

Dobro uređeni skupovi

Definicija 1 Za parcijalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je **dobro uređen** ako svaki njegov neprazni podskup sadrži najmanji element.

Uočite da je tu važno da smo prilikom definicije parcijalno uređenog skupa zahtijevali irefleksivnost relacije. Uočite da je svaki dobro uređen skup ujedno i linearno uređen.

Primjer 1 *Primjeri dobro uređenih skupova: svaki konačan koji je linearno uređen; \mathbb{N} s prirodnim uređajem.*

Skupovi \mathbb{Q} , \mathbb{Z} i \mathbb{R} s prirodnim uređajem nisu dobro uređeni skupovi.

Zadatak. Definirajte uređaje na skupovima \mathbb{Z} i \mathbb{Q} tako da to budu dobri uređaji.

Sada nizom lema i korolara navodimo svojstva dobro uređenih skupova.

Lema 1 *Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup, te $f : A \rightarrow A$ injekcija koja čuva uređaj. Tada za sve $x \in A$ vrijedi $x \leq f(x)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $a \in A$ takav da vrijedi $f(a) < a$. Tada je skup $C = \{x \in A : f(x) < x\}$ neprazan. Neka je $a_0 \in C$ najmanji element skupa C . Iz definicije skupa C slijedi $f(a_0) < a_0$. Pošto funkcija f čuva uređaj i injekcija je tada vrijedi $f(f(a_0)) < f(a_0)$. Iz definicije skupa C slijedi $f(a_0) \in C$. Time dobivamo kontradikciju (a_0 najmanji element skupa C , a po drugoj strani $f(a_0) < a_0$ i $f(a_0) \in C$). Q.E.D.

Važno je naglasiti da smo prethodni dokaz proveli promatrajući "prvu iznimku", odnosno primijenili smo indukciju na dobro uređenom skupu.

Korolar 1 *Dobro uređen skup ne može biti sličan svom početnom komadu.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i $x_0 \in A$ proizvoljan. Ako je $p_A(x_0) = \emptyset$ tada je očito da skup A i taj početni komad nisu slični.

Neka je $p_A(x_0) \neq \emptyset$, te pretpostavimo da je $f : A \rightarrow p_A(x_0)$ sličnost. Iz prethodne leme 1 slijedi da je $x_0 \leq f(x_0)$. To je nemoguće jer je $f(x_0) \in p_A(x_0)$, a onda bi imali $f(x_0) < x_0$. Q.E.D.

Korolar 2 *Početni komadi dobro uređenog skupa nisu slični.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i $x_1, x_2 \in A$ različiti. Radi određenosti neka je $x_1 < x_2$. Tada je $p_A(x_1) \subseteq p_A(x_2)$. Pošto je $p_A(x_2)$ dobro uređen skup, te vrijedi $p_A(x_1) = p_{p_A(x_2)}(x_1)$, tražena tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara. Q.E.D.

Napominjemo da tvrdnja prethodnog korolara općenito ne vrijedi za linearno uređene skupove. Npr. $\langle -\infty, 0 \rangle \simeq \langle -\infty, 1 \rangle$.

Korolar 3 *Dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu nekog svog početnog komada.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ neprazan dobro uređen skup, $x_0 \in A$ i $B \subseteq p_A(x_0)$. Ako je $B = \emptyset$ tada tvrdnja korolara očito vrijedi. Promotrimo sada slučaj kada je $B \neq \emptyset$. Ako bi $f : A \rightarrow B$ bila sličnost tada iz leme 1 slijedi $x_0 \leq f(x_0)$. To je nemoguće jer za sve $y \in B$ vrijedi $y < x_0$. Q.E.D.

Želimo napomenuti da dobro uređen skup može biti sličan nekom svom podskupu. Npr. $\mathbb{N} \simeq 2\mathbb{N}$.

Korolar 4 *Sličnost između dobro uređenih skupova je jedinstvena.*

Dokaz. Neka su $(A, <)$ i $(B, <)$ slični dobro uređeni skupovi. Neka su $f : A \rightarrow B$ i $g : A \rightarrow B$ dvije sličnosti. Neka je $a \in A$ proizvoljan. Očito vrijedi $p_A(a) \simeq p_B(f(a))$ i $p_A(a) \simeq p_B(g(a))$, a onda $p_B(f(a)) \simeq p_B(g(a))$. Iz korolara 2 slijedi $f(a) = g(a)$. Q.E.D.

Sada izričemo princip transfinitne indukcije koji je jedno od najmoćnijih sredstava za dokazivanje u teoriji skupova.

Princip transfinitne indukcije:

Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup i $B \subseteq A$ koji ima sljedeće svojstvo:

$$(\forall x \in A)(p_A(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B) \quad (*)$$

Tada je $B = A$.

Primijetimo da je za svaki neprazan dobro uređen skup A podskup B , koji ima svojstvo $(*)$, nužno sadrži najmanji element skupa A (ako je a_0 najmanji element skupa A tada je $\emptyset = p_B(a_0) \subseteq B$).

Zaključivanje po principu transfinitne indukcije općenito ne važi za linearno uređene skupove. Npr. uzmemo li $A = \mathbf{Z}$, a $B = 2\mathbf{Z}$, tada je lako vidjeti da je ispunjen uvjet $(*)$. No, $\mathbf{Z} \neq 2\mathbf{Z}$.

