ne vrijede, a tvrdnja (c) vrijedi.

a) Relacija $R^2 := \{0\} \times K^c \cup \mathbb{N}_+ \times \{0\}$ nije rekurzivno prebrojiva jer je $K^c \leq R$ — konkretno, $R(0, t) \Leftrightarrow t \notin K$ za sve t, pa je $\chi_{K^c} = \chi_R \circ (Z, I_1^1)$.

   Neka je g proizvoljni selektor za R. $\exists_* R = \mathbb{N}$ jer je očito $K^c \neq \varnothing$, pa g mora biti totalna. Za svaki $x > 0$ mora biti $\big(x, g(x)\big) \in \mathcal{G}_g \subseteq R$, odnosno $g(x) = 0$.
   Dakle g je dobivena editiranjem Z u nuli, pa je (čak primitivno) rekurzivna.

b) Također ne vrijedi, jer R iz (a) ima Z kao selektor (zbog $0 \in K^c$).

c) Neka je g jedini selektor za R. Tada vrijedi $\mathcal{G}_g \subseteq R$; dokažimo drugu inkluziju. Neka je $(\vec{c}, d) \in R$ proizvoljan. Tada je g', dobivena editiranjem g tako da $\vec{c}$ preslika u d, također (rekurzivni) selektor za R. Zbog jedinstvenosti mora biti $g' = g$, odnosno $d = g'(\vec{c}) = g(\vec{c})$. No to upravo znači $\mathcal{G}_g(\vec{c}, d)$.

   Dakle, $R = \mathcal{G}_g$ je čak rekurzivna (po teoremu o grafu za totalne funkcije), pa je svakako rekurzivno prebrojiva.