Sljedeći teorem govori da princip transfinitne indukcije karakterizira dobro uređene skupove.

Teorem 1 *Neka je $(A, <)$ linearno uređen skup. Skup A ima najmanji element i za A vrijedi princip transfinitne indukcije ako i samo ako A je dobro uređen.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je A dobro uređen skup. Neka je $B \subseteq A$ takav da za sve $x \in A$ vrijedi da $p_A(x) \subseteq B$ povlači $x \in B$, ali $B \neq A$. Neka je a_0 najmanji element skupa $A \setminus B$. Ako je $y \in p_A(a_0)$ tada je očito $y \in B$, pa time imamo da vrijedi $p_A(a_0) \subseteq B$. Sada iz pretpostavljenog svojstva skupa B slijedi $a_0 \in B$, što je kontradikcija s činjenicom $a_0 \in A \setminus B$.

Pretpostavimo sada da je A linearno uređen skup koji ima najmanji element i za koji važi princip transfinitne indukcije. Pretpostavimo još da A nije dobro uređen skup. Neka je B neprazni podskup od A koji nema najmanji element. Definiramo skup C sa $C = \{x \in A : x < B\}$. Primijetimo prvo da $C \neq \emptyset$ jer najmanji element skupa A pripada skupu C . Pretpostavimo da je $z \in A$ takav da je $p_A(z) \subseteq C$. Tada je $p_A(z) < B$, a pošto po pretpostavci skup B ne sadrži najmanji element, tada $z \notin B$. Sada očito $z < B$, tj. $z \in C$. No, pretpostavili smo da za skup A vrijedi princip transfinitne indukcije, pa je $C = A$. Tako smo dobili $B \subseteq A = C$ i $C < B$, što je nemoguće. Q.E.D.

Sljedeći teorem govori o usporedivosti dobro uređenih skupova.

Teorem 2 *Neka su $(A, <)$ i $(B, <)$ dobro uređeni skupovi. Tada vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

- a) $A \simeq B$
- b) *postoji jedinstveni $a \in A$ takav da vrijedi $p_A(a) \simeq B$*
- c) *postoji jedinstveni $b \in B$ takav da vrijedi $A \simeq p_B(b)$*

Dokaz. Ako je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$ tada tvrdnja teorema očito vrijedi. Promatramo slučaj kada je $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$. Neka je

$$A' = \{a \in A : \text{postoji } b \in B \text{ takav da } p_A(a) \simeq p_B(b)\}$$

$$B' = \{b \in B : \text{postoji } a \in A \text{ takav da } p_A(a) \simeq p_B(b)\}$$

Primijetimo prvo da su to neprazni skupovi, jer označimo li sa a_0 najmanji element skupa A , odnosno sa b_0 najmanji element od B , tada imamo $p_A(a_0) = \emptyset = p_B(b_0)$.

Očito su to dobro uređeni skupovi, te vrijedi $A' \simeq B'$.

Neka je $a' \in A'$ proizvoljan. Tada iz definicije skupa A' slijedi da postoji $b \in B$ i $f : p_A(a') \rightarrow p_B(b)$ sličnost. Ako je $a \in A$ takav da je $a < a'$ tada je očito $p_A(a) \simeq p_B(f(a))$, pa je $a \in A'$. Iz toga slijedi da je $A' = A$ ili postoji $a \in A$ takav da je $A' = p_A(a)$ (ako je $A \neq A'$ tada uzemo a najmanji element skupa $A \setminus A'$). Analogno zaključujemo za skup B' . Iz toga slijedi da su moguća sljedeća četiri slučaja:

- a) $A' = A$ i $B' = B$
- b) $A' = A$ i postoji $b \in B$ takav da $B' = p_B(b)$
- c) postoji $a \in A$ takav da $A' = p_A(a)$ i $B' = B$
- d) postoji $a \in A$ takav da $A' = p_A(a)$ i postoji $b \in B$ takav da $B' = p_B(b)$

No, slučaj d) je nemoguć, jer iz $A' \simeq B'$, te $A' = p_A(a)$ i $B' = p_B(b)$ slijedi da je $a \in A'$ ($= p_A(a)$), što je nemoguće. Q.E.D.

Definicija 2 Kažemo da je parcijalno uređen skup $(A, <)$ dobro utemeljen ili fundiran ako ne postoji niz $(x_n) \subseteq A$ tako da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $x_{n+1} < x_n$.

Očito je svaki dobro uređen skup i dobro utemeljen. No, obrat ne vrijedi. Npr. svaki dvočlani skup čiji elementi nisu usporedivi je dobro utemeljen, ali nije dobro uređen.

Aksiom dobre utemeljenosti

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Ovaj aksiom tvrdi da ne postoji skup x za koji bi postajao beskonačni niz skupova (x_n) tako da vrijedi:

$$\dots \in x_2 \in x_1 \in x.$$

Zapravo, govori da je svaki skup dobro utemeljen u odnosu na relaciju \in .

Neposredna posljedica tog aksioma je da u ZF ne postoji skup x za kojeg bi vrijedilo $x \in x$.

Spomenuti teoriju neutemeljenih skupova.

P. Aczel, Non-well founded sets

B. Čulina, Teorija neutemeljenih skupova, magistarski rad